Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

Факультет: Информатика и системы управления
Кафедра: Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии

Моделирование

Москва, 2015 г.

Содержание

1 Общие понятия

Изначально существовал только *натурный или реальный эксперимент*, т. е. эксперимент, который проводился над реальными вещами или существами в жизни. Эволюцией данного эксперимента является *вычислительный эксперимент.* Данный эксперимент основывается на моделях. Чтобы произвести вычислительный эксперимент необходим программный комплекс, а в свою очередь для программного комплекса нужны алгоритмы, которые основаны на методах. Методы описывают расчётную схему, которая близка к реальному объекту. Таким образом примитивный вычислительный эксперимент строиться следующим образом:

$$\text{объект} \to \text{расчётная схема} \to \text{методы} \to \text{алгоритмы} \to \text{программа, отладка}$$

Вычислительный эксперимент в конечном счёте существенно экономит время и затраты, в отличие от реального эксперимента.

2 Классификация моделей

1. материальные;
    (a) физические;
    (b) геометрические;
    (c) аналоговые;
2. абстрактные;
    (a) интуитивные;
    (b) символьные;
    (c) графические;
    (d) математические;
        i. функциональные;
        ii. идентификационные;
        iii. имитационные;
3. модели суждения.

вторая лекция
третья лекция

1. Аппроксимация функций:
    (a) Интерполяция:
        i. Линейная:
            A. Полином Ньютона;
            B. Полином Лагранжа;
            C. Полином Эрмита;
            D. Сплайнами;
        ii. Нелинейные;

   (b) Наилучшее среднеквадратичное приближение;

2. Численное дифференцирование
   (a) Дифференцирование полинома;
   (b) Сеточные формулы (на основе разложения в ряды Тейлора);
   (c) Дифференцирование предварительно сглаженной кривой;

3. Численное интегрирование:
   (a) Формула Ньютона—Котеса;
   (b) Метод Гаусса;
   (c) Метод Рунге;

4. Решение СЛАУ:
   (a) Прямые методы (класс Гаусса);
   (b) Итерационные;

5. Обычное дифференциальное уравнение (ОДУ):
   (a) Задачка Коши;
   (b) Краевая задача;

6. Уравнение в частных производных (УЧП)
   (a) Эллиптические $\underbrace{\frac{\delta^2 U}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta x_2^2} + \frac{\delta^2 U}{\delta x_3^2}}_{\Delta U} = f(x_1\, x_2\, x_3\, U)$;
   (b) Параболические $\frac{\delta U}{\delta t} = \Delta U + f(x_1\, x_2\, x_3\, U)$;
   (c) Гиперболические $\frac{\delta^2 U}{\delta t^2} = \Delta U + f(x_1\, x_2\, x_3\, U)$;

7. Интегро-дифференциальные уравнения.

3 Корректность постановки задачи

Определение 3.1. Если решение существует, единственно и устойчиво по входным данным.

Определение 3.2. Устойчивость по входным данным — конечное значение полученное по входным достоверно.

Примеры не устойчивости

$$
\begin{aligned}
&y = A\,x \\
&y + \delta y = A(x + \delta y) \\
&\delta y = A(x + \delta x) - A\,x \\
&\delta y \to 0 \qquad \text{при } \delta x \to 0 \\
&u = y', \qquad \Big(y + \underbrace{\frac{1}{n}\sin^2 x}_{\delta y}\Big)' = u + \delta u, \qquad \delta u = n\cos^2 x \\
&n \to \infty \qquad \delta y \to 0 \qquad \delta u \to \infty
\end{aligned}
$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$

$$u(x, y), \qquad u(x, 0) = 0, \qquad \frac{\delta u(x, 0)}{\delta y} = \varphi(x):$$

$$\varphi(x) = 0, \Rightarrow u(x, y) = 0;$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{n} \cos nx \Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{n^2} \cos nx \cdot \sin ny;$$

Структура (виды) погрешности:

- погрешность модели;
- погрешность исходных данных (неустранимая погрешность);
- погрешность метод;
- погрешность округления.

