Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Математическая статистика
Семинары

Москва, 2015 г.

1 Предельные теоремы теории вероятности

1.1 Неравенство Чебышева

Теорема 1.1 (первое неравенство Чебышева)**.**

Теорема 1.2 (второе неравенство Чебышева)**.**

Пример 1.1. По результатам многочисленных наблюдений, среднесуточный расход воды, в некотором населённом пункте, составляет 50000 (л). Оценить вероятность того, что в некоторый день расход воды превысит 150000 (л).

Решение. Пусть X — случайная величина принимающая некоторое значение, равное суточному расходу воды (л).

$$X \geq 0, \quad MX = 50000$$

Используя *первое неравенство Чебышева* получим

$$\mathsf{P}\{X \geq 150000\} \leq \frac{MX}{150000} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\mathsf{P}\{X \geq 150000\} \leq 1/3$;

Пример 1.2. Пусть X — случайная величина, $MX = 1$, $\sigma = \sqrt{DX} = 0.2$. Оценить вероятности событий:

1. $\{0.5 \leq X < 1.5\}$;
2. $\{0.75 \leq X < 1.35\}$;
3. $\{X < 2\}$.

Решение ($\{0.5 \leq X < 1.5\}$)**.**
Используем *второе неравенство Чебышева*

$$\mathsf{P}\Big\{|X - MX| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2};$$

Приведём событие к форме, которая будет работать *со вторым неравенством Чебышева*

$$\{0.5 \leq X < 1.5\} = \{-0.5 \leq X - 1 < 0.5\} \supseteq \\ \supseteq \{-0.5 < X - 1 < 0.5\} = \Big\{|X - 1| < 0.5\Big\}$$

Строим вероятность противоположного события $\Big\{|X - 1| < 0.5\Big\}$

$$\mathsf{P}\Big\{|X - 1| < 0.5\Big\} = 1 - \mathsf{P}\Big\{|X - 1| \geq 0.5\Big\}$$

Рассмотрим второе неравенство Чебышева. Умножим на -1

$$-\mathsf{P}\Big\{|X - MX| \geq \varepsilon\Big\} \geq -\frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Прибавим 1, получаем

$$1 - \mathsf{P}\Big\{|X - MX| \geq \varepsilon\Big\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}; \tag{1}$$

Используя данную форму, решаем поставленную задачу

$$1 - \mathsf{P}\Big\{|X - 1| \geq 0.5\Big\} \geq 1 - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

Ответ: $\mathsf{P}\{0.5 \leq X < 1.5\} \geq 21/25$.

Решение $(\{0.75 \le X < 1.55\})$**.**
Приводим событие к необходимой форме

$$\{0.75 \le X < 1.35\} = \{-0.25 \le X - 1 < 0.35\} \supseteq \\ \supseteq \{-0.25 < X - 1 < 0.25\} = \big\{|X-1| < 0.25\big\}$$

Строим вероятность противоположного события $\big\{|X-1| < 0.25\big\}$

$$\mathsf{P}\big\{|X-1| < 0.25\big\} = 1 - \mathsf{P}\big\{|X-1| \ge 0.25\big\}$$

Применяем *второе неравенство Чебышева*, получаем

$$1 - \mathsf{P}\big\{|X-1| \ge 0.25\big\} \ge 1 - \left(\frac{0.2}{0.25}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Ответ: $\mathsf{P}\{0.75 \le X < 1.55\} \ge 9/25$.

Решение $(\{X < 2\})$**.**
Приводим событие к необходимой форме

$$\{X < 2\} = \{X - 1 < 1\} \supseteq \{-1 < X - 1 < 1\} = \big\{|X-1| < 1\big\}$$

Строим вероятность противоположного события $\big\{|X-1| < 1\big\}$

$$\mathsf{P}\big\{|X-1| < 1\big\} = 1 - \mathsf{P}\big\{|X-1| \ge 1\big\}$$

Применяем *второе неравенство Чебышева*, получаем

$$1 - \mathsf{P}\big\{|X-1| \ge 1\big\} \ge 1 - \left(\frac{0.2}{1}\right)^2 = 0.96$$

Ответ: $\mathsf{P}\{X < 2\} \ge 0.96$.

