

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité : Physique
École doctorale n°564: Physique en Île-de-France

réalisée
au Laboratoire Kastler Brossel
sous la direction de Nicolas CHERRORET

présentée par
Tamara BARDON-BRUN

pour obtenir le grade de :
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE UNIVERSITÉ

Sujet de la thèse :
Propagation de la lumière en milieu complexe : effet Hall de spin optique en présence de désordre et force de Casimir en milieu Kerr

soutenue le 13 Janvier 2021

devant le jury composé de :

M.	Alberto AMO	Examinateur
M.	Nicolas CHERRORET	Directeur de thèse
M ^{me}	Agnès MAITRE	Présidente du jury
M.	Nicolas PAVLOFF	Examinateur
M.	Serguey SKIPETROV	Rapporteur
M ^{me}	Patrizia VIGNOLO	Rapportrice

Remerciements

Une page se tourne, ça y est... Il y a tellement de gens à remercier pour tout ce qui j'ai vécu durant ma thèse, mais également pour tout ce qui m'a mené à me lancer dans cette aventure. Je sais que je vais oublier des personnes et cela m'a amené à repousser pendant beaucoup trop longtemps d'écrire cette page... Je m'excuse d'avance à tou·tes celleux qui ne seront pas cité ici...

Tout d'abord, je voudrais remercier de tout cœur mon encadrant de thèse Nicolas Cherroret, ainsi que mon chef d'équipe Dominique Delande, qui m'ont permis de découvrir de nouveaux domaines passionnant de la physique que je ne soupçonnais pas avant de commencer à travailler sur cette thèse, mais surtout qui m'ont soutenu durant presque quatre ans, même à travers des périodes difficiles et sans qui je ne serais sûrement pas arrivée au bout de la rédaction de ce manuscrit.

Je tiens ensuite à remercier toute ma famille (et chez nous ça englobe beaucoup de gens). Merci à mes parents qui m'ont toujours soutenue dans tous mes projets et mes passions et m'ont permis de devenir la personne que je suis aujourd'hui ! Merci à mes petites sœurs Joh et Eowyn et à ma meilleure amie Adèle qui sont une part essentielle de ma vie. Merci à Caro et Valérie qui ont aussi été un soutien important pendant ces années de thèse. J'ai une pensée pour ma grand-mère et mon grand-père qui m'ont transmis beaucoup de choses et ont été une grande source d'inspiration dans toutes les facettes de ma vie. Merci à ma cousine Amélie, qui m'a accompagnée dans ma transition à la vie parisienne et qui a passé de très nombreuses soirées à m'écouter parler de physique, toujours avec beaucoup d'enthousiasme ! Et merci à tout les reste de la famille, les tantes, les oncles, les cousins et les cousines, qui ont tou·tes contribuer à mon parcours de vie.

Il me faut ensuite citer un certain nombre de personnes avec qui j'ai pu discuter pendant ma thèse et qui ont contribué à enrichir ce manuscrit. Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Pierre-Élie Larré qui, dès mon stage de M2, a été très présent dans ma thèse, m'a permis d'apprendre une grande part de ce que je sais sur les fluides de lumière et avec qui j'ai eu de très riches discussions (de physique mais pas que). Un grand merci ensuite à Quentin Glorieux qui m'a pointé (littéralement) la bonne direction quand je cherchais mon stage de M2 en me disant « Bon toi je sais que tu préfères la théorie donc tu devrais plutôt aller voir là-bas ». Merci à ses doctorants, l'autre Quentin en premier, puis Mourad qui m'ont toujours accueillie chaleureusement sur la manip et m'ont permis de saisir plus concrètement la réalité physique derrière mes calculs. Merci enfin à Simon Pigeon pour sa bonne humeur et pour sa super simulation sur laquelle il s'est cassé la tête plus d'une fois pour nous aider à comprendre ce qu'il se passait pour nos fluctuations !

Il y a beaucoup d'autres personnes au sein du laboratoire avec qui j'ai partagé ces dernières années. En tout premier, je pense à Thibault avec qui j'ai partagé mon bureau

depuis mon stage de M2, ainsi que les coups de gueule et les galères aussi bien que les moments joyeux de la vie de thésard·e, moments partagés également avec Jakub. L'équipe du Friday bar (devenu le Thursday bar entre temps) avec Léo qui m'a recrutée à l'issu de ma première participation, Tiphaïne et Tom avec qui nous nous sommes organisés pendant près de deux ans et Mourad, Ferhat et Yohann qui avaient commencé à reprendre le flambeau (même si le covid a rendu les choses compliquées...) ! Je dois ensuite remercier de tout cœur François Nez qui a été un parrain de thèse absolument extraordinaire, Lucille Julien pour toutes ses histoires et Pauline Yzombard pour sa bonne humeur !! Merci ensuite à Pierre Cladé grâce à qui j'ai pu participé à la Fête de la science. Un énorme merci et bravo à toute l'équipe administrative du labo pour tout leur travail et surtout leur patience infinie, en particulier Valérie Revelut, Laetitia Morel et Stéphanie Dubois ainsi qu'à Bintou Maiga pour sa bonne humeur la matin et pour son super boulot. Je pense bien sûr également à tou·tes les autres doctorant·es avec qui j'ai partagé une partie de ces trois années de thèse et demie ! Une pensée toutes particulière aux camarades du CGL : Valentin, Thibault, Léo et Simon.

Je dois mentionner le groupe de M1 avec qui nous avons vécu de nombreux grands moments. Je pense en particulier à l'équipe de l'IPT de 2016 : Gero, JB, Dylan, Jad, Valou, Mathis et Jacko, et tou·tes ceux qui nous ont accompagné et ont dû supporter des soirées entières d'anecdotes sur des bâtonnets de glace et des vis : Jules, Cindy, Elena, Yassine, David, Luis et beaucoup d'autres. Et bien sûr, un énorme merci à Loutre qui m'a toujours soutenu depuis ce moment ! J'ai ensuite une pensée très reconnaissante aux membres de CurieOsity au cours des années : Maxime, Thomas, Guillaume, Antonin, Chloé, Romain, Cathy, Hamdy, Enya, Hector, Léo, Mariette, LjF, Camille, Yohan, Jeanne et certainement plein d'autres personnes que j'oublie !

Cette thèse n'aurait pas été la même sans tous mes camarades de lutte !! La première génération de Jussieu en lutte : Antoine, Thibault, Fred, Marguerite, Roméo, Samuel, Sandro, puis tou·es ceux qui ont suivi : David, Marine, Nathan, Anthony, Eliott, Clément, Bérenger, Julia, Marie, Fred, les deux Camille, Hugo, les deux Loïc, Marta, Dana, Tom, Périlla, Tobie, Alan, Barbara, Natalia, Flavy, Farah, Hedi, Thomas, Yacine, Pat, Zae, Lou, Azriel, Ciel, Antoine et tellement d'autres que je ne peux pas citer tout le monde ! Les camarades de l'ENS : Louise, Aurore, Seb et Paul. Les camarades de la première heure des FemRev qui ont été toujours une source de joies et d'énergie même si avec la thèse je n'ai pas pu m'investir autant que je n'aurais voulu : Liza, Laurine, Ambre, Miléna, Élo, Mona, et toutes celles que j'oublie !

Merci à tou·tes mes étudiant·es qui ont été une grande motivation au cours de ma thèse !! En particulier, je dois citer l'équipe de l'IPT 2018 qui ont été les tou·premier· : Émilien, Tom, J-F, Xénia, Annia, Magdy, Guillain et Thomas.

Je me dois également de remercier tou·tes les enseignant·es qui m'ont inspiré et m'ont amenée à étudier la physique !!! Il y en a tellement que je ne peux pas tou·tes les citer malheureusement. Je tiens tout de même à mentionner tout particulièrement mes professeures de collège et de lycée : Mme Michel et Mme Avisse qui m'ont donné le goût des études en physique, et surtout Pierre Suret qui a grandement contribué à tout mon parcours dans le secondaire !

Table des matières

Introduction	vii
I Éléments d'optique en milieu inhomogène	1
I.1 Propagation de la lumière dans un milieu diélectrique inhomogène	1
I.1.1 Equations de Maxwell	1
I.1.2 Équation de Helmholtz	2
I.1.3 Approximation et équation paraxiales	3
I.1.4 Faisceau gaussien	4
I.2 Observables liées à la description d'un faisceau lumineux	5
I.2.1 Vecteur de Poynting et impulsion	5
I.2.2 Centroïde	5
I.2.3 Moment cinétique de la lumière	6
I.3 Effet de l'inhomogénéité du milieu sur un faisceau	8
I.3.1 Réflexion et réfraction à une interface	8
I.3.2 Effet Goos-Hänchen	9
I.3.3 Effet Imbert-Fedorov	10
I.3.4 Effet Magnus de la lumière	12
I.3.5 Interprétation en termes de phase géométrique	12
I.4 Propagation de la lumière dans un milieu désordonné	14
I.4.1 Introduction aux milieux désordonnés	14
I.4.2 Description statistique d'un milieu désordonné	15
I.4.3 Propagation libre	15
I.4.4 Propagation en présence de désordre : faisceau balistique	16
I.5 Conclusion	18
II Effet Hall de spin optique dans un désordre transverse	19
II.1 Introduction : effet Hall de spin pour les électrons	19
II.1.1 Effet Hall classique	19
II.1.2 Effet Hall de spin	20
II.1.3 Analogie avec l'effet Magnus optique	22
II.2 Propagation paraxiale d'un faisceau dans un désordre transverse	23
II.2.1 Désordre transverse	23
II.2.2 Évolution paraxiale du faisceau balistique	24
II.3 Au-delà du paraxial : effet Hall de spin de la lumière	27
II.3.1 Conditions initiales et hypothèses	27

II.3.2 Tenseur de Green exact en présence d'un désordre transverse	28
II.3.3 Étude du profil d'intensité	31
II.3.4 Trajectoire du centre du faisceau	32
II.4 Étude du moment cinétique	33
II.4.1 Moment cinétique orbital	34
II.4.2 Moment cinétique de spin	34
II.4.3 Conversion de moment cinétique	35
II.4.4 Évolution de l'état de polarisation	36
II.5 Proposition expérimentale	37
II.5.1 Présentation des contraintes expérimentales	37
II.5.2 Mesure de l'effet Hall de spin optique : approche polarimétrique . .	37
II.5.3 Adaptation de la méthode à notre système	39
II.6 Conclusion	41
III Éléments d'optique non-linéaire - Fluides de lumière	43
III.1 Introduction aux milieux diélectriques non-linéaires	43
III.1.1 Réponse totale d'un milieu et premier ordre	43
III.1.2 Réponse non-linéaire de deuxième ordre	44
III.1.3 Réponse non-linéaire de troisième ordre	46
III.1.4 Exemples de milieux Kerr	48
III.2 Effet Kerr dans la limite paraxiale : notion de fluide de lumière	49
III.2.1 Introduction aux fluides de lumière	49
III.2.2 Propagation paraxiale dans un milieu Kerr	51
III.2.3 Théorie des perturbations - Relation de Bogoliubov	55
III.2.4 Critère de Landau	58
III.3 Force exercée par un fluide de lumière sur un obstacle	61
III.3.1 Force de freinage et superfluidité dans les condensats de Bose-Einstein	61
III.3.2 Mise en évidence de la superfluidité dans un fluide de lumière . .	62
III.3.3 Tenseur des contraintes dans un fluide de lumière	63
a) Cas d'un milieu linéaire	64
b) Cas d'un milieu Kerr dans l'approximation paraxiale	65
III.4 Conclusion	66
IV Force de Casimir dans un fluide de lumière	67
IV.1 La force de Casimir dans le vide	67
IV.1.1 Introduction	67
IV.1.2 Expression de la force de Casimir dans le vide	68
IV.1.3 Mesures expérimentales	72
IV.1.4 Force de Casimir dans les fluides	73
IV.2 Évolution de fluctuations dans un fluide de lumière sans cavité	75
IV.2.1 Présentation du système	75
IV.2.2 Évolution des corrélations des fluctuations	79
IV.2.3 Simulation de la propagation	82
IV.2.4 Comparaison des résultats analytiques et numériques	83
IV.3 Force de Casimir au sein d'un fluide de lumière hors-équilibre	85
IV.3.1 Adaptation de l'approche de diffusion	85

IV.3.2 Expression du tenseur de Maxwell dans les différentes régions	86
IV.3.3 Expression de la pression de Casimir	87
IV.3.4 Discussion sur les résultats	90
IV.4 Conclusion	91
Conclusion Générale	92
A Polarisabilité non-linéaire	95
A.1 Deuxième ordre	95
A.2 Troisième ordre	96
B Relation de Bogoliubov	97
C Déivation du tenseur de Maxwell	99
C.1 Dans un milieu linéaire	99
C.2 Dans un milieu Kerr	100
C.3 Dans l'approximation paraxiale	101
D Calcul de la force de Casimir dans le vide	103
D.1 Base (TE,TM)	103
D.2 Calcul de $\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle$	103
D.3 Calcul de $\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle$	105
E Fonction de corrélation de courant g_1^j	107
E.1 Expression dans l'approximation de Bogoliubov	107
E.2 Contribution à la pression de Casimir	108
Bibliographie	111

Introduction

Depuis la fin du XXe siècle, la physique des atomes froids s'est énormément développée grâce à l'amélioration des techniques de refroidissement et de piégeage des atomes. En plus de présenter des propriétés quantiques à grande échelle, ces systèmes sont extrêmement intéressants en raison de leur grande flexibilité expérimentale. Il est ainsi relativement aisés de réaliser des potentiels extérieurs réglables pour les atomes (à l'aide de lasers de piégeage), de contrôler les interactions (via les résonances de Feshbach) ou de réaliser des mesures *in situ* d'un nuage d'atomes. La physique des atomes froids s'est ainsi avérée extrêmement prolifique, permettant une caractérisation sans précédent de phénomènes très variés de la mécanique quantique. Nous pouvons citer plus particulièrement ici les études de la condensation de Bose-Einstein [1, 2] et de la superfluidité [3] qui se sont fortement développées ces 20 dernières années. Les atomes froids permettent également d'explorer, dans un environnement contrôlé et isolé, des phénomènes de la matière condensée tels que le transition de Mott [4, 5] ou la localisation d'Anderson. Ce dernier exemple permet d'illustrer assez bien les avantages d'utiliser des atomes froids. Originalement [6], le phénomène de localisation d'Anderson a été découvert dans le contexte du transport d'électrons dans les métaux en présence d'impuretés (vues comme un désordre spatial). Il se caractérise par une suppression complète de la propagation des électrons due à des interférences destructives dans le processus de diffusion multiple, et s'observe habituellement pour un désordre suffisamment important. En utilisant des atomes froids, de très belles expériences ont pu mettre en évidence la localisation d'Anderson, grâce à un réglage fin de potentiels optiques désordonnés, un bon contrôle des interactions et une imagerie directe des atomes au sein du désordre [7, 8, 9, 10, 11]. Une difficulté, cependant, des expériences utilisant des atomes est la nécessité d'un refroidissement extrême, de sorte que la longueur de Broglie soit suffisamment grande pour sonder la nature quantique des phénomènes observés. Dans ce contexte, une question apparaît alors naturellement : pourrait-on reproduire, de la même façon, ces phénomènes quantiques avec un système d'optique ondulatoire qui ne nécessite pas de refroidissement ?

Un premier exemple illustrant cette idée est là encore celui de l'observation de la localisation d'Anderson, qui sur le papier ne nécessite pas spécifiquement l'emploi d'ondes de matière comme les électrons ou les atomes, mais peut être réalisée avec une onde classique comme la lumière. La recherche dans ce domaine a été très active depuis les années 90, et si en trois dimensions ce phénomène est encore élusif [12], la localisation des ondes lumineuses a été, par exemple, mise en évidence dans un désordre transverse [13, 14, 15]. Si le thème de la localisation d'Anderson ne sera pas développé dans cette thèse, nous reviendrons en revanche largement sur la configuration du désordre transverse qui a été

utilisée pour ces expériences.

Un deuxième exemple intéressant de possibilité offerte par les systèmes optiques pour reproduire des phénomènes de la matière condensée est celle de réaliser des interactions spin-orbite pour la lumière. À l'origine de ce mécanisme est le couplage naturel existant, dans un milieu inhomogène, entre la structure spatiale du champ électrique (« l'orbite ») et sa polarisation (le « spin »). Bien qu'en général très faible, l'interaction spin-orbite dans les systèmes optiques est mesurable et est même devenue, avec l'avènement de la nanophotonique, un phénomène important à prendre en compte dans de nombreuses configurations [16]. Sur un plan fondamental, l'étude des interactions spin-orbite de la lumière a, par ailleurs, permis de réinterpréter et de mieux comprendre des phénomènes historiques observés dans les milieux inhomogènes. C'est le cas de l'effet Imbert-Fedorov ou l'effet Magnus optique, caractérisés par un déplacement d'un faisceau lumineux proportionnel à son hélicité lors du passage dans une région d'indice optique variable et qui sont en fait des analogues optiques de l'effet Hall de spin électronique. Nous explorerons plus en détail cette thématique dans la première partie de cette thèse où plus de références pourront alors être trouvées.

Une troisième illustration de la possibilité de réaliser des analogues optiques de phénomènes observés dans les systèmes quantiques est le concept de fluide de lumière. Dans le contexte des gaz quantiques d'atomes froids, l'existence de régimes de type « fluide » est liée aux interactions entre les atomes. En optique, les photons n'interagissent pas naturellement dans le vide et obtenir un « fluide de lumière » nécessite donc de créer une interaction effective en exploitant les propriétés du milieu dans lequel la lumière se propage. Pour cela, il est possible recourir par exemple à des excitons-polaritons qui sont des particules mixtes lumière-matière dans des cavités semi-conductrices. De tels systèmes répondent à une équation similaire à l'équation de Gross-Pitaevskii pour les condensats de Bose-Einstein et permettent ainsi de reproduire des effets des fluides quantiques. Nous pouvons citer ici les expériences de condensation de la lumière [17, 18, 19], ainsi que la mise en évidence d'une transition superfluide pour des écoulements stationnaires [20]. L'avantage principal des polaritons est que les températures des expériences n'impliquent pas des températures ultra-basses. Mentionnons également qu'en jouant sur la géométrie des cavités semi-conductrices, il est possible d'explorer d'autres thématiques telles que des phénomènes topologiques pour la lumière [21, 22] ou bien l'étude du rayonnement Hawking [23]. Notons cependant que dans ces systèmes, une partie des propriétés des polaritons est liée au couplage avec la matière et non à la lumière en elle-même. Pour cette raison, entre autres, depuis quelques années plusieurs phénomènes physiques typiques des gaz quantiques ont été explorés avec de la lumière se propageant dans des milieux Kerr sans cavité. Dans ce type de système, la non-linéarité du milieu joue le rôle d'une interaction effective entre les photons et, dans la limite paraxiale, la lumière se comporte comme une onde de matière scalaire. L'étude de ces systèmes fait l'objet de la seconde moitié de cette thèse.

Dans ce contexte, l'objet de cette thèse est l'étude théorique de la propagation de faisceaux lumineux dans deux types de milieux complexes où une inhomogénéité d'indice non-triviale est présente et permet de faire apparaître des phénomènes physiques habituellement observés dans un contexte de matière condensée ou dans des gaz quantiques.

Spécifiquement, nous mettons ici en évidence deux nouveaux phénomènes : un effet Hall de spin optique en présence de désordre d'une part (chapitres 1 et 2) et une force de Casimir induite par les fluctuations d'un quasi-condensat de lumière (chapitres 3 et 4). En détail :

- Dans le chapitre 1, nous introduirons le concept d'interaction spin-orbite de la lumière et présenterons quelques expériences associées. Nous discuterons ensuite de la propagation de la lumière dans les milieux inhomogènes, ainsi que d'un certain nombre de phénomènes optiques qui y sont liés. Nous terminerons ce chapitre en rappelant les bases de la propagation de la lumière dans les milieux désordonnés.
- Dans le chapitre 2, nous décrirons la propagation d'un faisceau collimaté légèrement tilté au sein d'un désordre transverse en prenant en compte les premières corrections hors-paraxial. Par des calculs basés sur le tenseur de Green en présence de désordre et par résolution de l'équation de Dyson associés, nous montrerons alors que dans cette configuration, la lumière balistique subit un effet Hall de spin analogue à celui observé pour les électrons dans les solides.
- Dans le chapitre 3, nous rappellerons quelques principes élémentaires de l'optique non-linéaire, puis nous nous concentrerons sur la propagation paraxiale au sein d'un milieu Kerr. Cela nous conduira naturellement à la notion de fluide de lumière, dont nous donnerons quelques exemples. Nous terminerons par un calcul du tenseur de Maxwell dans un milieu Kerr, qui nous sera utile pour l'étude théorique du chapitre suivant.
- Dans le chapitre 4, enfin, nous introduirons rapidement la thématique des forces de Casimir, puis nous montrerons comment une force similaire peut être observée à partir de fluctuations spatiales d'un faisceau lumineux faiblement incohérent se propageant dans un milieu Kerr. Dans cette configuration, en effet, la non-linéarité induit une amplification des fluctuations du faisceau et conduit à l'émergence d'une cohérence à longue portée, analogue à celle observée dans les quasi-condensats d'atomes en basse dimension, induisant une force de Casimir contrôlable.

Les résultats principaux de cette thèse ont été publiés dans les articles :

- Tamara BARDON-BRUN, Dominique DELANDE et Nicolas CHERRORET, « Spin Hall effect of light in a random medium », *Physical Review Letters*, **123**(4), 043901 (2019).
- Tamara BARDON-BRUN, Simon PIGEON et Nicolas CHERRORET, « Classical Casimir force from a quasi-condensate of light », *Physical Review Research*, **2**(1), 013297 (2020).

Chapitre I

Éléments d'optique en milieu inhomogène

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques éléments théoriques permettant de décrire la propagation de la lumière dans les milieux inhomogènes. Dans de tels systèmes, la variation de l'indice optique entraîne de nombreux effets qui viennent modifier la trajectoire de faisceaux lumineux. Après avoir introduit quelques observables optiques utiles, nous discuterons dans un premier temps le cas de milieux où l'inhomogénéité est bien déterminée (comme une interface ou un milieu possédant un gradient d'indice). Dans la deuxième partie de ce chapitre, enfin, nous rappellerons les principes physiques gouvernant la propagation de la lumière au sein de milieux totalement désordonnés, pour lesquels la description de l'inhomogénéité requiert une approche statistique.

I.1 Propagation de la lumière dans un milieu diélectrique inhomogène

I.1.1 Équations de Maxwell

Dans sa description ondulatoire, la lumière est caractérisée par le champ électromagnétique composé d'un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et d'un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ couplés entre eux. Leur évolution est régie par les équations de Maxwell qui, dans un milieu diélectrique et non-magnétique, s'écrivent [24, 25] :

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{I.4})$$

où μ_0 est la perméabilité du vide. Dans ces équations, nous avons introduit l'induction électrique $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ qui permet de décrire le champ électrique ainsi que son interaction avec le milieu matériel considéré. Elle est définie par l'expression :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

où $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ est la polarisabilité du milieu, qui définit la réponse de celui-ci au champ électrique appliqué, et ϵ_0 est la permittivité du vide. Dans une hypothèse de réponse locale et instantanée, nous avons [26] :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, t) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

avec $\chi(\mathbf{r}, t)$ le tenseur de susceptibilité du milieu et où le symbole $:$ désigne le produit contracté.

Dans ce chapitre et le suivant, nous considérerons des matériaux dont la réponse est linéaire (c'est-à-dire pour lesquels la susceptibilité ne dépend pas du champ électrique). Le cas d'un milieu non-linéaire sera traité dans la deuxième partie de cette thèse. De plus, nous nous limiterons dans ce chapitre à des milieux dont la réponse est scalaire (c'est-à-dire identique quelque soit la direction de propagation de l'onde) et indépendante du temps. Nous définissons alors une nouvelle quantité scalaire, la permittivité relative du milieu $\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r})$, qui nous donne la relation simple $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}$.

I.1.2 Équation de Helmholtz

A partir de maintenant, nous allons nous concentrer sur l'évolution du champ électrique, le champ magnétique étant déduit de l'équation (I.3). Pour cela, nous introduisons la transformée de Fourier temporelle :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad (\text{I.5})$$

où nous utilisons, pour alléger les notations, la même notation \mathbf{E} pour le champ (réel) et pour sa composante de Fourier (qui est complexe). De même, nous définissons la transformée de Fourier spatiale dans l'espace des \mathbf{k} , qui s'écrit en dimension 3 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{I.6})$$

En combinant les équations (I.3) et (I.4), nous obtenons une équation d'onde pour le champ électrique gouvernant l'évolution spatiale de ses composantes de Fourier :

$$-\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad (\text{I.7})$$

où nous avons introduit la vitesse de la lumière dans le vide $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Dans la suite, sauf mention explicite, nous nous placerons toujours dans l'espace des pulsations ω . Nous omettrons ainsi le paramètre ω dans notre notation, c'est-à-dire que nous notons $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$. L'équation (I.7) est appelée équation de Helmholtz vectorielle. Ce sera le point de départ de notre étude sur l'effet Hall de spin de la lumière dans le chapitre II. En effet, c'est elle qui contient la description complète de l'aspect vectoriel de la lumière, essentiel pour décrire cet effet.

Mentionnons à ce stade que, dans de nombreuses situations, on utilise une approximation scalaire pour le champ électrique comme discuté par exemple dans l'article [27]. Dans ce

cas, le second terme de l'équation (I.7) est négligé. Les trois composantes du champ sont alors découplées et obéissent à l'équation de Helmholtz scalaire :

$$-\Delta E_i(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r}) \frac{\omega^2}{c^2} E_i(\mathbf{r})$$

où $i = x, y, z$. Cette description de la lumière est bien souvent suffisante pour décrire qualitativement la propagation à une échelle macroscopique, cependant elle ne permet pas de prendre en compte de nombreux effets, plus ou moins fins, liés à la polarisation.

I.1.3 Approximation et équation paraxiales

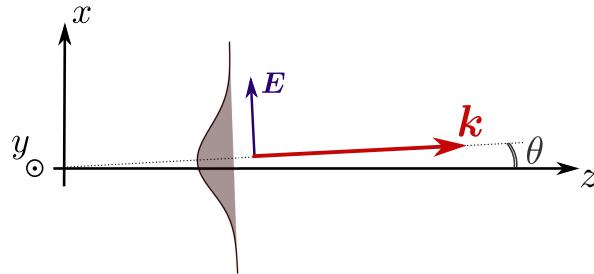


Fig. I.1 Dans l'approximation paraxiale, nous étudions des faisceaux suffisamment collimatés, dont la direction de propagation \mathbf{k} est faiblement inclinée par rapport à un axe optique z ($\theta \ll 1$) et dont l'enveloppe est suffisamment molle.

L'approximation paraxiale a été développée pour décrire les faisceaux laser [28]. En effet, elle permet de décrire la propagation des faisceaux lumineux dont la direction de propagation reste proche d'un axe optique, que nous noterons ici z . Cette situation est illustrée sur la figure I.1 où nous avons $\theta \ll 1$. Dans cette thèse, nous nous concentrerons sur des situations où la variation de la permittivité est très faible ou nulle selon l'axe z . Ainsi, nous écrivons :

$$\epsilon(\mathbf{r}) \simeq \epsilon(\mathbf{r}_\perp) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{r}_\perp)$$

où nous avons noté $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, $\bar{\epsilon}$ est la composante homogène de la permittivité et $\delta\epsilon$ la composante fluctuante. Pour introduire l'approximation paraxiale, nous écrivons le champ électrique sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) = \mathcal{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp, z) e^{ikz} + \mathcal{E}_z(\mathbf{r}_\perp, z) \mathbf{e}_z$$

avec $k = \sqrt{\bar{\epsilon}} \omega/c$ où $\bar{\epsilon}$. En utilisant également la relation (I.1), l'équation (I.7) s'écrit alors pour l'enveloppe transverse [24, 29] :

$$2ik \frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial z} = -\Delta_\perp \mathcal{E}_\perp - \frac{\omega^2}{c^2} \delta\epsilon(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_\perp - \frac{\partial^2 \mathcal{E}_\perp}{\partial z^2} - \nabla_\perp [\mathcal{E}_\perp \cdot \nabla_\perp (\ln \epsilon(\mathbf{r}_\perp))] . \quad (\text{I.8})$$

Supposons maintenant que l'angle θ est petit en entrée du milieu et que l'enveloppe $\mathcal{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp)$ du faisceau incident varie suffisamment lentement à l'échelle de la longueur d'onde (voir figure I.1). Cette condition impose en particulier que l'indice du milieu varie également lentement, c'est-à-dire [30] :

$$\frac{2\pi}{k} \left| \frac{\nabla_\perp \epsilon(\mathbf{r}_\perp)}{\bar{\epsilon}} \right| \ll 1 .$$

Sous ces conditions, nous trouvons alors que $|\mathcal{E}_z| \ll |\mathcal{E}_\perp|$ et que les deux derniers termes de l'équation (I.8) sont négligeables. Le champ est donc contenu dans le plan transverse (x, y) et obéit à l'équation paraxiale [31, 32] :

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \Delta_\perp \mathcal{E} - \frac{\omega^2}{2kc^2} \delta\epsilon(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E} \quad (\text{I.9})$$

où nous considérons à présent une composante (quelconque) $\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z)$ du champ. Nous reviendrons plus en détail sur cette équation dans le chapitre II.

I.1.4 Faisceau gaussien

Dans le cas d'un milieu homogène, une solution de l'équation paraxiale est le faisceau gaussien [28]. Ce type de solution est particulièrement considéré en physique car il décrit très bien les faisceaux laser, comme cela a été longuement étudié dans la littérature depuis les années 60 [33, 34, 35, 36]. Pour un faisceau gaussien, l'enveloppe transverse du champ électrique s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) = \mathcal{E}_o \frac{w_o}{w(z)} \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{w^2(z)}\right) \exp\left[i\left(\frac{kr_\perp^2}{2R(z)} - \zeta(z)\right)\right] \quad (\text{I.10})$$

où \mathcal{E}_o est l'amplitude du champ à l'origine, $w(z) = w_o \sqrt{1 + (z/z_o)^2}$ est la largeur du faisceau (ou *waist* en anglais), w_o correspondant à la largeur de l'état initial, $R(z) = z(1 + (z/z_o)^2)$ est le rayon de courbure du faisceau et $\zeta(z) = \arctan(z/z_o)$ est appelée la « phase de Gouy », qui décrit le retard de la phase de l'onde. Ces quantités font intervenir la longueur caractéristique z_o , appelée « longueur de Rayleigh » et définie par :

$$z_o = \frac{kw_o^2}{2}.$$

Si nous regardons la limite $z \ll z_o$, nous avons :

$$w(z) = w_o + \mathcal{O}\left(\frac{z^2}{z_o^2}\right).$$

Ainsi pour des distances de propagation faibles devant z_o , la largeur du faisceau reste quasiment constante, de sorte que le faisceau reste collimaté. Dans la suite de cette thèse, nous supposerons toujours cette limite vérifiée. Dans cette approximation, nous avons également :

$$\frac{kr^2}{2R(z)} - \zeta(z) = \frac{z}{z_o} \left[\left(\frac{r_\perp}{w_o} \right)^2 - 1 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{z^2}{z_o^2}\right).$$

Notons cependant que l'enveloppe gaussienne $\exp(-r^2/w_o^2)$ sélectionne principalement les positions $r_\perp \lesssim w_o$. Les contributions principales dans l'expression (I.10) sont alors données par la première exponentielle. Ainsi, dans l'approximation d'un faisceau collimaté, le champ électrique est décrit correctement par l'expression très simple :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z \ll z_o) \sim \mathcal{E}_o \exp\left(-\frac{r_\perp^2}{w_o^2}\right)$$

que nous serons amené·es à utiliser dans le chapitre suivant.

I.2 Observables liées à la description d'un faisceau lumineux

I.2.1 Vecteur de Poynting et impulsion

Une manière assez directe de caractériser la propagation d'un faisceau lumineux est de s'intéresser au transport de l'énergie du champ électromagnétique. Celui-ci est caractérisé par le vecteur de Poynting, dont l'expression instantanée est donnée par la relation [24, 25, 37] :

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t).$$

Les champs électrique et magnétique oscillant très rapidement en fonction du temps, il est en général suffisant de travailler avec le vecteur de Poynting moyen sur les cycles. Celui-ci s'écrit, dans le cas d'une onde monochromatique,

$$\langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r}). \quad (\text{I.11})$$

Le flux d'énergie moyen du faisceau lumineux à travers une surface S est alors donné par :

$$\Phi = \int d\mathbf{S} \cdot \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_t$$

où $d\mathbf{S}$ est un vecteur normal à S . Ce transport d'énergie nous permet également de caractériser la direction de propagation du faisceau lumineux. À cette fin, on définit l'impulsion locale du faisceau par [25, 38] :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mu_0 \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_t. \quad (\text{I.12})$$

I.2.2 Centroïde

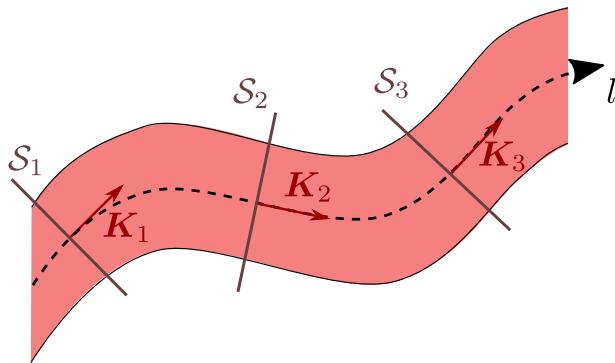


Fig. I.2 Schéma illustrant la propagation d'un faisceau lumineux selon la coordonnée curviligne l , ainsi que les plans normaux associés pour différentes coordonnées.

Dans le cas d'un faisceau faiblement diffractant, la direction de propagation de la lumière est, par définition de l'équation (I.11), orthogonale au champ \mathbf{E} (et \mathbf{B}). Nous

pouvons ainsi définir une trajectoire, paramétrisée par la coordonnée curviligne l , pour le centre du faisceau (ou centroïde) :

$$\mathbf{R}(l) = \frac{\int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \cdot \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_t \mathbf{r}}{\int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \cdot \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_t} \quad (\text{I.13})$$

où \mathcal{S} sont les surfaces normales au vecteur de Poynting comme illustré sur la figure I.2. Dans les cas que nous étudierons par la suite, nous considérerons des faisceaux collimatés pour lesquels les surfaces \mathcal{S} sont des plans perpendiculaires au vecteur moyen $\mathbf{K}(l)$. Ce vecteur est défini par :

$$\mathbf{K}(l) = \frac{\int_{\mathcal{S}^*} d\mathcal{S}^* \cdot \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, t) \rangle_t \mathbf{q}}{\int_{\mathcal{S}^*} d\mathcal{S}^* \cdot \langle \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{q}, t) \rangle_t} \quad (\text{I.14})$$

où \mathcal{S}^* est l'espace réciproque associé à \mathcal{S} . Dans le cas particulier de l'approximation paraxiale, la coordonnée curviligne correspond à z , les surfaces \mathcal{S} sont les plans transverses (x, y) et $\mathcal{S}^* = (q_x, q_y)$ (voir figure I.1). Nous avons ainsi :

$$\mathbf{R}(z) = \frac{\int dx dy \mathbf{r} \langle \Pi_z(\mathbf{r}, t) \rangle_t}{\int dx dy \langle \Pi_z(\mathbf{r}, t) \rangle_t}.$$

I.2.3 Moment cinétique de la lumière

Dans le cas d'une particule classique, le moment cinétique est donné par la relation bien connue $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Nous allons reprendre cette expression pour la lumière en définissant localement son moment cinétique par :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}(\mathbf{r}).$$

En réutilisant l'expression de l'impulsion (I.12), nous obtenons directement, dans le cas d'une onde monochromatique,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}^*(\mathbf{r})].$$

A nouveau, nous allons considérer le moment cinétique total selon la coordonnée curviligne l :

$$\mathbf{J}(l) = \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

En utilisant l'équation (I.3) et dans le cas de l'approximation paraxiale, \mathbf{J} se décompose alors en deux termes distincts, comme développé dans les références [38, 39] :

$$\mathbf{J}(l) = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} E_i^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_i + \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} \mathbf{E}^* \times \mathbf{E} \quad (\text{I.15})$$

où les indices i répétés sont sommés.