4 Математические модели на основе ОДУ

Определение 4.1. Одна независимая переменная (к примеру время или координата)

$$F(x, u, u', u'', \dots u^{(n)}) = 0$$

$$\begin{aligned} u' + p(x)u &= f(x) \\ u(x) &= \varphi(x) \end{aligned}$$

Определение 4.2. Замена переменных в дифференциальном уравнения n-го порядка может быть сведена к системе n дифференциальных уравнений.

$$u^{(k)} = u_k$$

$$u'_k = u^{(k)'} = u^{k+1} = u_{k+1}$$

$$u'_k = u_{k+1}$$

$$\begin{cases} u'_k = u_{k+1} \\ F(x, u, u_1, u_2, \dots, u'_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

$$u \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} = \overline{u}, \qquad f \rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} = \overline{f}$$

Общий вид системы ОДУ первого порядка $u'_k = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad k = \overline{1, n}$

$$\begin{aligned} u_(x)u'''(x) + b(x)u''(x) + c(x)u'(x) + d(x)u(x) &= f(x) \\ u(x) &= ? \end{aligned}$$

$$u^{(k)} = u_k$$

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ u(x)u_2'(x) + b(x)u_2(x) + c(x)u_1(x) + d(x)u(x) = f(x) \end{cases}$$

Для ОДУ существует две постановки задачи

- задача Коши: все условия ставятся в одной точке, применительно к задаче выше

$$u_k(\psi) = \eta_{k_1}, \quad k = 1, \dots n$$

- краевая задача: для порядка выше 1, либо для системы в которой больше чем одно уравнение.

4.1 Методы решения ОДУ

1. точные методы, $u'(x) = \dfrac{u - x}{u + x}$
2. приближённо аналитические методы (метод Пикара)
3. численные методы (задача Коши)

4.1.1 Метод Пикара

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(\psi) = \eta; \end{cases}$$

$$du = f(x, u(x))\,dx$$
$$u(x) = u(\psi) + \int_\psi^x f(t, u(t))\,dt$$
$$y^{(1)} = \eta + \int_\psi^x f(t, y^{()}(t)\,dt$$
$$y^{(0)}(x) = \eta$$
$$z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$$
$$|z^{(1)}(x)| = \int_\psi^x |f(t, y^{()}(t)) - f(t, u(t))|\,dt$$
$$|x - \psi| \le a, \quad |u - \eta| \le b$$

Рассмотрим область $|x - \psi| \le a, \quad |u - \eta| \le b$. Пусть правая часть удовлетворяет условию Липшеца по второму аргументу, т.е. $|f(x, u_q) - f(x, u_2)| \le L|u_1 - u_2|$

$$|z^{(1)}(x)| \le L \int_\psi^x |y^{()}(t) - u(t)|\,dt = L \int_\psi^x |z^{()}|$$
$$|z^{(1)}(x)| \le \int_x^\psi b\,dt = L\,b|\psi - x|$$
$$|z^{(2)}| \le L^2 b \int_\psi^{max}$$

...

4.1.2 Задачка Коши

Строиться разностная сетка в области, которой ищется решение

$$\psi \leq x \leq X \omega_n = \{x_n : \psi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = X\}$$

Узлы $x_0, \ldots, x_n$. Равномерная сетка $\omega_x = \{x_n : x_n = x_0 + n\,h, n = 1, \ldots, N\}$

$$\begin{aligned}
&u(x) \sim y_n \quad y_n = y(x_n) \\
&x_n = x_0 + n\,h, \quad h \to 0, n \to \infty \Rightarrow |u(x_n) - y_n| \to 0
\end{aligned}$$

4.1.3 Методы Рунге-Кутта

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + h_n u_n + \frac{h_n}{2!} u_n'' + \ldots \\
u_n' = u'(x_n) = f(x_n, u_n) \\
u_n'' = (u')_x' = f_x' + f_u' f|_{X_n} \\
u_{n+1} = u_n + h_n f(x_n, u_n) + \frac{h_n}{2}(f_x' + f_u' f)_{X_n} + \ldots
\end{aligned}$$

Рунге-Кутта 1го порядка (метод Эйлера)

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = u_n + h_n f(x_n, u_n) \\
y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) \\
|y_n - u(x_n)| = o(h)
\end{aligned}$$

Рунге-Кутта 2го порядка

Рунге-Кутта 4го порядка Применяют как правило её.

