

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана



Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика

Семинары

Москва, 2015 г.

1 Предельные теоремы теории вероятности

1.1 Неравенство Чебышева

Теорема 1.1 (первое неравенство Чебышева).

Теорема 1.2 (второе неравенство Чебышева).

Пример 1.1. По результатам многочисленных наблюдений, среднесуточный расход воды, в некотором населённом пункте, составляет 50000 (л). Оценить вероятность того, что в некоторый день расход воды превысит 150000 (л).

Решение. Пусть X — случайная величина принимающая некоторое значение, равное суточному расходу воды (л).

$$X \geq 0, \quad MX = 50000$$

Используя *первое неравенство Чебышева* получим

$$P\{X \geq 150000\} \leq \frac{MX}{150000} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $P\{X \geq 150000\} \leq 1/3$;

Пример 1.2. Пусть X — случайная величина, $MX = 1$, $\sigma = \sqrt{DX} = 0.2$. Оценить вероятности событий:

1. $\{0.5 \leq X < 1.5\}$;
2. $\{0.75 \leq X < 1.35\}$;
3. $\{X < 2\}$.

Решение ($\{0.5 \leq X < 1.5\}$).

Используем *второе неравенство Чебышева*

$$P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2};$$

Приведём событие к форме, которая будет работать *со вторым неравенством Чебышева*

$$\begin{aligned} \{0.5 \leq X < 1.5\} &= \{-0.5 \leq X - 1 < 0.5\} \supseteq \\ &\supseteq \{-0.5 < X - 1 < 0.5\} = \{|X - 1| < 0.5\} \end{aligned}$$

Строим вероятность противоположного события $\{|X - 1| < 0.5\}$

$$P\{|X - 1| < 0.5\} = 1 - P\{|X - 1| \geq 0.5\}$$

Рассмотрим второе неравенство Чебышева. Умножим на -1

$$-P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \geq -\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Прибавим 1, получаем

$$1 - P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}; \quad (1)$$

Используя данную форму, решаем поставленную задачу

$$1 - P\{|X - 1| \geq 0.5\} \geq 1 - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

Ответ: $P\{0.5 \leq X < 1.5\} \geq 21/25$.

Решение ($\{0.75 \leq X < 1.55\}$).

Приводим событие к необходимой форме

$$\begin{aligned}\{0.75 \leq X < 1.35\} &= \{-0.25 \leq X - 1 < 0.35\} \supseteq \\ &\supseteq \{-0.25 < X - 1 < 0.25\} = \{|X - 1| < 0.25\}\end{aligned}$$

Строим вероятность противоположного события $\{|X - 1| < 0.25\}$

$$\mathbf{P}\{|X - 1| < 0.25\} = 1 - \mathbf{P}\{|X - 1| \geq 0.25\}$$

Применяем *второе неравенство Чебышева*, получаем

$$1 - \mathbf{P}\{|X - 1| \geq 0.25\} \geq 1 - \left(\frac{0.2}{0.25}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Ответ: $\mathbf{P}\{0.75 \leq X < 1.55\} \geq 9/25$.

Решение ($\{X < 2\}$).

Приводим событие к необходимой форме

$$\{X < 2\} = \{X - 1 < 1\} \supseteq \{-1 < X - 1 < 1\} = \{|X - 1| < 1\}$$

Строим вероятность противоположного события $\{|X - 1| < 1\}$

$$\mathbf{P}\{|X - 1| < 1\} = 1 - \mathbf{P}\{|X - 1| \geq 1\}$$

Применяем *второе неравенство Чебышева*, получаем

$$1 - \mathbf{P}\{|X - 1| \geq 1\} \geq 1 - \left(\frac{0.2}{1}\right)^2 = 0.96$$

Ответ: $\mathbf{P}\{X < 2\} \geq 0.96$.

Замечание. Если использовать *первое неравенство Чебышева* для последнего примера

$$\left[\mathbf{P}\{X < 2\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 2\}\right] \geq \left[1 - \frac{MX}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right]$$

Таким образом, использование информации о дисперсии *случайно величины* X существенно уточняет оценку.

2 Закон больших чисел (ЗБЧ)

Определение 2.1. Последовательность X, \dots, X_n, \dots *удовлетворяет ЗБЧ*, если вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{где} \quad (2)$$

- $m_i = MX_i, i \in N$

Теорема 2.1 (Чебышева о достаточном условии применимости ЗБЧ). Пусть

- X_1, \dots, X_n, \dots — последовательность независимых случайных величин;

- $\exists MX_i = m_i, \exists DX_i = \sigma_i^2$;
- $\exists C > 0 \quad \forall i \in N \quad \sigma_i^2 \leq C$

Тогда последовательность X_1, \dots, X_n, \dots удовлетворяет ЗБЧ.

Пример 2.1. Дана последовательность $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ независимых случайных величин.

Значения случайной величины X_n	$-na$	0	na
Вероятность	$1/n^2$	$1 - 2/n^2$	$1/n^2$

Удовлетворяет ли последовательность $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ закону больших чисел.

Решение. Проверим выполнимость достаточного условия (2.1 ссылка)

$$MX_n = \sum_{i=1}^3 x_i p_i = \frac{-na}{n^2} + \frac{na}{n^2} = 0;$$

$$DX_n = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = \frac{(-na)^2}{n^2} + \frac{(na)^2}{n^2} = 2a^2.$$

Ответ: Удовлетворяет ЗБЧ.

Пример 2.2. Дана последовательность $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ независимых случайных величин.

Значения случайной величины X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
Вероятность	1/2	1/2

Удовлетворяет ли последовательность $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ закону больших чисел?

Решение.

$$MX_n = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = \frac{-\sqrt{\ln n}}{2} + \frac{\sqrt{\ln n}}{2} = 0;$$

$$DX_n = MX^2 - (MX)^2 = \sum_{i=1}^2 x_i^2 p_i = \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln n}{2} = \ln n.$$

DX_n — не ограничена в совокупности **Ответ:** Последовательность $X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ не удовлетворяет ЗБЧ в форме Чебышева