Le premier terme du membre de droite dépend de la variation spatiale du champ électrique. On l'interprète comme un moment cinétique orbital [16, 40] :

$$\mathbf{L}(l) = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int_{\mathcal{S}} d\mathcal{S} E_i^* (\mathbf{r} \times \nabla) E_i. \quad (\text{I.16})$$

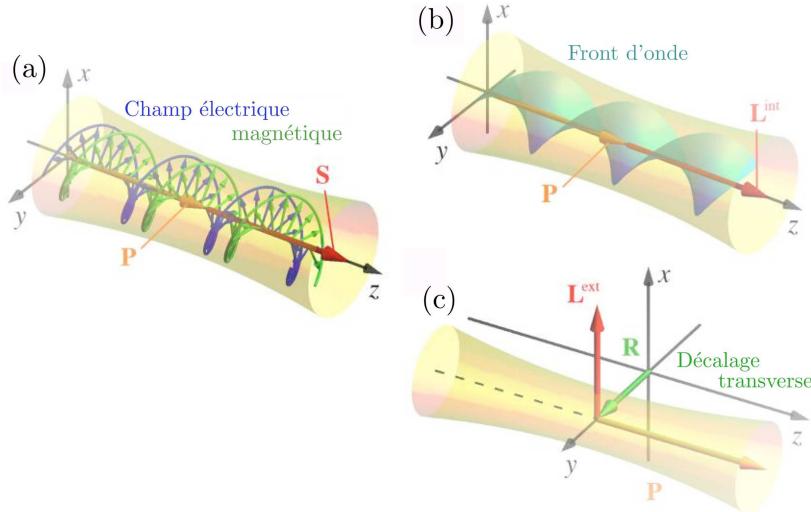


Fig. I.3 Illustrations tirées de l'article de Bliokh, Rodriguez-Fortuño, Nori et Zayats [16] illustrant les différents moments cinétiques de la lumière : (a) le spin du faisceau lumineux, lié à la rotation des champs électrique et magnétique ; (b) le moment cinétique orbital intrinsèque, lié à une variation de la phase du champ ; (c) le moment cinétique orbital extrinsèque, lié à un déplacement du faisceau lumineux par rapport à une origine. Ici, la notation \mathbf{P} correspond à l'impulsion moyenne du faisceau.

Pour un faisceau lumineux, le moment cinétique orbital peut décrire deux phénomènes différents : une déformation du front d'onde faisceau, on parle alors de moment cinétique orbital intrinsèque, ou un déplacement du faisceau par rapport à une origine, on parle alors de moment cinétique orbital extrinsèque (voir figures I.3(b) et I.3(c) pour une illustration). C'est ce dernier qui va intervenir dans l'étude de l'effet Hall de spin optique présentée dans le chapitre II.

Si, à présent, nous nous intéressons au second terme de l'équation (I.15), nous voyons que celui-ci est non-nul lorsque $\text{Im}(\mathbf{E}) \neq 0$. On l'interprète comme un moment angulaire de spin de la lumière [16, 40] :

$$\mathbf{S}(l) = \frac{\epsilon_0}{2i\omega} \int_S d\mathbf{S} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (\text{I.17})$$

Pour un faisceau collimaté de vecteur d'onde \mathbf{K} dans l'approximation paraxiale, nous avons vu, dans la partie I.1.3, que le champ électrique est transverse. Il peut donc être décomposé sur une base orthonormée quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dans le plan transverse (orthogonal à \mathbf{K}). L'expression du spin est alors directement donnée par :

$$\mathbf{S} = \frac{\epsilon_0 I}{\omega} \sigma \hat{\mathbf{K}} \quad (\text{I.18})$$

avec $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/K$. Dans cette expression, nous avons introduit l'intensité du faisceau $I = \int_S d\mathcal{S} |\mathbf{E}|^2$ et l'hélicité de la lumière $\sigma = 2 \text{Im}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_2)/|\mathbf{E}|^2$. La valeur de σ ne dépend

pas du choix de base ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$). Cette valeur est comprise entre 0, pour une polarisation rectiligne, et ± 1 pour les polarisations circulaires (respectivement gauche et droite pour un observateur voyant arriver l'onde). Le lien entre polarisation et spin est ainsi explicite pour la lumière. Précisément, le spin va caractériser la rotation du champ électrique, il est nul pour une polarisation rectiligne et maximum pour une polarisation circulaire (voir figure I.3(a)).

I.3 Effet de l'inhomogénéité du milieu sur un faisceau

I.3.1 Réflexion et réfraction à une interface

Dans cette partie et dans ce qui va suivre, nous considérons un faisceau lumineux collimaté de vecteur d'onde moyen \mathbf{K} (défini dans l'équation (I.14)).

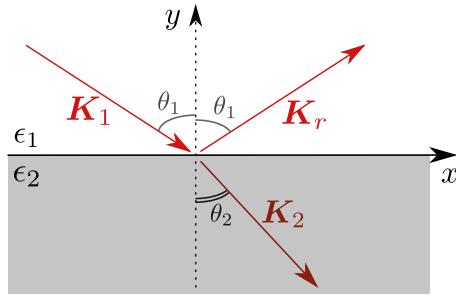


Fig. I.4 Schéma de l'interface entre deux milieux diélectriques avec la définition des différents vecteurs d'onde réfléchis et transmis.

Un premier phénomène bien connu dû à une inhomogénéité d'indice optique est celui de réflexion/réfraction, se manifestant à l'interface entre deux milieux diélectriques homogènes de permittivité ϵ_1 et ϵ_2 différentes, comme schématisé dans la figure I.4. Pour une interface plane, le faisceau est réfléchi avec l'angle d'incidence θ_1 . Pour le faisceau transmis, la déviation est donnée par la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

où $n_i = \sqrt{\epsilon_i}$ et θ_2 est l'angle réfracté. Cette loi (empirique au départ) peut être retrouvée à l'aide des relations de continuité du champ électrique déduites des équations de Maxwell [24]. La direction de propagation du faisceau lumineux est ainsi déviée par la discontinuité entre les deux milieux. Ce phénomène de réfraction peut s'observer très facilement en envoyant un faisceau lumineux de l'air (milieu 1) vers un milieu transparent (milieu 2). C'est pour cela que les cuillères ou les pailles plongées dans un verre d'eau apparaissent cassées.

Ce résultat peut être étendu à des milieux inhomogènes continus en considérant le gradient d'indice optique comme une succession d'interfaces entre deux indices n_i et $n_i + dn_i$. Dans la limite d'un faisceau peu diffractant ($\lambda |\nabla n|/n \ll 1$), la variation du vecteur

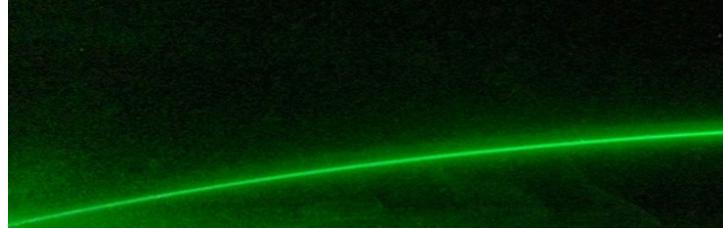


Fig. I.5 Courbure de la trajectoire d'un faisceau laser observée dans un gradient d'indice. Photo tirée du site du Palais de la Découverte (© C.Roussel - Universcience)

d'onde le long de la trajectoire du faisceau obéit alors à l'équation [24] :

$$\frac{d\hat{\mathbf{K}}}{dl} = \frac{\nabla n}{n} \quad (\text{I.19})$$

où $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}/K$ est la direction du vecteur d'onde moyen défini par la relation (I.14). Dans cette même approximation, la trajectoire du centre du faisceau est alors donnée par :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dl} = \hat{\mathbf{K}} . \quad (\text{I.20})$$

La déviation du vecteur d'onde par l'inhomogénéité du milieu résulte alors en une courbure du faisceau lumineux. Celle-ci s'observe dans de nombreuses expériences, par exemple en utilisant un gradient de température comme visible sur la figure I.5. C'est ainsi que lors d'un mirage, notre œil perçoit le bleu du ciel qui a « rebondi » sur l'air chaud à la surface du sol. Notons que dans la limite semi-classique considérée ici, les équations (I.19) et (I.20) sont analogues aux équations du mouvement d'une particule dans un gradient de potentiel.

I.3.2 Effet Goos-Hänchen

Jusqu'ici, nous avons uniquement considéré des vecteurs d'onde réels, ce qui revient à négliger la présence d'ondes évanescentes. Ces ondes s'atténuent exponentiellement lors de leur propagation, ce qui justifie souvent de ne pas les prendre en compte. Cependant, elles peuvent jouer un rôle non-négligeable à proximité de l'interface entre deux milieux, comme dans l'effet Goos-Hänchen que nous allons à présent discuter.

Cet effet correspond à un décalage, dans le plan d'incidence, du faisceau totalement réfléchi par rapport au faisceau incident, comme illustré sur la figure I.6. Il a été décrit et mesuré pour la première fois par Goos et Hänchen en 1947 [41]. À la suite de leur mesure, une première expression théorique de ce décalage a été obtenue par Artmann [42], confirmée peu de temps après par Fragstein [43]. Leurs résultats prédisent deux expressions différentes du déplacement selon l'orientation de la polarisation de la lumière (parallèle ou perpendiculaire au plan d'incidence). Cette dépendance a été vérifiée par la suite expérimentalement [44]. Cependant, ces expressions ne sont correctes que pour des angles proches de l'angle critique. Par la suite, Renard [45] obtient des expressions, valides dans un cadre plus large, en s'appuyant sur des considérations de flux d'énergie que nous allons

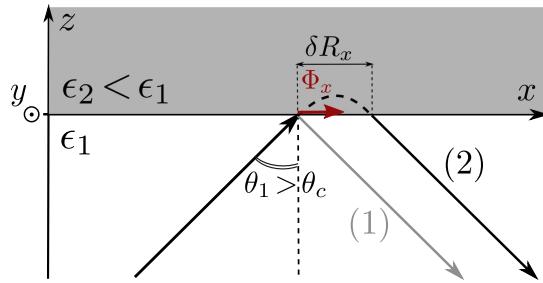


Fig. I.6 Schéma illustrant l'effet Goos-Hänchen. Nous montrons ici la propagation d'ondes évanescentes dans le second milieu (courbe pointillée) causant un déplacement du faisceau réfléchi, le rayon (1) représentant la réflexion sans décalage et le rayon (2) le faisceau réfléchi réel.

très rapidement évoquer.

Nous regarderons ici le cas d'une réflexion totale (c'est-à-dire où l'angle incident θ_1 est supérieur à l'angle critique θ_c) comme schématisé sur la figure I.6. Dans cette situation, le calcul du flux Φ_z à travers l'interface entre les deux milieux montre que celui-ci est nul. Cela semble assez intuitif puisque si la réflexion est totale il n'y a pas de transfert d'énergie vers le deuxième milieu. Ainsi le flux d'énergie entrant du faisceau incident ressort entièrement dans le faisceau réfléchi. Cependant, quand on prend en compte les ondes évanescentes dans le milieu 2, on trouve que le flux Φ_x dans le milieu 2 à travers le plan (y, z), lui, n'est pas nul [45]. Le faisceau lumineux se propage donc sur une certaine distance selon la direction x avant de ressortir dans le milieu 1. Un décalage δR_x apparaît ainsi entre le faisceau incident et le faisceau réfléchi, comme illustré sur la figure I.6. Avec ces considérations et dans la limite proche de l'angle critique, on trouve pour le décalage une expression du type [45] :

$$\delta R_x \propto \frac{\lambda}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 - \epsilon_2/\epsilon_1}}$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière dans le milieu 1. Le facteur de proportionnalité dépend, dans cette limite, uniquement des deux milieux considérés et diffère selon la polarisation de l'onde incidente.

I.3.3 Effet Imbert-Fedorov

En plus du décalage dans le plan d'incidence, il existe des cas où le faisceau est également décalé dans la direction transverse (c'est-à-dire suivant y dans le cas de la figure I.6). L'existence de ce décalage a été évoquée pour la première fois par Fedorov [46], puis étudié et mis en évidence par Imbert dans le cas de la réflexion totale [47]. Pour cela, il a calculé l'expression du vecteur de Poynting du faisceau à l'interface et a montré que, dans le cas d'une polarisation elliptique (pour laquelle le vecteur de polarisation est complexe), ce dernier comporte une composante transverse au plan d'incidence non-nulle. En utilisant les mêmes considérations sur le flux que celles présentées dans la partie précédente, il en a déduit un nouveau décalage selon la direction y , dont l'expression pour le cas de

la réflexion totale peut être trouvée dans son article [47]. À noter que, contrairement à l'effet Goos-Hänchen, l'effet Imbert-Fedorov existe également dans le cas d'une réflexion partielle où il a été mesuré bien plus récemment [48].

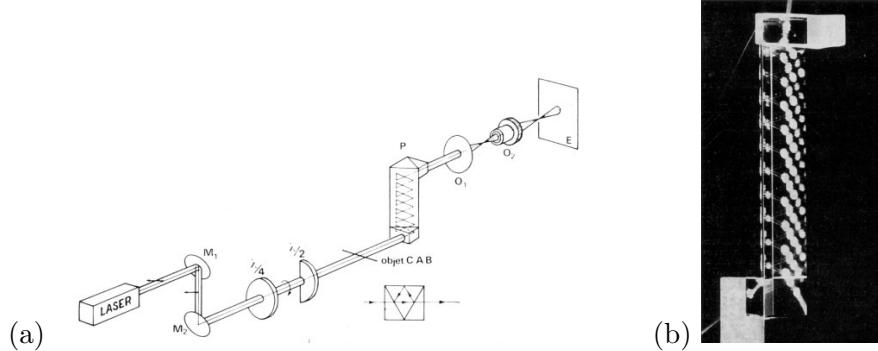


Fig. I.7 Illustrations tirées de l'article d'Imbert [47] (a) Schéma du montage expérimental d'Imbert qui lui a permis d'amplifier et de mesurer le décalage du faisceau en faisant se réfléchir de nombreuses fois la lumière à l'intérieur d'un prisme vertical P . (b) Photographie du prisme où les différentes réflexions du faisceau le long des parois sont visibles.

Afin de mesurer le décalage prédict qui est très faible (voir l'équation (I.21) ci-dessous), Imbert a utilisé une succession de réflexions totales à l'intérieur d'un prisme permettant d'accumuler les décalages et d'amplifier l'effet. Le schéma de ce montage ainsi qu'une photographie tirés de son article sont visibles sur la figure I.7. Ses prédictions donnent une expression qualitativement correcte et en accord avec les mesures effectuées, cependant celles-ci présentaient de nombreuses sources d'incertitudes, en particulier liées à la faiblesse de l'effet même après amplification, mais également à la trajectoire du faisceau dans le prisme qui devait être précisément aligné pour que les décalages s'additionnent correctement. Des mesures plus récentes ont montré les limites de l'interprétation d'Imbert et, tout comme pour l'effet Goos-Hänchen, de nouveaux calculs plus précis ont été développés [49]. Le décalage a ainsi été réinterprété comme un effet de couplage spin-orbite pour la lumière non lié aux ondes évanescentes. Cette interprétation a été appuyée par de nouvelles mesures polarimétriques plus précises qui ont permis de mesurer le décalage après une seule réflexion totale [48], puis dans le cas d'un faisceau transmis [50]. Nous développerons cette interprétation et cette technique de mesure dans le chapitre II où elles jouent un rôle central. Nous pouvons cependant déjà noter que, même si ces expressions dépendent fortement des indices de réfraction des deux milieux ainsi que de l'angle d'incidence, le décalage transverse δR_y est toujours de l'ordre de

$$\delta R_y \sim -\frac{\sigma}{k} \quad (\text{I.21})$$

où nous rappelons que σ est l'hélicité de la lumière et $k = 2\pi/\lambda$. L'effet est donc sub-longueur d'onde, ce qui explique les difficultés de sa mesure.

I.3.4 Effet Magnus de la lumière

Dans les effets Goos-Hänchen et Imbert-Fedorov, c'est la discontinuité de la permittivité qui amène à un décalage brutal du faisceau. Il est alors logique de chercher à savoir si des décalages similaires peuvent apparaître dans des milieux inhomogènes où la permittivité va varier de manière continue. Ce problème a été étudié pour la première fois dans un article de Liberman et Zel'Dovich en 1992 [51]. Dans ce travail, les auteurs abordent la question de deux manières. L'une est ondulatoire, basée sur l'étude des corrections non paraxiales de l'équation de Helmholtz vectorielle. L'autre est basée sur une approche semi-classique consistant à dériver les premières corrections d'ordre $\lambda|\nabla n|/n \ll 1$ aux équations du mouvement (I.19) et (I.20) de l'optique géométrique. Dans ce cadre, la prédition de Liberman et Zel'Dovich s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dl} = \hat{\mathbf{K}} - \frac{\sigma}{k} [\hat{\mathbf{K}} \times \nabla(\ln n)] \quad (\text{I.22})$$

où le terme correctif proportionnel à σ est très petit dans la limite $\lambda|\nabla n|/n \ll 1$. L'équation pour \mathbf{K} est, quant à elle, toujours donnée par l'expression (I.19). Nous pouvons voir que ce terme correctif est un déplacement transverse $\delta\mathbf{R}$ (voir figure I.8(a)) qui fait intervenir l'hélicité de la lumière, tout comme pour l'effet Imbert-Fedorov. Dans le cas présent néanmoins, le déplacement est progressif, augmentant au fur et à mesure de la propagation dans le milieu inhomogène. Nous avons donc un champ électrique en rotation se propageant dans un gradient d'indice optique qui se voit déplacé selon une direction transverse. Une analogie peut alors être faite avec un objet matériel en rotation dans un fluide en écoulement pour lequel un gradient de pression apparaît. Ce gradient crée une force qui va entraîner le déplacement de l'objet (comme illustré sur la figure I.8(b)), ce que l'on appelle effet Magnus [52]. Ceci explique l'appellation « effet Magnus de la lumière », déjà utilisé par Liberman et Zel'Dovich dans un de leur article antérieur où ils avaient prédit numériquement puis mesuré expérimentalement cette déviation [53].

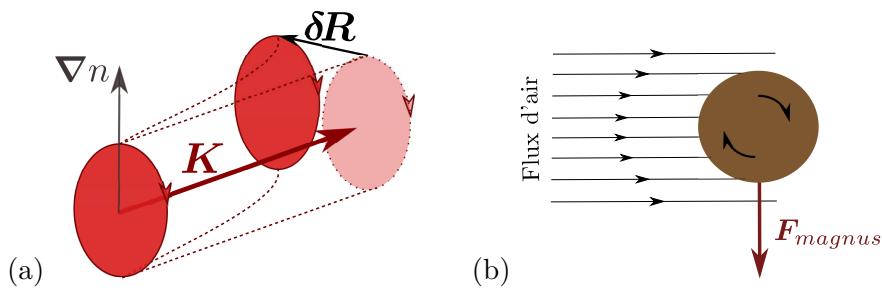


Fig. I.8 (a) Schéma de l'effet du déplacement latéral d'un faisceau lumineux dans un gradient d'indice optique; (b) Schéma représentant la force de Magnus s'exerçant sur une balle en rotation dans un fluide en mouvement.

I.3.5 Interprétation en termes de phase géométrique

Dans certains des calculs récents des effets évoqués précédemment, d'autres méthodes utilisant la phase de Berry apparaissent très efficaces pour décrire, calculer et interpréter ces décalages [16, 45, 49, 54]. Afin de présenter la phase géométrique, nous devons tout

d'abord introduire la base de coordonnée des polarisations circulaires. Pour une onde plane se propageant suivant l'axe z , cette base est définie dans le plan (x, y) par les vecteurs unitaires :

$$\mathbf{e}_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\sigma \mathbf{e}_y) \quad \text{avec } \sigma = \pm 1$$

où nous rappelons que σ désigne l'hélicité de la polarisation. Dans cette base, une rotation d'un angle ϕ des coordonnées (x, y) se traduit par l'apparition d'une phase appelée « phase géométrique » telle que :

$$\mathbf{e}'_\sigma = e^{i\sigma\phi} \mathbf{e}_\sigma$$

Ainsi, dans la base des coordonnées circulaires, la rotation se traduit pour le champ électrique de l'onde plane par la transformation :

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = e^{i\hat{\sigma}\phi} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad \text{avec } \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(+,-,z)}.$$

Pour un faisceau quelconque, il est possible de généraliser cette décomposition en définissant une base des polarisations circulaires pour chaque composante de Fourier \mathbf{k} suivant :

$$\mathbf{e}_\sigma(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_\varphi + i\sigma \mathbf{e}_\theta)$$

où $(\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$ forme la base des coordonnées sphériques. Ainsi, l'évolution le long d'un chemin Γ (de \mathbf{k} à \mathbf{k}') correspond à une rotation des coordonnées (φ, θ) qui se traduit par une accumulation d'une phase géométrique ϕ_B selon :

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}') = e^{i\hat{\sigma}\phi_B(\Gamma)} \mathbf{E}(\mathbf{k})$$

où, à présent, la matrice $\hat{\sigma}$ est écrite dans la base $(\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-, \hat{\mathbf{k}})$. La phase géométrique ϕ_B , dite « phase de Berry », est calculée à l'aide de la connexion de Berry $\mathbf{A}_B(\mathbf{q})$. Ces deux quantités sont reliées par les relations [54, 55] :

$$\begin{cases} \phi_B(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_B(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \\ \mathbf{A}_B(\mathbf{q}) = -i\sigma E_i^*(\mathbf{q}) \nabla_{\mathbf{q}} E_i(\mathbf{q}) \end{cases}$$

où nous rappelons que les indices répétés sont sommés. Ainsi, cette phase de Berry est liée à la rotation du champ électrique lors d'un changement de trajectoire du faisceau¹. Dans le cas d'une propagation dans un milieu hétérogène, la variation d'indice optique entraîne une modification du vecteur d'onde et donc l'apparition d'une phase de Berry. Celle-ci étant différente pour les différentes composantes de Fourier, la trajectoire du champ est alors différente pour chacune de ces composantes ce qui va entraîner un déplacement du faisceau dans son ensemble. Nous pouvons noter que l'interprétation de l'effet Magnus en terme de phase de Berry est par construction au-delà du cadre paraxial. En effet, l'approximation paraxiale suppose un spectre très piqué autour du vecteur d'onde moyen.

1. À nouveau, il y a ici une connexion directe avec l'interaction spin-orbite de la lumière sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre suivant.

I.4 Propagation de la lumière dans un milieu désordonné

I.4.1 Introduction aux milieux désordonnés

Nous avons vu que, dans un milieu inhomogène, la trajectoire d'un faisceau lumineux est déviée par les variations spatiales de l'indice de réfraction, quelles soient brusques pour une interface ou plus lente dans le cas du gradient d'indice optique. Cependant dans tous les exemples précédents nous avons supposé de manière implicite que le profil d'indice optique était connu. Or, dans la réalité, ce n'est bien souvent pas le cas, en particulier pour les milieux très inhomogènes qui vont présenter une variation spatiale plus ou moins aléatoire de leur indice. Nous parlons alors de milieux désordonnés. Pour les diélectriques, cela correspond par exemple à des poudres, du verre dépoli ou encore des solutions contenant des particules en suspensions [56, 57, 58]. Lorsque l'on fait propager un faisceau cohérent dans ce genre de milieu, on observe différents phénomènes que nous allons brièvement évoquer. Tout d'abord, si l'on s'intéresse au faisceau émergent (après propagation dans le milieu), nous voyons que celui-ci présente un profil d'intensité désordonné avec des tâches lumineuses entourées de zones plus sombres. Cette figure d'interférence est appelée tavelure en français, mais nous utiliserons dans toute la suite le terme anglais *speckle* plus couramment utilisé. Une photo du phénomène est montrée sur la figure I.9(a). Le *speckle* se forme autour de la composante dite balistique du faisceau dont l'intensité décroît au fur et à mesure de la pénétration dans le milieu, comme l'on peut le voir sur la figure I.9(b).

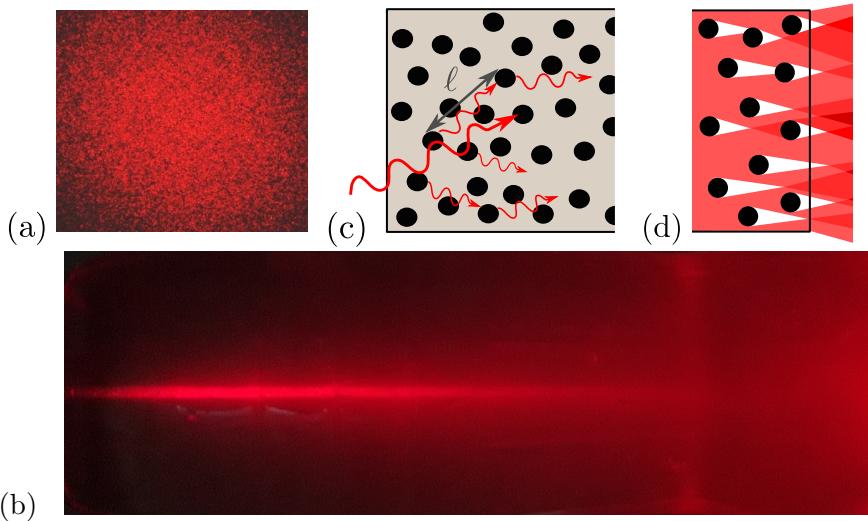


Fig. I.9 (a) Photo d'un speckle produit par un faisceau laser après propagation au travers d'un morceau de plastique rugueux. (b) Photo du phénomène de diffusion multiple dans un milieu diffusant (ici de l'eau contenant un peu de maïzena en suspension). (c) Schéma de la diffusion de la lumière se propageant à travers une distribution aléatoire de diffuseurs. (d) Schéma de la lumière diffusée à la sortie du milieu.

Pour expliquer ces phénomènes, nous pouvons voir le milieu désordonné comme un en-

semble de petits obstacles que nous appelons diffuseurs. Tant que la lumière ne rencontre aucun de ces obstacles, elle se propage en ligne droite (il s'agit de la lumière présente dans le faisceau balistique), puis lorsqu'elle frappe un diffuseur elle est déviée. Il s'ensuit un processus de diffusion multiple [56, 57]. Un schéma illustrant ce phénomène est présenté sur la figure I.9(c). Nous voyons ici une échelle importante apparaître : la distance moyenne entre deux processus de collision appelée le libre parcours moyen ℓ . C'est sur cette échelle que l'intensité du faisceau balistique s'atténue (loi de Beer-Lambert) [56]. Si la taille du milieu et beaucoup plus grande que ℓ , la lumière multiplement diffusée se propage selon de nombreuses directions. Ces différentes contributions vont interférer, donnant le profil de *speckle*, comme schématisé sur la figure I.9(d).

Tandis que cette description qualitative permet de comprendre ce qu'il se passe lors de la propagation, la formulation théorique de la diffusion multiple semble a priori compliquée du fait de la complexité du désordre microscopique. La solution consiste à aborder le problème de manière statistique. C'est ce que nous allons décrire maintenant.

I.4.2 Description statistique d'un milieu désordonné

Nous avons introduit précédemment des exemples de milieux désordonnés. Nous allons à présent discuter de la manière de les modéliser. Pour un milieu diélectrique, c'est la permittivité qui permet de caractériser le désordre. Nous l'écrivons alors sous la forme d'une fonction *aléatoire* :

$$\epsilon(\mathbf{r}) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{r})$$

où $\bar{\epsilon} = \langle \epsilon(\mathbf{r}) \rangle$ désigne à présent la permittivité moyennée sur un ensemble de configurations et $\delta\epsilon(\mathbf{r})$ est la composante fluctuante. Un paramètre important de sa statistique est la fonction de corrélation :

$$B(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\langle \delta\epsilon(\mathbf{r})\delta\epsilon(\mathbf{r}') \rangle}{\bar{\epsilon}^2}. \quad (\text{I.23})$$

Pour un désordre isotrope, B est une fonction de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ qui décroît en général rapidement avec la distance.

Pour un milieu désordonné, l'équation de Helmholtz (I.7) s'écrit alors sur la forme :

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - V(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{I.24})$$

où $k^2 = \bar{\epsilon}\omega^2/c^2$ représente à présent le nombre d'onde moyen dans le milieu et $V(\mathbf{r}) = -k^2\delta\epsilon(\mathbf{r})/\bar{\epsilon}$ peut être vu comme un potentiel désordonné effectif dans lequel la lumière va évoluer.

I.4.3 Propagation libre

Le tenseur de Green est un outil mathématique très souvent employé en électromagnétisme [32, 59] car il permet de caractériser de manière générale la réponse d'une distribution de charges et de courants électriques. Il est également très puissant dans le cadre de la description statistique de la propagation dans le désordre. Dans un milieu désordonné, l'équation (I.24) peut s'écrire sous la forme $(\mathcal{L}^{(0)} - V)\mathbf{E} = 0$ où toute l'information sur le

désordre et contenu dans le terme V . Ce dernier est une distribution aléatoire caractérisée par sa fonction de corrélation, donnée par l'expression (I.23). Avant de décrire les effets de ce potentiel dans un milieu désordonné en dimension 3, nous allons considérer l'opérateur $\mathcal{L}^{(0)}$. Celui-ci décrit la propagation libre, c'est-à-dire dans un milieu homogène de permittivité $\bar{\epsilon}$:

$$\mathcal{L}_{ij}^{(0)} = (k^2 + \Delta)\delta_{ij} - \nabla_i \nabla_j$$

où $i, j = (x, y, z)$, δ_{ij} correspond au delta de Kronecker et on a toujours $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Cet opérateur s'écrit dans l'espace des impulsions :

$$\mathcal{L}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}) = (k^2 - q^2)\delta_{ij} + q_i q_j$$

La solution de l'équation (I.24) pour $V = 0$ en présence d'une source quelconque se déduit alors du tenseur de Green libre $\mathbf{G}_{ij}^{(0)}$, solution de $\mathcal{L}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q})\mathbf{G}_{jk}^{(0)}(\mathbf{q}) = \delta_{ik}$. Nous obtenons ainsi ici :

$$\mathbf{G}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2} + \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2 - q^2 + i0^+} \quad (\text{I.25})$$

où nous rappelons que $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$. Dans cette expression, le terme $i0^+$ est ajouté car pour des raisons de causalité, les pôles du tenseur doivent avoir une partie imaginaire strictement positive [59, 60]. Dans l'expression (I.25), le second terme est un terme propagatif, dépendant de la polarisation, qui est celui qui nous intéressera par la suite. Le premier terme correspond, quant à lui, à des contributions faisant intervenir la composante longitudinal du champ [32]. Or dans la suite de cette thèse, nous ne considérerons que des situations où la propagation est proche d'un régime paraxial et où le champ longitudinal est donc négligeable. Nous omettrons ainsi ce terme à partir de maintenant et utiliserons :

$$\mathbf{G}_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2 - q^2 + i0^+}.$$

I.4.4 Propagation en présence de désordre : faisceau balistique

Nous allons à présent nous intéresser au cas « perturbé » $V \neq 0$ décrit par le tenseur de Green total $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Il vérifie la relation $[\mathcal{L}^{(0)} - V]\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})\delta_{ij}$. La solution de cette équation est donnée par la série de Born [61] :

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}^{(0)} - V]^{-1} = \mathbf{G}^{(0)} + \mathbf{G}^{(0)}V\mathbf{G}^{(0)} + \mathbf{G}^{(0)}V\mathbf{G}^{(0)}V\mathbf{G}^{(0)} + \dots$$

Puisque ce tenseur de Green contient une variable aléatoire, comme déjà évoqué nous allons prendre une approche statistique et nous intéresser à son comportement moyen sur de nombreuses configurations du désordre. Cette quantité permet de décrire l'atténuation du faisceau balistique discutée dans la partie I.4.1. Le tenseur de Green moyen obéit à l'équation de Dyson [56, 61] :

$$\langle \mathbf{G}(\mathbf{q}) \rangle = \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{q}) + \mathbf{G}^{(0)}(\mathbf{q})\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{q})\langle \mathbf{G}(\mathbf{q}) \rangle, \quad (\text{I.26})$$

où nous appelons $\boldsymbol{\Sigma}$ la self-énergie. Cette grandeur contient toute l'information sur les différents événements de diffusion de la lumière par le désordre (termes du type $\langle V\mathbf{G}^{(0)}...V \rangle$).

Dans le cadre d'un désordre faible (condition qui sera précisée plus loin), nous pouvons nous placer dans l'approximation de Born et ne garder que le premier diagramme de diffusion [56, 57] :

$$\Sigma(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}}{V} \cdot \frac{G^{(0)}(\mathbf{q}')}{V} \cdot \frac{\mathbf{q}}{V}$$

Son expression analytique est, dans notre cas,

$$\Sigma(\mathbf{q}) = k^4 \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} B(\mathbf{q} - \mathbf{q}') G^{(0)}(\mathbf{q}') . \quad (\text{I.27})$$

où $B(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation définie précédemment dans l'équation (I.23). À partir de l'équation de Dyson (I.26), nous déduisons le tenseur de Green moyen :

$$\langle \mathbf{G}(\mathbf{q}) \rangle = [\mathbf{G}^{(0)-1}(\mathbf{q}) - \Sigma(\mathbf{q})]^{-1} .$$

L'intégrale dans (I.27) se calcule facilement dans le cas d'un désordre non-corrélé², c'est-à-dire $B(\mathbf{q} - \mathbf{q}') = \gamma = \text{cste}$. Nous avons alors une self-énergie constante dans l'espace des impulsions, donnée par l'expression :

$$\Sigma_{ij} = \gamma k^4 \int \frac{d\mathbf{q}'}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{ij} - \hat{q}'_i \hat{q}'_j}{k^2 - q'^2 + i0^+} .$$

L'intégrale angulaire nous donne :

$$\Sigma_{ij} = \frac{4}{3} \gamma k^4 \delta_{ij} \int_0^\infty \frac{dq'}{(2\pi)^2} \frac{q'^2}{k^2 - q'^2 + i0^+} . \quad (\text{I.28})$$

Nous voyons ici que le tenseur est diagonal avec une seule valeur propre. Nous allons ainsi définir une self-énergie scalaire Σ telle que $\Sigma_{ij} = \Sigma \delta_{ij}$.

Dans le cas d'un désordre faible, la contribution de la self-énergie est faible devant k^2 . Sa partie réelle se traduit par un simple décalage du vecteur d'onde (petite modification de l'indice moyen) que nous oublierons dans la suite. La partie imaginaire, en revanche, joue un rôle essentiel [61]. Le calcul explicite de l'intégrale dans (I.28) fournit :

$$\text{Im}\Sigma = -\frac{\gamma k^5}{6\pi} .$$

Le tenseur de Green moyen est alors donné par :

$$\langle G_{ij}(\mathbf{q}) \rangle \simeq [(k^2 - q^2)\delta_{ij} - q_i q_j - i \text{Im}\Sigma \delta_{ij}]^{-1} = \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2 - q^2 - i \text{Im}\Sigma}$$

2. Nous aborderons un peu plus en détail le cas d'un désordre corrélé dans le chapitre suivant.

Considérant toujours la situation d'un désordre faible où $|\text{Im}\Sigma| \ll k^2$, cette expression présente un pôle :

$$q_{\text{pole}} \simeq k - i \frac{\text{Im}\Sigma}{2k} .$$

Nous obtenons alors, dans l'espace réel :

$$\langle \mathbf{G}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{-1}{4\pi r} e^{ikr} e^{-\frac{r}{2\ell}} (\delta_{ij} - \hat{r}_i \hat{r}_j) \quad (\text{I.29})$$

où nous avons introduit le libre parcours moyen, discuté dans la partie I.4.1, et donné ici par la relation $\ell = -k/\text{Im}\Sigma = 6\pi/(\gamma k^4)$. La condition de désordre faible, utilisée ci-dessus, s'écrit alors explicitement :

$$k\ell \gg 1 .$$

L'équation (I.29) indique qu'un champ émit en $r = 0$ s'atténue exponentiellement sur l'échelle ℓ lorsqu'il se propage dans un milieu désordonné. Ce phénomène correspond à l'atténuation du faisceau balistique sur la figure I.9(b).

Le même type de méthode permet de décrire le halo de diffusion multiple. L'équation à résoudre n'est plus, dans ce cas, l'équation de Dyson mais l'équation de Bethe-Salpeter. Nous ne développerons pas cette approche ici, le lecteur ou la lectrice intéressée pourra consulter les références [61, 62, 60, 63].