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_1 + 2k_3 + k_4) + O(h^4) \\
&k_1 = f(x_n, y_n); \\
&k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1); \\
&k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_2) \\
&k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\, k_3)
\end{aligned}$$

Рунге Кутта 4го порядка точности эквивалентна формуле Симпсона если без y

$\frac{1}{3}(\frac{h}{2})(f(x_n) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})$

Обобзение

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x), v(x)) \\ v'(x) = Q(x, u(x), v(x)) \end{cases}$$

$$u(\psi) = \eta_1, v(\psi) = \eta_2, \psi \leq x \leq X$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

где

$$k_1 = f(x_n, y_n, z_n), \qquad q_1 = \varphi(x_n, y_n, z_n)$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}, z_n + h\frac{q_1}{2}), \qquad q_2 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}, z_n + h\frac{q_1}{2})$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}, z_n + h\frac{q_2}{2}), \qquad q_3 = \varphi(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}, z_n + h\frac{q_2}{2})$$

Задача Коши система уравнений первого порядка

Сгущение сетки

4.2 Многошаговые методы

$$U'(x) = f(x, U(x))$$
$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_m y_{n-m}}{h} = b_0 f(x_n, y_n) + b_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \cdots + b_m f(x_{n-m}, y_{n-m})$$
$$n = m, m+1, \ldots$$

В качестве примера

4.2.1 Метод Адамса

Известны $n-4, n-3, \ldots n$ узлы

$$U'(x) = f(x, U(x))$$
$$U_n = U_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x, U(x))\, dx = U_{n-1} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F(x)\, dx$$

Ньютоном

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_{n-1}) + (x - x_{n-1})F(x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + (x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) + \\ + (x - x_{n-1})(x - x_{n-2})(x - x_{n-3})F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n = y_{n-1} + h_{n-1}F(x_{n-1}) + \frac{1}{2}h_{n-1}^2 F(x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + \frac{1}{6}h_{n-1}^2(2h_{n-1} + 3h_{n-2})F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) + \\ + \frac{1}{12}h_{n-1}^2(3h_{n-1}^2 + 8h_{n-1}h_{n-2} + 4h_{n-1}h_{n-3} + 6h_{n-2}^2 + 6h_{n-2}h_{n-3})F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}) \end{aligned}$$

$$h_n = x_n - x_{n-1}$$

$$F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}) = \frac{F(x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) - F(x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4})}{x_{n-1} - x_{n-4}}$$
$$F(x_{n-1}, x_{n-2}) = \frac{F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$
$$o(h^4)$$

4.3 Неявные методы

Введение

$$U'(x) = -\alpha U, \quad f(x, U) = -\alpha U, \alpha > 0$$
$$\frac{dU}{U} = -\alpha\, dx$$
$$U() = U_n e^{-\alpha x}$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n - h\alpha y_n = y_n(1 - h\alpha), \quad h < \frac{1}{\alpha}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) = y_n - h\alpha y_{n+1}$$
$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + h\alpha}$$

1. Метод трапеций

$$U'(x) = f(x, U(x))$$
$$U_{n+1} = U_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, U(x))\, dx$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\Big], \quad O(h^2) h \to 0$$

2. Методы Гира

$$\sum_{k=0}^{m} a_k y_{n-2} = hf(x_n, y_n)$$

$$m = 2 \qquad \frac{3}{2} y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2} y_{n-2} = hf(x_n, y_n), O(h^2)$$
$$m = 3 \qquad \frac{11}{6} y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2} y_{n-2} - \frac{1}{3} y_{n-3} = hf(x_n, y_n), O(h^3)$$

4.4 Лабораторная работа 2

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{U_c - (R_k + R_p(I))}{L_k} \\ \frac{dU_c}{dt} = -\frac{I}{C_k} \end{cases} \qquad t = 0,\ I = I_0 = 0.5,\ U_c = U_{c0} = 3000$$

Применим неявный метод трапеций. Проинтегрируем правую часть уравнения

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \frac{\tau}{2L_k}[U_{c_n} - (R_k + R_p(I_n))I_n + U_{c_{n+1}} - (R_k + R_p(I_{n+1}))I_{n+1}] \\ U_{c_{n+1}} = U_{c_n} - \frac{\tau}{2C_k}[I_n + I_{n+1}] \end{cases}$$

$$R_p = \frac{L}{2\Pi \int \sigma}$$

$$I^s_{n+1} = \frac{\frac{\tau}{L_k}U_{c_n} + [1 - \frac{0.25\tau^2}{L_kC_k} - \frac{0.5\tau}{L_k}(R_k + R_p(I_n))]I_n}{\frac{0.25\tau^2}{L_kC_k} + \frac{0.5\tau}{L_k}(R_k + R_p(I^{s-1}_{n+1})) + 1}$$

$$\left|\frac{I^{(s)}_{n+1} - I^{(s-1)}_{n+1}}{I^{(s)}_{n+1}}\right| < \varepsilon \approx 10^{-4}$$

$$\left|\frac{R(I^{(s)}_{n+1}) - R(I^{(s-1)}_{n+1})}{R(I^{(s)}_{n+1})}\right| < \varepsilon \approx 10^{-2}$$

