Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

# Математическая статистика
# Лекции

Москва, 2015 г.

# 1 Предельные теоремы теории вероятностей

## 1.1 Неравенства Чебышева

**Теорема 1.1** (*первое неравенство господина Чебышева*).

$$\left.\begin{aligned} X \geq 0; \\ \exists MX. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} \tag{1}$$

- $X$ — случайная величина;
- $\mathsf{P}\{X \leq 0\} = 0$ так как $X \geq 0$.

*Доказательство.* Для непрерывной случайное величины $X$ и зная, что при $X \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ x < 0$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\, f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

учитывая $x \geq \varepsilon$

$$\underbrace{\int_{0}^{\varepsilon} x\, f(x)\, dx}_{\geq 0} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geq \int_{\varepsilon}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \geq \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx$$

где

$$\varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx = \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\}$$

таким образом

$$MX \geq \varepsilon \cdot \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \Rightarrow \mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$$

□

**Теорема 1.2** (*второе неравенство лорда Чебышева*).

$$\exists MX, \exists DX \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2} \tag{2}$$

- $X$ — случайная величина.

*Доказательство.* Выпишем дисперсию

$$DX = M\big[(X - MX)^2\big]$$

Рассмотрим случайную величину $Y = (X - MX)^2$, где $Y \geq 0$. Тогда из *первого неравенства Чебышева* следует, что $\forall \delta \geq 0,\ MY \geq \delta\, \mathsf{P}\{Y \geq \delta\}$, где получается, что $\delta = \varepsilon^2$.

$$\Big[DX = M\big[(X - MX)^2\big]\Big] \geq \Big[\varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{(X - MX)^2 \geq \varepsilon^2\big\} = \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\}\Big]$$

таким образом

$$DX \geq \varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \Rightarrow \mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

□

**Пример 1.1.** Предельно допустимое давление в пневмосистеме ракеты равна 200 (Па). После проверки большого количество ракет было получено среднее значение давления 150 (Па). Оценить вероятность того, что давление в пневмосистеме очередной ракеты будет больше 200 (Па), если по результатам проверки ракет было получено среднеквадратичное отклонение 5 (Па).

**Решение.** Имеем следующее:

- случайная величина $X$ — давление в пневмосистеме;
- $X \geq 0$;
- $MX = 150$ (Па);
- $DX = 25$ (Па);

Решим поставленную задачу с помощью *первого неравенства Чебышева*

$$\left[\mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} = \mathsf{P}\{X \geq 200\}\right] \leq \left[\frac{MX}{\varepsilon} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0.75\right]$$
$$\mathsf{P}\{X \geq 200\} \leq 0.75$$

Поскольку нам известна дисперсия почему бы не воспользоваться *вторым неравенством Чебышева*? Действуем. Для начало рассмотрим вероятность следующего события

$$\mathsf{P}\{X \geq \varepsilon\} = \mathsf{P}\{X \geq 200\} = \mathsf{P}\{X - \underbrace{150}_{MX} \geq \underbrace{50}_{\varepsilon}\}$$

Остаётся построить вероятность, которая будет удовлетворять форме *второго неравенства Чебышева* (т. е. сделать модуль).

$$\mathsf{P}\{X - 150 \geq 50\} \leq \mathsf{P}\{X - 150 \geq 50\} + \mathsf{P}\{X - 150 \leq -50\}$$

Так как *события* $\{X - 150 \geq 50\}$ и $\{X - 150 \leq -50\}$ *несовместные*, то по *формуле сложения вероятностей несовместных событий* получаем

$$\mathsf{P}\{X - 150 \geq 50\} + \mathsf{P}\{X - 150 \leq -50\} =$$
$$= \mathsf{P}\big\{\{X - 150 \geq 50\} + \{X - 150 \leq -50\}\big\} = \mathsf{P}\big\{|X - 150| \geq 50\big\}$$

Таким образом применяем *второе неравенство Чебышева*

$$\left[\mathsf{P}\big\{|X - MX| \geq \varepsilon\big\} = \mathsf{P}\big\{|X - 150| \geq 50\big\}\right] \leq \left[\frac{DX}{\varepsilon^2} = \frac{25}{50^2} = \left(\frac{5}{50}\right)^2 = 0.01\right]$$
$$\mathsf{P}\big\{|X - 150| \geq 50\big\} \leq 0.01$$

**Ответ:**

- с использованием *первого неравенства Чебышева* $\mathsf{P} \leq 0.75$;
- с использованием *второго неравенства Чебышева* $\mathsf{P} \leq 0.01$.

**Замечание.** *Второе неравенство Чебышева* даёт более точную оценку, так как используется информация о дисперсии случайной величины.

**Замечание.** Использование *первого неравенства Чебышева* при $\varepsilon < MX$ и *второго неравенства Чебышева* при $\varepsilon < \sqrt{DX}$ даёт тривиальную оценку: $\mathsf{P} \leq 1$.

## 1.2 Сходимость последовательности случайных величин