Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика
Лекции

Москва, 2015 г.

1 Предельные теоремы теории вероятностей

1.1 Неравенства Чебышева

Теорема 1.1 (*первое неравенство господина Чебышева*).

$$\left.\begin{matrix} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \tag{1}$$

- X — случайная величина;
- $\mathsf{P}\{X \leq 0\} = 0$ так как $X \geq 0$.

Доказательство. Для непрерывной случайное величины X и зная, что при $X \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ x < 0$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\,f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$$

учитывая $x \geq \varepsilon$

$$\underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\,f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\,f(x)\,dx \geq \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx$$

где

$$\varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \ \Rightarrow\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

Теорема 1.2 (*второе неравенство лорда Чебышева*).

$$\exists MX, \exists DX \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

- X — случайная величина.

Доказательство. Выпишем дисперсию

$$DX = M\big[(X - MX)^2\big]$$

Рассмотрим случайную величину $Y = (X - MX)^2$, где $Y \geq 0$. Тогда из *первого неравенства Чебышева* следует, что $\forall \delta \geq 0,\ MY \geq \delta\,\mathsf{P}\{Y \geq \delta\}$, где получается, что $\delta = \varepsilon^2$.

$$\Big[DX = M\big[(X - MX)^2\big]\Big] \geq \Big[\varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\big\} = \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\}\Big]$$

таким образом

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \ \Rightarrow\ \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

□