5 Краевые задачи (ОДУ)

$$\begin{aligned} &u'_k = f'_k(x_1, u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad k = \overline{1, p} \\ &\varphi_k(u_1(\xi_k), u_2(\xi_k), \ldots, u_p(\xi_k)) = 0, \quad k = \overline{1, p} \\ &a \le \xi_k \le b \end{aligned}$$

В краевой задаче, дополнительное условие задаётся более чем в одной точке

5.1 Разностный метод решения

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = f(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \\ a \le x \le b \end{cases}$$

Заменим вторую производную — разностью.

$$u'(x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2u''''(\xi), \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1}(1)$$

$$\begin{aligned} &\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - p_ny_n = f_n, \quad f_n = f(x_n),\ p_n = p(x_n),\ p(x) > 0 \\ &y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} - p_xh^2y_n = h^2f_n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_{n-1} - (2 + p_nh^2)y_n + y_{n+1} = h^2f_n, \quad n = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta \end{cases}$$

Решение существует и единственно, находится методом прогонки. (Матрица трёхдиагональная).

Метод прогонки

$$x_0y_0 + M_0y_1 = P_0, \qquad\qquad K_Ny_{N-1} - M_Ny_N = P_N$$

$$\begin{aligned}
&A_ny_{n-1} - B_ny_n + C_ny_n = -F_n,\\
&y_n = \xi_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1}\\
&y_{n-1} = \xi_ny_n + \eta_n(2)\\
&A_n\xi_ny_n + A_n\eta_n - B_ny_n + C_ny_{n+1} = -F_n\\
&y_n = \frac{C_n}{B_n - A_n\xi_n}y_{n+1} + \frac{F_n + A_n\eta_n}{B_n - A_n\eta_n}
\end{aligned}$$

Сравним с $y_n = \xi_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1}$ видим

$$\xi_{n+1} = \frac{C_n}{B_n - A_n\xi_n}, \eta_{n+1} = \frac{F_n + A_n\xi_n}{B_n - A_n\xi_n}(3)$$

при $n = 0$, $y_n = \xi_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1}$

$$y_0 = \xi_1y_1 + \eta_1$$

кроме того

$$\begin{aligned}
&y_0 = -\frac{M_0}{K_0}y_1 + \frac{P_0}{K_0}\\
&\xi_1 = \frac{M_0}{K_0}, \quad \eta_1 = \frac{P_0}{K_0}(4)
\end{aligned}$$

при $n = N - 1$

$$\begin{cases}
y_{N-1} = \xi_Ny_N + \eta_N\\
K_Ny_{n-1} + M_Ny_N = P_N
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&K_N\xi_Ny_N + K_N\eta_N + M_Ny_N = P_N\\
&y_N = \frac{P_N - K_N\eta_N}{K_N\xi_N + M_N}(5)
\end{aligned}$$

Алгоритм расчёта по 4 находим , по 3 находим, по 5 находим y_N, по формуле 2 находим

Как решать при сложных краевых условиях при $x = a$

Случай 1

$$\begin{aligned}
&u'(a) = \gamma u(a) + \delta\\
&\frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma y_0 + \delta\\
&(\gamma h + 1)y_0 - y_1 = -h\delta,\\
&K_0 = \gamma h + 1,\ M_0 = -1,\ P_0 = -h\delta
\end{aligned}$$

Случай 2

$$u'(a) = \delta$$
$$\frac{y_1 - y_0}{h} = \delta$$
$$y_0 - y_1 = -h\delta$$
$$K_0 = 1, M_0 = -1, P_0 = -h\delta$$

Сходимость решения к точному

$$Z_n = y_0 - u_n, \quad u_n = u(x_n)$$

Разностное уравнение имеет вид

$$y_{n-1} - (2 + p_n h^2) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n (6)$$

В исходное уравнение подставим (1)

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12} h^2 u''''(\xi) - p_n u_n = f_n$$
$$u_{n-1} - (2 + p_n h^2) u_n - u_{n+1} = h^2 f_n + \frac{1}{12} h^4 u''''(\xi) (7)$$

вычтем из (6) (7)

$$Z_n = y_n - u_n$$
$$z_{n-1} - (2 + p_n h^2) z_n + z_{n+1} = -\frac{1}{12} h^4 u''''(\xi)$$