I.5 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre les bases de l'électromagnétisme permettant de décrire la propagation de la lumière dans des milieux diélectriques inhomogènes. Dans ce cadre, nous avons également discuté l'influence d'une variation d'indice optique sur la trajectoire de faisceaux lumineux. Tout d'abord, nous nous sommes intéressé·es à des phénomènes descriptibles dans le cadre de l'approximation scalaire comme le phénomène de réflexion-réfraction et l'effet Goos-Hänchen à une interface, ou encore la courbure d'un faisceau se propageant dans un milieu inhomogène. Nous avons ensuite vu que, prenant en compte l'aspect vectoriel de la lumière, d'autres effets apparaissent dans le cas d'une polarisation circulaire : effet Imbert-Fedorov à une interface et effet Magnus optique lors de la propagation dans un milieu inhomogène. Nous avons rapidement évoqué le fait que ces deux derniers phénomènes sont liés à un couplage spin-orbite. Ce point sera abordé plus en détail dans le chapitre suivant. Nous nous sommes ensuite intéressé·es à la description de milieux complètement désordonnés, pour lesquels la distribution d'indice n'est connue que de manière statistique. Dans ce cadre, nous avons présenté le formalisme du tenseur de Green et l'avons appliqué à la description de la composante balistique d'un faisceau en présence de désordre. Pour introduire ce formalisme, nous nous sommes concentrés sur le cas d'un désordre 3D isotrope. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment l'étendre au cas d'un désordre anisotrope et comment la prise en compte des aspects vectoriels de la lumière permet dans ce cas de mettre en évidence un nouvel effet Magnus (ou effet Hall de spin) en présence de désordre.

Chapitre II

Effet Hall de spin optique dans un milieu désordonné transverse

Dans ce chapitre, nous allons introduire rapidement l'effet Hall de spin bien connu dans le cadre de la matière condensée, puis discuter comment ce phénomène, lié au mécanisme de couplage spin-orbite, peut être généralisé au cas de la lumière. Nous nous intéresserons ensuite à un type de milieu désordonné anisotrope bien particulier dans lequel nous allons démontrer l'existence d'un effet similaire à l'effet Magnus optique pour la composante balistique d'un faisceau. Ce travail constitue à notre connaissance la première mise en évidence d'un effet Hall de spin optique en présence de désordre. Nous verrons qu'il se manifeste par un décalage du profil spatial de la composante balistique et nous proposerons une technique expérimentale pour le mesurer.

II.1 Introduction : effet Hall de spin pour les électrons

II.1.1 Effet Hall classique

En 1879, en considérant les équations de Maxwell, Hall découvre qu'un courant de charges en présence d'un champ magnétique s'accompagne d'une tension dans la direction transverse et met en évidence ce phénomène par des données expérimentales [64].

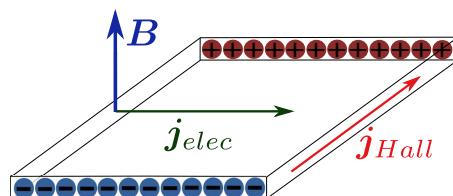


Fig. II.1 Illustration de l'effet Hall dans un échantillon 2D métallique soumis à un champ magnétique.

La configuration considérée est simple : il s'agit un échantillon fini 2D d'un matériau métallique (dans lequel des électrons peuvent se déplacer librement) auquel on applique un champ magnétique orthogonal à l'échantillon comme schématisé sur la figure II.1.

Hall prédit que si un courant électrique j_{elec} traverse le métal, il y a apparition d'une accumulation de charges sur les bords (positives d'un côté et négatives de l'autre) qui peut être détectée par une simple mesure de tension entre les deux bords. Si l'on s'intéresse au mouvement des électrons libres dans le métal, cet effet apparaît de manière assez directe. En effet, une charge en mouvement dans un champ magnétique est soumise à la force de Lorentz donnée par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} .$$

Dans la configuration considérée, cette force est transverse, elle entraîne ainsi la déviation des électrons vers l'un des bords. Cela explique l'accumulation de charges négatives sur l'un des côtés de l'échantillon et le déficit de l'autre côté.

Cet effet a eu un certain nombre d'applications en physique des matériaux [65, 66], mais a surtout ouvert la voie à l'étude de nouveaux effets tels que l'effet de Hall quantique [67], mais également l'effet Hall de spin que nous allons maintenant présenter.

II.1.2 Effet Hall de spin

Plus d'un siècle après Hall, un autre physicien, Hirsch, s'est intéressé à une situation analogue à celle décrite précédemment [68] : des particules possédant un spin se déplaçant au sein d'un champ électrique¹ en présence d'un couplage spin-orbite. Il a alors théorisé un effet similaire à l'effet de Hall qu'il appelle effet Hall de spin.

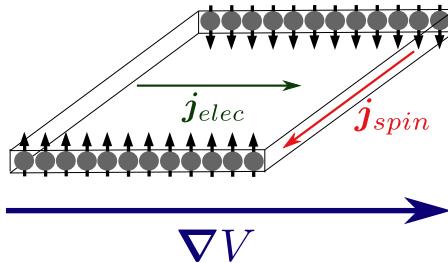


Fig. II.2 Illustration de l'effet Hall de spin dans un échantillon 2D métallique soumis à un gradient de potentiel électrique.

La configuration de l'effet Hall de spin est très similaire à l'effet Hall classique. Nous considérons toujours un échantillon 2D métallique soumis à un gradient de potentiel électrique (correspondant à un champ électrique extérieur), comme illustré sur la figure II.2. À présent, nous considérons le spin des électrons libres se déplaçant dans le métal. Ce spin peut prendre une valeur positive ou une valeur négative correspondant à une orientation vers le haut (*spin up*) ou vers le bas (*spin down*). L'effet Hall de spin se manifeste en présence d'un couplage spin-orbite. Dans une approche semi-classique du problème, et en

1. Notons ici qu'un tel champ électrique existe également dans l'effet Hall classique puisqu'il permet d'engendrer le courant j_{elec} . Cependant, dans ce cas, il n'entre pas directement en jeu dans la force de déviation des électrons.

négligeant les interactions entre les électrons, l'hamiltonien s'écrit sous la forme [69, 70] :

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + q_e V(\mathbf{r}) + \mathcal{A}_{SO} (\mathbf{p} \times \nabla V) \cdot \mathbf{S} \quad (\text{II.1})$$

où m_e est la masse d'un électron, q_e la charge électronique et V le potentiel électrique. Le coefficient \mathcal{A}_{SO} caractérise l'interaction spin-orbite et est dépendant du matériau, et le vecteur \mathbf{S} désigne le spin de l'électron. Selon les échantillons considérés, le terme d'interaction spin-orbite est plus ou moins important. Ainsi l'effet Hall de spin est tout particulièrement étudié dans les matériaux semi-conducteurs où cette interaction peut être modulée [71].

À partir de l'expression (II.1), les équations de Hamilton conduisent aux équations du mouvement (pour un gradient ∇V constant) [69, 70] :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} - \mathcal{A}_{SO} \mathbf{S} \times \nabla V, \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q_e \nabla V(\mathbf{r}). \quad (\text{II.3})$$

Dans le dernier terme de l'équation (II.2), nous voyons apparaître un décalage transverse de la trajectoire. Celui-ci se fait selon une direction orthogonale au gradient de potentiel appliqué et son sens dépend de l'orientation des spins. Ainsi les *spins up* sont déviés d'un côté et les *spins down* de l'autre, expliquant les accumulations sur les bords de l'échantillon.

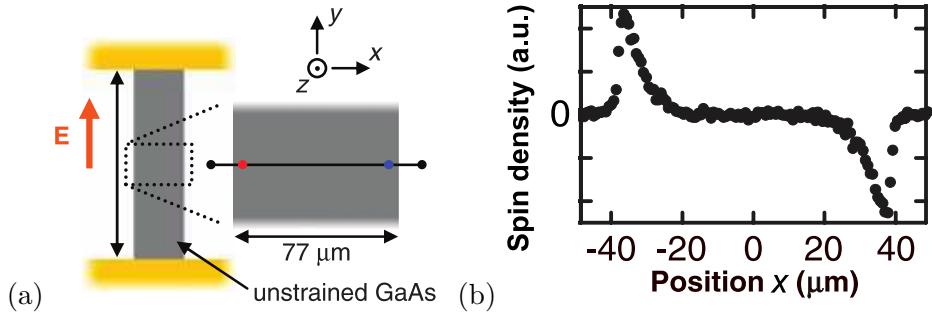


Fig. II.3 Figures tirées de l'article [71]. (a) Schéma du système considéré : un champ électrique selon la direction y est appliqué sur un échantillon semi-conducteur 2D, les mesures sont alors effectuées le long de la direction x . (b) Graphe montrant la densité de spin au sein d'échantillon en fonction de la position x . Cette mesure est effectuée à l'aide d'un microscope Kerr : la magnétisation de l'échantillon modifie la polarisation de la lumière se réfléchissant dessus, la mesure de cette polarisation permet ainsi d'accéder directement à la densité de spin. Sur le graphe, le signe de la valeur indique l'orientation des spins et la position des deux pics coïncide avec les rebords de l'échantillon.

L'effet Hall de spin est aujourd'hui bien connu et a été mis en évidence expérimentalement dans de nombreuses configurations [70, 71]. Un exemple d'une telle mesure est présenté sur la figure II.3 pour un échantillon de GaAs. Nous y voyons bien l'accumulation des spins de part-et-d'autre de l'échantillon.

II.1.3 Analogie avec l'effet Magnus optique

Dans le chapitre précédent, nous avons brièvement indiqué que les effets Imbert-Fedorov et l'effet Magnus optique pouvaient être interprétés comme un effet de couplage spin-orbite. Nous voyons, en effet, apparaître de manière assez claire ce parallèle quand nous comparons les équations du mouvement (II.2) et (II.3) pour les électrons dans l'effet Hall de spin et les équations (I.22) et (I.19) obtenues pour l'effet Magnus de la lumière :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{dl} &= \hat{\mathbf{K}} - \frac{\sigma}{k} [\hat{\mathbf{K}} \times \nabla(\ln n)] , \\ \frac{d\mathbf{K}}{dl} &= \nabla \ln n .\end{aligned}$$

Nous remarquons que dans les expressions optiques, le gradient d'indice joue le rôle du gradient de potentiel. Le spin du photon $\sigma \hat{\mathbf{K}}$, introduit dans l'équation (I.18), joue bien le même rôle que le spin de l'électron \mathbf{S} . Notons enfin que dans le cas de l'effet Magnus optique, c'est la coordonnée curviligne l le long de la trajectoire qui joue le rôle du temps. En raison de cette similarité entre les photons et les électrons, l'effet Magnus optique est très couramment appelé « effet Hall de spin de la lumière ». Cette analogie, ainsi que les considérations sur le couplage spin-orbite, sont développées dans la référence [16]. Nous utiliserons également cette terminologie dans la suite de cette thèse.

L'effet Hall de spin optique a été observé expérimentalement à la fin des années 2000 [50, 72, 73, 74]. Nous reviendrons plus tard sur certaines de ces mesures effectuées à l'aide d'une approche polarimétrique. Il est néanmoins intéressant, à ce stade, de brièvement discuter l'expérience de l'article [72] qui est une mesure directe de l'effet Hall de spin optique au sein d'un cylindre de verre, inspirée des mesures historiques de Tomita et Chiao [75]. Pour effectuer cette mesure, un faisceau lumineux collimaté est envoyé en incidence rasante au sein du cylindre tel que sa trajectoire suive la surface de ce dernier par réflexion interne, comme schématisé sur la figure II.4(a). La trajectoire hélicoïdale qui s'ensuit implique l'accumulation d'une phase de Berry par le champ, comme nous l'avons rapidement évoqué dans la partie I.3.5, et entraîne une déviation du faisceau lumineux selon son hélicité σ (le sens de la déviation dépendant du signe de σ). Si le champ initial est polarisé rectilignement, il peut être écrit comme la somme de deux polarisations circulaires d'hélicité $\sigma = \pm 1$. Ces deux contributions sont ainsi déviées dans deux sens opposés et se séparent au fur et à mesure de la propagation du faisceau le long de la trajectoire hélicoïdale. Cette séparation peut alors être mesurée et permet une mise en évidence directe de l'effet Hall de spin optique, comme montré sur la figure II.4(b).

À présent, nous allons étudier l'existence d'un effet Hall de spin optique pour un faisceau lumineux se propageant au sein d'un milieu désordonné, travail qui constitue le cœur de ce chapitre.

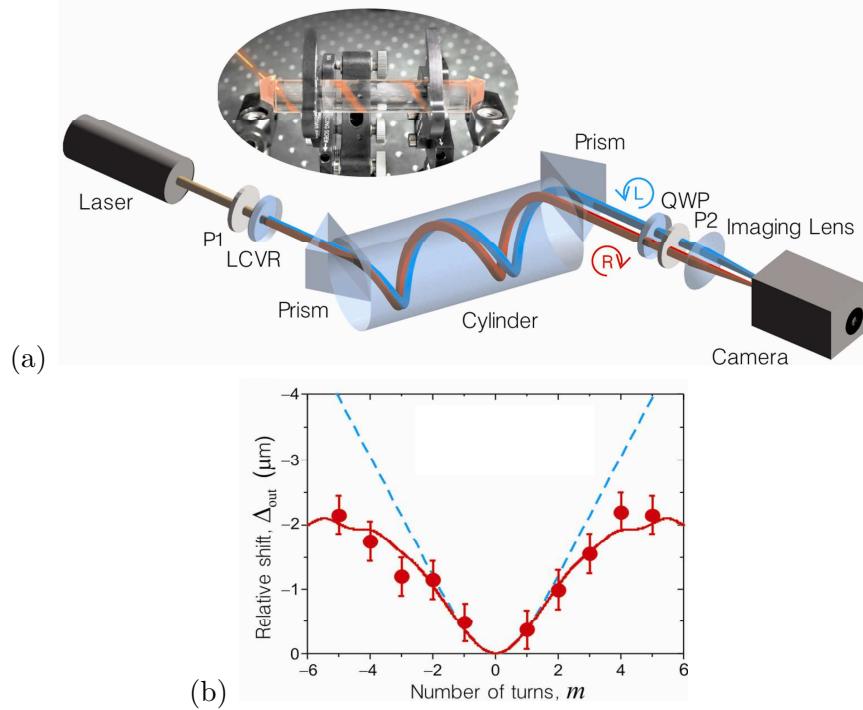


Fig. II.4 Figures tirées de l'article de Bliokh, Niv, Kleiner et Hasman [72]. (a) Schéma du montage expérimental utilisé : un faisceau laser polarisé circulairement est envoyé en incidence rasante sous la surface d'un cylindre au sein duquel il suit une trajectoire hélicoïdale. La position du faisceau à la sortie est mesurée à l'aide du caméra. L'angle d'incidence du laser permet de contrôler le nombre de tours effectués par le faisceau au sein du cylindre. (b) Sur ce graphe est représentée (en rouge) la mesure du décalage de position entre un faisceau de polarisation circulaire droite et de polarisation circulaire gauche, en fonction du nombre de tours effectués dans le cylindre.

II.2 Propagation paraxiale d'un faisceau dans un désordre transverse

II.2.1 Désordre transverse

Nous allons maintenant nous attacher à mettre en évidence l'existence d'un effet Hall de spin en présence de désordre. Le cas d'un désordre tridimensionnel isotrope a été présenté dans la partie I.4, où nous avons vu émerger une atténuation exponentielle du champ moyen à l'échelle du libre parcours moyen à cause du phénomène de diffusion. Notre calcul n'a, en revanche, nullement mis en évidence un décalage du faisceau (voir équation (I.29)). Ceci n'est pas une surprise puisque, dans un milieu désordonné 3D isotrope, aucune direction n'est privilégiée. Pour faire apparaître un effet Hall de spin en présence de désordre, il est nécessaire de briser cette isotropie en introduisant un axe de propagation privilégié. Le moyen le plus simple est de considérer un désordre dit transverse.

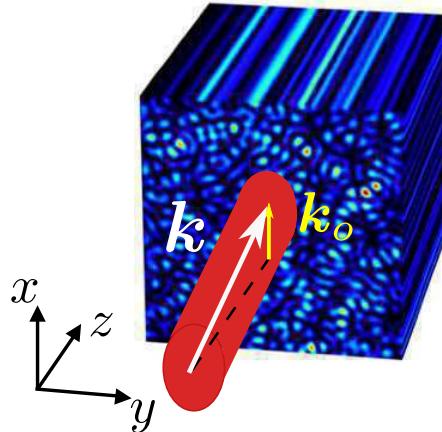


Fig. II.5 Illustration d'un milieu désordonné dans le plan transverse (x, y) et homogène selon l'axe optique z , sur lequel est envoyé un faisceau lumineux collimaté tilté, de vecteur d'onde transverse \mathbf{k}_o .

Dans un désordre transverse, la permittivité ne dépend plus de la coordonnée \mathbf{r} globale, mais uniquement de la coordonnée transverse $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, la coordonnée z jouant le rôle d'un axe optique le long duquel le milieu est homogène. Il s'agit d'une configuration similaire à celle que nous avons considérée en introduisant l'équation paraxiale dans la partie I.1.3. Dans le cas d'un désordre transverse, nous écrivons la permittivité sous la forme :

$$\epsilon(\mathbf{r}_\perp) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{r}_\perp)$$

où $\bar{\epsilon}$ désigne à nouveau la permittivité moyenne et $\delta\epsilon$ la composante fluctuante. À nouveau, afin de caractériser ces fluctuations, nous utiliserons la fonction de corrélation du désordre transverse :

$$B(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) = \frac{\langle \delta\epsilon(\mathbf{r}_\perp) \delta\epsilon(\mathbf{r}'_\perp) \rangle}{\bar{\epsilon}^2}. \quad (\text{II.4})$$

La propagation de la lumière dans les milieux présentant un désordre transverse a été très étudiée dans le contexte des phénomènes de localisation faible et forte pour la lumière [13, 14, 15, 76, 77]. Cette configuration admet en effet une limite paraxiale dans laquelle la lumière se comporte comme une onde de matière scalaire et où le vecteur d'onde dans le plan transverse (qui joue un rôle central dans les phénomènes de localisation) peut être facilement ajusté. Nous allons dans un premier temps revenir sur cette description paraxiale et, dans ce cadre, déterminer l'évolution du champ, comme nous l'avons fait dans la partie I.4 pour un désordre 3D. Nous étudierons ensuite les premières corrections non-paraxiales dans un désordre transverse, qui sont responsables d'un effet Hall de spin.

II.2.2 Évolution paraxiale du faisceau balistique

Nous avons vu dans la partie I.1.3 que, dans le cadre de l'approximation paraxiale, le champ électrique est principalement décrit par l'enveloppe \mathcal{E} de sa composante transverse. Nous écrivons ainsi :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \simeq \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) e^{ikz} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

L'équation paraxiale (I.9) décrivant l'évolution de l'enveloppe du champ électrique se réécrit alors sous la forme :

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = -\frac{\Delta_{\perp} \mathcal{E}}{2k} + V(\mathbf{r}_{\perp}) \mathcal{E}, \quad (\text{II.5})$$

où le potentiel du désordre est à présent donné par $V(\mathbf{r}_{\perp}) = -k \delta\epsilon(\mathbf{r}_{\perp})/(2\bar{\epsilon})$. Cette équation est totalement analogue à une équation de Schrödinger décrivant l'évolution temporelle d'une particule de de Broglie soumise à un potentiel $V(\mathbf{r}_{\perp})$. Dans le cas optique, la coordonnée z joue le rôle d'un temps effectif de propagation.

À nouveau, pour caractériser l'évolution du champ moyen, nous utilisons la fonction de Green. Ici nous devons distinguer la coordonnée z qui joue le rôle d'un pseudo-temps de propagation dans l'équation (II.5), des coordonnées dans le plan transverse. Dans ce but, nous écrivons la fonction de Green comme :

$$G(\mathbf{q}_{\perp}, z) = \int \frac{d\mathbf{q}_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\omega_z}{2\pi} G(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) e^{+i(\mathbf{q}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp} - \omega_z z)}$$

où $G(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z)$ est solution de l'équation :

$$\left[+\omega_z - \frac{q_{\perp}^2}{2k} - V(\mathbf{q}_{\perp}) \right] G(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) = 1.$$

La propagation libre (pour $V = 0$) est décrite par la solution :

$$G^{(0)}(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) = \frac{1}{\omega_z - \mathbf{q}_{\perp}^2/(2k) + i0^+}.$$

Dans le cas $V \neq 0$, la fonction de Green moyenne s'écrit :

$$\langle G(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) \rangle = \frac{1}{\omega_z - \mathbf{q}_{\perp}^2/(2k) - i\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z)}$$

où la self-énergie est ici donnée, dans l'approximation de Born, par :

$$\Sigma(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) = \frac{k^2}{4} \int \frac{d\mathbf{q}'_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{B(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{q}'_{\perp})}{\omega_z - \mathbf{q}'_{\perp}^2/(2k) + i0^+}$$

où $B(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{q}'_{\perp})$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation définie précédemment dans l'équation (II.4). Il est important de noter que l'intégrale ici porte uniquement sur les impulsions transverses \mathbf{q}'_{\perp} . En effet, le système étant invariant par translation selon l'axe z , l'impulsion selon cette direction est conservée. Nous voyons ici que seule la fonction de corrélation dépend de l'intégrale angulaire. Nous allons ainsi écrire $B(\mathbf{q}_{\perp} - \mathbf{q}'_{\perp}) \equiv B(q_{\perp}, q'_{\perp}, \theta)$ où θ est l'angle entre \mathbf{q}_{\perp} et \mathbf{q}'_{\perp} ce qui nous permet d'obtenir, pour la self-énergie, l'expression :

$$\Sigma(\mathbf{q}_{\perp}, \omega_z) = \frac{k^2}{4} \int \frac{q'_{\perp} dq'_{\perp}}{2\pi} \frac{\langle B(q_{\perp}, q'_{\perp}, \theta) \rangle_{\theta}}{\omega_z - \mathbf{q}'_{\perp}^2/(2k) + i0^+}$$

où $\langle \dots \rangle_\theta$ correspond à la moyenne angulaire. Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéressons uniquement à la partie imaginaire de la self-énergie qui vaut ici :

$$\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_\perp, \omega_z) = -\frac{k^3}{8} \langle B(q_\perp, \sqrt{2k\omega_z}, \theta) \rangle_\theta .$$

Le comportement du faisceau balistique au cours de la propagation est décrit par la transformée de Fourier inverse $\langle G(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = \int \frac{d\omega_z}{2\pi} \langle G(\mathbf{q}_\perp, \omega_z) \rangle e^{-i\omega_z z}$. Dans notre cas, nous trouvons :

$$\langle G(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = -ie^{-i\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k}z} e^{+\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_\perp)z} \quad (\text{II.6})$$

où nous avons à présent noté

$$\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_\perp) \equiv \text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_\perp, \omega_z = \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k}) = -\frac{k^3}{8} \langle B(q_\perp, q_\perp, \theta) \rangle_\theta .$$

Afin d'obtenir l'expression du champ électrique, nous considérerons une condition initiale que nous propageons à l'aide de la relation [61] :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = i\langle G(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z=0) e^{ikz} \boldsymbol{\varepsilon} .$$

En utilisant l'expression de la fonction de Green obtenue précédemment, nous obtenons :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = \mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z=0) e^{i(k-\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k})z} e^{+\text{Im}\Sigma(\mathbf{q}_\perp)z} \boldsymbol{\varepsilon} .$$

En supposant une enveloppe fortement piquée autour d'un vecteur d'onde traverse \mathbf{k}_o , nous pouvons développer cette expression autour de $\mathbf{q}_\perp = \mathbf{k}_o$. Nous avons alors :

$$\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k} \sim \frac{k_o^2}{2k} + (\mathbf{q}_\perp - \mathbf{k}_o) \cdot \hat{\mathbf{k}}_o ,$$

où nous rappelons que $\hat{\mathbf{k}}_o = \mathbf{k}_o/k$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\exp\left(-i\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k}z\right) \sim \exp\left(+i\frac{k_o^2}{2k}z\right) \exp\left(-i\mathbf{q}_\perp \cdot \hat{\mathbf{k}}_o z\right) .$$

Dans l'approximation paraxiale, $k_o \ll k$ de sorte que la première exponentielle est très proche de 1. Nous obtenons alors, en passant dans l'espace réel, le champ électrique moyen :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle = \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp - \hat{\mathbf{k}}_o z, z=0) e^{ikz} e^{-\frac{z}{2z_s}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.7})$$

où z_s est le temps de diffusion (ou *scattering time* en anglais) qui est ici défini par :

$$z_s^{-1} = -2\text{Im}\Sigma(k_o) = +\frac{k^3}{4} \langle B(k_o, k_o, \theta) \rangle_\theta . \quad (\text{II.8})$$

L'équation (II.7) indique que l'intensité du champ incident s'atténue sur une distance de l'ordre de z_s le long de l'axe optique (effet similaire à celui de la partie I.4) et que son centroïde, $\mathbf{R}_\perp = \hat{\mathbf{k}}_o z$, évolue en ligne droite au cours de la propagation. Ceci traduit bien le caractère « balistique » de la lumière non diffusée décrite par le champ moyen. À noter que l'on peut alors également définir un libre parcours moyen dans le plan transverse qui est alors donné par [77] :

$$\ell = \hat{k}_o z_s .$$

II.3 Au-delà du paraxial : effet Hall de spin de la lumière

II.3.1 Conditions initiales et hypothèses

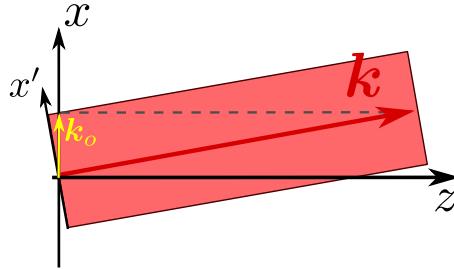


Fig. II.6 Schéma de la condition initiale considérée : un faisceau collimaté se propage avec un petit angle selon la direction portée par le vecteur \mathbf{k} , dont la composante transverse \mathbf{k}_o est telle que $k_o \ll k$.

Nous allons à présent revisiter le développement de la partie précédente en traitant le problème vectoriel complet, c'est-à-dire en étudiant l'équation (I.24) :

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) - V(\mathbf{r}_\perp) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

sans cette fois recourir à l'approximation paraxiale. Pour fixer les idées, nous regarderons la propagation d'un faisceau initialement gaussien, type de faisceau que nous avons déjà présenté dans la partie I.1.4. Cependant, les calculs présentés dans la suite peuvent être généralisés à d'autres formes de faisceaux pourvu que leur enveloppe soit suffisamment molle (nous reviendrons sur cette hypothèse dans la suite). Contrairement à ce que nous avions étudié dans la partie I.1.4, nous allons considérer ici un faisceau incliné par rapport à l'axe optique z . À $z = 0$, le champ initial s'écrit alors :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi} w_o} e^{-2r_\perp^2/w_o^2} e^{i\mathbf{k}_o \cdot \mathbf{r}_\perp} \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{E}(\mathbf{k}_\perp, z = 0) = w_o \sqrt{\pi} e^{-w_o^2(\mathbf{k}_\perp - k_o \mathbf{e}_x)^2/8} \boldsymbol{\varepsilon}$$

où w_o est le *waist* du faisceau. Comme précédemment, nous allons supposer que le faisceau est collimaté. Pour cela, en plus des hypothèses discutées dans la partie I.1.4, nous considérons :

$$k_o w_o \gg 1. \quad (\text{II.9})$$

Notons également que nous avons ici choisi de normaliser l'intensité initiale telle que

$$\int d^2 \mathbf{r}_\perp |\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z = 0)|^2 = 1.$$

Pour la polarisation initiale du faisceau, nous allons prendre la forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}'_x + e^{i\phi} \mathbf{e}_y \right) \quad (\text{II.10})$$

où \mathbf{e}'_x est un vecteur unitaire le long de la direction perpendiculaire au vecteur d'onde $\mathbf{k} = k_o \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_z$ et contenu dans le plan (x, z) (voir figure II.6). Cette expression nous

permet de décrire les différents types de polarisation en jouant sur le paramètre ϕ : une polarisation rectiligne correspond à $\phi = 0[\pi]$, tandis qu'une polarisation circulaire correspond à $\phi = \pi/2[\pi]$. Les cas intermédiaires représentent des polarisations elliptiques. Nous pouvons également lier directement l'hélicité de la polarisation avec ce paramètre à l'aide de la relation : $\sigma = \sin \phi$.

À partir de cette condition initiale, la propagation du champ moyen le long de la direction z est alors obtenue à l'aide de la relation [61, 78] :

$$\langle E_i(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = 2ik_z \langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle E_j(\mathbf{q}_\perp, z=0), \quad (\text{II.11})$$

où le pré-facteur $2ik_z \langle G_{ij} \rangle$ joue le rôle d'un coefficient de transmission. Par rapport à la partie précédente qui a été basée sur l'équation paraxiale, le tenseur de Green est défini à un facteur $2k$ près.

Dans cette partie, nous nous intéressons principalement aux premières corrections à l'approximation paraxiale. Ainsi, nous resterons majoritairement dans l'hypothèse des petits angles. Pour le faisceau initial présenté précédemment, cette hypothèse impose

$$\hat{k}_o \ll 1.$$

II.3.2 Tenseur de Green exact en présence d'un désordre transverse

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le tenseur de Green libre est donné, dans l'espace des impulsions, par l'expression :

$$G_{ij}^{(0)}(\mathbf{q}_\perp, q_z) = \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2 - q_z^2 + i0^+} \quad (\text{II.12})$$

où nous rappelons que $\hat{q}_i = q_i/q$. Dans le cas du désordre transverse, la self-énergie est donnée par l'expression :

$$\Sigma_{ij}(\mathbf{q}_\perp, q_z) = k^4 \int_0^{+\infty} \frac{q'_\perp dq'_\perp}{2\pi} \frac{\int_{2\pi}^{d\theta} B(q_\perp, q'_\perp, \theta) (\delta_{ij} - \hat{q}'_i \hat{q}'_j)}{k^2 - \mathbf{q}'_\perp^2 - q_z^2 + i0^+}$$

où nous devons bien noter que $\mathbf{q}' = (\mathbf{q}'_\perp, q_z)$ et donc $\hat{q}'_i = \hat{q}'_i / \sqrt{\mathbf{q}'_\perp^2 + q_z^2}$.

Nous allons ici supposer que le désordre dans le plan transverse est faiblement anisotrope. Nous pouvons alors développer l'intégrale angulaire en harmonique sphérique d'ordre 0, ce qui nous donne la relation : $\int_{2\pi}^{d\theta} B(q_\perp, q'_\perp, \theta) (\delta_{ij} - \hat{q}'_i \hat{q}'_j) \sim \langle B(q_\perp, q'_\perp, \theta) \rangle_\theta \int_{2\pi}^{d\theta} (\delta_{ij} - \hat{q}'_i \hat{q}'_j)$. Nous obtenons alors pour la partie imaginaire de la self-énergie :

$$\text{Im}\Sigma_{ij}(\mathbf{q}_\perp, q_z) = \Sigma_o(q_\perp) [\delta_{ij}(1 + \hat{q}_z^2) + \delta_{iz}\delta_{jz}(1 - 3\hat{q}_z^2)] \quad (\text{II.13})$$

en notant $\Sigma_o(q_\perp) = -k^4 \langle B(q_\perp, q_\perp, \theta) \rangle_\theta / 8$. Nous voyons ici que la self-énergie est toujours diagonale, cependant elle possède à présent deux valeurs propres distinctes. Cela diffère du cas du désordre 3D isotrope que nous avons vu dans la partie I.4, où la self-énergie ne possédait qu'une unique valeur propre dégénérée trois fois. Ici, l'anisotropie uniaxe lève la

dégénérescence entre le plan transverse (x, y) et la direction z .

À partir des résultats (II.12) et (II.13), l'expression du tenseur de Green moyen s'obtient en diagonalisant l'équation de Dyson (I.26). Après cette diagonalisation², nous obtenons l'expression analytique [77] :

$$\begin{aligned} \langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, q_z) \rangle &= \frac{\delta_{ij}}{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2 - q_z^2 - i\text{Im}\Sigma_1} - \frac{\hat{q}_i \hat{q}_j}{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2 - q_z^2 - i\text{Im}\Sigma_2} \\ &+ \frac{1}{1 - \hat{q}_z^2} \left(\frac{1}{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2 - q_z^2 - i\text{Im}\Sigma_1} - \frac{1}{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2 - q_z^2 - i\text{Im}\Sigma_2} \right) \\ &\times (\delta_{iz} \hat{q}_z \hat{q}_j + \delta_{jz} \hat{q}_i \hat{q}_z - \delta_{iz} \delta_{jz} - \hat{q}_i \hat{q}_j) . \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

où nous avons défini les deux self-énergies

$$\begin{aligned} \text{Im}\Sigma_1(q_\perp, q_z) &= (1 + \hat{q}_z^2)\Sigma_o(q_\perp) , \\ \text{Im}\Sigma_2(q_\perp, q_z) &= (2 - 3\hat{q}_z^2(1 - \hat{q}_z^2))\Sigma_o(q_\perp) . \end{aligned}$$

Comme pour le cas paraxial, nous allons chercher à étudier la propagation selon z , nous devons donc à nouveau considérer la transformée de Fourier inverse.

$$\langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = \int \frac{dq_z}{2\pi} \langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, q_z) \rangle e^{iq_z z} . \quad (\text{II.15})$$

Nous allons une nouvelle fois supposer le désordre faible, ce qui s'exprime ici par la condition $\text{Im}\Sigma \ll k^2 - q_z^2$. Nous effectuons alors un développement limité des pôles du tenseur (II.14) :

$$q_z^{pole} \simeq \sqrt{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2} + i \frac{\text{Im}\Sigma_{1/2}(q_\perp, q_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2})}{2\sqrt{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2}} . \quad (\text{II.16})$$

Afin de simplifier les expressions dans la suite, nous notons $k_z = \sqrt{k^2 - \mathbf{q}_\perp^2}$ et nous avons ainsi $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_\perp, k_z)$ et $\mathbf{q}^2 = k^2$. En utilisant le développement des pôles (II.16), la transformée de Fourier (II.15) nous donne l'expression du tenseur de Green moyen :

$$\begin{aligned} \langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle &= \frac{1}{2ik_z} e^{ik_z z} \left[e^{+\frac{\text{Im}\Sigma_1}{2k_z} z} \delta_{ij} - e^{+\frac{\text{Im}\Sigma_2}{2k_z} z} \hat{q}_i \hat{q}_j \right. \\ &\left. - \frac{1}{\hat{q}_z^2} \left(e^{+\frac{\text{Im}\Sigma_1}{2k_z} z} - e^{+\frac{\text{Im}\Sigma_2}{2k_z} z} \right) (\delta_{iz} \hat{k}_z \hat{q}_j + \delta_{jz} \hat{q}_i \hat{k}_z - \delta_{iz} \delta_{jz} - \hat{q}_i \hat{q}_j) \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Notons que les self-énergies dépendent à présent uniquement du vecteur d'onde transverse :

$$\text{Im}\Sigma_1(\mathbf{q}_\perp) = (2 - \hat{q}_\perp^2)\Sigma_o(q_\perp) , \quad (\text{II.18})$$

$$\text{Im}\Sigma_2(\mathbf{q}_\perp) = [2 - 3\hat{q}_\perp^2(1 - \hat{q}_\perp^2)]\Sigma_o(q_\perp) . \quad (\text{II.19})$$

Notons, à ce stade, que ces expressions (II.18) et (II.19) sont exactes, au sens elles sont valables que l'on soit proche ou non de la limite paraxiale.

