Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика
Лекции

Москва, 2015 г.

1 Предельные теоремы теории вероятностей

1.1 Неравенства Чебышева

Теорема 1.1 (*первое неравенство господина Чебышева*).

$$\left.\begin{aligned} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \tag{1}$$

- X — случайная величина;
- $\mathsf{P}\{X \leq 0\} = 0$ так как $X \geq 0$.

Доказательство. Для непрерывной случайное величины X

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx =$$

так как $X \geq 0,\ f(x) = 0,\ x < 0$

$$= \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\, f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} a\, f(x)\, dx \geq$$

так как $a \geq \varepsilon$

$$\geq ... = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \ \Rightarrow\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \geq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

Теорема 1.2 (*второе неравенство лорда Чебышева*).

$$\exists MX, \exists DX \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\left\{|X - MX| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

- X — случайная величина.