

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана



Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика

Лекции

Москва, 2015 г.

1 Пределные теоремы теории вероятностей

1.1 Неравенства Чебышева

Теорема 1.1 (*первое неравенство господина Чебышева*).

$$\left. \begin{array}{l} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{array} \right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \quad (1)$$

- X — случайная величина;
- $P\{X \leq 0\} = 0$ так как $X \geq 0$.

Доказательство. Для непрерывной случайной величины X и зная, что при $X \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0, x < 0$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \underbrace{\int_0^{\varepsilon} x f(x) dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx$$

учитывая $x \geq \varepsilon$

$$\underbrace{\int_0^{\varepsilon} x f(x) dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x f(x) dx \geq \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx$$

где

$$\varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx = \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot P\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

Теорема 1.2 (*второе неравенство лорда Чебышева*).

$$\exists MX, \exists DX \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

- X — случайная величина.

Доказательство. Выпишем дисперсию

$$DX = M[(X - MX)^2]$$

Рассмотрим случайную величину $Y = (X - MX)^2$, где $Y \geq 0$. Тогда из *первого неравенства Чебышева* следует, что $\forall \delta \geq 0, MY \geq \delta P\{Y \geq \delta\}$, где получается, что $\delta = \varepsilon^2$.

$$\left[DX = M[(X - MX)^2] \right] \geq \left[\varepsilon^2 \cdot P\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\} = \varepsilon^2 \cdot P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \right]$$

таким образом

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \Rightarrow P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

□

Пример 1.1. Предельно допустимое давление в пневмосистеме ракеты равна 200 (Па). После проверки большого количества ракет было получено среднее значение давления 150 (Па). Оценить вероятность того, что давление в пневмосистеме очередной ракеты будет больше 200 (Па), если по результатам проверки ракет было получено среднеквадратичное отклонение 5 (Па).

Решение. Имеем следующее:

- случайная величина X — давление в пневмосистеме;
- $X \geq 0$;
- $MX = 150$ (Па);
- $DX = 25$ (Па);

Решим поставленную задачу с помощью *первого неравенства Чебышева*

$$\left[P\{X \geq \varepsilon\} = P\{X \geq 200\} \right] \leq \left[\frac{MX}{\varepsilon} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0.75 \right]$$

$$P\{X \geq 200\} \leq 0.75$$

Поскольку нам известна дисперсия почему бы не воспользоваться *вторым неравенством Чебышева*? Действуем. Для начала рассмотрим вероятность следующего события

$$P\{X \geq \varepsilon\} = P\{X \geq 200\} = P\{X - \underbrace{150}_{MX} \geq \underbrace{50}_{\varepsilon}\}$$

Остаётся построить вероятность, которая будет удовлетворять форме *второго неравенства Чебышева* (т.е. сделать модуль).

$$P\{X - 150 \geq 50\} \leq P\{X - 150 \geq 50\} + P\{X - 150 \leq -50\}$$

Так как *события* $\{X - 150 \geq 50\}$ и $\{X - 150 \leq -50\}$ *несовместные*, то по *формуле сложения вероятностей несовместных событий* получаем

$$P\{X - 150 \geq 50\} + P\{X - 150 \leq -50\} =$$

$$= P\{\{X - 150 \geq 50\} + \{X - 150 \leq -50\}\} = P\{|X - 150| \geq 50\}$$

Таким образом применяем *второе неравенство Чебышева*

$$\left[P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} = P\{|X - 150| \geq 50\} \right] \leq \left[\frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{25}{50^2} = \left(\frac{5}{50} \right)^2 = 0.01 \right]$$

$$P\{|X - 150| \geq 50\} \leq 0.01$$

Ответ:

- с использованием *первого неравенства Чебышева* $P \leq 0.75$;
- с использованием *второго неравенства Чебышева* $P \leq 0.01$.

Замечание. *Второе неравенство Чебышева* даёт более точную оценку, так как используется информация о дисперсии случайной величины.

Замечание. Использование *первого неравенства Чебышева* при $\varepsilon < MX$ и *второго неравенства Чебышева* при $\varepsilon < \sqrt{DX}$ даёт тривиальную оценку: $P \leq 1$.

1.2 Сходимость последовательности случайных величин

Будем считать, что X_1, \dots, X_n, \dots — последовательность случайных величин, заданных на одном вероятностном пространстве.

Определение 1.1. Последовательность случайных величин X_1, \dots, X_n, \dots *сходится по вероятности* к случайной величине Z , если $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Обозначение:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} Z$$

Определение 1.2. Последовательность случайных величин X_1, \dots, X_n, \dots *слабо сходится* к случайной величине Z , если $\forall x \in \mathbb{R}$ где F_Z непрерывна в точке x , числовая последовательность $F_{X_1}(x), \dots, F_{X_n}(x), \dots$ сходится к $F_Z(x)$. Обозначение:

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_Z(x)$$

Замечание. Данные виды сходимости *неэквивалентны*.

1.3 Закон больших чисел (ЗБЧ)

Будем считать, что

- X_1, \dots, X_n, \dots — последовательность случайных величин;
- $\mathbb{E}MX_i = m_i$, где $i = \overline{1, \infty}$.

Определение 1.3. Последовательность случайных величин X_1, \dots, X_n, \dots удовлетворяет *закону больших чисел*, если

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Замечание. Выполнение *закона больших чисел* для последовательности X_1, \dots, X_n, \dots означает, что при достаточно больших n величина

$$Y_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n m_i$$

практически теряет случайный характер.