2. Cette opération est ici effectuée avec l'assistance du logiciel Mathematica.

Pour simplifier les calculs, nous allons à présent utiliser l'hypothèse du faisceau collimaté (II.9). La contribution principale aux relations (II.18) et (II.19) est alors donnée par la couche $\mathbf{q}_\perp \simeq \mathbf{k}_o$. Dans l'expression (II.17), nous pouvons alors développer les arguments des exponentielles. Dans la limite des petits angles ($\hat{k}_o \ll 1$), nous obtenons les relations :

$$\begin{aligned}\frac{\text{Im}\Sigma_1}{2k_z}(\mathbf{q}_\perp) &\simeq \frac{1}{2k} \frac{\text{Im}\Sigma_1(\mathbf{k}_o)}{\sqrt{1 - \hat{k}_o^2}} \sim \frac{\Sigma_o(k_o)}{k} + \mathcal{O}(\hat{k}_o^4), \\ \frac{\text{Im}\Sigma_2}{2k_z}(\mathbf{q}_\perp) &\simeq \frac{1}{2k} \frac{\text{Im}\Sigma_2(\mathbf{k}_o)}{\sqrt{1 - \hat{k}_o^2}} \sim \frac{\Sigma_o(k_o)}{k} (1 - \hat{k}_o^2) + \mathcal{O}(\hat{k}_o^4).\end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire l'expression finale du tenseur de Green moyen :

$$\begin{aligned}\langle G_{ij}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle &= \frac{-i}{2k_z} e^{ik_z z} e^{-\frac{z}{2z_s}} \left[\delta_{ij} - e^{+\frac{z}{z_{\text{SH}}}} \hat{q}_i \hat{q}_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\hat{q}_\perp^2} \left(1 - e^{+\frac{z}{z_{\text{SH}}}} \right) (\delta_{iz} \hat{q}_z \hat{q}_j + \delta_{jz} \hat{q}_i \hat{q}_z - \delta_{iz} \delta_{jz} - \hat{q}_i \hat{q}_j) \right] \quad (\text{II.20})\end{aligned}$$

où nous retrouvons (à l'ordre 0 du développement en k_o) le temps caractéristique de diffusion (II.8) introduit précédemment dans le cas de l'approximation paraxiale :

$$z_s^{-1} = \frac{k^3}{4} \langle B(k_o, k_o, \theta) \rangle_\theta. \quad (\text{II.21})$$

Nous voyons également apparaître un nouveau temps (à l'ordre supérieur) qui va caractériser l'effet Hall de spin

$$z_{\text{SH}}^{-1} = \frac{\hat{k}_o^2}{2} z_s^{-1}. \quad (\text{II.22})$$

Nous vérifions facilement que l'équation (II.20) se réduit au résultat de l'approximation paraxiale (II.6) lorsque k_o tend vers zéro (ce qui revient à considérer un temps z_{SH} tendant vers l'infini).

En utilisant la relation (II.11), nous obtenons finalement l'expression du champ moyen selon z :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle = w_o \sqrt{\pi} e^{-\frac{w_o^2}{8}(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{k}_o)^2} e^{ik_z z} e^{-\frac{z}{2z_s}} \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \left(1 - e^{\frac{z}{z_{\text{SH}}}} \right) (\boldsymbol{\varepsilon}_\perp \mathbf{e}_\perp + \boldsymbol{\varepsilon}_z \mathbf{e}_z) \right] \quad (\text{II.23})$$

où nous avons noté $\mathbf{e}_\perp = \mathbf{q}_\perp / q_\perp$, $\boldsymbol{\varepsilon}_\perp = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_\perp$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_z = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}_z$. Pour obtenir cette expression, nous avons utilisé $(\mathbf{q}_\perp + k_z \mathbf{e}_z) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \sim 0$.³ Le terme $\boldsymbol{\varepsilon}_\perp \mathbf{e}_\perp + \boldsymbol{\varepsilon}_z \mathbf{e}_z$ correspond à la projection de la polarisation initiale dans le plan de propagation défini par le vecteur d'onde \mathbf{q}_\perp et l'axe z . Afin de simplifier les expressions dans la suite, nous noterons $\boldsymbol{\varepsilon}_\perp \mathbf{e}_\perp + \boldsymbol{\varepsilon}_z \mathbf{e}_z = \boldsymbol{\varepsilon}'_\perp = \boldsymbol{\varepsilon}'_\perp \mathbf{e}'_\perp$.

3. Plus précisément, le champ initial est tel que $(\mathbf{k}_o + k_z \mathbf{e}_z) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Cependant, dans l'approximation d'un faisceau collimaté, les vecteurs d'onde transverses \mathbf{q}_\perp donnant les contributions principales sont ceux proches de \mathbf{k}_o .

II.3.3 Étude du profil d'intensité

Afin de mieux comprendre l'impact du terme non-paraxial de l'équation (II.23) sur l'évolution du faisceau balistique, nous allons examiner le profil d'intensité de ce dernier, qui est donné par l'expression :

$$I(\mathbf{r}_\perp, z) = |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2.$$

Cette intensité s'atténue exponentiellement au fur et à mesure de la propagation, associée au phénomène de diffusion avec le temps caractéristique z_s défini dans l'équation (II.21). Cette décroissance n'est pas affectée par le phénomène de couplage spin-orbite. Pour décrire ce dernier, il est ainsi commode d'introduire une intensité normalisée du mode balistique. Cela nous permettra de plus de comparer plus facilement son évolution par rapport à l'instant initial. Ainsi, dans la suite nous travaillerons avec l'intensité :

$$\hat{I}(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{|\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2}{\int d\mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2}.$$

En effectuant une transformée de Fourier des champs électriques dans l'expression précédente, nous obtenons la nouvelle expression :

$$\hat{I}(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{\int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle}{\int \frac{d^2\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} |\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle|^2}$$

où nous avons noté $\mathbf{K}_\perp^{(\pm)} = \mathbf{K}_\perp \pm \mathbf{q}_\perp/2$ et où les champs $\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(\pm)}, z) \rangle$ sont données par l'expression (II.23). Dans le cas d'un faisceau gaussien, nous avons

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle \propto e^{-\frac{w_o^2}{16} q_\perp^2} e^{-\frac{w_o^2}{4} (\mathbf{K}_\perp - \mathbf{k}_o)^2}.$$

Les contributions principales à l'intensité sont alors données, dans la limite (II.9) d'un faisceau collimaté, par les \mathbf{K}_\perp proches de \mathbf{k}_o et par les \mathbf{q}_\perp proches de zéro. Nous pouvons donc développer nos expressions autour de $\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0$, ce qui nous donne pour le champ moyen :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(\pm)}, z) \rangle \sim \langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle \pm \frac{1}{2} \mathbf{q}_\perp \cdot \nabla_{\mathbf{q}_\perp} [\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(\pm)}, z) \rangle]_{\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0}.$$

Nous avons alors :

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle \sim |\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle|^2 + \mathbf{q}_\perp \cdot \nabla_{\mathbf{q}_\perp} [\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle]_{\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0}.$$

L'expression de l'intensité (II.3.3) se réécrit alors sous la forme :

$$\hat{I}(\mathbf{r}_\perp, z) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-\frac{w_o^2}{16} q_\perp^2} (1 - i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{R}_\perp(z)) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}$$

où $\mathbf{R}_\perp(z)$ est le centroïde du faisceau balistique, dans le plan transverse, que nous avons introduit dans le chapitre précédent avec l'expression (I.13), et que nous définissons ici en fonction du champ moyen par l'expression

$$\mathbf{R}_\perp(z) = \frac{\int d\mathbf{r}_\perp \mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2}{\int d\mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2} = \frac{i \int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} \nabla_{\mathbf{q}_\perp} [\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle]_{\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0}}{\int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} |\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle|^2}. \quad (\text{II.24})$$

Au premier ordre en \mathbf{q} , nous avons $1 - i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_\perp(z) \sim e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_\perp(z)}$, de sorte que :

$$\hat{I}(\mathbf{r}_\perp, z) \sim \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} e^{-\frac{w_o^2}{16} q_\perp^2} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp)} = \frac{4}{w_o^2 \pi} e^{-\frac{4(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp)^2}{w_o^2}}.$$

Au final, nous obtenons pour le profil d'intensité la relation simple :

$$I(\mathbf{r}_\perp, z) \sim I(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{R}_\perp(z), 0),$$

où $\mathbf{R}_\perp(z)$ est défini par (II.24). Le profil d'intensité reste ainsi similaire au cours de la propagation le long de l'axe z avec un simple déplacement du centroïde du faisceau (propriété déjà vérifiée dans l'approximation paraxiale). En d'autres termes, les premières corrections non-paraxiales n'introduisent aucune déformation du faisceau. Nous allons à présent voir que la physique intéressante, liée au couplage spin-orbite, est entièrement contenue dans l'expression du centroïde $\mathbf{R}_\perp(z)$.

II.3.4 Trajectoire du centre du faisceau

En utilisant l'expression (II.23), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle &= \pi w_o^2 e^{-\frac{w_o^2}{4} (\mathbf{K}_\perp - \mathbf{k}_o)^2} e^{-\frac{w_o^2}{16} \mathbf{q}_\perp^2} e^{i(k_z^{(+)} - k_z^{(-)})z} e^{-\left(\frac{z}{z_s} + \frac{2z}{z_{SH}}\right)} \\ &\times \left[1 - (|\boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(+)}|^2 + |\boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(-)}|^2) \left(1 - e^{\frac{z}{z_{SH}}}\right) + \boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(-)} (\mathbf{e}_{(\perp, z)}^{(+)} \cdot \mathbf{e}_{(\perp, z)}^{(-)}) \left(1 - e^{\frac{z}{z_{SH}}}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

où nous avons défini $k_z^{(\pm)} = \sqrt{k^2 - \mathbf{K}^{(\pm)}_z}$. Dans cette expression, seuls deux termes vont contribuer à (II.24). Le premier est le terme :

$$\nabla_{\mathbf{q}_\perp} \left[e^{i(k_z^{(+)} - k_z^{(-)})z} \right]_{\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0} = -i \frac{\mathbf{K}_\perp}{k_z} z$$

Le second est :

$$\nabla_{\mathbf{q}_\perp} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{(\perp, z)}^{(-)} (\mathbf{e}_{(\perp, z)}^{(+)} \cdot \mathbf{e}_{(\perp, z)}^{(-)}) \right]_{\mathbf{q}_\perp \rightarrow 0} = +\frac{i}{\mathbf{K}_\perp^2} \text{Im}[(\boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \mathbf{K}_\perp) \boldsymbol{\varepsilon}] .$$

Afin d'obtenir une expression simple de $\mathbf{R}_\perp(z)$, nous allons à nouveau utiliser l'hypothèse du faisceau collimaté (avec une distribution fortement piquée autour de \mathbf{k}_o). Plus précisément, nous considérerons la limite $e^{-w_o^2 (\mathbf{K}_\perp - \mathbf{k}_o)^2 / 2} \rightarrow (2\pi)^2 w_o^2 \delta(\mathbf{K}_\perp - \mathbf{k}_o)$. En se rappelant la forme de la polarisation initiale (II.10), nous trouvons alors :

$$\mathbf{R}_\perp(z) = \frac{\mathbf{k}_o}{k_z} z - \sigma \frac{\hat{k}_z}{k_o} \left[1 - \frac{1}{\cosh(z/z_{SH})} \right] \mathbf{e}_y , \quad (\text{II.25})$$

qui constitue un des résultats principaux de cette thèse. Dans cette expression, le premier terme décrit la propagation balistique du faisceau selon le vecteur d'onde \mathbf{k}_o dans le plan transverse. Il s'agit de la trajectoire que nous obtenons dans l'approximation paraxiale. Le terme supplémentaire, que nous noterons $\delta R_\perp(z)$ dans la suite, décrit, quant à lui, un déplacement latéral, de l'ordre de la longueur d'onde transverse k_o^{-1} . Ce terme est proportionnel à l'hélicité du faisceau (et donc en particulier sensible à l'orientation du spin de

la lumière). Il constitue donc bien une manifestation de l'effet Hall de spin de la lumière décrit ici pour la première fois dans un milieu désordonné transverse. Le temps caractéristique z_{SH} , donné par l'expression (II.22), correspond au temps typique d'apparition du déplacement latéral.

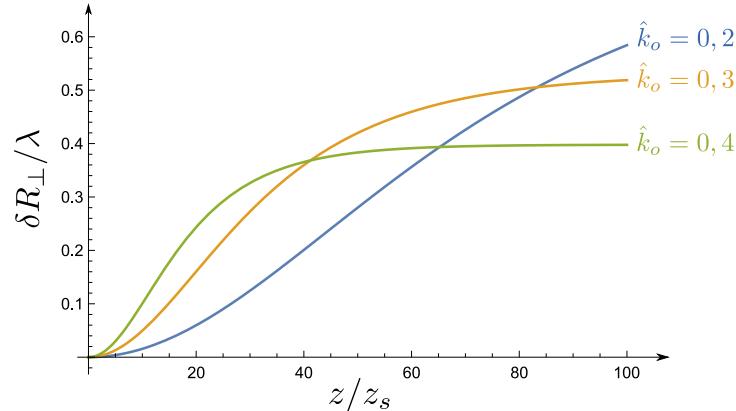


Fig. II.7 Graphe de l'évolution du déplacement δR_{\perp} en fonction de z pour différentes valeurs de l'angle d'incidence \hat{k}_o

Le déplacement latéral (II.25) est tracé sur la figure II.7 en fonction de z/z_s . Nous pouvons voir qu'il sature à une valeur de l'ordre de $1/k_o$, ce qui dans le cas des petits angles est bien plus grand que l'ordre de grandeur $1/k$ des effets Hall de spin habituels pour la lumière vus dans le chapitre I. La configuration du désordre transverse est donc une piste intéressante pour observer ce phénomène. Cependant, il faut aussi souligner que le temps $z_{\text{SH}} = 2z_s/\hat{k}_o^2$ augmente également quand k_o diminue. Ainsi, même si l'effet augmente, il met plus de temps à apparaître. Cette difficulté sera discutée dans la partie II.5.

Notons, pour terminer, que ce décalage spatial du faisceau décrit ici n'implique aucune *déviation* de trajectoire. En effet, en utilisant la définition (I.14) du vecteur d'onde moyen du faisceau, nous réécrivons ce dernier comme :

$$\mathbf{K}(z) = \frac{\int \frac{d\mathbf{q}_{\perp}}{(2\pi)^2} \mathbf{q} |\langle \mathbf{E}(\mathbf{q}_{\perp}, z) \rangle|^2}{\int \frac{d\mathbf{q}_{\perp}}{(2\pi)^2} |\langle \mathbf{E}(\mathbf{q}_{\perp}, z) \rangle|^2}$$

ce qui conduit immédiatement, dans l'approximation d'une enveloppe piquée autour de \mathbf{k}_o , à :

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_o + k_z \mathbf{e}_z .$$

Le vecteur d'onde moyen du faisceau reste donc constant au cours de la propagation.

II.4 Étude du moment cinétique

Comme nous l'avons déjà évoqué, les décalages transverses de faisceaux lumineux dans les milieux inhomogènes sont en général associés à un mécanisme de couplage spin-orbite.

Pour mettre en évidence ce mécanisme, nous allons maintenant nous intéresser au moment cinétique de la lumière dans notre système.

II.4.1 Moment cinétique orbital

Nous avons défini le moment cinétique d'un faisceau par l'expression (I.16). Pour le faisceau balistique de notre système désordonné, celle-ci se réécrit :

$$\mathbf{L}(z) = -i \frac{\int d\mathbf{r}_\perp \langle E_j^*(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \langle E_j(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle}{\int d\mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2} \quad (\text{II.26})$$

où nous avons ici omis le facteur $\epsilon_o/(2\omega)$ que apparaissait dans l'expression (I.16). Comme nous l'avons fait précédemment pour le calcul de l'intensité, nous avons renormalisé l'expression (II.26) pour omettre les éventuels effets de perte dus à la diffusion multiple.

Le calcul dans l'approximation des petits angles nous donne l'expression :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}_\perp \langle E_j^*(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) \langle E_j(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle = \\ \int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} \{ (\mathbf{K}_\perp + k_z \mathbf{e}_z) \times \nabla_{\mathbf{q}_\perp} [\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle]_{\mathbf{q}_\perp=0} \\ - i \mathbf{K}_\perp \times z \mathbf{e}_z |\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle|^2 \} . \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant à nouveau l'hypothèse d'une enveloppe fortement piquée autour du vecteur d'onde transverse \mathbf{k}_o , nous écrivons :

$$\mathbf{L}(z) \simeq -i(\mathbf{k}_o + k_z \mathbf{e}_z) \times \frac{\int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} \nabla_{\mathbf{q}_\perp} [\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp^{(+)}, z) \rangle \cdot \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp^{(-)}, z) \rangle]_{\mathbf{q}_\perp=0}}{\int d\mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2} - \mathbf{k}_o \times z \mathbf{e}_z .$$

En utilisant finalement la définition du centroïde du faisceau (II.24), nous obtenons l'expression du moment cinétique orbital :

$$\mathbf{L}(z) = (\mathbf{R}_\perp(z) + z \mathbf{e}_z) \times (\mathbf{k}_o + k_z \mathbf{e}_z) \quad (\text{II.27})$$

Nous reconnaissons alors la forme classique bien connue $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{p}$ où $\mathbf{p} = \mathbf{K} = \mathbf{k}_o + k_z \mathbf{e}_z$ est l'impulsion du faisceau que nous avions introduit à la fin de la partie II.3.4.

II.4.2 Moment cinétique de spin

Comme pour le moment cinétique orbital, nous pouvons calculer le moment cinétique de spin (I.17) qui s'écrit pour notre système dans le plan transverse :

$$\mathbf{S}(z) = -i \frac{\int d\mathbf{r}_\perp \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle \times \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle}{\int d\mathbf{r}_\perp |\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2} .$$

Ce qui nous donne dans l'espace de Fourier :

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} \langle \mathbf{E}^*(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle \times \langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle}{\int \frac{d\mathbf{K}_\perp}{(2\pi)^2} |\langle \mathbf{E}(\mathbf{K}_\perp, z) \rangle|^2} .$$

Le calcul est alors direct en utilisant (II.23) avec la polarisation (II.10) et nous obtenons l'expression finale :

$$\mathbf{S}(z) = \frac{\sigma \hat{\mathbf{k}}}{\cosh(z/z_{\text{SH}})} . \quad (\text{II.28})$$

II.4.3 Conversion de moment cinétique

En moyenne (sur plusieurs réalisations du désordre), notre système possède une invariance par rotation autour de l'axe z . Selon les lois de Noether, cette invariance doit se caractériser par une conservation du moment cinétique total dans cette direction. Pour le moment cinétique orbital, en reprenant l'expression (II.27) ainsi que l'expression (II.25) du centroïde, on déduit facilement la composante longitudinale du moment cinétique orbital :

$$L_z(z) = \sigma \hat{k}_z \left[1 - \frac{1}{\cosh(z/z_{\text{SH}})} \right] . \quad (\text{II.29})$$

Pour le moment cinétique de spin, nous obtenons directement la composante longitudinale (qui est ici la composante principale) à partir de l'expression (II.28) :

$$S_z(z) = \frac{\sigma \hat{k}_z}{\cosh(z/z_{\text{SH}})} . \quad (\text{II.30})$$

Nous voyons alors apparaître la conservation du moment cinétique selon la direction z :

$$L_z(z) + S_z(z) = \sigma \hat{k}_z \quad \forall z .$$

Une telle loi de conservation est la preuve directe d'un couplage entre le « spin » et « l'orbite » du faisceau balistique. Les composantes des moments cinétiques orbital et de spin suivant z sont tracées sur la figure II.8 en fonction de z/z_s .

Notons qu'une telle loi de conservation ne s'observe pas pour les autres composantes du moment cinétique. En effet, une rotation selon une direction quelconque « coupe » différentes couches de désordre correspondant à différents z . Cela est particulièrement visible dans le cas de rotation autour des axes x ou y où quelque soit la configuration du désordre, le système est constitué de lignes de permittivité constante. Nous observons bien alors que le moment cinétique total n'est pas conservé selon ces directions.

Dans la littérature, de nombreux cas de conversion de moment cinétique de spin en moment cinétique orbital ont été rapportés, la plupart du temps en relation avec l'émergence d'une structure « vortex » du profil de phase du faisceau [16]. La situation est différente dans notre cas, où nous avons vu qu'il n'y a pas de déformation du faisceau lumineux au cours de la propagation. Ici le transfert se fait du spin au moment cinétique orbital extrinsèque, défini par rapport à l'axe optique et provoquant un déplacement de notre faisceau. Afin de caractériser le transfert de moment de spin, nous allons à présent nous intéresser à l'évolution de la polarisation au cours de la propagation.

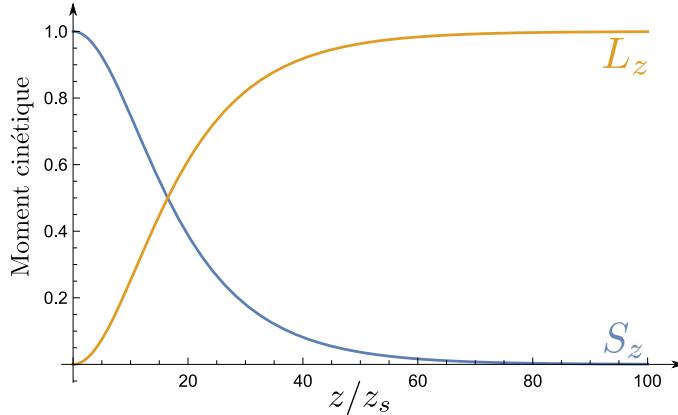


Fig. II.8 Courbes des composantes S_z et L_z des moments cinétiques (équations (II.29) et (II.30)) en fonction du temps z pour $\sigma = +1$ et $\hat{k}_o = 0.4$. À l'instant initial, le système possède uniquement un moment cinétique de spin qui est converti au fur et à mesure de la propagation en moment cinétique orbital, la somme $L_z + R_z$ restant constante.

II.4.4 Évolution de l'état de polarisation

Notre faisceau étant collimaté autour du vecteur transverse \mathbf{k}_o , nous pouvons simplement définir le vecteur polarisation moyen du faisceau balistique par la relation :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(z) \rangle = \frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}_o, z) \rangle}{|\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}_o, z) \rangle|} .$$

En utilisant l'expression (II.23), nous obtenons l'expression générale (valable quelque soit la polarisation de départ) :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(z) \rangle = \frac{\varepsilon_{x'} \mathbf{e}'_x + \varepsilon_y e^{-z/z_{\text{SH}}} \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\varepsilon_{x'}|^2 + |\varepsilon_y|^2 e^{-2z/z_{\text{SH}}}}} .$$

Une première chose que nous observons est que cette polarisation reste bien orthogonale au vecteur d'onde $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_o, k_z)$. La transversalité du champ reste donc bien vérifiée à tout instant de la propagation. Nous voyons ensuite que, mis à part pour la condition initiale particulière $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}_y$, toutes les polarisations tendent pour les grands z vers une polarisation linéaire \mathbf{e}'_x , quelque soit l'état de polarisation de départ. Il y a ainsi une déformation de la polarisation du faisceau.

Pour illustrer cette déformation, nous utilisons l'expression (II.10) de la polarisation initiale. Nous trouvons alors :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(z) \rangle = \frac{\mathbf{e}'_x + e^{i\phi} e^{-z/z_{\text{SH}}} \mathbf{e}_y}{\sqrt{1 + e^{-2z/z_{\text{SH}}}}} .$$

Dans le désordre transverse, le déplacement du faisceau balistique s'accompagne donc d'une modification de sa polarisation au cours de la propagation, imposée par la conversion

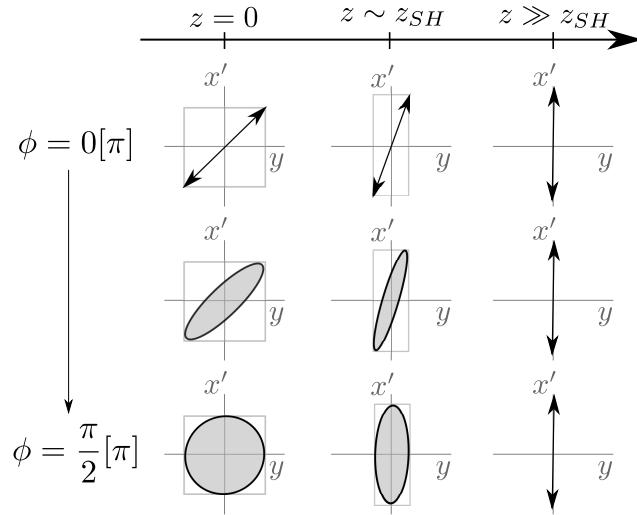


Fig. II.9 Illustration de l'évolution de la polarisation moyenne du faisceau pour différents paramètres ϕ de la polarisation initiale (II.10).

du moment cinétique de spin en moment cinétique orbital extrinsèque. Ceci explique, en particulier, pourquoi dans le cas d'une polarisation rectiligne il n'y a pas de déplacement du faisceau.

II.5 Proposition expérimentale pour la mesure de l'effet Hall de spin en présence de désordre

II.5.1 Présentation des contraintes expérimentales

Une difficulté principale pour mesurer l'effet Hall de spin en présence de désordre est liée au phénomène de diffusion multiple, qui conduit à une atténuation exponentielle de l'intensité du faisceau balistique sur le temps caractéristique z_s . Pour des temps plus longs, le halo de diffusion devient prédominant et il est alors difficile de détecter expérimentalement le faisceau balistique. Or, bien que dans notre situation la déviation du faisceau est d'autant plus forte que l'angle d'incidence est faible, cet effet s'accompagne dans le même temps d'une augmentation de z_{SH} . Dans la limite des petits angles, ce temps est alors bien plus grand que z_s et le déplacement du mode balistique n'est pas distinguable du halo de diffusion. Nous devons donc chercher une autre configuration expérimentale pour pouvoir observer ce phénomène.

II.5.2 Mesure de l'effet Hall de spin optique : approche polarimétrique

Nous avons vu dans la partie I.3.3 que la mesure de l'effet Imbert-Fedorov implique la mesure d'un déplacement sub-longueur d'onde d'un faisceau lumineux, rendant son observation directe après une seule réflexion ou une seule transmission très difficile. Une solution expérimentale à ce problème a été trouvée dans les années 2000, exploitant une approche polarimétrique inspirée de la technique de « mesure faible » en mécanique quantique. Elle a permis la mesure directe de l'effet Imbert-Fedorov, ainsi que d'autres effets de couplage

spin-orbite [48, 50, 74].

Le dispositif est en soi très simple. Un faisceau gaussien initialement polarisé rectilignement (disons ici selon e_x) est propagé en présence d'un couplage spin-orbite. À la suite de cette propagation, l'intensité du faisceau est mesurée après une projection sur la polarisation orthogonale à la polarisation initiale (e_y dans notre exemple). Le principe repose sur le fait que la polarisation rectiligne est la superposition de deux polarisations circulaires opposées. Ces deux contributions subissent alors des déplacements selon des sens opposés à l'interface, par l'effet Imbert-Fedorov. Ainsi après l'interface, la polarisation du faisceau gaussien n'est plus homogène, le centre du faisceau restant polarisé rectilignement, mais les ailes étant à présent polarisées elliptiquement (tendant vers une polarisation circulaire très loin dans les ailes), comme schématisé sur la figure II.10. Ainsi, en sélectionnant ensuite la polarisation orthogonale à la polarisation initiale, on élimine la lumière contenue dans le centre du faisceau et on fait apparaître les décalages liés à l'effet Imbert-Fedorov.

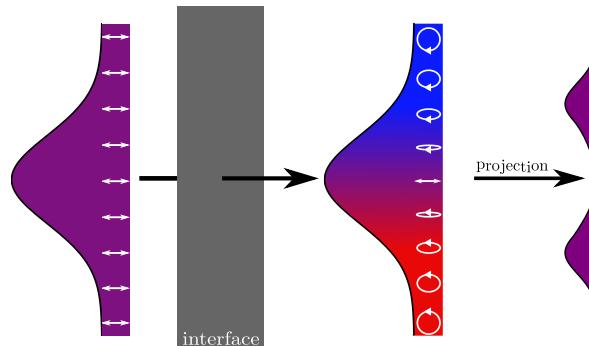


Fig. II.10 *Illustration de l'évolution de la polarisation d'un faisceau gaussien due à une interaction spin-orbite : le faisceau initialement polarisé rectilignement traverse une interface où les composantes circulaires droite et gauche sont décalées dans deux sens opposés à cause de l'effet Imbert-Fedorov. En projetant le faisceau sur la polarisation orthogonale à la polarisation initiale, ce décalage entre ces deux composantes apparaît.*

En pratique, on utilise également une petite composante elliptique réglable pour la projection finale. Plus précisément, pour une polarisation initiale selon e_x , on projette après l'interface sur la polarisation :

$$\mathbf{e}_{\text{fin}} = \frac{i\delta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{1 + \delta^2}$$

où le paramètre δ est contrôlable et permet de sélectionner en fonction de son signe le sens de la polarisation mesurée. Dans l'article [50], il est montré que l'on obtient alors l'expression du déplacement :

$$\langle y \rangle = \frac{\delta}{k} \frac{1}{\delta^2 + 1/(k_o w_o)^2}. \quad (\text{II.31})$$

L'effet Hall de spin est alors mis en évidence en mesurant $\langle y \rangle$ en fonction de δ . Une mesure récente de ce décalage, observé pour des plasmons de surface générés par de la lumière

transmise à travers une fente [50], est représentée sur la figure II.11.

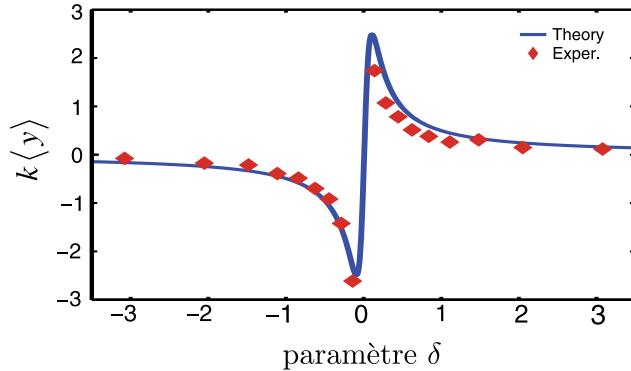


Fig. II.11 Illustration tirée de l'article [50] de Gorodetski et al. La configuration considérée ici est un faisceau laser focalisé illuminant une fente percée sur une fine couche d'or. Au passage par la fente, la lumière génère des plasmons de surface qui sont détectés. On observe alors un effet Hall de spin pour les plasmons, en faisant varier la polarisation du laser. Le graphe montre la mesure de la position moyenne du faisceau des plasmons émis en fonction du paramètre δ .

Remarquons ici que cette méthode de mesure s'inspire fortement de la méthode de mesure faible (avec post-sélection) en physique quantique. Cette méthode a été proposée pour la première fois en 1988 par les physiciens Aharonov, Albert et Vaidman [79]. L'article intitulé « Comment le résultats de la mesure de la composante de spin d'une particule de spin 1/2 peut être 100 » présente comment une mesure quantique peut donner un résultat amplifié par rapport à l'état initial considéré. Notons qu'en physique quantique, un autre avantage de cette méthode est qu'elle peut également permettre une mesure peu perturbative du système. Des détails sur cette approche peuvent être trouvés dans les références [80, 81].

II.5.3 Adaptation de la méthode à notre système

La méthode polarimétrique discutée ci-dessus peut aisément être adaptée à notre système. À cette fin, nous reprenons le problème de la partie I.4, en considérant maintenant un faisceau initial de polarisation $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}_{x'} \sim \mathbf{e}_x$ (voir figure II.12). Les calculs effectués pour le tenseur de Green et pour le champ électrique dans les parties II.3.2 et II.3.3 sont toujours valides ici. La mesure polarimétrique est effectuée, dans notre système, en laissant le faisceau se propager dans le désordre pour un certain temps z , puis en projetant le faisceau à la sortie du milieu sur la polarisation :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{fin}} = \frac{i\delta \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y}{\sqrt{1 + \delta^2}}$$

où le paramètre δ est réel. Le déplacement du mode balistique du faisceau est alors donné par l'expression :

$$\mathbf{R}_\perp(z, \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{out}}) = \frac{\int d^2 \mathbf{r}_\perp \mathbf{r}_\perp |\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{out}}^* \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2}{\int d^2 \mathbf{r}_\perp |\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{out}}^* \cdot \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle|^2} .$$

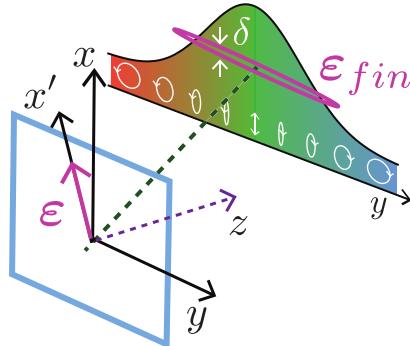


Fig. II.12 Distribution spatiale de polarisation du faisceau gaussien après propagation dans le milieu. L'ellipse rose schématise la projection polarimétrique en sortie.

Le calcul de ce déplacement est obtenu assez directement à partir de l'expression du champ (II.23), en procédant de manière similaire à ce qui a été fait dans la partie II.3.4. Nous obtenons alors :

$$\delta R_{\perp}(z, \delta) = \frac{-\delta}{k_o} \frac{1 - e^{-z/z_{\text{SH}}}}{\delta^2 + 2(1 - e^{-z/z_{\text{SH}}})^2 / (w_o k_o)^2} \quad (\text{II.32})$$

qui généralise la relation (II.31) obtenue pour une interface [50]. Notons que, pour obtenir cette équation (II.32), nous avons cette fois pris en compte la largeur w_o du faisceau gaussien, qui joue un rôle assez important pour la mesure polarimétrique. Nous voyons en effet que, aux grands z et pour $\delta \sim 1/(w_o k_o)$, ce déplacement à une valeur maximum de l'ordre de $\delta R_{\perp} \sim w_o \gg 1/k_o$. Nous obtenons ainsi bien une amplification de l'effet à l'aide de cette méthode de mesure. Une graphe de densité du déplacement (II.32) est représenté sur la figure II.13 en fonction de δ et z . Les zones en rouge correspondent aux plus grandes valeurs de ΔR_{\perp} .

Afin de nous assurer que ce déplacement est bien mesurable expérimentalement, nous devons également prendre en compte la contribution du halo diffusif. En effet, pour pouvoir détecter le mode balistique du faisceau, l'intensité par unité de surface de celui-ci doit être plus faible que celle du signal de diffusion multiple. À une distance z de l'interface d'entrée, cette dernière est donnée par [77] :

$$I_d(z) \simeq \frac{1 - e^{-\frac{z}{z_p}}}{8\pi D z}$$

avec $z_p = 8z_s/(5\hat{k}_o^4)$ et $D = \hat{k}_o^2 z_s/2$. Tandis que l'intensité par unité de surface de la composante balistique (après projection sur e_{fin}) est donnée par :

$$I \sim \frac{2\delta^2}{\pi w_o^2} e^{-\frac{z}{z_s}}$$

où le facteur δ^2 provient de la projection sur e_{fin} . La condition pour pouvoir détecter le

mode balistique est alors donnée par :

$$\frac{w_o^2}{zz_s} \left(1 - e^{-\frac{z}{z_p}}\right) < 8\hat{k}_o^2\delta^2 e^{-\frac{z}{z_s}}.$$

Cette condition est également représentée sur la figure II.13. Elle indique que pour distinguer le mode balistique il est nécessaire de travailler avec un *waist* suffisamment petit.

