LP19 : Diffraction de Fraunhoffer

Tamara Bardon-Brun

8 novembre 2021

Contexte

Niveau : CPGE ou Licence ?
Prérequis :

— Ondes progressives (plane et sphérique)

— Interférences

— Transformée de Fourier

Introduction

En optique géométrique, on considère que la lumière se propage en ligne droite dans l'air => si on regarde un faisceau collimaté qui arrive au travers d'un diaphragme, on devrait retrouver un faisceau collimaté plus fin à la sortie mais ce n'est pas le cas => Démonstration expérimentale avec lumière blanche

Quelque chose qui était déjà utilisé en fait puisque pour faire une source ponctuelle (qui va émettre dans toutes les directions) on utilise un diaphragme très peu ouvert. **Mais d'où ça vient ?**

1 Phénomène de diffraction

1.1 Définition

Il s'agit là d'un phénomène ondulatoire (qui va bien au-delà de juste la lumière)

Diffraction : phénomène d'éparpillement d'une onde lorsque l'on tente de la limiter spatialement (ou temporellement)

Exemples d'observation de diffraction :
— vagues dans un port
— exemple d'architecture pour l'acoustique
— exemples en optique

Démonstration laser qui diffracte :
— laser non-collimaté : fin => diffracte assez rapidement
— laser collimaté : plus large => fini par diffracter aussi mais plus loin

1.2 Principe d'Huygens-Fresnel – diffraction par un objet plan

Schéma des ondelettes secondaires
Enoncé du principe : Chaque point P d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source est proportionnel à celui de l'onde incidente en P et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point P. Les

vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

"Schéma principal" => à garder toute la leçon au tableau !

Traduction mathématique onde arrivant en M depuis un source quasi-ponctuelle :

$$ds_p(M) = At(x,y)s_0(P)\frac{e^{ik||\vec{PM}||}}{||\vec{PM}||}d\Sigma$$

où nous avons introduit la fonction de transfert $t(x,y)$
(Explication terme à terme, précision que A en vérité directionnel ? => condition de Gauss)

Onde totale reçue en M : $s(M) = A\int\int s_0(P)t(x,y)\frac{e^{ik||\vec{PM}||}}{||\vec{PM}||}dxdy$

Nous écrivons : $||\vec{PM}|| = \sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+D^2} = D\sqrt{1+\left(\frac{X-x}{D}\right)^2+\left(\frac{Y-y}{D}\right)^2}$

Développement aux petits angles (ce qui implique aussi une petite pupille) => $D \gg X-x, Y-y$
Nous avons alors : $||\vec{PM}|| \sim D\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{X-x}{D}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{Y-y}{D}\right)^2\right] = D\left[1+\frac{1}{2D}(X^2+Y^2+x^2+y^2)-\frac{xX+yY}{D}\right]$
Introduction des angles : $\alpha \sim \frac{X}{D}$ et $\beta \sim \frac{Y}{D}$

$$||\vec{PM}|| \sim D\left[1+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{\alpha x+\beta y}{D}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{D^2}\right]$$

où nous avons écrit $r = x^2+y^2 = ||\vec{OP}||^2$
Globalement les termes d'ordre supérieur sont très petit => on écrit que le facteur $1/||\vec{PM}|| \sim 1/D$ mais dans l'exponentielle le terme kD donne une phase globale et les termes suivants ne peuvent pas être négliger.

De même pour exprimer $s_0(P) = s_0\frac{e^{ik||\vec{SP}||}}{||\vec{SP}||}$, nous considérons : $||\vec{SP}|| = \sqrt{(x-X_0)^2+(y-Y_0)^2+d^2}$ et aux petits angles nous écrivons alors :

$$||\vec{SP}|| \sim d\left[1+\frac{1}{2}(\alpha_0^2+\beta_0^2)+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{d}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{d^2}\right]$$

Nous obtenons ainsi finalement :

$$s(M) \sim A\frac{s_0 e^{i\phi_0}}{dD}\int\int dxdyt(x,y)e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x+(\beta-\beta_0)y]}e^{\frac{ikr^2}{2}\left(\frac{1}{D}+\frac{1}{d}\right)}$$

On écrit le facteur global comme étant $\tilde{s}_0$

Peut être très compliqué à calculer dans le cas général => On va s'intéresser à un cas bien particulier la diffraction à l'infini que l'on appelle diffraction de Fraunhoffer.

1.3 Approximation de Fraunhoffer

On considère la limite $D, d \longrightarrow \infty$, le dernier facteur donne alors 1 et nous obtenons :

$$s(M) \sim \tilde{s}_0\int\int dxdyt(x,y)e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x+(\beta-\beta_0]} = \tilde{s}_0 TF[t(x,y)]$$

Plus précisément, ici on se place à $\frac{kr^2}{2D}, \frac{kr^2}{2d} \ll 1 \ \Leftrightarrow \ D, d \gg \pi\frac{r^2}{\lambda}$
Application numérique : si on considère un objet diffractant tel que $r \sim 0,1$ mm

— pour He-Ne ($\lambda = 650$ nm) => $D, d \gg 5$ cm

— pour limite du visible ($\lambda = 400$ nm) => $D, d \gg 10cm$

approximation raisonnable si on considère D de l'ordre de 1m.

En vérité, expérimentalement, on ne peut pas forcément avoir la limite $D, d \longrightarrow \infty$ (si limitation de place par exemple), mais surtout on a un problème car $\tilde{s}_0 \propto \frac{1}{dD} \longrightarrow 0$
Solution : on se place au foyer de deux lentilles convergentes (par simplicité, on considère en général deux focales identiques).
Faire schéma
Nous avons alors $\alpha \sim \frac{X}{f'}$, $\beta \sim \frac{Y}{f'}$ et $\tilde{s}_0 \propto \frac{1}{f'^2}$.
Notons également qu'en alignant correctement le système, nous pouvons considérer $X_0 = Y_0 = 0$. Nous avons alors :

$$s(M) = \tilde{s}_0 \int\int dxdyt(x,y)e^{-i\frac{kx}{f'}}e^{-i\frac{ky}{f'}}$$

Là on a fait le cas général, on va maintenant illustrer quantitativement ce phénomène pour un cas particulier qui est celui d'une fente rectangulaire

2 Diffraction par une fente rectangulaire

2.1 Figure de diffraction

Pour une fente rectangulaire :

$$t(x,y) = \frac{1}{ab} \text{ pour } -a \leq x \leq a \text{ et } -b \leq y \leq b \text{ ; } t(x,y) = 0 \text{ sinon}$$

Fonction créneau => TF donne un *sinc*

Nous admettons ici l'expression : $s(X,Y) = \tilde{s}_O \text{ sinc}\left(\frac{\pi a X}{\lambda f'}\right) \text{ sinc}\left(\frac{\pi b Y}{\lambda f'}\right)$
On voit apparaître ici les caractéritisques de l'objet diffractant => utilisation de la diffraction pour les mesurer par exemple :

2.2 Mesure de la largeur d'une fente

Expérience : utilisation laser collimaté et mesure avec capteur CCD

=> on retrouve la largeur de la fente tabulée

2.3 Influence des paramètres de la fente

Sur slide, montrer différentes figures de diffraction pour différentes fentes

3 Conclusion

Ouverture sur limitation dû à la diffraction :

- CD, DVD, bluray

- mesure distance Terre-Lune

Mais ça permet aussi de faire des trucs cools !
Filtrage, striocopie, structure cristalline, etc.