

Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана



Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

## **Математическая статистика**

### **Лекции**

Москва, 2015 г.

# 1 Пределные теоремы теории вероятностей

## 1.1 Неравенства Чебышева

**Теорема 1.1** (*первое неравенство господина Чебышева*).

$$\left. \begin{array}{l} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \quad (1)$$

- $X$  — случайная величина;
- $P\{X \leq 0\} = 0$  так как  $X \geq 0$ .

*Доказательство.* Для непрерывной случайной величины  $X$  и зная, что при  $X \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0, x < 0$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} x f(x) dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx$$

учитывая  $x \geq \varepsilon$

$$\underbrace{\int_0^{\varepsilon} x f(x) dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx$$

где

$$\varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

**Теорема 1.2** (*второе неравенство лорда Чебышева*).

$$\exists MX, \exists DX \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

- $X$  — случайная величина.

*Доказательство.* Выпишем дисперсию

$$DX = M[(X - MX)^2]$$

Рассмотрим случайную величину  $Y = (X - MX)^2$ , где  $Y \geq 0$ . Тогда из *первого неравенства Чебышева* следует, что  $\forall \delta \geq 0, MY \geq \delta P\{Y \geq \delta\}$ , где получается, что  $\delta = \varepsilon^2$ .

$$\left[ DX = M[(X - MX)^2] \right] \geq \left[ \varepsilon^2 \cdot P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 \cdot P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \right]$$

таким образом

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

□

**Пример 1.1.** Предельно допустимое давление в пневмосистеме ракеты равна 200 (Па). После проверки большого количество ракет было получено среднее значение давления 150 (Па). Оценить вероятность того, что давление в пневмосистеме очередной ракеты будет больше 200 (Па), если по результатам проверки ракет было получено среднеквадратичное отклонение 5 (Па).

**Решение.** Имеем следующее:

- случайная величина  $X$  — давление в пневмосистеме;
- $X \geq 0$ ;
- $MX = 150$  (Па);
- $DX = 25$  (Па);

Решим поставленную задачу с помощью *первого неравенства Чебышева*

$$\left[ P\{X \geq \varepsilon\} = P\{X \geq 200\} \right] \leq \left[ \frac{MX}{\varepsilon} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0.75 \right]$$

$$P\{X \geq 200\} \leq 0.75$$

Поскольку нам известна дисперсия почему бы не воспользоваться *вторым неравенством Чебышева*? Действуем. Для начало рассмотрим вероятность следующего события

$$P\{X \geq \varepsilon\} = P\{X \geq 200\} = P\{X - \underbrace{150}_{MX} \geq \underbrace{50}_{\varepsilon}\}$$

Остаётся построить вероятность, которая будет удовлетворять форме *второго неравенства Чебышева* (т.е. сделать модуль).

$$P\{X - 150 \geq 50\} \leq P\{X - 150 \geq 50\} + P\{X - 150 \leq -50\}$$

Так как *события*  $\{X - 150 \geq 50\}$  и  $\{X - 150 \leq -50\}$  *несовместные*, то по *формуле сложения вероятностей несовместных событий* получаем

$$P\{X - 150 \geq 50\} + P\{X - 150 \leq -50\} =$$

$$= P\{\{X - 150 \geq 50\} + \{X - 150 \leq -50\}\} = P\{|X - 150| \geq 50\}$$

Таким образом применяем *второе неравенство Чебышева*

$$\left[ P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} = P\{|X - 150| \geq 50\} \right] \leq \left[ \frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{25}{50^2} = \left( \frac{5}{50} \right)^2 = 0.01 \right]$$

$$P\{|X - 150| \geq 50\} \leq 0.01$$

**Ответ:**

- с использованием *первого неравенства Чебышева*  $P \leq 0.75$ ;
- с использованием *второго неравенства Чебышева*  $P \leq 0.01$ .

**Замечание.** *Второе неравенство Чебышева* даёт более точную оценку, так как используется информация о дисперсии случайной величины.

**Замечание.** Использование *первого неравенства Чебышева* при  $\varepsilon < MX$  и *второго неравенства Чебышева* при  $\varepsilon < \sqrt{DX}$  даёт тривиальную оценку:  $P \leq 1$ .

## 1.2 Сходимость последовательности случайных величин

Будем считать, что  $X_1, \dots, X_n, \dots$  — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве.

**Определение 1.1.** Последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  *сходится по вероятности* к случайной величине  $Z$ , если  $\forall \varepsilon > 0, \mathbf{P}\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Обозначение:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbf{P}} Z$$

**Определение 1.2.** Последовательность случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  *слабо сходится* к случайной величине  $Z$ , если  $\forall x \in \mathfrak{R}$  где  $F_Z$  непрерывна в точке  $x$ , числовая последовательность  $F_{X_1}(x), \dots, F_{X_n}(x), \dots$  сходится к  $F_Z(x)$ . Обозначение:

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_Z(x)$$

**Замечание.** Данные виды сходимости *неэквивалентны*.