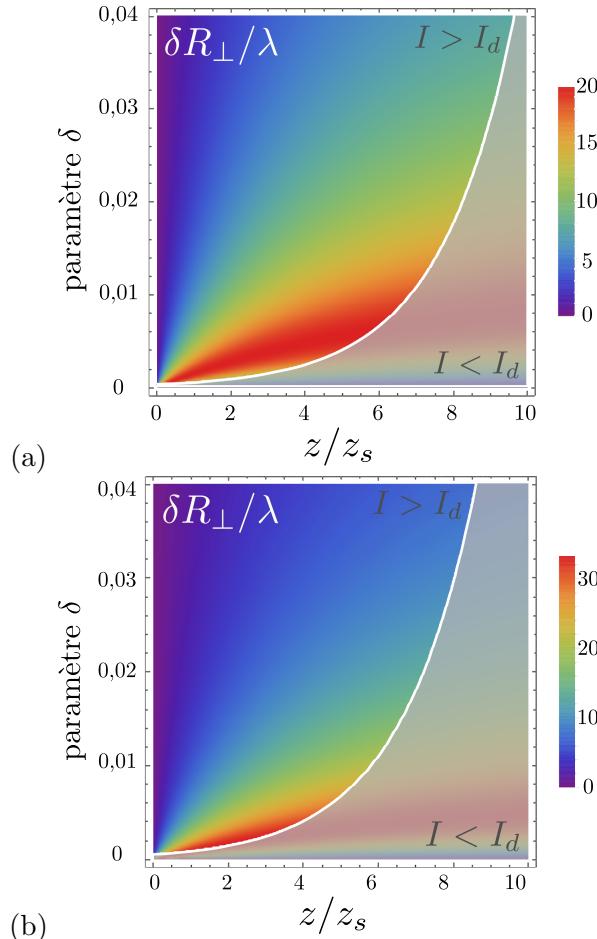


Fig. II.13 Graphes indiquant la valeur du déplacement δR_{\perp} en fonction de z et du paramètre δ obtenus pour $\hat{k}_o = 0.4$, $\lambda = 532$ nm, $z_s = 1$ cm et deux largeurs du faisceau : (a) $w_o = 30\mu\text{m}$ et (b) $w_o = 50\mu\text{m}$. Nous voyons ici qu'un faisceau plus fin permet d'agrandir la zone où le mode balistique est détectable tout en maintenant un décalage du faisceau bien plus grand que la longueur d'onde.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la propagation d'un faisceau collimaté au sein d'un désordre transverse en considérant les premières corrections à l'approximation paraxiale. Nous avons montré que dans une telle configuration, le profil spatial d'un faisceau polarisé

circulairement se déplace transversalement. Ce phénomène est associé à une conversion de moment angulaire que nous avons identifié à un effet Hall de spin optique dû au désordre. Si ce déplacement peut être amplifié en jouant sur l'angle du faisceau incident, le phénomène de diffusion multiple au sein du désordre rend sa détection difficile. Pour contourner cette difficulté, nous avons proposé une méthode de mesure polarimétrique permettant d'amplifier le déplacement du faisceau, et nous avons identifié les gammes de paramètres pour lesquels le mode balistique est détectable au-dessus du halo de diffusion multiple.

Chapitre III

Éléments d'optique non-linéaire Fluides de lumière

Dans les chapitres I et II, nous nous sommes intéressé·es à des milieux diélectriques inhomogènes en considérant uniquement leur réponse linéaire à la lumière. L'approximation d'optique linéaire est tout à fait valide pour la plupart des milieux à condition de travailler avec une intensité lumineuse faible. Dès que celle-ci devient assez importante en revanche, des effets non-linéaires apparaissent. Cela a été mis en évidence dès le début des années 60 avec le développement des lasers, sources lumineuses très intenses [82, 83].

Dans ce chapitre, nous allons développer les éléments théoriques permettant de décrire cette réponse non-linéaire. Nous aborderons très rapidement le deuxième ordre, puis nous discuterons plus en détail la réponse de troisième ordre et plus particulièrement l'effet Kerr associé. Dans le cas particulier d'un faisceau lumineux dans la limite paraxiale, nous verrons que ce dernier conduit à une analogie très intéressante avec la physique quantique de bosons en interaction. Cette analogie, très étudiée ces dernières années, a donné lieu au concept de « fluide de lumière » sans cavité. Nous l'illustrerons à travers quelques expériences récentes, puis par un calcul simple de propagation d'une fluctuation au sein d'un tel fluide. Nous terminerons enfin le chapitre avec une description théorique des forces optiques dans les milieux Kerr, qui nous sera nécessaire dans le chapitre suivant.

III.1 Introduction aux milieux diélectriques non-linéaires

Dans cette partie, nous présenterons la description théorique des milieux diélectriques non-linéaires. Nous reviendrons rapidement sur les hypothèses considérées pour la réponse linéaire dans le chapitre I afin de les revisiter dans le cadre des milieux non-linéaires. Nous discuterons ensuite plus précisément les non-linéarités de deuxième et troisième ordre.

III.1.1 Réponse totale d'un milieu et premier ordre

Dans la partie I.1.1, nous avons introduit la notion de polarisabilité d'un milieu diélectrique, définie par l'expression :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, t) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

où nous rappelons que $\chi(\mathbf{r}, t)$ est le tenseur de susceptibilité décrivant la réponse du milieu et que la notation : dénote le produit de contraction. Nous avions précédemment considéré une réponse linéaire, mais, dans le cas général, ce tenseur dépend du champ électrique appliqué au milieu. Il se développe ainsi sous la forme [84, 85] :

$$\chi_{ij}(\mathbf{r}, t) = \chi_{ij}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \chi_{ikj}^{(2)}(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t) + \chi_{iklj}^{(3)}(\mathbf{r}, t)E_k(\mathbf{r}, t)E_l(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Nous rappelons que, dans nos notations, la somme sur les indices répétés est implicite. Nous voyons ici que l'élément $\chi^{(n)}$ est de rang $n + 1$ et que l'application de ce tenseur au champ électrique dépend ainsi de l'ordre que nous regardons. De plus, selon l'ordre du développement, les considérations de symétries sont également différentes. Remarquons que pour ne pas avoir d'écriture trop lourde, nous avons ici écrit le tenseur dans le cas d'un milieu dont la réponse est locale et instantanée (où seule la valeur du champ en (\mathbf{r}, t) compte). Dans le cas général, l'application de la susceptibilité au champ électrique se fait à l'aide d'un produit de convolution [84]. Ces deux points (localité et instantanéité) seront évoqués par la suite.

Avant de discuter les termes non-linéaires, nous allons revenir plus précisément sur l'ordre 1 et sur certaines de nos hypothèses de travail. Dans ce chapitre et le suivant, nous continuerons à supposer que la réponse des milieux considérés est locale, c'est-à-dire la polarisabilité du milieu à la position \mathbf{r} dépend uniquement du champ électrique en ce point. Bien qu'approchée (voir notamment [86, 87] pour des contre-exemples dans le contexte des fluides de lumière), cette hypothèse sera suffisante pour décrire les phénomènes physiques présentés dans cette thèse. En revanche, nous n'allons plus à présent supposer que cette réponse est instantanée. L'expression de la polarisabilité dépend ainsi de la valeur du champ électrique appliqué aux temps précédents. Au premier ordre, cela nous donne l'expression :

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_o \int_0^t dt' \chi^{(1)}(\mathbf{r}, t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') .$$

Remarquons que nous avons ici continué à supposer, tout comme dans les chapitres précédents, que la réponse du milieu est scalaire, c'est-à-dire ici que le tenseur s'écrit $\chi_{ij}^{(1)} = \chi^{(1)}\delta_{ij}$. En utilisant la transformée de Fourier définie par la relation (1.5) pour $\chi^{(1)}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, nous obtenons l'équation :

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} .$$

Dans l'espace des fréquences, la polarisabilité à l'ordre 1 est ainsi donnée par la relation :

$$\mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_o \chi^{(1)}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) .$$

Nous voyons ici que, dans ce terme linéaire, il n'y a pas d'apparition de nouvelles fréquences (c'est-à-dire de fréquences qui n'existent pas dans la source lumineuse de départ). De tels phénomènes sont ainsi caractéristiques d'une réponse non-linéaire.

III.1.2 Réponse non-linéaire de deuxième ordre

En 1961, Franken et son équipe éclairent un quartz avec un laser rouge ($\lambda = 694,3$ nm) et observent la génération faible d'un rayonnement ultra-violet à une fréquence double

($\lambda = 347,2 \text{ nm}$) [82]. Il s'agissait de la première observation d'un phénomène non-linéaire en optique, rapidement suivie de résultats théoriques l'expliquant [88]. Depuis, cet effet de doublement de fréquence est bien connu et utilisé. Il est par exemple à la base de nos pointeurs lasers verts, ainsi que de la plupart des lasers bleus [89].

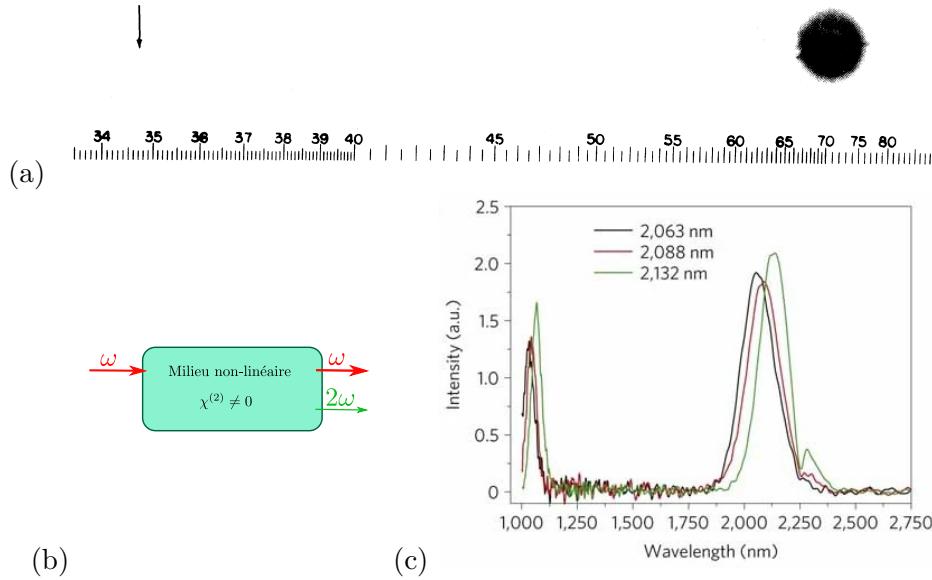


Fig. III.1 (a) Figure tirée de l'article de Franken [82] présentant la lumière détectée après la propagation d'une lumière rouge dans un quartz. L'échelle du bas indique la longueur d'onde mesurée (en unité de 100 Å), la tache de droite correspond à la lumière source autour de 6943 Å et la flèche à gauche pointe la détection de la deuxième harmonique à 3472 Å , si faible qu'elle n'est pas visible dans l'article imprimé. (b) Schéma de la génération de deuxième harmonique. (c) Graphe tiré de l'article [90] où la génération de la deuxième harmonique pour trois fréquences sources est observée, les pics de droite correspondant aux signaux sources et ceux de gauche aux deuxièmes harmoniques. Remarquons que cette mesure est obtenue en propageant la lumière issue d'un laser femtoseconde dans un guide d'onde permettant d'amplifier l'effet non-linéaire.

Pour expliquer ce phénomène, nous devons nous pencher sur l'ordre 2 de la polarisabilité. À nouveau, nous considérons la non-instantanéité du milieu, mais nous ne détaillerons pas les étapes de calculs ici, celles-ci peuvent être trouvées dans l'annexe A. L'expression finale dans l'espace des fréquences est alors [84] :

$$P_i^{(2)}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega}} \chi_{ijk}^{(2)}(\mathbf{r}, \omega_1 + \omega_2) E_j(\mathbf{r}, \omega_1) E_k(\mathbf{r}, \omega_2). \quad (\text{III.1})$$

Ainsi, nous voyons que si on envoie une lumière de fréquence ω dans le milieu, le terme non-linéaire correspondant génère un signal de fréquence double, comme schématisé sur la

figure III.1(b). Notons cependant que ce signal est très faible par rapport au signal initial, comme cela est illustré par la figure III.1(a).

Lorsque l'on parle d'une non-linéarité d'ordre 2, un point important à aborder sont les considérations de symétrie. En effet, de nombreux milieux optiques (en particulier les verres et les fluides) sont des milieux centrosymétriques. Cela signifie ici que leur réponse est invariante par la transformation $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$. La polarisabilité doit alors vérifier $\mathbf{P}(-\mathbf{E}) = -\mathbf{P}(\mathbf{E})$ puisque le tenseur χ reste inchangé. À l'ordre 2 du développement non-linéaire, ceci se traduit par la relation :

$$\mathbf{P}^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} : \mathbf{E} \mathbf{E} \longrightarrow -\mathbf{P}^{(2)} = \varepsilon_0 \chi^{(2)} : (-\mathbf{E})(-\mathbf{E}) = +\mathbf{P}^{(2)} .$$

Ainsi, pour les milieux centrosymétriques, nous avons forcément $\chi^{(2)} = 0$. Les effets liés à la non-linéarité d'ordre 2 sont donc principalement présents dans des milieux cristallins dont la structure est anisotrope¹. Dans la plupart des autres milieux optiques, cette contribution est nulle, ce qui explique que l'ordre 3 a également été rapidement étudié et est fréquemment rencontré en optique non-linéaire, comme nous allons le voir à présent.

III.1.3 Réponse non-linéaire de troisième ordre

Historiquement, la première mise en évidence des phénomènes liés au troisième ordre a été faite en 1964 par Mayer et Gires, qui ont observé pour des liquides une dépendance de l'indice optique avec l'intensité du laser utilisé pour la mesure [83].

Une nouvelle fois, pour comprendre ce phénomène, nous allons reprendre le développement de la polarisabilité dans l'espace des fréquences. Les détails sont à nouveau donnés dans l'annexe A. Nous obtenons l'expression [84] :

$$P_i^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega}} \chi_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) E_j(\mathbf{r}, \omega_1) E_k(\mathbf{r}, \omega_2) E_l(\mathbf{r}, \omega_3) .$$

Tout comme pour l'ordre 2, nous voyons ici apparaître des phénomènes de génération de nouvelles fréquences dans le milieu, en particulier le triplement de la fréquence source [92, 93]. Cependant, contrairement au cas précédent, le terme non-linéaire contient également des termes à la fréquence source pour $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (-\omega, \omega, \omega)$ ainsi que ses permutations. À partir de maintenant, nous nous concentrerons sur ces termes, négligeant les effets de changement de fréquence. Cette hypothèse est valide si l'on considère des sources lumineuses quasi-monochromatiques. En effet, dans ce cas, la génération d'autres fréquences se fait très majoritairement autour de la fréquence triple dont le signal est bien distinct de la contribution générée à la fréquence source, ce qui nous permet de les séparer également dans nos considérations théoriques. En utilisant que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, -\omega) = \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, \omega)$, nous écrivons alors, pour une source de fréquence ω , la polarisabilité correspondante :

$$P_i^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) = 3\varepsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) E_j^*(\mathbf{r}, \omega) E_k(\mathbf{r}, \omega) E_l(\mathbf{r}, \omega) . \quad (\text{III.2})$$

1. En vérité, il est possible d'induire une non-linéaire d'ordre 2 dans des verres même isotropes en y maintenant une irradiation longue et intense. Si le lecteur ou la lectrice souhaite se renseigner plus en détail sur ce point, il ou elle pourra se tourner par exemple vers la référence [91] même s'il s'agit là de cas assez spécifiques.

Dans cette expression, il existe de nombreuses contributions différentes qui amènent à des effets pouvant, par exemple, modifier la polarisabilité de l'onde incidente [94, 95].

Dans la suite de cette thèse, nous nous concentrerons sur des milieux isotropes. Cela implique que la susceptibilité s'écrit sous la forme [31] :

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_1^{(3)}\delta_{ij}\delta_{kl} + \chi_2^{(3)}\delta_{ik}\delta_{jl} + \chi_3^{(3)}\delta_{il}\delta_{jk}.$$

La polarisabilité est alors donnée par deux contributions distinctes :

$$P_i^{(3)}(\mathbf{r}, \omega) = 3\epsilon_o\chi_1^{(3)}\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, \omega)E_i^*(\mathbf{r}, \omega) + 3\epsilon_o(\chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)})|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2E_i(\mathbf{r}, \omega).$$

Si nous regardons plus précisément les cas particuliers de polarisations rectiligne ou circulaire, nous allons voir que la réponse du milieu est encore plus simple. Pour une polarisation rectiligne, nous avons $\mathbf{E}^2E_i^* = |\mathbf{E}|^2E_i$, ce qui nous donne pour la polarisabilité :

$$P_i^{(3), \text{rect}}(\mathbf{r}, \omega) = 3\epsilon_o(\chi_1^{(3)} + \chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)})|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2E_i(\mathbf{r}, \omega).$$

Dans le cas de la polarisation circulaire $\mathbf{E}^2 = 0$, nous avons alors :

$$P_i^{(3), \text{circ}}(\mathbf{r}, \omega) = 3\epsilon_o(\chi_2^{(3)} + \chi_3^{(3)})|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2E_i(\mathbf{r}, \omega)$$

Au pré-facteur près, la polarisabilité a ainsi la même forme dans ces deux situations. Il s'agit de la non-linéarité de type Kerr² sur laquelle nous allons nous concentrer dans la suite de cette thèse. De manière générale, on écrit alors la susceptibilité sous la forme :

$$P_i^{(3), \text{Kerr}}(\mathbf{r}, \omega) = 3\epsilon_o\chi^{(3), \text{Kerr}}|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2E_i(\mathbf{r}, \omega).$$

Notons que nous considérons ici un coefficient $\chi^{(3), \text{Kerr}}$ constant. Selon les milieux, ce coefficient peut être positif ou négatif. Le premier cas correspond à des milieux dits focalisant. En effet si l'on envoie un faisceau lumineux (par exemple gaussien) dans un tel milieu, le gradient de susceptibilité créé par la différence d'intensité au centre du faisceau par rapport au côté génère un effet de lentille convergente. À l'inverse, un coefficient $\chi^{(3), \text{Kerr}} < 0$ correspond à un milieu défocalisant [31].

Notons pour finir que dans la littérature, il est plus courant de considérer l'indice optique plutôt que la susceptibilité. Dans ce cas, il est habituel de définir :

$$n(\mathbf{r}, \omega) = n_1(\mathbf{r}, \omega) + n_2I(\mathbf{r}, \omega)$$

où nous avons introduit l'indice optique linéaire :

$$n_1(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{1 + \chi^{(1)}(\mathbf{r}, \omega)} \tag{III.3}$$

2. Le nom de cet effet vient du physicien J. Kerr, qui a observé au XIXe siècle une variation de l'indice optique quand un milieu est mis sous tension [96]. Cette dépendance est quadratique avec le champ électrique appliqué ce qui explique que, même si la configuration est différente de celle du cas optique considéré ici, la dénomination a été reprise.

et l'indice optique Kerr :

$$n_2 = \frac{3\chi^{(3),Kerr}}{2n_1^2\epsilon_o c}.$$

Ici nous définissons l'intensité lumineuse dans le milieu par [84] :

$$I(\mathbf{r}, \omega) = n_1\epsilon_o c|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2.$$

Nous allons à présent donner quelques exemples de milieux Kerr.

III.1.4 Exemples de milieux Kerr

Historiquement, les premières mesures de l'effet Kerr optique se sont faites dans des liquides [83] puis dans des verres de silice [97]. Cependant, la non-linéarité y est très faible et nécessite de travailler avec de fortes intensités lumineuses. Pour pallier cela, de nombreuses expériences ont été menées dans des fibres optiques, où il est possible de jouer sur la structure de façon à ajuster la non-linéarité [31]. Depuis ces premières découvertes, l'étude de l'effet Kerr s'est développée dans des milieux très divers. Nous ne les discuterons pas tous ici, mais nous pouvons citer la thèse de Anne Berthereau qui en présente un certain nombre [91]. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à deux types de milieux Kerr qui ont commencé à être utilisés plus récemment en laboratoire car ils ont la particularité, entre autres, de posséder une non-linéarité facilement ajustable.

Tout d'abord, nous allons aborder les milieux cristallins. Si, comme nous l'avons déjà évoqué, la grande majorité des milieux transparents peuvent présenter des termes non-linéaires de type Kerr, le cas des cristaux photoréfractifs est un peu particulier. Lorsque l'on soumet ces derniers à une tension électrique, leur indice optique est modifié. Si l'on considère la propagation d'un faisceau lumineux selon l'axe optique, cette modification est alors donnée par l'expression [98] :

$$\Delta n(I) = -n_1^3 r_{33} E_o \frac{I}{I + I_{sat}}$$

où I est l'intensité du faisceau, n_1 est l'indice optique linéaire, r_{33} est appelé le coefficient électro-optique caractéristique du milieu considéré, E_o est le champ électrique imposé sur le milieu par la mise sous tension et enfin I_{sat} est l'intensité de saturation. Cette dernière peut être ajustée en jouant sur l'éclairage du cristal par une lumière incohérente ambiante. Nous voyons ici que pour une intensité I faible par rapport à I_{sat} nous retrouvons un régime de type Kerr donné par :

$$\Delta n(I) \simeq n_2 I$$

avec

$$n_2 = -\frac{n_1^3 r_{33} E_o}{I_{sat}}.$$

Nous voyons ainsi qu'en jouant sur les variables E_o et I_{sat} , il est possible de faire varier la non-linéarité sans devoir modifier le milieu.

Une non-linéarité de type Kerr ajustable existe également dans des vapeurs chaudes d'alcalins [99]. Pour ces gaz chauds où l'élargissement Doppler est plus grand que la structure hyperfine, les atomes peuvent alors être approximés à des systèmes à deux niveaux [100]. Quand on éclaire ce système, même par une lumière non-résonnante, un couplage par le champ électrique entre ces deux niveaux apparaît et entraîne une modification de l'indice de réfraction de la vapeur. Les détails du calcul de cette variation sont donnés dans l'article [101]. Loin de la résonance, nous avons la relation :

$$n_2 \propto \frac{N}{\delta^3}$$

où δ est le décalage en fréquence par rapport à la résonance atomique (*detuning* en anglais) qui peut être positif ou négatif et N est la densité de la vapeur atomique. On voit alors l'intérêt de tels systèmes. En effet, si on utilise une cellule contenant un alcalin sous forme métallique que l'on chauffe pour obtenir une vapeur, la densité de cette dernière est directement liée à température de la cellule. Il est alors possible de faire varier l'indice non-linéaire simplement en chauffant plus ou moins la cellule. Il est bien évidemment également possible de jouer sur δ en particulier pour faire varier le signe de n_2 , cependant il faut noter que si l'on se rapproche trop de la fréquence de résonance de la transition, le phénomène de diffusion prend de l'importance au sein de la vapeur.

III.2 Effet Kerr dans la limite paraxiale : notion de fluide de lumière

Maintenant que nous avons présenté les milieux Kerr, nous allons nous intéresser plus en détail à la propagation paraxiale de la lumière au sein de ceux-ci, car elle s'avère présenter des caractéristiques particulièrement intéressantes. En effet, dans ce cadre, l'équation de Helmholtz devient formellement identique à l'équation de Gross-Pitaevskii régissant la dynamique des condensats de Bose-Einstein. Cela conduit au concept de « fluide de lumière » que nous commencerons par introduire dans cette partie avant de faire le lien avec les milieux non-linéaires présentés précédemment. Comme première application intéressante des fluides de lumière, nous présenterons le formalisme dit de « densité-phase » permettant notamment de décrire l'évolution de fluctuations au sein d'un fluide de lumière. Cela nous amènera naturellement à la relation de dispersion de Bogoliubov.

III.2.1 Introduction aux fluides de lumière

Nous allons tout d'abord présenter un historique rapide des fluides de lumière, en nous appuyant principalement sur la revue très complète de Carusotto et Ciuti [102]. Nous présenterons dans cette partie les fluides de polaritons qui, même si ils ne font pas partie des systèmes que nous considérerons dans la suite de cette thèse, sont une part très importante de l'étude des fluides de lumière. Nous introduirons à cette occasion la notion de superfluidité de la lumière et présenterons quelques résultats obtenus récemment à ce sujet.

Le développement de l'étude des fluides de lumière et ses motivations sont liées à l'essor de la physique des fluides quantiques ces trente dernières années. En effet, si la superfluidité est étudiée depuis les années 30, le domaine des fluides quantiques s'est particuliè-

rement développé dans les années 90 après que les premiers condensats de Bose-Einstein (BECs) ont été observés expérimentalement [1, 2]. Une avancée théorique très importante est alors l'utilisation de l'équation de Gross-Pitaevskii³ afin de décrire la dynamique de champ moyen des BECs [105]. Cette équation est aujourd'hui centrale dans l'étude des fluides quantiques (dont celle des fluides de lumière), comme nous le développerons plus loin dans ce chapitre. Dans le domaine optique, les premières mentions de fluide de lumière ont été faites dans les années 90 [106, 107, 108]. Un point central de la notion de fluide est l'interaction entre les particules. Dans le cas des photons, ceux-ci n'interagissent pas de base, il faut donc trouver une manière de faire apparaître une interaction effective. En 1958, Hopfield propose un très bon candidat pour cela : une nouvelle quasi-particule qu'il nomme « polariton » [109]. Celle-ci émerge du couplage fort entre un exciton (constitué d'une paire électron-trou) et d'un photon. Les excitons sont des quasi-particules qui se retrouvent dans les matériaux semi-conducteurs possédant une bande de valence pleine et une bande de conduction vide et où le gap d'énergie entre ces bandes est suffisamment faible pour permettre l'excitation d'un électron, créant simultanément un trou [110]. Quand éclairée par une source lumineuse, cette excitation se couple avec les photons, générant des polaritons. Cependant, sans imposer plus de contraintes, la durée de vie de ces derniers est extrêmement courte rendant difficile leur utilisation pour réaliser un fluide de lumière. C'est pour pallier ce problème que l'utilisation de cavités semi-conductrices s'est développée. En effet, dans cette configuration, les polaritons sont confinés dans un plan ce qui permet d'augmenter leur temps de vie. Pour cela, l'idée est d'utiliser des hétérostructures combinant deux semi-conducteurs différents, comme schématisé sur la figure III.2. Celles-ci permettent de confiner les excitons dans le plan transverse (x, y). Afin de confiner également les photons, cette structure est entourée de miroirs de Bragg. Nous obtenons ainsi un fluide de polaritons 2D. Ce confinement permet également de donner une masse effective aux quasi-particules qui peut être modifiée par l'inclinaison du faisceau incident. Pour plus de détails sur tous ces points, nous conseillons la lecture de la thèse de Simon Pigeon [111]. Dans ces systèmes, il est alors envisageable de reproduire pour la lumière des phénomènes comme la superfluidité [20] ou la condensation de Bose-Einstein [17, 18, 19].

Cependant, la durée de vie assez courte des polaritons reste un problème au sein des cavités de polaritons. Par ailleurs, il s'agit d'un système forcé où les expériences nécessitent un pompage constant de la cavité [111]. Une solution possible à ces complications est de considérer un autre système pour la lumière : un milieu non-linéaire de type Kerr sans cavité dans lequel se propage un faisceau paraxial [112, 113]. Dans cette configuration, la propagation de la lumière obéit également à l'équation de Gross-Pitaevskii, mais ce système est à présent conservatif en bonne approximation. Un certain nombre d'études théoriques et expérimentales ont ainsi également été menées dans ces milieux pour caractériser l'hydrodynamique de la lumière [86, 114, 115, 116, 117, 118, 119]. Ce sont ces systèmes que nous allons considérer dans la suite de cette thèse.

Dans le contexte des fluides de lumière, un phénomène très intéressant à étudier est la superfluidité, aussi bien pour les polaritons que pour la lumière dans les milieux Kerr. Si

3. Celle-ci avait été développée en 1961, simultanément par Gross [103] d'un côté et Pitaevskii [104] de l'autre afin de décrire la dynamique de vortex au sein d'un gaz de bosons en faible interaction (pour être appliquée par exemple à l'hélium liquide).

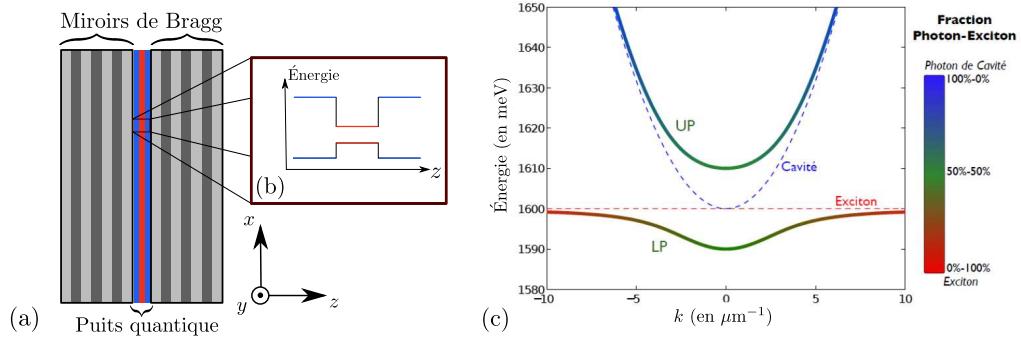


Fig. III.2 (a) Schéma d'une cavité semi-conductrice utilisée pour étudier un gaz de polaritons. Elle est composée d'un puits quantique (en rouge et bleu) entouré de miroirs de Bragg. Les polaritons sont confinés au sein de la bande rouge. (b) Bande de valence du puits quantique : à cause de la différence de gap entre les deux matériaux semi-conducteurs, les excitons sont confinés au centre. (c) Illustration tirée de la thèse de Simon Pigeon [111] montrant la relation de dispersion au sein de la cavité. Le gradient de couleur indique la nature des particules : bleu pour les photons, rouge pour les excitons et vert pour les polaritons.

les premiers travaux à ce sujet ont été publiés assez rapidement [108], les mises en évidence expérimentales directes d'un écoulement superfluide de la lumière sont récentes [20, 118]. La superfluidité est un phénomène complexe apparaissant dans les gaz de bosons en interaction faible. Un certain nombre d'éléments sont liés à la superfluidité, tels que l'apparition de vortex quantifiés, qui sont considérés comme des indices d'un écoulement superfluide. Cependant, c'est l'absence de viscosité du fluide qui est souvent utilisée comme la propriété caractéristique principale permettant de discriminer entre un écoulement normal et un écoulement superfluide [120]. Un critère couramment utilisé pour obtenir une condition de superfluidité est celui de Landau. Nous développerons celui-ci dans la sous-partie III.2.4 pour le cas d'un fluide de lumière sans cavité. Différentes expériences sont possibles afin de mesurer la superfluidité d'un système. L'une des plus simples consiste à laisser le fluide s'écouler autour d'un obstacle et d'observer son comportement, approche par exemple utilisée dans l'expérience [20], dont les résultats sont présentés sur la figure III.3. Lors d'un écoulement normal (et donc visqueux) l'obstacle va venir perturber la propagation du fluide, causant en particulier des vaguelettes à la surface de celui-ci. Le caractère « visqueux » apparaît également dans la distribution des impulsions du fluide : la rencontre avec l'obstacle cause un phénomène de diffusion élastique où la norme de l'impulsion initiale est conservée, mais le fluide est diffusé dans toutes les directions, conduisant à une distribution en forme d'anneau. Pour l'écoulement superfluide, la rencontre avec l'obstacle ne perturbe pas la propagation, l'impulsion initiale est alors conservée (voir figure III.3).

III.2.2 Propagation paraxiale dans un milieu Kerr

Dans la partie III.1.3, nous avons discuté le troisième ordre de la susceptibilité permettant de caractériser les milieux Kerr. Nous allons à présent nous intéresser à la propagation

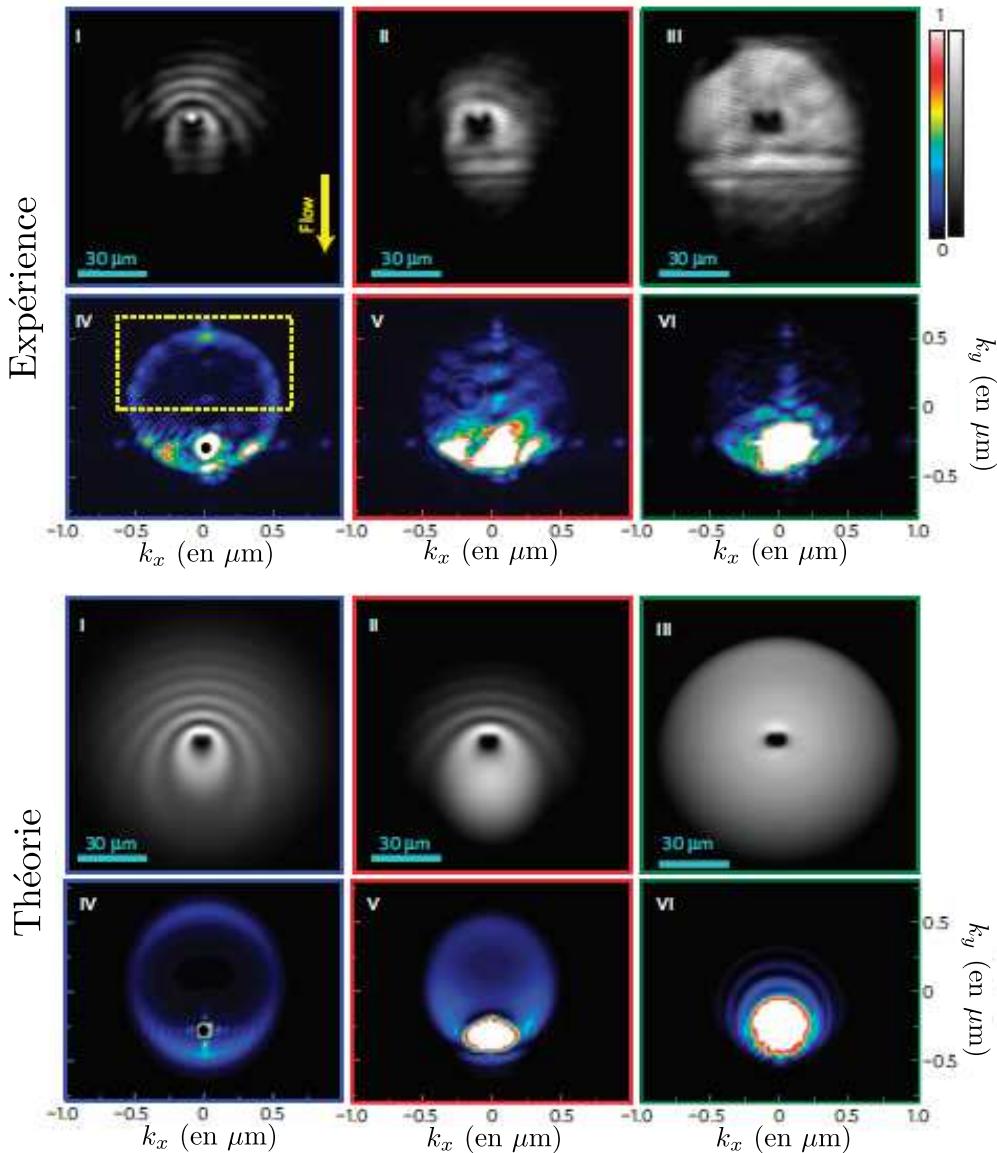


Fig. III.3 Figure tirée de l'article [20] présentant les différents régimes d'écoulement d'un fluide de polaritons autour d'un obstacle composé d'un défaut optique. Les figures du haut représentent les données expérimentales, tandis que celles du bas sont issues d'une modélisation numérique. Les images I, II et III montrent la densité spatiale du fluide de polaritons, et les images IV, V et VI représentent la distribution des impulsions. À gauche, nous voyons un écoulement normal pour lequel la rencontre avec l'obstacle se traduit par une diffusion élastique caractérisée par un anneau dans l'espace des impulsions (visible sur l'image IV). À droite, nous voyons un régime superfluide où l'obstacle ne perturbe pas l'écoulement, les impulsions restent ainsi distribuées autour de l'impulsion initiale.

de la lumière dans un tel milieu, pour un faisceau se propageant le long de la direction z , comme schématisé sur la figure III.4. Comme cela a déjà été mentionné, nous nous placerons ici dans la limite paraxiale et discuterons à cette occasion des hypothèses que nous allons utiliser dans ce chapitre et le suivant.

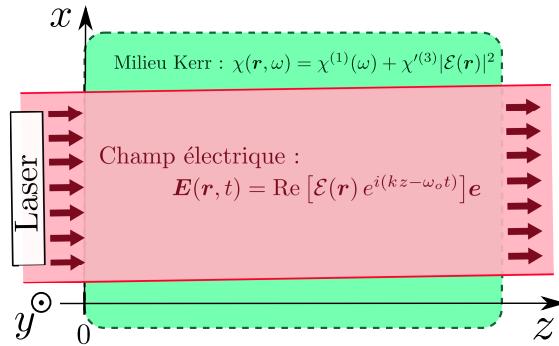


Fig. III.4 Schéma d'un laser se propageant selon l'axe optique z dans un milieu Kerr.