выберем точку в которой погрешность максимальна

$$n = m \quad |z_m| = \max_{0 \le n \le N} |z_n|$$

$$(2 + p_m h^2)|z_m| \le |z_{m-1}| + |z_{m+1}| + \frac{1}{12} h^4 |u''''(\xi)|$$
$$(2 + p_m h^2)|z_m| \le 2|z_m| + \frac{1}{12} h^4 |u''''(\xi)|$$
$$|z_m| \le \frac{h^4}{12h^2} |\frac{u''''(\xi)}{p_m}| = o(h^2)$$
$$\text{при } n \to 0, |z_m| = |y_m - u_m| \to 0$$

Рассмотрим более реалистичной вариант уравнения

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - p(x)\, u + f(x) = 0$$

где $k(x)$, $p(x)$, $f(x)$ заданы

Для получения разностной схемы применим *интегро-интерполяционный метод* заключающийся в том, что уравнение интегрируется на сетке.

На основе трехточечного шаблона $n-1, (n-\frac{1}{2}), n, (n+\frac{1}{2}), n+1$ будем строить схему.

$$\begin{cases} F = -k(x)\frac{du}{dx} \quad (1) \\ -\frac{dF}{dx} - p(x)u + f(x) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$-\int_{x_n-1/2}^{x_n+1/2} \frac{dF}{dx}dx - \int_{x_n-1/2}^{x_n+1/2} p(x)u(x)dx + \int_{x_n-1/2}^{x_n+1/2} f(x)\,dx = 0$$

$$-F_{n+1/2} + F_{n-1/2} - p_n y_n h + f_n h = 0 \quad (3)$$

$$p_n = p(x_n), \quad f_n = f(x_n)$$

из (1)

$$\int_{x_n}^{x_n+1} \frac{F}{k(x)}dx = -\int_{x_n}^{x_n+1} \frac{du}{dx}dx, \qquad F_{n+1/2}\int_{x_n}^{x_n+1} \frac{dx}{k(x)} = y_n - y_{n+1}$$

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2}\frac{y_n - y_{n+1}}{n}, \quad \text{где}$$

$\chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_n+1} \frac{dx}{k(x)}}$

$$\chi_{n+1/2} = \frac{h}{\frac{h}{2}(\frac{1}{k_{n+1}} + \frac{1}{k_n})} = \frac{2k_{n+1}k_n}{k_n + k_{n+1}}$$

или

$$\chi_{n+1/2} = \frac{h}{\frac{1}{k_{n+1/2}}h} = k_{n+1/2}\frac{k_n}{den}$$

По аналогии

$$F_{n-1/2} = x_{n-1/2}\frac{y_{n-1} - y_n}{h}$$

$$\chi_{n-1/2}\frac{y_{n-1} - y_n}{h} - \chi_{n+1/2}\frac{y_n - y_{n+1}}{h} - p_n y_n h + f_n h = 0$$

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n \quad \text{где(5)}$$

- $A_n = \chi_{n-1/2}$;
- $C_n = \chi_{n+1/2}$;
- $B_n = A_n + C_n + p_n h^2$;
- $F_n = f_n h^2$;
- $|B_n| > |A_n| + |C_n|$;

Поставим граничные условия $x = 0$, $-k\frac{du}{dx} = F_0$, $F_0 = F_{t0}$

$$\chi_{n-1/2}\frac{u_{n-1-u_n}}{h} - \chi_{n+1/2}\frac{u_n - u_{n+1}}{h} - p_n u_n h + f_n h = \psi, \quad \psi = O(h^2)$$

$$u_{n\pm1} = u_n \pm hu' + \frac{h^2}{2!}u'' \pm \frac{h^3}{3!}u'''...$$

Исходное разностное уравнение (5) имеет второй порядое точности (это следует из анализа невязки) Получим при $x = 0$ второго порядка точности. Для этого проинтегрируем уравнение 2, на отрезке $[0, 1/2]$

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx}dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x)u(x)d(x) + \int_0^{x_{1/2}} f(x)\,dx = 0$$

$$F_0 - F_{1/2} + \frac{h}{2}\frac{1}{2}(p_0 y_0 + p_{1/2}y_{1/2}) + \frac{h}{2}\frac{1}{2}(f_0 + f_{1/2}) = 0$$

$$F_{1/2} = \chi_{1/2}\frac{y_0 - y_1}{h}$$

$$F_0 - \frac{\chi_{1/2}}{h}(y_0 - y_1) - \frac{h}{4}\left(p_0 y_0 + \frac{p_0 + p_1}{2}\frac{y_0 + y_1}{2}\right) + \frac{h}{4}\left(f_0 + \frac{f_0 + f_1}{2}\right) = 0$$