Замечание. Если использовать *первое неравенство Чебышева* для последнего примера

$$\Bigg[\mathsf{P}\{X < 2\} = 1 - \mathsf{P}\{X < 2\}\Bigg] \ge \left[1 - \frac{MX}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\right]$$

Таким образом, использование информации о дисперсии *случайно величины* X существенно уточняет оценку.

2 Закон больших чисел (ЗБЧ)

Определение 2.1. Последовательность $X, \dots, X_n, \dots$ *удовлетворяет ЗБЧ*, если вероятность

$$\mathsf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \ge \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{где} \tag{2}$$

- $m_i = MX_i$, $i \in N$

Теорема 2.1 (Чебышева о достаточном условие применимости ЗБЧ)**.** Пусть

- $X_1, \dots, X_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин;

- $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$;
- $\exists C > 0 \quad \forall i \in N \quad \sigma_i^2 \leq C$ю

Тогда последовательность $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *удовлетворяет ЗБЧ.*

Пример 2.1. Дана последовательность $X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин.

Значения случайной величины X_n	$-na$	0	na
Вероятность	$1/n^2$	$1-2/n^2$	$1/n^2$

Удовлетворяет ли последовательность $X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ закону больших чисел.

Решение. Проверим выполнимость достаточного условия (2.1 ссылка)

$$MX_n = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p_i = \frac{-na}{n^2} + \frac{na}{n^2} = 0;$$

$$DX_n = MX^2 - \cancel{(MX)^2}^{\,0} = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, p_i = \frac{(-na)^2}{n^2} + \frac{(na)^2}{n^2} = 2a^2.$$

Ответ: Удовлетворяет ЗБЧ.

Пример 2.2. Дана последовательность $X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин.

Значения случайной величины X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
Вероятность	$1/2$	$1/2$

Удовлетворяет ли последовательность $X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ закону больших чисел?

Решение.

$$MX_n = \sum_{i=1}^{2} x_i\, p_i = \frac{-\sqrt{\ln n}}{2} + \frac{\sqrt{\ln n}}{2} = 0;$$

$$DX_n = MX^2 - \cancel{(MX)^2}^{\,0} = \sum_{i=1}^{2} x_i^2\, p_i = \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln n}{2} = \ln n.$$

DX_n — не ограничена в совокупности
Ответ: Последовательность $X_2, X_3, \ldots, X_n, \ldots$ не удовлетворяет ЗБЧ в форме Чебышева

Замечание. Можно доказать аналог *теоремы Чебышева* с ослабленным условием

Теорема 2.2. Пусть

- $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин;
- $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n \sum_{i=1}^{n} DX_i = 0$.

Тогда последовательность $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ удовлетворяет ЗБЧ.

Решение. Рассмотрим применение теоремы на предыщем примере (2.2 сыль сюда).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln n!$$

Применяем *формулу Стирлинга*: $n!\sim(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$, при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln n!=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n+1/2\ln 2\pi+1/2\ln n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

Ответ: Последовательность $X_1,\dots,X_n,\dots$ удовлетворяет ЗБЧ, но не в форме Чебышева.

3 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Теорема 3.1. Пусть

- $X_1,\dots,X_n,\dots$ — последовательность независимых случайных величин;
- все X_i, $i\in N$ одинаково распределены;
- $\exists MX_i=m$, $\exists DX_i=\sigma^2$;

Тогда последовательность случайных величин

$$Y_n=\frac{1/n\sum_{i=1}^{n}X_i-m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

слабо сходится к случайной величине $Z\sim N(0,1)$.