Considérons donc un milieu Kerr homogène soumis à un champ électrique que nous écrivons sous la forme :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{i(kz - \omega_o t)}] \mathbf{e} \quad (\text{III.4})$$

où \mathbf{e} désigne le vecteur de polarisation du champ électrique et $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Notre première hypothèse consiste à supposer une lumière monochromatique de pulsation ω_o , ce qui explique l'absence de dépendance en t de l'enveloppe $\mathcal{E}(\mathbf{r})$. Dans cette expression, nous notons

$$k = n_1 \frac{\omega_o}{c}$$

où n_1 est l'indice optique linéaire défini par l'équation (III.3) et c est toujours la vitesse de la lumière dans le vide. En présence du champ (III.4), la susceptibilité du milieu considéré est donnée par :

$$\chi(\mathbf{r}, \omega) = \chi^{(1)}(\omega) + \chi^{(3)}|\mathcal{E}(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{III.5})$$

Notons que par rapport à la partie III.1.3, nous avons modifié la définition du coefficient $\chi^{(3)}$ pour être en accord avec la littérature, en définissant $\chi^{(3)} = 3/4 \chi^{(3), \text{Kerr}}$. L'induction électrique pour le champ monochromatique est ainsi donnée par la relation :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_o (1 + \chi_o^{(1)} + \chi^{(3)}|\mathcal{E}(\mathbf{r})|^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

où nous avons écrit $\chi_o^{(1)} \equiv \chi^{(1)}(\omega = \omega_o)$. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons des milieux dont la non-linéarité est faible. Cela se traduit par la condition :

$$\chi^{(3)}|\mathcal{E}(\mathbf{r})|^2 \ll 1 + \chi_o^{(1)}. \quad (\text{III.6})$$

Afin de traiter la propagation de la lumière dans ce milieu, nous nous plaçons à présent dans le cadre de l'approximation paraxiale, déjà développée dans la partie I.1.3. Dans

l'hypothèse d'une non-linéarité faible, voir l'équation (III.6), et pour des coefficients $\chi^{(1)}$ et $\chi^{(3)}$ constants comme défini dans l'équation (III.5), la condition de l'approximation paraxiale est donnée à présent par la relation :

$$\lambda \left| \frac{\chi^{(3)} \nabla(|\mathcal{E}|^2)}{1 + \chi_o^{(1)}} \right| \ll 1 \quad (\text{III.7})$$

où $\lambda = 2\pi c/\omega_o$ est la longueur d'onde du laser dans le vide. Pour dériver l'équation paraxiale dans le cas non-linéaire, nous partons de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) - \Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_o c^2} \partial_t^2 \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.8})$$

directement issue des équations de Maxwell. Nous rappelons que, dans l'approximation paraxiale, le champ incident est supposé collimaté et se propage selon un angle faible avec l'axe optique z . L'enveloppe \mathcal{E} varie alors lentement avec z , de sorte que ses dérivées secondes par rapport à z sont négligeables. En utilisant l'hypothèse (III.7), nous trouvons par ailleurs que le terme $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ dans l'équation (III.8) est, à nouveau, négligeable, de sorte que le champ électrique reste transverse pendant toute la propagation. L'équation paraxiale pour le champ (III.4) est alors donnée par :

$$i \partial_z \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) = -\frac{1}{2k} \Delta_\perp \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) - \frac{k}{2} \frac{\chi^{(3)} |\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z)|^2}{1 + \chi_o^{(1)}} \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z). \quad (\text{III.9})$$

Dans le chapitre précédent, nous avions identifié l'équation paraxiale avec une équation de Schrödinger. Dans le cas du milieu non-linéaire, l'analogie apparaît avec l'équation de Gross-Pitaevskii [120] :

$$i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.10})$$

pour le champ bosonique scalaire Ψ . Cette équation décrit, dans l'approximation du champ moyen, l'évolution temporelle des condensats de bosons en interaction, où le coefficient g (positif ou négatif) dans le terme non-linéaire contrôle la force de cette interaction. Comme dans la partie (I.1.3), nous voyons ici que la coordonnée z dans l'équation paraxiale (III.9) joue le rôle temps t dans l'équation (III.10) et le nombre d'onde k le rôle d'une masse effective pour les photons. Notons également que l'analogie se fait ici avec un gaz 2D contenu dans le plan $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. Nous développerons ce point plus en détail dans la suite. Pour aller plus loin dans l'analogie, nous réécrivons l'équation paraxiale (III.9) sous la forme :

$$i \partial_z \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) = -\frac{1}{2k} \Delta_\perp \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) + g |\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z)|^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z), \quad (\text{III.11})$$

où nous avons défini le coefficient

$$g = -\frac{k}{2} \frac{\chi^{(3)}}{1 + \chi_o^{(1)}}, \quad (\text{III.12})$$

qui caractérise une interaction effective entre les photons et justifie l'appellation fluide de lumière. Nous rappelons que le coefficient $\chi^{(3)}$ peut être positif ou négatif, permettant

ainsi de faire varier le signe de g comme pour les gaz des bosons, en notant cependant bien la présence du signe négatif dans la relation (III.12). Un coefficient g positif (négatif) caractérise des interactions répulsives (attractives) entre les bosons (les photons dans notre cas). Remarquons que nous pouvons ainsi interpréter les phénomènes de défocalisation (focalisation) évoqués dans la partie III.1.3 comme des phénomènes de répulsion (attraction) des photons entre eux. Dans cette thèse, nous nous limiterons au cas d'un coefficient g positif, c'est-à-dire à des milieux défocalisants, nécessaire à la stabilité des solutions que nous allons présenter dans la suite [121]. Nous pouvons également remarquer ici que, dans ce cadre, l'hypothèse de non-linéarité faible est équivalente à une hypothèse d'interactions faibles. Insistons enfin sur le fait que la notion de fluide de lumière est ici complètement classique, l'équation (III.11) ne faisant pas apparaître la constante de Planck \hbar , contrairement à l'équation de Gross-Pitaevskii pour les condensats d'atomes.

III.2.3 Théorie des perturbations - Relation de Bogoliubov

L'étude des excitations élémentaires au sein des fluides quantiques est importante, en particulier pour l'étude de la superfluidité. Pour les condensats de Bose-Einstein dans les atomes froids, il s'agit d'étudier les fluctuations (thermiques ou quantiques) émergeant spontanément au sein du gaz. Ce problème est aujourd'hui bien décrit dans la littérature, nous citerons ici par exemple le livre de Pitaevskii et Stringari [120]. Dans notre cas, nous cherchons à étudier un fluide à deux dimensions. Ceux-ci sont particulièrement étudiés en physique des atomes froids car le confinement en basse dimension conduit à des phénomènes spécifiques. Par exemple, en 2D il n'existe pas de véritable condensation de Bose-Einstein pour des températures non-nulles [122]. Néanmoins, à basse température les fluctuations de densité restent faibles tandis que les fluctuations de phase induisent un ordre algébrique à longue portée. On parle alors de quasi-condensat [122]. Cette quasi-condensation s'accompagne d'une transition de phase, la transition BKT (Berezinsky-Kosterlitz-Thouless), qui décrit l'émergence de la superfluidité et de vortex à basse température en deux dimensions [123, 124]. Nous allons nous inspirer de ces différents travaux pour les adapter au cas d'un fluide de lumière en milieu Kerr et nous y comparerons nos résultats, en particulier dans le chapitre suivant. Pour les fluides de lumière, les fluctuations considérées peuvent être dues aux fluctuations intrinsèques du laser (techniques, quantiques, etc.) ou bien peuvent être produites volontairement par l'expérimentateur (ce que nous considérerons dans le chapitre suivant).

Dans cette partie, nous allons utiliser une théorie des perturbations reposant sur le formalisme densité-phase pour un fluide de lumière dans un milieu Kerr, en nous basant sur la théorie des gaz quantiques à basse dimension [122, 125, 126]. Ce formalisme consiste à écrire l'enveloppe du champ sous la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) = \sqrt{I(\mathbf{r}_\perp, z)} e^{i\theta(\mathbf{r}_\perp, z)}$$

où l'intensité $I(\mathbf{r}_\perp, z)$ est réelle et positive. L'équation (III.11) se réécrit alors sous la forme

du système d'équations [125, 126, 127] :

$$\begin{cases} \partial_z I = -\frac{1}{k} \nabla \cdot (I \nabla \theta) \\ \partial_z \theta = \frac{1}{2k} \frac{\Delta(\sqrt{I})}{\sqrt{I}} - \frac{1}{2k} (\nabla \theta)^2 - gI \end{cases} .$$

Ce système d'équations rappelle les équations hydrodynamiques d'un fluide où l'intensité de la lumière correspond à la densité du fluide et le gradient de phase à sa vitesse [127]. Afin de simplifier les équations, nous avons ici omis l'indice \perp et ainsi nous avons noté $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ et $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Nous garderons cette convention dans toute la suite de cette thèse.

Pour étudier la propagation d'une perturbation, nous allons supposer que les fluctuations d'intensité au-dessus du mode laser restent faibles durant la propagation. Nous écrivons ainsi :

$$I(\mathbf{r}_\perp, z) = I_o + \delta I(\mathbf{r}_\perp, z) \quad \text{avec} \quad \delta I(\mathbf{r}_\perp, z) \ll I_o$$

où δI désigne une petite perturbation d'intensité au-dessus d'un fond I_o supposé uniforme. Nous allons également, par la suite, prendre en compte les fluctuations de phase, en anticipant que celles-ci peuvent devenir importantes lors de la propagation dans le cas d'un système 2D [125, 126]. Nous ne pouvons donc pas utiliser la théorie des perturbations sur θ . Le système d'équations précédent se réduit alors à

$$\begin{cases} \partial_z \delta I = -\frac{I_o}{k} \Delta \theta - \frac{1}{k} \nabla(\delta I) \cdot \nabla \theta \\ \partial_z \theta = \frac{1}{4k} \frac{\Delta(\delta I)}{I_o} - \frac{1}{2k} (\nabla \theta)^2 - g(I_o + \delta I) \end{cases} .$$

Ces équations font apparaître un terme constant $-gI_o$ que l'on réinjecte dans la phase via la redéfinition :

$$\theta(\mathbf{r}_\perp, z) = -g_o I_o z + \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) .$$

Il s'avère ici que les termes $\nabla(\delta I) \cdot \nabla \theta'$ et $(\nabla \theta')^2$ sont d'ordre supérieur [122] et sont donc négligeables. Cela nous permet de linéariser les équations précédentes. Nous obtenons ainsi le système final :

$$\begin{cases} \partial_z \delta I = -\frac{I_o}{k} \Delta \theta' \\ \partial_z \theta' = \frac{1}{4k} \frac{\Delta(\delta I)}{I_o} - g \delta I \end{cases} .$$

La résolution de ces équations est alors directe en passant dans l'espace de Fourier (voir l'annexe B pour les détails) et nous obtenons, pour l'intensité et la phase, les expressions :

$$\delta I(\mathbf{r}_\perp, z) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \left[A(\mathbf{q}_\perp) e^{ik_B(\mathbf{q}_\perp)z} + B(\mathbf{q}_\perp) e^{-ik_B(\mathbf{q}_\perp)z} \right] e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \quad (\text{III.13})$$

$$\theta'(\mathbf{r}_\perp, z) = i \frac{k}{I_o} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{k_B(\mathbf{q}_\perp)}{\mathbf{q}_\perp^2} \left[A(\mathbf{q}_\perp) e^{ik_B(\mathbf{q}_\perp)z} - B(\mathbf{q}_\perp) e^{-ik_B(\mathbf{q}_\perp)z} \right] e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} \quad (\text{III.14})$$

où les fonctions $A(\mathbf{q}_\perp)$ et $B(\mathbf{q}_\perp)$ sont données par les conditions initiales correspondant aux fluctuations injectées en entrée du milieu, et la relation de dispersion est donnée par :

$$k_B(\mathbf{q}_\perp) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{k} \left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4k} + g I_o \right)}. \quad (\text{III.15})$$

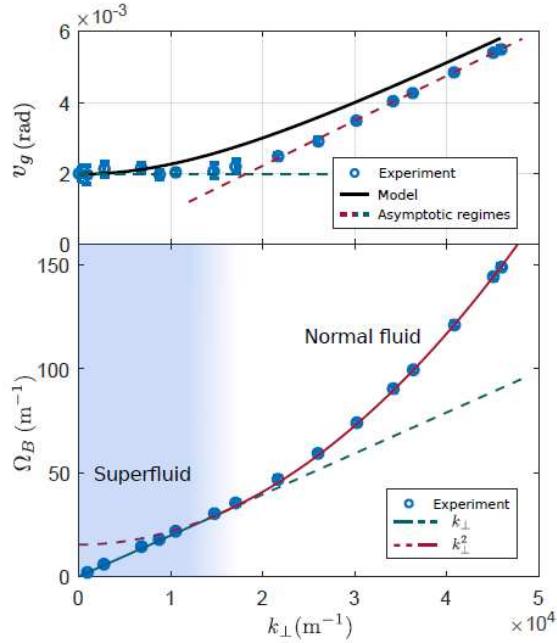


Fig. III.5 Graphes, tirés de l'article [116], présentant des mesures de dispersion pour un fluide de lumière au sein d'une vapeur atomique de Rubidium. Le graphe du haut montre la vitesse de groupe en fonction du nombre d'onde transverse ici appelé k_\perp . Cette vitesse est obtenue en mesurant l'écartement de deux paquets d'onde contrapropageants générés à partir d'une perturbation du laser en entrée de la cellule ($z = 0$). Nous voyons que cette vitesse est constante à petit k_\perp , elle correspond alors à la vitesse du son c_s définie dans l'équation (III.16). La courbe du bas montre, quant à elle, la relation de dispersion de Bogoliubov du fluide. Elle est obtenue en intégrant la vitesse de groupe mesurée. Nous distinguons bien ici les deux régimes discutés dans cette partie : un régime superfluide pour les k_\perp faibles, caractérisé par une relation de dispersion linéaire, et un régime d'écoulement normal pour les k_\perp plus élevés, caractérisé par une relation de dispersion quadratique.

En reprenant l'analogie entre notre équation paraxiale (III.11) et l'équation de Gross-Pitaevskii (III.10), nous retrouvons bien ici une relation correspondant à celle connue dans le cadre des fluctuations au-dessus d'un BEC [120, 125]. Il s'agit de la relation de dispersion de Bogoliubov. Cette relation de dispersion a été mesurée dans le cadre des fluides de lumière sans cavité, tout d'abord par l'équipe de Faccio [128] dans une configuration encore

différente de celles présentées dans la partie III.2.1, puis plus récemment par l'équipe de Glorieux et Bramati à l'aide d'un laser se propageant au sein d'une cellule d'atomes chauds de Rubidium [116]. Ce sont les résultats de cette dernière mesure qui sont présentés sur la figure III.5. Nous voyons que cette relation de dispersion possède deux régimes bien différents. Afin de les distinguer nous introduisons la longueur caractéristique

$$\zeta = (4kgI_o)^{-1/2}$$

appelée longueur de cicatrisation (ou *healing length* en anglais) [129].

Pour $q_\perp \zeta \gg 1$, nous avons un régime quadratique caractérisé par la relation :

$$k_B(\mathbf{q}_\perp) \simeq \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k}$$

où les photons se comportent comme des particules massives libre (nous retrouvons ici que k_o joue le rôle d'une masse effective). En effet, dans ce cas l'impulsion des excitations est suffisamment élevée pour que les interactions au sein de la lumière deviennent négligeable.

Le deuxième régime correspond à la condition $q_\perp \zeta \ll 1$. Dans cette limite, la dispersion est linéaire, donnée par la relation :

$$k_B(\mathbf{q}_\perp) \simeq q_\perp \sqrt{\frac{gI_o}{k}} = c_s q_\perp . \quad (\text{III.16})$$

Les fluctuations se propagent alors comme des phonons au sein du fluide. Nous voyons ici apparaître la vitesse du son du fluide c_s . Cette vitesse est importante dans l'étude de la superfluidité puisqu'elle permet de définir le critère de Landau qui nous permet de distinguer un écoulement superfluide d'un écoulement normal. C'est ce que nous allons voir à présent.

III.2.4 Critère de Landau

Comme nous l'avons déjà évoqué dans la partie III.2.1, la superfluidité est un phénomène complexe à décrire. Landau a particulièrement contribué à ce sujet [130, 131], en particulier en introduisant un critère permettant de distinguer un écoulement normal d'un écoulement superfluide. Dans cette sous-partie, nous nous concentrerons sur l'obtention de ce critère. Plus de détails sur la théorie de la superfluidité, et sur le cas particulier d'un système 2D, peuvent être trouvés dans les références [123, 132, 133].

Pour dériver le critère de Landau, nous allons considérer un objet de masse M se déplaçant dans un fluide avec une vitesse \mathbf{V} , comme schématisé sur la figure III.6. Si le fluide se comporte comme un fluide normal, le déplacement de l'obstacle crée une perturbation. La conservation de l'énergie et de l'impulsion nous donne alors les relations :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 = \frac{1}{2}M\mathbf{V}'^2 + \hbar\omega_{\mathbf{q}} \\ M\mathbf{V} = M\mathbf{V}' + \hbar\mathbf{q} \end{cases}$$

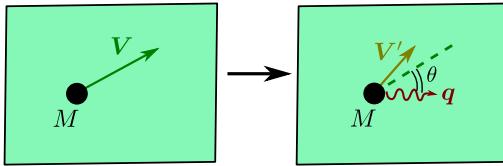


Fig. III.6 Schéma d'un objet de masse M se déplaçant à une vitesse \mathbf{V} au sein d'un fluide au repos, créant une perturbation caractérisée par un vecteur d'onde \mathbf{q} faisant un angle θ avec la vitesse initiale.

où \mathbf{q} est le vecteur d'onde de la perturbation et $\omega_{\mathbf{q}}$ est donné par sa relation de dispersion au sein du fluide. La résolution de ce système amène alors à l'égalité :

$$\omega_{\mathbf{q}} = \left(V \cos \theta - \frac{\hbar q}{2M} \right) q \quad (\text{III.17})$$

où θ est l'angle entre \mathbf{V} et \mathbf{q} comme défini sur la figure III.6⁴. Dans le cas des gaz froids de bosons ou des fluides de lumière, $\omega_{\mathbf{q}}$ est donné par la relation de Bogoliubov obtenue précédemment (III.15). Celle-ci respecte la relation :

$$\omega_{\mathbf{q}} > c_s q \quad \forall \mathbf{q} \quad (\text{III.18})$$

où c_s est la vitesse du son introduite dans l'équation (III.16). On remarque alors que, quel que soit θ , l'équation (III.17) n'admet aucune solution lorsque :

$$V < c_s .$$

Il s'agit du critère de Landau. Tant que cette condition est respectée, il n'y a pas création d'excitations à la surface du fluide, ce qui signifie que son écoulement n'est pas perturbé par l'objet. Nous sommes en présence d'un superfluide. Ce critère peut être obtenu par résolution graphique dans le cas où \mathbf{q} est colinéaire à \mathbf{V} , comme montré sur la figure III.7. Remarquons que ce raisonnement n'est pas uniquement valide pour les systèmes répondant à la dispersion de Bogoliubov mais se généralise à tout fluide pour lequel on peut définir une vitesse de second son⁵. Notons également que nous n'avons pas ici pris en compte d'effets liés à la taille ou à la forme de l'obstacle. Dans les cas réels, des perturbations (telles que la formation de paires de vortex pour les plus visibles) peuvent apparaître plus tôt dans le fluide. La vitesse critique réelle est alors plus basse que la vitesse du son [133].

Ayant introduit cette notion, nous pouvons revenir sur l'expérience de la mesure de la superfluidité des polaritons [20] dont nous avions présenté les résultats sur la figure III.3. Ici, on observe l'écoulement du fluide de polaritons autour d'un obstacle fixe. Dans ce système, la vitesse du fluide est proportionnelle au vecteur d'onde transverse et peut ainsi

4. Notons ici que $\cos \theta$ est obligatoirement positif. En effet, par principe de conservation d'énergie $|\mathbf{V}'| < |\mathbf{V}|$, ce qui est impossible si $\cos \theta < 0$.

5. Il s'agit d'une vitesse qui respecte l'inégalité (III.18). Elle peut être identique à la vitesse du premier son, comme dans le cas des condensats de Bose-Einstein ou pour les fluides de lumière, mais il existe des systèmes où elles sont distinctes comme l'hélium liquide [130].

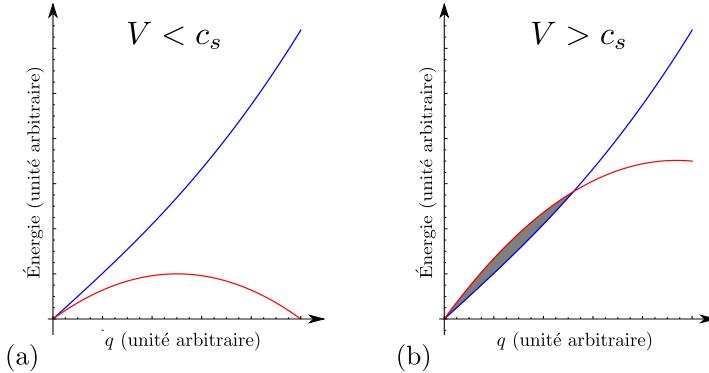


Fig. III.7 Résolution graphique de l'équation (III.17) pour $\theta = 0$. La courbe bleue représente la relation de Bogoliubov et la courbe rouge correspond à la fonction $(V - \hbar q/(2M))q$. (a) Cas $V < c_s$: on voit qu'il n'y a pas d'intersection entre les courbes, l'équation (III.17) n'admet pas de solutions. (b) Cas $V > c_s$: les deux courbes se croisent, l'équation (III.17) admet ainsi une solution non-nulle.

être contrôlée par l'angle incidence ϑ du faisceau lumineux comme schématisé dans la figure III.8. Il est ainsi observé que le régime superfluide est atteint pour des angles inférieurs à un angle critique (correspondant à une vitesse du fluide inférieure à une vitesse critique). Cette vitesse critique correspond bien à la vitesse du son, comme prédit par le critère ci-dessus.

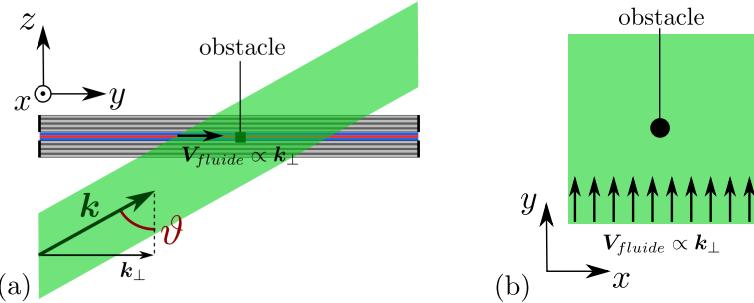


Fig. III.8 (a) Schéma de l'éclairage de la cavité semi-conductrice en présence d'un obstacle. (b) Schéma du plan des polaritons, le fluide de lumière se propageant vers l'obstacle. Ici, nous avons choisi de représenter le vecteur k_{\perp} selon l'axe y pour respecter les conventions de l'article [20].

Dans la partie suivante, nous discuterons une autre expérience mettant en évidence la superfluidité de la lumière, déjà citée précédemment [119] et inspirée de travaux historiques récents [134]. Dans celle-ci, c'est la propagation de photons dans un milieu Kerr sans cavité qui est considérée et non plus un fluide de polaritons. La configuration est néanmoins similaire à l'expérience de l'article [20], l'observation de cette superfluidité passant, cependant, par la mesure de la force exercée par la lumière sur un obstacle. Afin de pouvoir discuter des résultats de cette expérience, nous allons commencer par introduire quelques éléments de théorie permettant de définir et de calculer cette force.

III.3 Force exercée par un fluide de lumière sur un obstacle

La question des forces en optique dans les milieux matériels n'est pas évidente et a soulevé à de nombreuses discussions, comme en témoigne la littérature [135, 136, 137, 138, 139, 140]. Il s'agit d'un domaine à part entière de la physique et nous ne pourrons pas en développer ici tous les aspects. Cependant, dans le cas des fluides de lumière, nous pouvons à nouveau nous appuyer sur la littérature des gaz froids de bosons où la force exercée par le fluide sur un obstacle a déjà été étudiée [3, 141]. Nous présenterons rapidement les considérations générales sur le lien entre cette force et la superfluidité. Nous reviendrons ensuite au cas des fluides de lumière sans cavité et sur une mesure récente de la superfluidité dans un tel système. Enfin, nous réfléchirons à l'extension des outils théoriques utilisés pour le calcul de la force dans un condensat de Bose-Einstein au domaine de l'optique, tout d'abord dans le cas linéaire puis dans un milieu Kerr.

III.3.1 Force de freinage et superfluidité dans les condensats de Bose-Einstein

Nous venons de voir (partie III.2.4) que la superfluidité est caractérisée par l'absence de perturbations lors de la rencontre d'un obstacle. Nous avons ainsi considéré l'effet de l'obstacle sur le fluide. À présent, nous allons prendre un point de vue légèrement différent et considérer l'effet du fluide sur l'objet, plus particulièrement la force exercée sur ce dernier. Pour cela, nous allons revenir sur le problème d'un objet en mouvement dans un fluide au repos (figure III.6). La force exercée par le fluide est une force de résistance (ou *drag force* en anglais). Si l'objet ne perturbe pas le fluide, ce dernier ne peut pas perturber le mouvement de l'objet en réaction. Ainsi, nous comprenons bien que, dans ce cadre, la superfluidité est caractérisée par une force de résistance nulle. Pour caractériser plus précisément la force exercée par le fluide, nous introduisons le tenseur de contrainte (ou *stress tensor* en anglais) défini tel que

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}, t) - \partial_t \mathbf{p} \quad (\text{III.19})$$

où \mathbf{f} est la force microscopique exercée par le fluide en \mathbf{r} et \mathbf{p} est la densité d'impulsion du fluide. Dans le cas d'un gaz de bosons en interaction vérifiant l'équation de Gross-Pitaevskii (III.10), le tenseur de contrainte pour la direction i est donné par l'expression [141]

$$T_{ii}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} |\partial_i \Psi|^2 - \hbar \text{Im}(\Psi^* \partial_t \Psi) - \frac{g|\Psi|^4}{2} \quad (\text{III.20})$$

qui peut s'obtenir à partir du lagrangien de Gross-Pitaevskii.

En pratique, il est courant de considérer un écoulement stationnaire. Cela correspond, en effet, à la situation d'un fluide au repos dans lequel se déplace lentement un objet ou à un écoulement autour d'un obstacle en laissant suffisamment de temps pour que l'écoulement se stabilise. Le terme $\partial_t \mathbf{p}$ de l'équation (III.19) et le terme $\text{Im}(\Psi^* \partial_t \Psi)$ de l'équation (III.20) sont ainsi nuls. Si l'obstacle a une taille suffisamment faible, la contribution du terme $|\partial_i \Psi|^2$ à la force est également négligeable. La contribution principale à (III.20) est ainsi donnée par le terme $-g|\Psi|^4/2$. En rappelant que la densité du gaz est $n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, l'expression de la densité de force est alors :

$$\mathbf{f} = +gn\nabla n .$$

Nous obtenons alors que le module de la force totale exercée par le fluide sur l'objet est donné par [3] :

$$F = Sg\bar{n} |\Delta n|$$

où \bar{n} est la densité moyenne du fluide, Δn est la différence de densité du gaz de part et d'autre de l'obstacle, et S est la surface de l'obstacle. Cette expression correspond bien à celle utilisée en pratique pour mesurer la force de résistance au sein d'un condensat de Bose-Einstein, celle-ci étant obtenue indirectement par la mesure de Δn [3]. Dans le régime superfluide, le profil de densité est symétrique, la force est nulle. Dans le cas d'un écoulement classique, l'obstacle crée un effet d'« ombre » diminuant la densité de fluide derrière lui, il y a ainsi apparition d'une asymétrie dans le système et l'objet est repoussé par le fluide.

III.3.2 Mise en évidence de la superfluidité dans un fluide de lumière

Ayant introduit le lien entre force de résistance et superfluidité pour les condensats de Bose-Einstein, nous allons brièvement discuter l'expérience présentée dans l'article [119] qui met en évidence la superfluidité de la lumière dans un milieu Kerr.

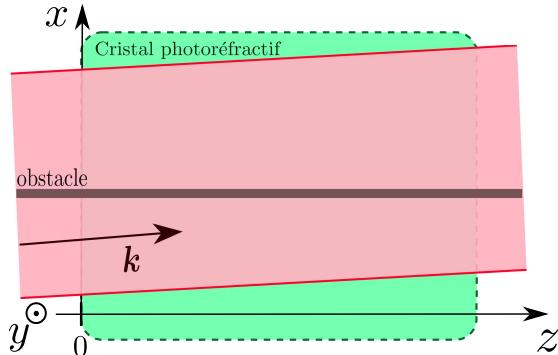


Fig. III.9 Schéma du système considéré dans l'article [119]. En rouge, un faisceau laser large, injecté avec un léger angle, permet de réaliser un fluide de lumière. En gris, un faisceau supplémentaire, se propageant selon l'axe z , permet de créer un obstacle (un défaut d'indice).

Dans cette expérience, un fluide de lumière est réalisé en propageant un large faisceau laser dans un cristal photoréfractif. Tout comme pour les fluides de polaritons, la vitesse de l'écoulement est alors contrôlée par l'angle du faisceau par rapport à l'axe optique. L'obstacle est un défaut optique créé à l'aide d'un faisceau lumineux supplémentaire selon l'axe z qui, à cause de la non-linéarité du milieu, engendre localement un potentiel supplémentaire comme schématisé sur la figure III.9. La mesure est effectuée à la sortie du cristal, ce qui correspond à une distance où l'écoulement du fluide peut être considéré stationnaire. Les résultats de l'article sont présentés dans la figure III.10, qui montre les mesures de la différence d'intensité de part et d'autre de l'obstacle (courbes du haut), ainsi

que le déplacement de celui-ci (courbes du bas).

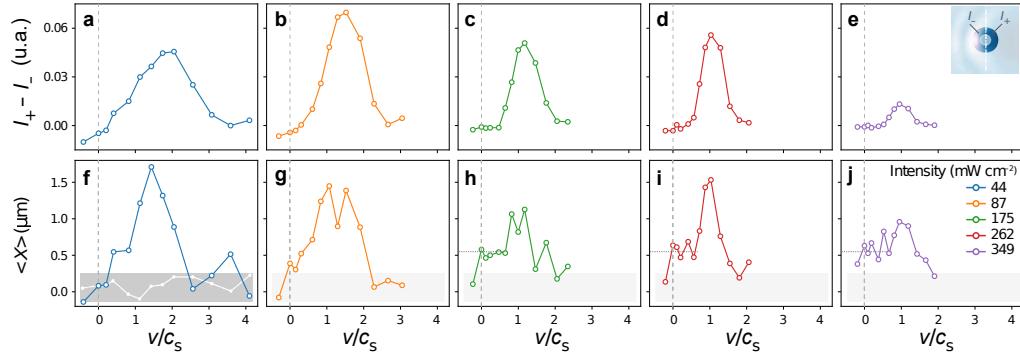


Fig. III.10 Courbes issues de l'article [119] présentant des mesures pour des intensités du fluide de lumière croissantes de gauche à droite. (a-e) Mesure de la différence d'intensité de part et d'autre de l'obstacle. (f-j) Mesure du déplacement de l'obstacle selon la direction x . La courbe blanche sur le graphe (f) représente le déplacement mesuré selon l'axe y supposé nul, il permet ainsi d'obtenir une mesure de l'incertitude.

Les mesures de la figure III.10(a-e) montrent bien une différence d'intensité proche de zéro pour les vitesses inférieures à la vitesse du son dans le fluide, caractérisant ainsi bien l'écoulement superfluide⁶. Remarquons que pour les vitesses bien supérieures à la vitesse du son, cette différence diminue de nouveau. Cela est dû au fait que le fluide, de plus en plus rapide, perçoit de moins en moins l'objet comme un obstacle ainsi la force de résistance au sein de ce fluide diminue. Les figures III.10(f-g), quant à elles, montrent un déplacement diminué pour les vitesses faibles du fluide, même si celui-ci n'est pas nul. Cela est expliqué dans l'article par les effets de l'écoulement non-stationnaire aux petits z . En effet, dans ce cas, comme nous l'avons discuté pour les condensats de Bose-Einstein dans la section III.3.1, l'approximation de la force comme étant liée uniquement à la différence d'intensité ne tient plus et des termes supplémentaires apparaissent.

III.3.3 Tenseur des contraintes dans un fluide de lumière

Après cette rapide discussion sur l'observation expérimentale de la superfluidité, nous allons à présent déterminer l'expression analytique de la force exercée par un fluide de lumière sur un obstacle dans un milieu Kerr, en dérivant le tenseur de contraintes à partir des équations de Maxwell. Ce calcul nous permettra de retrouver un résultat analogue à celui de l'équation (III.20) pour les condensats de Bose-Einstein. Il nous servira par ailleurs de base au calcul de la force de Casimir qui fera l'objet du chapitre suivant.

6. Remarquons que sur les courbes (a) et (b) de la figure III.10, qui correspondent à de faibles intensités, nous observons plutôt une augmentation molle de la différence d'intensité et non une différence $I_+ - I_-$ strictement nulle dans le régime sub-sonique. Ce comportement est lié à la présence d'absorption [119].

À nouveau, pour caractériser cette force, nous reprenons l'expression :

$$\mathbf{f} = -\nabla \cdot \mathbf{T} - \partial_t \mathbf{p} \quad (\text{III.21})$$

Pour la lumière, \mathbf{T} est appelé le tenseur des contraintes de Maxwell que nous appellerons plus simplement tenseur de Maxwell dans la suite. Nous allons commencer par déterminer son expression dans le cas d'un milieu linéaire.

a) Cas d'un milieu linéaire

En électromagnétisme, la force s'exerçant sur une distribution de charges électriques ρ et une densité de courant \mathbf{j} est la force de Lorentz :

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \quad (\text{III.22})$$

Afin de retrouver une expression de la forme de l'équation (III.21), nous repartons des équations de Maxwell. En considérant l'obstacle comme une distribution de charges libres par rapport au milieu diélectrique où il est contenu, nous écrivons :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & ; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_o (\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{j}) ; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{D} . \end{cases}$$

En injectant ces relations dans l'équation (III.22) et en utilisant les propriétés du double produit vectoriel (comme développé dans l'annexe C), la force se réécrit :

$$f_i = (\partial_k D_k) E_i - D_k (\partial_i E_k) + D_k (\partial_k E_i) + \frac{1}{\mu_o} (B_k (\partial_k B_i) - B_k (\partial_i B_k)) - \partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i . \quad (\text{III.23})$$

Ici nous voyons déjà apparaître la densité d'impulsion :

$$\mathbf{p} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} . \quad (\text{III.24})$$

Remarquons qu'il ne s'agit pas ici de la même impulsion que celle que nous avions utilisée dans chapitre I et qui était donnée par l'expression :

$$\mathbf{p} = \epsilon_o \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \quad (\text{III.25})$$

La différence est ici issue de différentes hypothèses de départ, nous aurions obtenu l'expression (III.25) en considérant la force de Lorentz s'exerçant sur les distributions de charges et de courant totales (c'est-à-dire en prenant également en compte les charges liées du milieu). Ces deux définitions différentes font partie de la célèbre controverse Abraham-Minkowski, l'expression (III.25) étant donnée par l'approche d'Abraham [135] et l'expression (III.24) par celle de Minkowski [136]. Nous ne développerons pas ce sujet, complexe, de manière plus poussée dans cette thèse, laissant les personnes intéressées se reporter aux références [137, 138, 139, 140].

Si nous reprenons l'expression de la force, nous voyons que la partie magnétique se met directement sous la forme du gradient d'un tenseur :

$$\frac{1}{\mu_o} (B_k (\partial_k B_i) - B_k (\partial_i B_k)) = \partial_j \left[\frac{1}{\mu_o} \left(B_j B_i - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right) \right]$$

en utilisant ici $\partial_k B_k = 0$. Pour la partie électrique, nous utilisons l'hypothèse d'un milieu linéaire homogène pour lequel nous avons :

$$\mathbf{D} = \epsilon_o(1 + \chi^{(1)})\mathbf{E} = \epsilon_L \mathbf{E} .$$

Cela nous permet d'écrire :

$$(\partial_k D_k) E_i - D_k (\partial_i E_k) + D_k (\partial_k E_i) = \partial_j \left[D_j E_i - \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij} \right] .$$

En comparant alors l'équation (III.23) avec l'expression générale (III.21), nous obtenons l'expression finale pour le tenseur de Maxwell dans un milieu linéaire :

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \delta_{ij} - 2 D_i E_j) + \frac{1}{2\mu_o} (\mathbf{B}^2 \delta_{ij} - 2 B_i B_j) . \quad (\text{III.26})$$

Cette formulation correspond au tenseur de Minkowski. Celui-ci est en effet relié à la force exercée sur un obstacle, tandis que le tenseur d'Abraham prend également en compte la force exercée sur le milieu dans lequel l'obstacle est contenu [140]. Dans le cas plus particulier où l'on s'intéresse à la force de Casimir sur des objets contenus dans un milieu diélectrique (situation que nous discuterons dans le chapitre suivant), il a été montré par Pitaevskii que le tenseur (III.26) est en effet l'expression appropriée du tenseur des contraintes [142].

b) Cas d'un milieu Kerr dans l'approximation paraxiale

Afin d'obtenir le tenseur de Maxwell pour un milieu Kerr, nous reprenons les calculs précédents avec à présent (voir annexe C) :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_L \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_{NL} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t \mathbf{E} .$$

Le lien avec le coefficient $\chi^{(3)}$, introduit précédemment dans l'équation (III.5), est donné par :

$$\epsilon_{NL} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t = \chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2$$

où nous rappelons que \mathcal{E} est l'enveloppe du champ électrique défini dans l'équation (III.4). Pour un champ monochromatique, nous obtenons alors la nouvelle expression du tenseur :

$$T_{ij} = T_{ij}^{(1)} + \frac{\epsilon_{NL}}{4} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t E^2 \delta_{ij} - \epsilon_{NL} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t E_i E_j \quad (\text{III.27})$$

où $T_{ij}^{(1)}$ correspond à la partie linéaire du tenseur, donnée par l'équation précédente (III.26).