Приведём полученное выражение

$$K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \quad \text{где}$$

- $K_0 = \chi_{1/2} + \frac{h^2}{8}(\frac{p_0+p_1}{2}) + \frac{h^2}{4}p_0$
- $M_0 = \frac{h^2}{8}(\frac{p_0+p_1}{2}) - \chi_{1/2}$
- $P_0 = hF_0 + \frac{h^2}{4}(\frac{f_0+f_1}{2} + f_0)$

Тривиальная запись краевого условия

$$-k_0\frac{y_1 - y_0}{h} = F_0$$

$$\chi_{1/2}y_0 - \chi_{1/2}y_1 = hF_0$$

$$-\chi_{1/2}\frac{y_1 - y_0}{h} = F_0$$

5.2 Лабораторная работа 3

Построить разностную схему, найти решение, построить график.

Имеется цилиндр. К цилиндру подводится тепловой поток F_0. В свою очередь цилиндр обтекается воздухом. Найти температуру распределения в цилиндре.

$$- \div F + q = 0$$

$$-\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF_r) + \frac{d}{dz}F_x\right) + q = 0$$

$$-\frac{dF_x}{dx} + q = 0, \quad F_x = -\lambda(x)\frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\lambda(x)\frac{dT}{dx}) + q = 0$$

$$q = -\frac{2\pi R \cdot \alpha(T - T_{0c})l}{\pi R^2 l} = -\frac{2}{R}\alpha(T - T_{0c}), \quad [\alpha] = \frac{\text{Вт}}{cm^2 \cdot k}$$

Окончательно

$$\frac{d}{dx}(\lambda(x)\frac{dT}{dx}) - \frac{2}{R}\alpha T + \frac{2}{R}\alpha T_{0c} = 0$$

$$\lambda(x) = k(x), \quad P(x) = \frac{2}{R}\alpha, \quad f(x) = \frac{2}{R}\alpha T_{0c}$$

$$\lambda(x) = \frac{a}{x-b}, \quad x = 0, \lambda = \lambda_0, \alpha = \alpha_0 \to b = \frac{k_n l}{k_N - k_0}; x = l, \lambda = \lambda_N, \alpha = \alpha_N$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x-a}$$

Граничные условия

$$\begin{cases} x = 0, -\lambda\frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, -\lambda\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_{0c}) \end{cases}$$

Исходные данные

- R, l
- T_{0c}
- $k_0, k_N, \alpha_0, \alpha_N$
- F_0

Найти $T(x)$

Для отладки

$$k_0 = 0.1\frac{vt}{cm \cdot k}$$

$$k_N = 0.2$$

$$l = 10cm$$

$$R = 0.5cm$$

$$T_{0c} = 300K$$

$$F_0 = 15\frac{vt}{cm^2}$$

$$\alpha_0 = 0.001\frac{vt}{cm^2K}$$

$$\alpha_N = 0.02\frac{vt}{cm^2K}$$

Вариант решения нелинейного уравнения

$$A_n(y_{n-1}, y_n)y_{n-1} - B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1})y_n + C_n(y_n, y_{n+1})y_{n+1} = -F_n$$

Способ 1. Простые итерации

$$A_n\left(y_{n-1}^{(s-1)}, y_n^{(s-1)}\right) y_{n-1}^{(s)} - B_n\left(y_{n-1}^{(s-1)}, y_n^{(s-1)}, y_{n+1}^{(s-1)}\right) y_n^{(s)} + C_n\left(y_n^{(s-1)}, y_{n+1}^{(s-1)}\right) y_{n+1}^{(s)} = -F_n$$

$$\max_{0\le n\le N}\left|\frac{T_n^{(s)} - T_n^{(s-1)}}{T_n^{(s)}}\right| \le \varepsilon$$

Способ 2. Метод Ньютона

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$f\left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}\right) + \sum_{k=1}^{s} \frac{\delta f^{(s)}}{\delta x_k} \underbrace{\left(x_k^{(s-1)} - x_k^{(s)}\right)}_{\Delta x_k^{(s)}} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{s} \frac{\delta f^{(s)}}{\delta x_k} \Delta x_k^{(s)} = -f\left(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}\right)$$

$$x_k^{(s+1)} = x_k^{(s)} \Delta x_k^{(s)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$