Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика
Лекции

Москва, 2015 г.

1 Предельные теоремы теории вероятностей

1.1 Неравенства Чебышева

Теорема 1.1 (*первое неравенство господина Чебышева*)**.**

$$\left.\begin{array}{l} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{array}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \tag{1}$$

- X — случайная величина;
- $\mathsf{P}\{X \leq 0\} = 0$ так как $X \geq 0$.

Доказательство. Для непрерывной случайное величины X и зная, что при $X \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ x < 0$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\, f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

учитывая $x \geq \varepsilon$

$$\underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\, f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geq \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx$$

где

$$\varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

$\square$

Теорема 1.2 (*второе неравенство лорда Чебышева*)**.**

$$\exists MX, \exists DX \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\left\{|X - MX| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

- X — случайная величина.