Nous allons à présent nous intéresser à l'expression de ce tenseur dans le cadre de l'approximation paraxiale pour un faisceau se propageant selon une direction proche de l'axe z . De plus, dans le chapitre suivant nous nous concentrerons sur la force exercée selon la direction x . Pour obtenir cette expression, nous devons ici fixer la polarisation du champ électrique que nous allons considérer selon \mathbf{e}_y . Nous nous placerons également dans la jauge de Coulomb, définissant le potentiel vecteur :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Im} \left[\frac{\mathcal{E}}{\omega_o} e^{i(kz - \omega_o t)} \right] \mathbf{e}_y .$$

Le champ magnétique est alors donné par :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\partial_z A \mathbf{e}_x + \partial_x A \mathbf{e}_z .$$

En injectant ces expressions dans (III.27), nous obtenons l'expression de la composante du tenseur de Maxwell selon x :

$$\langle T_{xx} \rangle_t = \frac{\epsilon_0}{4k^2} |\partial_x \mathcal{E}|^2 - \frac{\epsilon_0}{2k} \text{Im}(\mathcal{E}^* \partial_z \mathcal{E}) - \epsilon_0 \frac{g|\mathcal{E}|^4}{4k} . \quad (\text{III.28})$$

Les détails de ce calcul peuvent être trouvés dans l'annexe C. Nous considérons ici la moyenne temporelle de ce tenseur qui est suffisante pour caractériser le système sur les échelles de temps considérées (comme déjà évoqué pour le vecteur de Poynting dans la partie I.2.1). L'expression (III.28) du tenseur de Maxwell, ici dérivée à partir des équations de Maxwell puis en prenant la limite paraxiale, est analogue à celle du tenseur des contraintes (III.20) pour un gaz de bosons décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii, ce qui était évidemment attendu.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques éléments d'optique non-linéaire en considérant le développement de la susceptibilité en puissance du champ électrique. Nous avons ensuite discuté le développement non-linéaire de troisième ordre et en particulier la non-linéarité de type Kerr, en donnant quelques exemples de milieux où elle apparaît naturellement. Nous avons ensuite vu que la propagation paraxiale de la lumière dans un milieu Kerr était analogue à l'évolution d'un gaz de bosons en interactions à deux dimensions. Ceci nous a permis d'introduire la notion de fluide de lumière, dont nous avons fait un rapide historique. Dans le cas d'une propagation dans un milieu Kerr sans cavité, nous avons alors pu étudier l'évolution du fluide et mettre en évidence le caractère phononique des fluctuations de ce fluide à basse énergie. À l'aide de ces résultats, nous avons ensuite abordé le problème de la superfluidité de la lumière. Pour cela, nous avons tout d'abord présenté le critère de Landau qui permet de distinguer un écoulement superfluide d'un écoulement classique. Nous avons ensuite discuté de la force exercée par le fluide de lumière sur un obstacle et son lien avec la mesure de la superfluidité.

Dans le chapitre suivant, en utilisant les notions introduites dans ce chapitre, nous allons montrer qu'au sein d'un fluide de lumière généré dans un milieu Kerr, de petites fluctuations sont naturellement amplifiées par le caractère phononique des excitations de basse énergie. Ce mécanisme rend possible l'émergence de forces de type Casimir à longue portée, que nous étudierons en détail.

Chapitre IV

Force de Casimir dans un fluide de lumière

Dans le chapitre 3, nous avons introduit la notion de fluide de lumière à partir de l'analogie avec un gaz de bosons en interaction à deux dimensions. Nous avons vu que dans un tel système, l'étude de petites fluctuations autour d'un état stationnaire avait un intérêt tout particulier, permettant de relever le caractère phononique du fluide à basse énergie. Dans ce chapitre, nous allons à présent montrer que dans un fluide de lumière, cette propriété conduit à une amplification spontanée de ces fluctuations. En présence d'objets insérés dans le fluide, ce mécanisme induit naturellement une force de type Casimir, que nous chercherons à calculer. Pour cela, nous commencerons par rappeler le cadre, aujourd'hui bien connu, de la force de Casimir dans le vide, en évoquant brièvement quelques problématiques liées à sa mesure. Nous discuterons ensuite l'extension de cette force à d'autres systèmes comme les mélanges liquides binaires, les films d'Hélium ou les gaz de bosons à basse dimension. Cela nous amènera à présenter une nouvelle configuration où une force de type Casimir se manifeste au sein d'un fluide de lumière hors équilibre. Nous commencerons par étudier la propagation de fluctuations en l'absence d'obstacle, en particulier l'évolution de leurs corrélations. Pour cette étude, nous nous appuierons sur un modèle analytique ainsi que sur une simulation numérique de la propagation du fluide de lumière. Nous nous pencherons ensuite sur la dérivation analytique de la force de Casimir dans ce système. Nous finirons enfin par discuter des avantages de cette configuration et de possibles mesures.

IV.1 La force de Casimir dans le vide

IV.1.1 Introduction

La force de Casimir a été introduite pour la première fois par le physicien du même nom en 1948, dans le cadre idéal de deux plaques parfaitement réfléchissantes situées dans le vide où elle est dérivée à l'aide de considérations énergétiques [143]. Casimir conclut son article en disant : « Bien que l'effet soit petit, une confirmation expérimentale ne semble pas infaisable et pourrait être d'un certain intérêt ». Depuis, cette force a en effet été mesurée et a pu être comparée à la théorie [144, 145]. Son extension à des milieux et matériaux

réels rencontrés dans les expériences a par ailleurs été beaucoup explorée [146, 147, 148], de même que ses manifestations dans d'autres contextes, comme en acoustique [149] ou au sein de fluides [150, 151, 152, 153]. Nous reviendrons plus particulièrement sur ces derniers systèmes dans la suite.

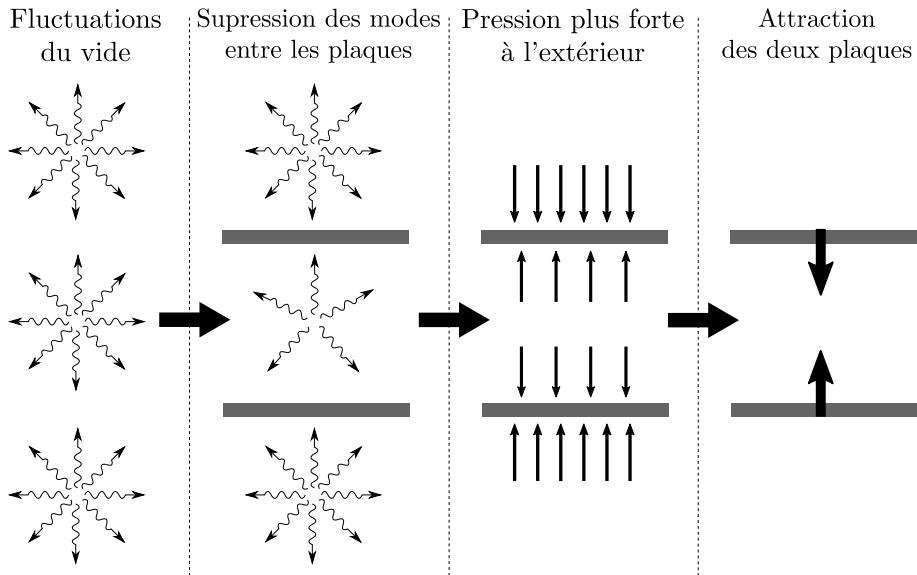


Fig. IV.1 Schéma montrant l'influence de la présence de deux plaques sur les fluctuations du vide et l'émergence d'une force de Casimir attractive.

Physiquement, la force de Casimir peut être interprétée comme une pression exercée sur les plaques par les fluctuations du vide. En effet, en leur présence, les conditions aux bords limitent les modes accessibles dans la cavité formée par les deux plaques. La densité de fluctuations est alors plus faible à l'intérieur engendrant une pression plus forte à l'extérieur. Les deux plaques sont ainsi poussées l'une vers l'autre comme cela est schématisé sur la figure IV.1.

Dans cette partie, nous allons commencer par présenter les étapes de calcul amenant à l'expression de la force de Casimir s'exerçant sur deux plaques, due aux fluctuations quantiques du vide de photons. Nous évoquerons ensuite rapidement des mesures expérimentales de cette force et les problématiques qui y sont liées. Enfin, nous discuterons de l'émergence de forces de type Casimir dans les fluides.

IV.1.2 Expression de la force de Casimir dans le vide

Dans cette première sous-partie, nous allons regarder le cas simple de deux plaques infinies dans le vide. Cela nous permettra d'introduire les grandes lignes du calcul de la force de Casimir que nous utiliserons ensuite pour obtenir l'expression d'une force similaire dans le cas d'un fluide de lumière. Notons cependant déjà que nous traitons ici le cas de fluctuations quantiques, ce qui ne sera plus le cas pour le fluide de lumière.

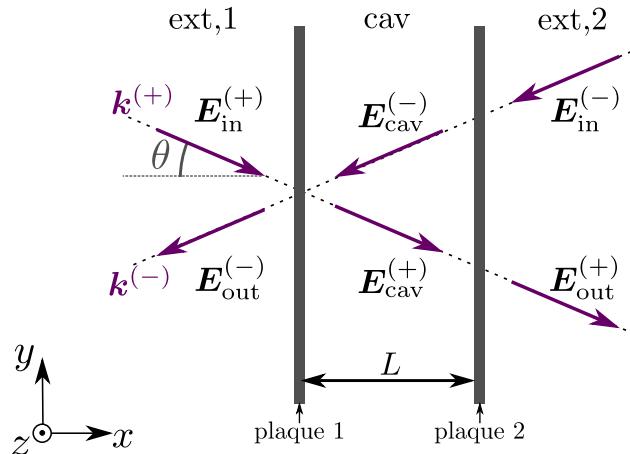


Fig. IV.2 Schéma représentant les différentes zones délimitées par les plaques et introduisant la notation $\mathbf{k}^{(\pm)}$, où l'exposant correspond au signe de la composante selon x , ainsi que la dénomination pour les champs dans chaque zone.

Afin d'obtenir l'expression de la force de Casimir, il existe différentes méthodes. Dans cette thèse, nous allons utiliser le tenseur de Maxwell, que nous avons introduit dans la partie III.3, en nous basant sur la méthode appelée « approche de diffusion » (ou *scattering approach* en anglais) et développée dans les références [154, 155, 156]. Contrairement à ce qui a été fait dans le chapitre précédent, nous ne considérons plus ici un obstacle petit, mais utilisons le fait que les plaques délimitent des régions distinctes, comme schématisé sur la figure IV.2. Dans toute la suite, nous considérerons des plaques infiniment larges placées selon le plan (y, z) et nous nous intéresserons par conséquent uniquement à la force exercée selon l'axe x . De plus, plutôt que la force globale s'exerçant sur les plaques, nous considérerons la pression exercée localement sur chaque plaque. La raison de ce choix prendra tout son sens pour le cas du fluide de lumière hors-équilibre. La valeur algébrique de la pression exercée par l'extérieur sur les plaques est donnée par la relation simple :

$$P = \langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle - \langle T_{xx}^{\text{ext},1} \rangle = \langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle - \langle T_{xx}^{\text{ext},2} \rangle$$

où T_{ij} est le tenseur des contraintes de Maxwell introduit dans la partie III.3, la notation $\langle \dots \rangle$ désigne ici à la moyenne quantique sur les fluctuations du vide et les exposants des tenseurs correspondent aux zones définies sur la figure IV.2. Remarquons que la pression est ici indépendante du temps, le vide étant en équilibre statistique.

Pour calculer cette pression, la première étape consiste à obtenir l'expression du champ électrique dans chaque région (la partie magnétique étant ensuite obtenue à partir de celui-ci à l'aide des équations de Maxwell). En l'absence des plaques, les fluctuations quantiques du vide s'écrivent de la forme [157] :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}} [\hat{a}_m e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}_m^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}] \boldsymbol{\alpha}_m , \quad (\text{IV.1})$$

où les modes du champ sont caractérisés par leur vecteur d'onde \mathbf{k} et leur polarisation p , regroupés dans l'indice $m = (\mathbf{k}, p)$. La pulsation ω est donnée par la relation de dispersion

du vide $\omega = kc$. V est ici un volume de normalisation introduit dans la somme sur les modes tel que

$$\sum_m \equiv V \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_p .$$

Les opérateurs création \hat{a}_m^\dagger et annihilation \hat{a}_m sont reliés par les relations de commutation bosoniques :

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} .$$

De plus, pour ce calcul, nous considérons une température nulle, ce qui nous permet d'écrire les valeurs moyennes :

$$\langle \hat{a}_m \rangle = \langle \hat{a}_m^\dagger \rangle = \langle \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_{m'} \rangle = 0 .$$

Enfin, les vecteurs α_m sont les vecteurs de polarisation du champ et forment une base orthonormée. Pour une situation comprenant des phénomènes de réflexion-transmission, le choix naturel est de considérer les polarisations « transverse électrique » et « transverse magnétique » qui sont conservées par le phénomène de réflexion et dont la base est désignée par l'indice $p = (\text{TE}, \text{TM})$. Les expressions explicites de ces vecteurs sont données dans l'annexe D.

En présence des plaques, l'expression (IV.1) est uniquement valide pour le champ électrique n'ayant pas encore rencontré les obstacles, c'est-à-dire les champs \mathbf{E}_{in} sur la figure IV.2. Les composantes du champ électrique dans les autres régions sont alors obtenues à l'aide des matrices de diffusion (ou *scattering* en anglais) S et de résonance R , par les relations respectives :

$$\begin{pmatrix} E_{\text{out}, p}^{(+)} \\ E_{\text{out}, p}^{(-)} \end{pmatrix} = S_p(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} E_{\text{in}, p}^{(+)} \\ E_{\text{in}, p}^{(-)} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} E_{\text{cav}, p}^{(+)} \\ E_{\text{cav}, p}^{(-)} \end{pmatrix} = R_p(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} E_{\text{in}, p}^{(+)} \\ E_{\text{in}, p}^{(-)} \end{pmatrix} .$$

Ces matrices sont données par les expressions :

$$S_p(\mathbf{k}) = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} t^2 & Cr e^{-i|k_x|L} + t^2 r e^{+i|k_x|L} \\ Cr e^{-i|k_x|L} + t^2 r e^{+i|k_x|L} & t^2 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

et

$$R_p(\mathbf{k}) = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} t & t^2 r e^{+i|k_x|L} \\ t^2 r e^{+i|k_x|L} & t \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

où nous avons défini le coefficient

$$C = 1 - r^2 e^{2i|k_x|L}$$

avec L la distance entre les deux plaques.

À partir de ces résultats, nous obtenons l'expression explicite des tenseurs de Maxwell dans chaque région. Les détails des calculs sont donnés dans l'annexe D. Les expressions du tenseur à l'extérieur et entre les plaques sont données respectivement par :

$$\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle = \langle T_{xx}^{\text{ext},1} \rangle = \langle T_{xx}^{\text{ext},2} \rangle = \sum_p \int \frac{d\mathbf{k}^{(+)}}{(2\pi)^3} \hbar\omega \cos^2 \theta \quad (\text{IV.4})$$

$$\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle = \sum_p \int \frac{d\mathbf{k}^{(+)}}{(2\pi)^3} \hbar\omega \mathcal{G}_p(\mathbf{k}) \cos^2 \theta \quad (\text{IV.5})$$

où nous notons $\int d\mathbf{k}^{(+)} = \int_0^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_z$ et θ l'angle par rapport à l'axe x (voir figure IV.2). \mathcal{G}_p est une fonction dépendant du coefficient de réflexion $r_p(\mathbf{k})$ des plaques et de la distance L entre celles-ci :

$$\mathcal{G}_p(\mathbf{k}) = \frac{1 - |r_p(\mathbf{k})|^4}{|1 - r_p^2(\mathbf{k})e^{i|k_x|L}|^2} \cdot \quad (\text{IV.6})$$

La pression de Casimir est ainsi donnée par :

$$P = \sum_p \int \frac{d\mathbf{k}^{(+)}}{(2\pi)^3} \hbar\omega [\mathcal{G}_p(\mathbf{k}) - 1] \cos^2 \theta.$$

Notons que $\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle$ et $\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle$ sont deux quantités divergentes, contrairement à leur différence [155].

En utilisant l'expression de la fonction \mathcal{G}_p et le fait que $\cos \theta = k_x/|\mathbf{k}| = k_x c/\omega$, nous obtenons l'expression explicite de la pression de Casimir :

$$P = c^2 \sum_p \int \frac{d\mathbf{k}_{||}}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{\hbar k_x^2}{\omega} \frac{r_p(\mathbf{k}) e^{+2i|k_x|L}}{1 - r_p(\mathbf{k}) e^{2i|k_x|L}} + \text{c.c.} \quad (\text{IV.7})$$

L'expression (IV.7) ne prend cependant pas en compte les ondes évanescentes émergeant au voisinage des plaques (caractérisées par un nombre d'onde k_x complexe). Afin d'inclure leur contribution, la méthode la plus simple consiste à remplacer l'intégrale sur k_x par une intégrale sur ω allant de 0 à $+\infty$, les ondes évanescentes correspondant alors aux fréquences $\omega \leq c\sqrt{k_y^2 + k_z^2}$ [155]. En utilisant ce changement de variable ($c^2|k_x|d|k_x| \rightarrow \omega d\omega$), nous obtenons pour la pression de Casimir l'expression :

$$P = \sum_p \int \frac{d\mathbf{k}_{||}}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar|k_x| \frac{r_p(\mathbf{k}_{||}, \omega) e^{+2i|k_x|L}}{1 - r_p(\mathbf{k}_{||}, \omega) e^{2i|k_x|L}} + \text{c.c.} \quad (\text{IV.8})$$

où nous avons défini $\mathbf{k}_{||} = (k_y, k_z)$ et où k_x est à présent défini par $k_x = (\mathbf{k}_{||}^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}$. L'expression (IV.8) s'interprète facilement : le facteur $r_p^2 e^{2i|k_x|L} / (1 - r_p^2 e^{2i|k_x|L})$ est la fonction de transfert de la cavité Fabry-Perot formée par les deux plaques. Le terme $e^{2i|k_x|L}$ correspond à la phase accumulée par la lumière après un aller-retour dans la cavité. Le rapport décrit alors à la somme des contributions de toutes les fluctuations ayant fait $1, 2, \dots, n$ aller-retours. Le terme $\hbar k_x$ correspond quant à lui à l'impulsion des photons

selon la direction perpendiculaire au plan des plaques. La pression totale est finalement obtenue en sommant sur tous les modes transverses et sur toutes les fréquences.

La limite des plaques parfaitement réfléchissantes ($r_p \rightarrow 1 \forall \omega$) de l'expression (IV.8) diverge. Afin de retrouver l'expression connue de l'article de Casimir, on utilise une rotation de Wick dans le plan complexe qui permet de régulariser l'intégrale sur les fréquences¹ [155]. Cela nous permet alors de retrouver l'expression bien connue [143] :

$$P_{\text{Cas}}^{\text{ideal}} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{L^4}. \quad (\text{IV.9})$$

La pression obtenue est ici négative, cela correspond à une force attractive, la pression à l'extérieur des plaques étant plus grande que celle à l'intérieur.

IV.1.3 Mesures expérimentales

Nous allons à présent discuter rapidement des mesures de la force de Casimir. Plus précisément, nous allons présenter les principales problématiques rencontrées dans les expériences et les corrections à l'expression (IV.9) apportées par celles-ci. En effet, si l'expression de la pression de Casimir est très simple pour des miroirs plans parfaits, les expériences réelles sont souvent loin de cette situation. Pour cette discussion, nous nous basons principalement sur la contribution de Astrid Lambrecht et Serge Reynaud au séminaire Poincaré de 2002 [158].

- Commençons par l'hypothèse de plaques parfaitement réfléchissantes. L'expression analytique (IV.8) permet de prendre en compte des plaques transmettant partiellement la lumière. Ainsi, en connaissant les coefficients de réflexion du matériau utilisé, il est possible d'obtenir une valeur plus précise de la force de Casimir. Un cas fréquemment rencontré dans les expériences est celui des matériaux métalliques, qui sont de très bons réflecteurs. Pour les métaux, une première approximation des coefficients $r_p(\mathbf{k}_\parallel, \omega)$ est donnée par le modèle plasma, qui introduit une fréquence ω_p appelée fréquence plasma. Pour des fréquences très faibles devant celle-ci, le métal se rapproche d'un réflecteur parfait. Les corrections liées à la réflexion partielle sont ainsi des corrections à courtes distances. Notons qu'un modèle différent pour les distances les plus faibles est le modèle de Drude, prenant en compte la diffusion des électrons par les défauts du matériau.
- Le point suivant que nous pouvons discuter est la géométrie du système. Si la première tentative de mesure s'est faite avec deux plaques [159], elle a principalement mis en avant la difficulté pratique d'assurer le parallélisme des deux plaques à des distances micrométriques tout au long de la mesure. Pour remédier à ce point, les mesures plus récentes [144, 145] se basent sur une géométrie différente, mesurant la force entre une plaque et une sphère de rayon R , comme schématisé sur la figure IV.3. Pour des matériaux parfaitement réfléchissants, la force de Casimir est alors donnée par l'expression :

$$F_{\text{Cas}} = \frac{\hbar c \pi^3 R}{360 L^3}$$

1. Le recours à une telle transformation est parfaitement rigoureux dans le cas $T \neq 0$, et peut-être étendu à la limite $T = 0$ par prolongement analytique.

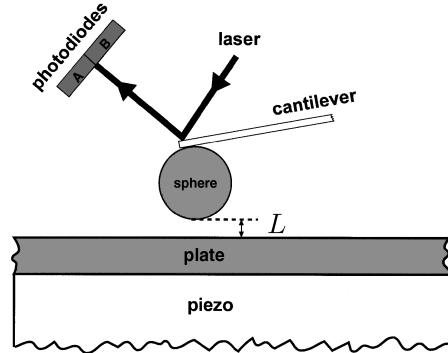


Fig. IV.3 Schéma tiré de l'article [145] montrant la configuration plan-sphère utilisée pour les mesures précises de la force de Casimir.

qui est valable pour des distances $L \ll R$ [160].

- Enfin, nous pouvons évoquer les effets de la température. Si l'expression (IV.9) est obtenue pour $T = 0$, la plupart des mesures de la force de Casimir se fait à température ambiante. Les corrections liées à la température finie peuvent être prises en compte dans l'expression analytique de la force en modifiant le poids de chaque mode dans le spectre de fréquence, comme discuté dans [158]. Le calcul de ces contributions montrent qu'elles agissent principalement pour les hautes fréquences et se manifestent donc aux grandes distances L . Ainsi, pour les expériences se faisant à des échelles plus courtes, l'influence de la température n'est pas le phénomène le plus limitant, malgré le fait que les expériences se déroulent à température ambiante.

IV.1.4 Force de Casimir dans les fluides

En 1978, Fisher et de Gennes ont avancé qu'un effet de type Casimir pouvait également apparaître dans un mélange liquide binaire où il existe un point critique entre la phase mélangée et la phase séparée, d'où le nom « effet Casimir critique » [150]. La grandeur qui nous intéresse dans ce système est la fluctuation locale de concentration des deux liquides. Il s'agit ici de fluctuations thermiques classiques. Au point critique, la longueur de corrélation de ces fluctuations diverge, de sorte qu'un ordre à longue portée est observée au voisinage de ce point [151]. Dans un tel système, la présence d'obstacles tels que des plaques limite la nouvelle les états accessibles, donnant une situation similaire à celle que nous avons étudiée pour les fluctuations quantiques du vide dans la partie IV.1.2.

Tout comme pour la force de Casimir classique, la mesure de l'effet Casimir critique n'est pas évidente, cependant des conséquences de cet effet permettent d'effectuer des mesures indirectes. La méthode la plus commune est de considérer les films de mouillage (ou *wetting films* en anglais). Considérons une vapeur proche de la condensation (ou du point de vapeur saturante). Si elle est mise en contact avec une paroi, un film de liquide apparaît à la surface de cette dernière. L'épaisseur de ce film est contrôlée par la pression du gaz. Nous retrouvons alors la situation décrite précédemment où les fluctuations sont confinées au sein de la phase liquide. Si la transition est proche d'un point critique, la longueur

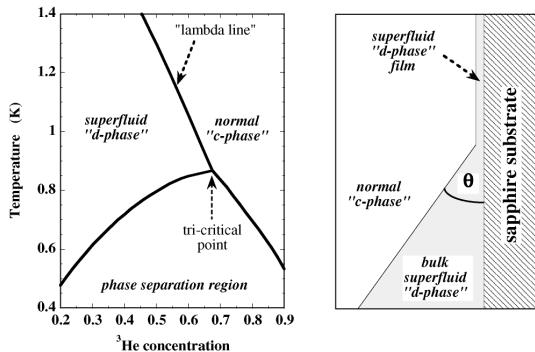


Fig. IV.4 Schéma tiré de l'article [161]. Le système considéré est ici un mélange $^3\text{He} - ^4\text{He}$ proche du point triple montré sur la figure de gauche. La mesure de l'effet de Casimir critique dans un tel système se fait indirectement en mesurant l'angle de contact θ entre un film superfluide et un bulk non-superfluide.

de corrélation est suffisamment grande pour faire émerger une force de type Casimir qui va modifier l'épaisseur du film. Le mesure de celle-ci permet ainsi une mesure indirecte de la force de Casimir critique [162]. Mentionnons qu'il existe également des expériences similaires pour des mélanges proches d'un point-triple où la mesure de l'effet Casimir critique est faite en observant l'angle de contact schématisé sur la figure IV.4 [161]. Plus récemment, en 2008 puis 2009, des mesures directes de la force de Casimir critique ont été obtenues en utilisant une configuration sphère-plan similaire à celle utilisée pour la mesure dans le vide [152, 163], voir la figure IV.5.

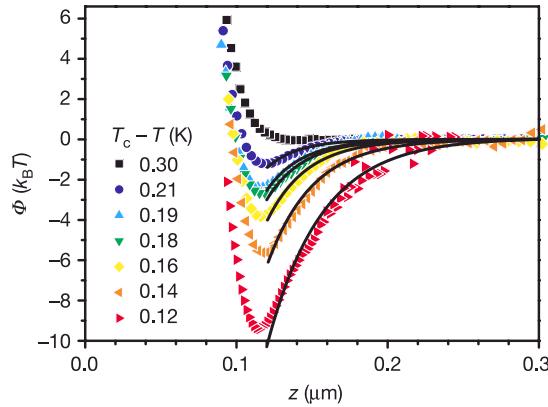


Fig. IV.5 Figure tirée de l'article [152]. La configuration considérée est un montage plan-sphère immergé dans un mélange liquide eau-lutidine. Les courbes montrent ici la mesure du potentiel de Casimir critique en fonction de la distance entre le plan et la sphère pour différentes températures. Nous voyons ici que le puits de potentiel diminue lorsqu'on s'éloigne de la température critique, ce qui est ce qui est attendu pour la force de Casimir critique.

Par la suite, l'étude de la force critique de Casimir sur un film d'Hélium 4 pur proche

de la transition superfluide [164, 165] a amené à l'étude plus générale des forces issues de fluctuations au sein de fluides quantiques. Les premiers travaux de ce type considèrent la force exercée par les fluctuations quantiques d'un condensat de Bose-Einstein sur un obstacle, dans une configuration plus proche de celle considérée dans la partie III.3 de cette thèse [166, 167]. Plus récemment, une étude s'est penchée sur la configuration de deux plaques au sein d'un condensat de Bose-Einstein et a montré que la présence des plaques causait une inhomogénéité du condensat, engendrant une force de Casimir exercée par des fluctuations classiques du fluide sur les plaques [153]. Ces thématiques ont également été étendues en basse dimension, notamment dans les gaz de Bose à une dimension [168, 169], où les fluctuations de phase induisent un ordre à longue portée à température nulle. Nous reviendrons sur ce point plus précisément dans la suite, en discutant le cas bidimensionnel.

IV.2 Évolution de fluctuations dans un fluide de lumière sans cavité

Comme nous venons de l'aborder, les forces de type Casimir ne se limitent pas au cas simple de deux plaques dans le vide, mais existent dans le cadre plus général de fluctuations dans des systèmes ayant des corrélations à longue portée, en particulier dans certains fluides quantiques. Nous allons donc nous poser à présent la question de l'existence d'une telle force dans un fluide de lumière. Pour cela, nous commencerons par nous intéresser à l'évolution spatio-temporelle des fluctuations d'un faisceau paraxial se propageant dans un milieu Kerr et nous montrerons, via une étude analytique et numérique de la fonction de cohérence, que celles-ci sont amplifiées par le milieu et qu'elle possèdent un ordre à grande distance, faisant de ce système un candidat intéressant pour les forces de type Casimir.

IV.2.1 Présentation du système

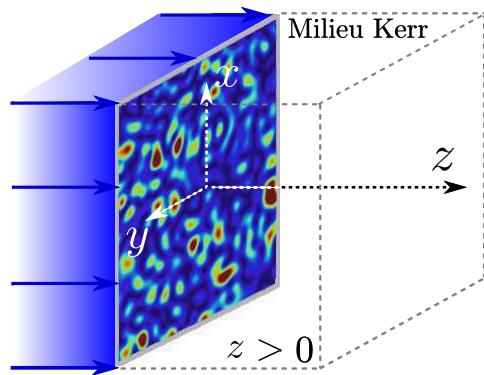


Fig. IV.6 Illustration de notre système. Nous considérons un faisceau paraxial présentant de petites fluctuations spatiales (de type speckle) dans son plan transverse. Ce faisceau pénètre dans un milieu Kerr au niveau de l'interface située à $z = 0$.

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution de fluctuations au-dessus d'un faisceau optique décrit par une onde plane. Pour cela, en reprenant l'expression pour le champ total (voir chapitre III) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) e^{i(kz - \omega_o t)} \right\} \mathbf{e}_y, \quad (\text{IV.10})$$

nous allons considérer la condition initiale suivante pour l'enveloppe :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = \sqrt{I_o} + \varepsilon \mathcal{E}_S(\mathbf{r}_\perp) \quad (\text{IV.11})$$

où I_o est l'intensité de l'onde plane, \mathcal{E}_S décrit la partie fluctuante du faisceau et ε est un paramètre sans dimension permettant de contrôler la force des fluctuations. Nous allons supposer dans la suite que $\varepsilon \ll 1$, la raison de ce choix apparaîtra plus clairement lors du calcul de la force. Nous considérerons, pour les fluctuations, un speckle lumineux décrit par la fonction \mathcal{E}_S qui est une variable aléatoire avec une distribution gaussienne. Nous écrivons ses parties réelles et imaginaire sous la forme :

$$\mathcal{E}_S(\mathbf{r}_\perp) = \mathcal{E}_r(\mathbf{r}_\perp) + i \mathcal{E}_i(\mathbf{r}_\perp).$$

Les fluctuations sont ici caractérisées par la fonction de corrélation :

$$\langle \mathcal{E}_S(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_S^*(\mathbf{r}'_\perp) \rangle = \gamma(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) I_o \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp = 0) = 1 \\ \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp \rightarrow +\infty) \rightarrow 0^+ \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

où la notation $\langle \dots \rangle$ désigne la moyenne sur plusieurs réalisation du speckle. La fonction γ est caractérisée par la longueur de corrélation σ . Dans ce chapitre, nous supposerons :

$$\sigma > \zeta = 1/\sqrt{4k_o g I_o}$$

où ζ est la longueur de cicatrisation du milieu Kerr introduite dans la partie III.2.3. Cette hypothèse est nécessaire pour que les effets non-linéaires soient notables sur la propagation des fluctuations, point sur lequel nous reviendrons un peu plus tard. Notons que la fonction de corrélation étant réelle, la relation (IV.12) implique que les parties réelles et imaginaires du champ speckle ne sont pas corrélées entre elles, c'est-à-dire :

$$\langle \mathcal{E}_r(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_i(\mathbf{r}'_\perp) \rangle = 0 \quad \forall (\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp).$$

De plus, de par les propriétés du speckle, les parties réelle et imaginaire du speckle sont corrélées de la même manière. Nous avons ainsi :

$$\langle \mathcal{E}_r(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_r(\mathbf{r}'_\perp) \rangle = \langle \mathcal{E}_i(\mathbf{r}_\perp) \mathcal{E}_i(\mathbf{r}'_\perp) \rangle = \gamma(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp) \frac{I_o}{2}.$$

Afin de décrire l'évolution des corrélations des fluctuations dans le milieu Kerr, nous allons nous baser sur les résultats que nous avons obtenus dans la partie III.2.3. Pour cela, nous devons exprimer le champ initial dans le cadre du formalisme intensité-phase. La condition initiale décrite par l'équation (IV.11) implique que les fluctuations d'intensité et de phase sont faibles à $z = 0$. Précisément, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z = 0) &= \sqrt{I_o + \delta I(\mathbf{r}_\perp, z = 0)} e^{i\theta'(\mathbf{r}_\perp, z = 0)} \\ &\simeq \sqrt{I_o} + \frac{\delta I(\mathbf{r}_\perp, z = 0)}{2\sqrt{I_o}} + i\sqrt{I_o} \theta'(\mathbf{r}_\perp, z = 0). \end{aligned}$$

Par identification avec l'expression (IV.11), nous trouvons les conditions initiales pour l'intensité et la phase :

$$\delta I(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = 2\varepsilon \sqrt{I_o} \mathcal{E}_r(\mathbf{r}_\perp) \quad \text{et} \quad \theta'(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = \varepsilon \frac{\mathcal{E}_i(\mathbf{r}_\perp)}{\sqrt{I_o}}.$$

En utilisant les expressions générales (III.13) et (III.14) obtenues précédemment, nous obtenons directement les expressions pour la propagation des fluctuations dans le milieu Kerr :

$$\delta I(\mathbf{r}_\perp, z) = \varepsilon \sqrt{I_o} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \left[\mathcal{E}_r(\mathbf{q}_\perp) - i \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)} \mathcal{E}_i(\mathbf{q}_\perp) \right] e^{i(k_B(\mathbf{q}_\perp)z + \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp)} + \text{c.c.} \quad (\text{IV.13})$$

$$\theta'(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{I_o}} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \left[\frac{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)}{\mathbf{q}_\perp^2} \mathcal{E}_r(\mathbf{q}_\perp) - i \mathcal{E}_i(\mathbf{q}_\perp) \right] e^{i(k_B(\mathbf{q}_\perp)z + \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp)} + \text{c.c.} \quad (\text{IV.14})$$

où nous rappelons que *c.c.* désigne le complexe conjugué et $k_B(\mathbf{q}_\perp)$ est donnée par la relation de dispersion de Bogoliubov :

$$k_B(\mathbf{q}_\perp) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{k} \left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4k} + gI_o \right)}$$

obtenue dans la partie III.2.3.

Nous rappelons que les expressions (IV.13) et (IV.14) ont été obtenues en supposant des fluctuations d'intensité δI faibles tout au long de la propagation, mais sans considérations particulières sur la phase θ . Avant d'aller plus loin, nous allons vérifier *a posteriori* si ces hypothèses sont bien justifiées. Pour cela, nous nous penchons sur les quantités $\langle \delta I^2 \rangle$ et $\langle \theta'^2 \rangle$. L'invariance statistique par translation dans le plan (x, y) permet d'écrire la fonction de corrélation dans l'espace des impulsions sous la forme :

$$\langle \mathcal{E}_r(\mathbf{q}_\perp) \mathcal{E}_r^*(\mathbf{q}'_\perp) \rangle = \langle \mathcal{E}_i(\mathbf{q}_\perp) \mathcal{E}_i^*(\mathbf{q}'_\perp) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp) \gamma(q_\perp) \frac{I_o}{2}. \quad (\text{IV.15})$$

À partir des expressions (IV.13) et (IV.14), nous obtenons alors les résultats :

$$\langle \delta I^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle = 2\varepsilon^2 I_o^2 \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(q_\perp) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)} \right)^2 - 1 \right] \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right\} \quad (\text{IV.16})$$

et

$$\langle \theta'^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle = \frac{\varepsilon^2}{2} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(q_\perp) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)}{\mathbf{q}_\perp^2} \right)^2 - 1 \right] \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right\}. \quad (\text{IV.17})$$

Pour fixer les idées et obtenir des expressions explicites, nous allons désormais considérer une fonction de corrélation initiale gaussienne :

$$\gamma(\Delta r_\perp) = \exp \left(-\frac{\Delta r_\perp^2}{4\sigma^2} \right) \Rightarrow \gamma(q_\perp) = 4\pi\sigma^2 \exp \left(-\sigma^2 q_\perp^2 \right). \quad (\text{IV.18})$$

Ce choix est ici arbitraire et les phénomènes décrits dans la suite ne dépendent pas de la forme précise de la fonction γ . Puisque nous considérons ici $\sigma > \zeta$, la fonction $\gamma(q_\perp)$ limite les contributions principales au domaine phononique $q_\perp < \zeta^{-1}$. Cela nous permet alors de considérer, dans les expressions (IV.16) et (IV.17), $k_B(\mathbf{q}_\perp) \sim c_s q_\perp$ avec $c_s = \sqrt{gI_o/k_o}$. Nous écrivons ainsi :

$$\langle \delta I^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle \sim \frac{2\epsilon^2 I_o^2}{\zeta^2} \int \frac{d\kappa}{(2\pi)^2} \gamma\left(\frac{\kappa}{\zeta}\right) \left\{ 1 + [\kappa^2 - 1] \sin^2(2gI_o z \kappa) \right\}$$

et

$$\langle \theta'^2(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle \sim \frac{\epsilon^2}{2\zeta^2} \int \frac{d\kappa}{(2\pi)^2} \gamma\left(\frac{\kappa}{\zeta}\right) \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\kappa^2} - 1\right] \sin^2(2gI_o z \kappa) \right\}, \quad (\text{IV.19})$$

en effectuant le changement de variable $\kappa = \zeta \mathbf{q}_\perp$. Nous voyons alors apparaître dans l'argument du sinus un temps caractéristique :

$$z_{NL} = \frac{1}{2gI_o}$$

généralement appelé « temps non-linéaire » [170].

Commençons par regarder rapidement la limite des temps courts $z \ll z_{NL}$, où nous pouvons effectuer le développement $\sin(\kappa z / z_{NL}) \sim \kappa z / z_{NL}$. Nous obtenons alors les expressions :

$$\langle \delta I^2(\mathbf{r}_\perp, z \ll z_{NL}) \rangle \sim 2\epsilon^2 I_o^2 \left[1 - \frac{z^2}{z_{NL}^2} \frac{\zeta^2}{\sigma^2} \left(1 - 2 \frac{\zeta^2}{\sigma^2} \right) \right] \ll I_o^2$$

et

$$\langle \theta'^2(\mathbf{r}_\perp, z \ll z_{NL}) \rangle \sim \frac{\epsilon^2}{2} \left[1 + \frac{z^2}{z_{NL}^2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\sigma^2} \right) \right] \ll 1.$$

Sans surprise, nous retrouvons l'hypothèse des fluctuations faibles de la condition initiale au début de la propagation.

Pour les temps plus longs $z \gg z_{NL}$, le sinus oscille à présent très rapidement. Pour les fluctuations d'intensité, le résultat s'obtient simplement en remplaçant le sinus carré par sa valeur moyennée sur z . Nous trouvons alors directement :

$$\langle \delta I(\mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \rangle \sim \langle \langle \delta I(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle \rangle_z \sim \epsilon^2 I_o^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{\sigma^2} \right) \ll I_o^2.$$

Nous voyons ainsi que les fluctuations d'intensité restent bien faibles tout au long de la propagation, comme nous l'avions supposé dans le chapitre précédent. Si, à présent, nous nous penchons sur les fluctuations de phase, le calcul est un peu plus délicat. En effet, si nous prenons simplement la moyenne selon z , le terme en $1/\kappa^2$ dans l'expression (IV.19) conduit à une divergence infrarouge dans l'intégrale. Nous devons ainsi traiter plus précisément cette expression. Nous écrivons alors :

$$\langle \theta'^2(\mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \rangle \sim \frac{\epsilon^2}{2} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\sigma^2}{\zeta^2} \int_0^{+\infty} d\kappa \frac{e^{-(\frac{\sigma}{\zeta})^2 \kappa^2}}{\kappa} \sin^2\left(\frac{z}{z_{NL}} \kappa\right) \right\}.$$

En utilisant le logiciel Mathematica, nous obtenons que :

$$\int_0^{+\infty} dX \frac{e^{-X^2}}{X} \sin^2(BX) \underset{B \gg 1}{\sim} \frac{1}{2} \ln(B) - \frac{1}{4} \psi(1/2) \quad (\text{IV.20})$$

où $\psi(z)$ est la fonction mathématique digamma, donnée par la dérivée logarithmique de la fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$. Cela nous donne alors pour les fluctuations de phase :

$$\langle \theta'^2(\mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \rangle \propto \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{4 \zeta^2} \ln \left(\frac{c_s z \sqrt{2}}{\sigma} \right).$$

Ainsi, celles-ci deviennent importantes aux temps longs. Cela correspond bien à ce que nous avions supposé dans le chapitre précédent pour aboutir à l'expression (IV.14).

IV.2.2 Évolution des corrélations des fluctuations

Nous avons vu dans la partie IV.1.4 qu'une condition essentielle pour obtenir une force de type Casimir dans un fluide était la présence de corrélations à longue portée. En utilisant les résultats de la partie précédente, nous allons maintenant montrer que de telles corrélations se manifestent dans la configuration optique de la figure IV.6.

Nous caractérisons ces corrélations via la fonction de cohérence du champ électrique donnée par :

$$g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle.$$

À nouveau, nous allons utiliser le formalisme intensité-phase où $\mathcal{E} = \sqrt{I_o + \Delta I} e^{i\theta}$. Les fluctuations d'intensité étant faibles, nous effectuons un développement limité au deuxième ordre (le premier ordre étant en moyenne nul). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{I_o} \left\langle \sqrt{I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) I(\mathbf{r}_\perp, z)} \right\rangle &\sim 1 - \frac{1}{8I_o^2} \left\langle (\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) - \delta I(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \right\rangle \\ &\sim \exp \left[-\frac{1}{8I_o^2} \left\langle (\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) - \delta I(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \right\rangle \right] \end{aligned}$$

Pour les fluctuations de phase, celles-ci ne restant pas faibles au cours de l'évolution, nous ne pouvons pas utiliser le même genre de développement. Cependant, nous manipulons ici des variables aléatoires avec une distribution gaussienne. Cela nous permet d'utiliser le théorème d'Isserlis (ou théorème des probabilités de Wick) qui nous donne $\langle X^{2n} \rangle = (2n)!/(2^n n!) \langle X^2 \rangle^n$ et $\langle X^{2n+1} \rangle = 0$. Nous avons alors

$$\langle e^{iX} \rangle = \sum_n \frac{\langle (iX)^n \rangle}{n!} = \sum_n \frac{\langle -X^2 \rangle^n}{2^n n!} = e^{-\frac{\langle X^2 \rangle}{2}}.$$

En appliquant ce théorème à la phase et en utilisant le développement de l'intensité ci-dessus, nous trouvons pour la fonction de cohérence :

$$g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) = I_o e^{-\left[\frac{1}{2} \langle (\theta'(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) - \theta'(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \rangle + \frac{1}{8I_o^2} \langle (\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) - \delta I(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \rangle \right]}.$$

Cette expression est similaire à celle utilisée pour décrire la cohérence spatiale des quasi-condensats, dans le contexte des fluides quantiques de basse dimension à l'équilibre [126]. Les expressions (IV.13), (IV.14) et (IV.15) nous permettent par ailleurs d'obtenir :

$$\langle (\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta\mathbf{r}_\perp, z) - \delta I(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \rangle = 4\varepsilon^2 I_o^2 \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) (1 - \cos(\mathbf{q}_\perp \cdot \Delta\mathbf{r}_\perp)) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)}{\mathbf{q}_\perp^2} \right)^2 - 1 \right] \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right\}$$

et

$$\langle (\theta'(\mathbf{r}_\perp + \Delta\mathbf{r}_\perp, z) - \theta'(\mathbf{r}_\perp, z))^2 \rangle = \varepsilon^2 \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) (1 - \cos(\mathbf{q}_\perp \cdot \Delta\mathbf{r}_\perp)) \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{2k k_B(\mathbf{q}_\perp)} \right)^2 - 1 \right] \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right\}.$$

Nous obtenons alors, pour la fonction de cohérence, l'expression :

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) = I_o \exp \left\{ -\varepsilon^2 \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) (1 - \cos(\mathbf{q}_\perp \cdot \Delta\mathbf{r}_\perp)) \left[1 + \frac{2(gI_o)^2}{k_B^2(\mathbf{q}_\perp)} \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right] \right\}. \quad (\text{IV.21})$$

Tout comme pour les calculs de $\langle \delta I^2 \rangle$ et $\langle \theta'^2 \rangle$, nous nous plaçons dans l'approximation phononique. Nous écrivons alors :

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) = I_o \exp \left\{ -2\varepsilon^2 \frac{\sigma^2}{\zeta^2} \int_0^{+\infty} \kappa d\kappa e^{-\frac{\sigma^2}{\zeta^2}\kappa^2} \left[1 - J_0(\kappa \frac{\Delta r_\perp}{\zeta}) \right] \left[1 + \frac{1}{2\kappa^2} \sin^2(\frac{z}{z_{NL}}\kappa) \right] \right\}$$

où J_0 est la première fonction de Bessel.

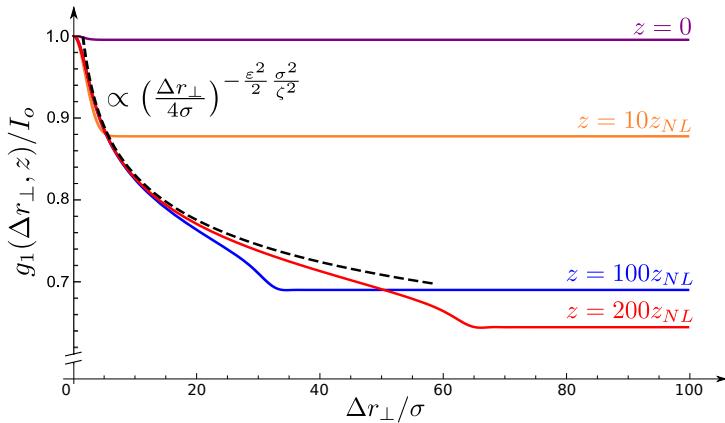


Fig. IV.7 Courbes de la fonction g_1 , à partir de l'expression (IV.21), en fonction de la distance $\Delta r_\perp/\sigma$ pour différents z . Pour obtenir ces courbes, nous avons utilisé les paramètres $\varepsilon = 0.07$ et $\zeta/\sigma = 0.158$. La courbe pointillée représente la fonction algébrique asymptotique (IV.23).

Si nous regardons la fonction de cohérence aux temps courts $z \ll z_{NL}$, nous obtenons :

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z \ll z_{NL}) \sim I_o + \varepsilon^2 I_o \gamma(\Delta\mathbf{r}_\perp) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z^2}{z_{NL}^2} \right).$$

Nous retrouvons ainsi les corrélations à courte portée de l'état initial, de longueur caractéristique σ . Ce comportement est bien visible pour les courbes bleue ($z = 0$) et orange ($z = 10z_{NL}$) de la figure IV.7, où nous avons tracé la fonction g_1 en fonction de Δr_\perp à l'aide de la formule (IV.21).

Intéressons-nous à présent au régime, plus intéressant, des temps longs $z \gg z_{NL}$ où les fluctuations de phase sont amplifiées. Nous avons alors :

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \simeq I_o \exp \left\{ -\varepsilon^2 \frac{\sigma^2}{\zeta^2} \int_0^{+\infty} d\kappa e^{-\frac{\sigma^2}{\zeta^2} \kappa^2} \left[1 - J_0(\kappa \frac{\Delta r_\perp}{\zeta}) \right] \frac{1}{\kappa} \sin^2 \left(\frac{z}{z_{NL}} \kappa \right) \right\}. \quad (\text{IV.22})$$

À nouveau, à l'aide du logiciel Mathematica, nous évaluons :

$$\int_0^{+\infty} dX \frac{e^{-X^2}}{X} J_0(AX) \sin^2(BX) \underset{B \gg 1}{\sim} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4B}{A} \right) \text{ pour } A < B.$$

Dans l'expression (IV.22), nous identifions $A = \Delta r_\perp / \sigma$ et $B = \zeta z / (\sigma z_{NL}) = c_s z / \sigma$. En utilisant également la relation (IV.20), nous obtenons ainsi, pour $\Delta r_\perp < c_s z$, l'expression approchée :

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp < c_s z, z \gg z_{NL}) \simeq I_o e^{+\frac{\alpha}{2} \psi(1/2)} \left(\frac{4\sigma}{\Delta r_\perp} \right)^\alpha \quad (\text{IV.23})$$

où nous avons défini le coefficient

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\sigma^2}{\zeta^2}.$$

Nous voyons ainsi apparaître un régime de décroissance algébrique que nous avons représenté sur la figure IV.7 par la courbe noire pointillée. Il est intéressant de noter ici que ce régime dépend uniquement des paramètres ε et σ/ζ et non de la forme précise de la fonction $\gamma(\Delta\mathbf{r}_\perp)$. Sous l'effet du milieu non-linéaire, les fluctuations initiales du faisceau lumineux acquièrent ainsi « spontanément » un régime universel de corrélations algébriques au cours de la propagation (sur une distance de l'ordre de quelques z_{NL}). Ce comportement de la fonction de cohérence est caractéristique des gaz de bosons en interaction à deux dimensions [171], si ce n'est qu'il apparaît ici dans un contexte *hors-équilibre*. De plus, nous remarquons que cette décroissance algébrique est indépendante du temps z . Un tel régime stationnaire au sein d'un système hors-équilibre est caractéristique d'un phénomène dit de préthermalisation [172, 173, 174, 175]. Le système, bien qu'hors-équilibre, converge peu après le *quench* vers un point fixe quasi-thermal.

Pour $A > 2B \gg 1$, nous trouvons que :

$$\int_0^{+\infty} dX \frac{e^{-X^2}}{X} J_0(AX) \sin(BX) \ll \ln B.$$

Ainsi pour $\Delta r_{\perp} > 2c_s z$, la contribution du terme contenant la dépendance en Δr_{\perp} devient négligeable. La fonction de corrélation atteint alors un régime constant :

$$g_1(\Delta r_{\perp} > 2c_s z, z \gg z_{NL}) \simeq I_o e^{+\frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\sigma^2}{\zeta^2} \psi(1/2)} \left(\frac{\sigma}{c_s z} \right)^\alpha$$

bien visible sur les courbes de la figure IV.7. La limite $\Delta r_{\perp} = 2c_s z$, dite de Lieb-Robinson, définit un cône de lumière au-delà duquel les fluctuations phononiques ne se sont pas encore propagées. Ce plateau est alors contrôlé par l'intensité du champ moyen ($g_1 = |\langle \mathcal{E} \rangle|^2$) qui diminue au fur et à mesure de la propagation selon z , les fluctuations prenant de l'importance.

IV.2.3 Simulation de la propagation

Afin de vérifier nos résultats analytiques, nous avons utilisé une simulation numérique que nous allons rapidement présenter ici. Celle-ci a été réalisée sur Matlab par Simon Pigeon.

Pour cette simulation, nous utilisons une grille 2D (x, y) de taille $W \times W$ avec un pas $dx = dy$. Une première condition importante, afin de décrire correctement notre speckle, est de bien vérifier que $dx < \sigma$. Pour les bords, nous utilisons des conditions périodiques. La taille W est alors choisie de façon à ce que le cône de lumière des fluctuations n'atteigne pas ces bords. Cela nous donne une deuxième condition : $W > c_s z_{\text{final}}$ où z_{final} correspond au temps maximal considéré pour la simulation.

Une fois les paramètres de notre grille choisis, nous devons générer notre état initial² :

$$\Psi_o(x, y) = \sqrt{I_o} + \varepsilon \Psi_S(x, y).$$

La génération numérique d'un speckle $\Psi_S = \Psi_r + i\Psi_i$ se fait en trois étapes [176]. Tout d'abord, nous générerons deux champs aléatoires gaussiens décorrélés spatialement $X_{r/i}(x, y)$ dans notre grille. Ensuite, nous effectuons la transformée de Fourier des ces champs que nous multiplions par une fonction *cut-off* $F(q_x, q_y)$. Enfin, nous obtenons les composantes $\Psi_{r/i}$ du speckle en effectuant la transformée de Fourier inverse. Ainsi :

$$\Psi_{r/i}(x, y) = \text{TF}^{-1} \left[\text{TF}[X_{r/i}(x, y)] F(q_x, q_y) \right].$$

Dans notre cas, pour obtenir la fonction de corrélation $\gamma(\mathbf{r}_{\perp})$ introduite précédemment (équation (IV.18)), nous utilisons la fonction :

$$F(q_x, q_y) = \text{TF} \left[\exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \right] = \exp \left(-\frac{q_x^2 + q_y^2}{2} \sigma^2 \right) = \sqrt{\gamma(q_x, q_y)}.$$

Nous devons ensuite faire propager cet état initial selon la direction z en résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\partial_z \Psi(x, y; z) = -\frac{1}{2k} \Delta \Psi(x, y; z) + g|\Psi(x, y; z)|^2 \Psi(x, y; z) = H_o \Psi(x, y; z) + H_{NL} \Psi(x, y; z)$$

2. Afin distinguer les expressions numériques et analytiques, nous notons ici $\mathcal{E} \rightarrow \Psi$.

discrétisée sur une grille, où nous rappelons que $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Pour cela, on utilise la méthode *split-step* qui permet de résoudre numériquement des équations non-linéaires [177]. Cette méthode se base sur une séparation des parties linéaire H_o et non-linéaire H_{NL} , en propageant le champ par pas dz . Si cet intervalle est suffisamment faible, la propagation peut être approximée au premier ordre par :

$$\Psi(x, y; z + dz) \sim e^{-idzH_o} e^{-idzH_{NL}} \Psi(x, y; z).$$

La propagation non-linéaire est alors facilement obtenue dans l'espace réel et la propagation libre, quant à elle, est plus simplement traitée dans l'espace de Fourier. La propagation du champ est alors obtenue en écrivant :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y; z + dz) &\sim \text{TF}^{-1} [\exp(-idzH_o) \Psi_{NL}(q_x, q_y; z + dz)] \\ &\sim \text{TF}^{-1} \left[\exp(-idzH_o) \text{TF}[\exp\{-idzg|\Psi(x, y; z)|^2\} \Psi(x, y; z)] \right] \end{aligned}$$

où l'hamiltonien libre est à présent donné, dans l'espace des impulsions, par :

$$H_o = \frac{q_x^2 + q_y^2}{2k}.$$

La fonction de corrélation g_1 à un temps z donné est alors obtenue en multipliant le champ $\Psi(x, y; z)$ par le champ conjugué $\Psi^*(x + \Delta x, y + \Delta y; z)$ à un autre point. La moyenne s'effectue enfin en sommant à la fois sur x et sur y . Ces étapes sont également répétées sur un nombre N de configurations du speckle.

Au sein de notre simulation, nous pouvons jouer sur les paramètres physiques : masse effective k , longueur de corrélation σ , intensité I_o de l'onde plane initiale et paramètre d'interaction g . Les résultats numériques donnés dans la suite de ce chapitre sont obtenus en utilisant les valeurs :

- paramètres physiques : $g = 0.01$; $k_o = 1000$; $I_o = 1000$; $\sigma = 0.1$; $\varepsilon = 0.07$,
- paramètres numériques : $W = 100$; $z_{\text{final}} = 100$; $dx = dy = 0.05$; $dz = 0.1$.

IV.2.4 Comparaison des résultats analytiques et numériques

Une comparaison brute des résultats analytiques et numériques de la fonction de cohérence pour des paramètres identiques est montrée sur la figure IV.8. Nous voyons ici que le comportement prédit par l'expression analytique décrit bien les données obtenues à l'aide de la simulation pour les temps assez courts. Aux temps plus longs, en revanche, il apparaît un décalage entre l'expression analytique et le résultat numérique. Celui-ci provient d'effets au-delà de l'approximation de Bogoliubov, plus spécifiquement des interactions entre les phonons. Ces interactions font lentement sortir le système du régime préthermal et conduisent au bout d'un certain temps à sa thermalisation complète. La prise en compte de ce phénomène dans notre modèle analytique est une tâche ardue qui nécessite une approche cinétique et fait actuellement l'objet de la thèse de Clément Duval. Cependant, si nous nous limitons au domaine de préthermalisation, les corrections liées aux collisions entre les phonons peuvent être prises en compte à l'aide d'un paramètre phénoménologique β que nous ajusterons grâce aux résultats numériques. Puisque le comportement général

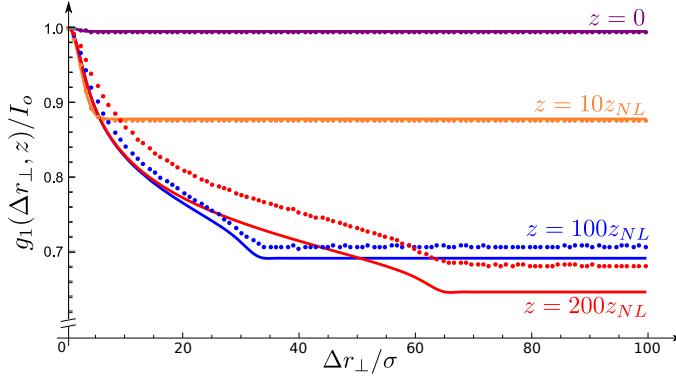


Fig. IV.8 Sur ce graphe, nous avons tracé les fonctions g_1 obtenues à l'aide de l'expression (IV.21) (courbes pleines) et de la simulation numérique (points), obtenues pour les paramètres : $\epsilon = 0.07$ et $\zeta/\sigma = 0.158$, et pour un nombre de réalisation $N = 2$.

de la fonction de cohérence semble correctement pris en compte avec l'expression (IV.21), nous supposons que notre paramètre dépend uniquement de z . Nous écrivons ainsi :

$$g_1(\Delta r_\perp, z) = I_o \exp \left\{ -\varepsilon^2 \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) (1 - \cos(\mathbf{q}_\perp \cdot \Delta \mathbf{r}_\perp)) \left[1 + \frac{2(gI_o)^2}{k_B^2(\mathbf{q}_\perp)} \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) + \beta(z) \right] \right\}. \quad (\text{IV.24})$$

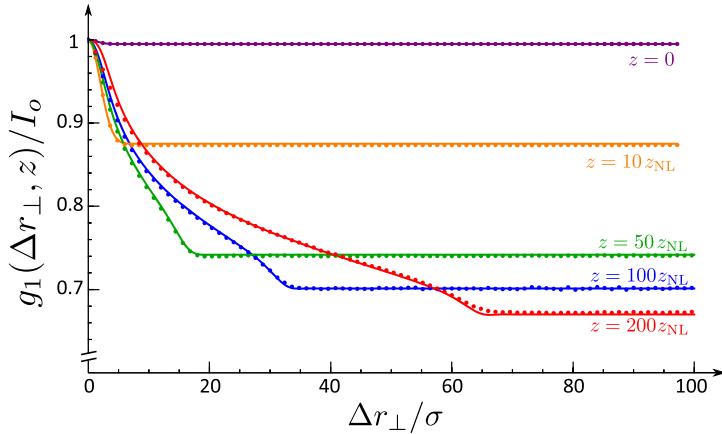


Fig. IV.9 Sur ce graphe, nous avons tracé les fonctions g_1 obtenues à l'aide de l'expression (IV.24) (courbes pleines) et de la simulation numérique (points), pour les mêmes paramètres que ceux de la figure IV.8. Pour chaque courbe, le paramètre β , décrivant les collisions entre les phonons, est ajusté : $\beta(z = 10z_{NL}) = 0$; $\beta(z = 50z_{NL}) = -1$; $\beta(z = 100z_{NL}) = -4$ et $\beta(z = 200z_{NL}) = -9$.

Si nous utilisons à présent l'expression (IV.24) en ajustant le paramètre β à l'aide des données de la simulation, l'accord entre la théorie et le numérique devient excellent, comme montré sur la figure IV.9.

IV.3 Force de Casimir au sein d'un fluide de lumière hors-équilibre

Ayant étudié la propagation de fluctuations au sein d'un fluide de lumière, nous avons vu que le milieu Kerr permettait de les amplifier et de faire émerger une corrélation à longue distance. Ces éléments indiquent que ce système est un bon candidat pour l'émergence d'une force de Casimir, ce que nous allons étudier à présent.

IV.3.1 Adaptation de l'approche de diffusion

Jusqu'à présent, nous avons étudié l'évolution des fluctuations en l'absence d'obstacles. Nous regardons maintenant la situation en présence de deux plaques, comme illustré sur la figure IV.10.

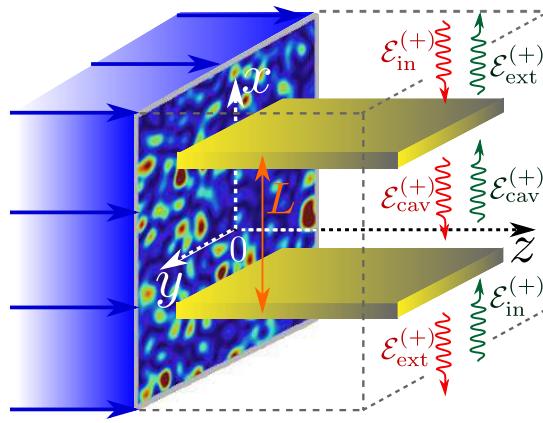


Fig. IV.10 Nous reprenons la situation de la figure IV.6, avec un faisceau paraxial présentant de petites fluctuations spatiales transverse, et incident sur un milieu Kerr dans lequel nous ajoutons maintenant deux plaques espacées d'une distance L . Nous introduisons également ici les notations pour les fluctuations du champ dans les trois régions, comme cela avait été fait pour le cas du vide.

Tout comme pour les fluctuations du vide, nous allons obtenir l'expression de la pression de Casimir à l'aide de l'approche de diffusion présentée dans la partie III.3. Cependant, à la différence du vide, le champ moyen $\langle \mathcal{E} \rangle$ est ici non-nul, de sorte que les fluctuations du champ sont données par :

$$\delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) = \mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) - \langle \mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle .$$

Les formules obtenues dans la partie IV.2 sans les plaques permettent d'obtenir l'expression des fluctuations $\delta\mathcal{E}_{\text{in}}$ (voir figure IV.10). Les champs dans les autres zones (voir figure IV.10 pour les notations) sont ensuite obtenues par les relations :

$$\begin{pmatrix} \delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(+)} \\ \delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(-)} \end{pmatrix} = S(\mathbf{q}_\perp) \begin{pmatrix} \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(+)} \\ \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(-)} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(+)} \\ \delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(-)} \end{pmatrix} = R(\mathbf{q}_\perp) \begin{pmatrix} \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(+)} \\ \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(-)} \end{pmatrix} .$$

où les matrices $S(\mathbf{q}_\perp)$ et $R(\mathbf{q}_\perp)$ sont données dans les équations (IV.2) et (IV.3). Nous écrivons ensuite le champ par zone :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E}_{\text{ext}}(\mathbf{q}_\perp, z) &= \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(+)}(\mathbf{q}_\perp, z) + \delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(-)}(\mathbf{q}_\perp, z) \\ \delta\mathcal{E}_{\text{cav}}(\mathbf{q}_\perp, z) &= \delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(+)}(\mathbf{q}_\perp, z) + \delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(-)}(\mathbf{q}_\perp, z)\end{aligned}$$

où nous notons $\mathcal{E}^{(\pm)}(\mathbf{q}_\perp, z) = \mathcal{E}(\pm|q_x|, q_y, z)$. Notons ici que nous avons omis l'indice de polarisation. En effet, dans la limite paraxiale, le problème se réduit à une configuration scalaire où le champ de la forme (IV.10) se réduit à sa composante $p = TE$. La pression de Casimir exercée selon la direction x par ces fluctuations sur une plaque est alors donnée par :

$$P = \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}) \rangle - \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{ext}}) \rangle \quad (\text{IV.25})$$

où nous reprenons pour le tenseur de Maxwell l'expression obtenue dans la partie III.3 :

$$T_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{\epsilon_o}{2k} \left(\frac{|\partial_x \mathcal{E}|^2}{2k} + \text{Im}[\mathcal{E} \partial_z \mathcal{E}^*] - \frac{g}{2} |\mathcal{E}|^4 \right).$$

IV.3.2 Expression du tenseur de Maxwell dans les différentes régions

Afin d'utiliser l'approche de diffusion qui est une théorie linéaire, nous devons quadratiquer le tenseur de Maxwell. Pour cela, nous utilisons le fait que les fluctuations d'intensité sont faibles, cela nous permet d'écrire :

$$|\mathcal{E}|^4 \sim 2I_o |\mathcal{E}|^2 - I_o^2.$$

En nous rappelant que la phase du champ était donnée par :

$$\theta(\mathbf{r}_\perp, z) = \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) - igI_o z,$$

nous allons utiliser la transformation unitaire

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z) e^{+igI_o z}.$$

Le tenseur de Maxwell est dans ce cas donné par :

$$T_{xx}(\mathcal{E}) = \frac{\epsilon_o}{2k} \left(\frac{|\partial_x \mathcal{E}|^2}{2k} + \text{Im}[\mathcal{E} \partial_z \mathcal{E}^*] + \frac{gI_o^2}{2} \right).$$

Notons que le dernier terme étant constant, il s'annule lorsque l'on effectue la différence (IV.25).

Le pression exercée par les fluctuations à l'intérieur et à l'extérieur des plaques est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{ext}}) \rangle &= \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(+)}) \rangle + \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(-)}) \rangle \\ \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}) \rangle &= \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(+)}) \rangle + \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(-)}) \rangle.\end{aligned}$$

De plus, nous utilisons à nouveau l'invariance par translation du système qui nous permet d'écrire $\langle \delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \delta\mathcal{E}^*(\mathbf{q}'_\perp, z) \rangle = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\perp - \mathbf{q}'_\perp) \langle |\delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle$, de même pour $\langle \delta\mathcal{E} \partial_z \delta\mathcal{E}^* \rangle$.

Nous obtenons alors :

$$\langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{in}}^{(+)}) \rangle = \frac{\epsilon_o}{2k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \left[\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle + \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right]$$

que l'on trouve égale à la contribution du champ $\delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(-)}$:

$$\begin{aligned} \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{out}}^{(-)}) \rangle &= \frac{\epsilon_o}{2k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \left[|S_{21}(\mathbf{q}_\perp)|^2 + |S_{22}(\mathbf{q}_\perp)|^2 \right] \\ &\quad \times \left[\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle + \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right] \end{aligned}$$

en utilisant l'unitarité de la matrice S : $|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$. Nous avons ainsi :

$$\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle = \frac{\epsilon_o}{k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \left[\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle + \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right] \quad (\text{IV.26})$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(+)}) \rangle &= \frac{\epsilon_o}{2k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \left[|R_{11}(\mathbf{q}_\perp)|^2 + |R_{12}(\mathbf{q}_\perp)|^2 \right] \\ &\quad \times \left[\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle + \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right], \end{aligned}$$

la contribution $\langle T_{xx}(\delta\mathcal{E}_{\text{cav}}^{(-)}) \rangle$ étant identique avec $R_{11} \rightarrow R_{21}$ et $R_{12} \rightarrow R_{22}$. Nous avons ainsi :

$$\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle = \frac{\epsilon_o}{k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \left(\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle + \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}_{\text{in}}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}_{\text{in}}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right) \mathcal{G}(\mathbf{q}_\perp) \quad (\text{IV.27})$$

où la fonction \mathcal{G} a été introduite précédemment, voir la relation (IV.6). Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous omettrons l'indice « in » et noterons simplement $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_{\text{in}}$.

IV.3.3 Expression de la pression de Casimir

En insérant les expressions (IV.26) et (IV.27) dans la relation (IV.25), nous obtenons l'expression générale de la pression de Casimir :

$$\mathsf{P}(L, z) = \frac{\epsilon_o}{k} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp^{(+)}}{(2\pi)^2} \frac{r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L}}{1 - r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L}} \left[\frac{q_x^2}{2k} \langle |\delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle - \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle \right] + c.c. .$$

Nous retrouvons ici la fonction de transfert de la cavité Fabry-Perot que nous avions déjà rencontrée dans le cas de la force de Casimir dans le vide (voir partie IV.1.2). Nous voyons ensuite que nous avons deux contributions différentes. La première rappelle l'expression

(IV.7) obtenue dans le cas du vide et est donnée par l'énergie des fluctuations $q_x^2/(2k_o)$ pondérée par leur spectre $\langle |\delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z)|^2 \rangle$. Le deuxième terme $\text{Im} \langle \delta\mathcal{E}(\mathbf{q}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}^*(\mathbf{q}_\perp, z) \rangle$ n'apparaissait pas dans le cas du vide, en effet, il correspond à un spectre de courant des fluctuations et est un terme non-stationnaire. Si nous repassons dans l'espace réel, nous trouvons :

$$\mathsf{P}(L, z) = -\frac{\epsilon_o}{2} \int d\Delta\mathbf{r}_\perp \left[\frac{1}{k} \frac{\partial^2 g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z)}{\partial(\Delta x)^2} + g_1^j(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) \right] \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot (2Le_x - \Delta\mathbf{r}_\perp)}}{1 - r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L}} \quad (\text{IV.28})$$

où nous retrouvons la fonction de cohérence en l'absence de plaques,

$$g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) = \langle \delta\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp + \Delta\mathbf{r}_\perp, z) \delta\mathcal{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \rangle ,$$

et nous avons introduit ici la fonction de corrélation de courant

$$g_1^j(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{2}{k} \text{Im} \langle \delta\mathcal{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \partial_z \delta\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp + \Delta\mathbf{r}_\perp, z) \rangle .$$

Le calcul de cette nouvelle fonction de corrélation est présenté dans l'annexe E.

Afin de calculer la pression (IV.28), nous utilisons la relation :

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{r^2(\mathbf{q}_\perp)}{1 - r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L}} e^{2iq_x L(1 - \frac{\Delta x}{2L})} e^{-iq_y \Delta y} &= \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} r^2(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L(1 - \frac{\Delta x}{2L})} e^{-iq_y \Delta y} \\ &\times \sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}(\mathbf{q}_\perp) e^{2inq_x L} . \end{aligned}$$

Dans notre configuration, nous pouvons simplifier encore l'expression (IV.28). En effet, rappelons ici que nous considérons un faisceau paraxial. Cela se traduit par la condition $k\sigma \ll 1$, qui implique que les photons contribuant à la force sont typiquement tels que $r(\mathbf{q}_\perp) \rightarrow 1$ (incidence « rasante »). Nous avons alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} r^{2(n+1)}(\mathbf{q}_\perp) e^{2iq_x L(1+n - \frac{\Delta x}{2L})} e^{-iq_y \Delta y} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \delta\left(n + 1 - \frac{\Delta x}{2L}\right) \delta(\Delta y) .$$

Nous obtenons ainsi l'expression finale pour la pression de Casimir :

$$\mathsf{P}(L, z) = -\frac{\epsilon_o}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 g_1(\Delta\mathbf{r}_\perp, z)}{\partial(\Delta x)^2} + g_1^j(\Delta\mathbf{r}_\perp, z) \right]_{\Delta\mathbf{r}_\perp=(2L(n+1), 0)} . \quad (\text{IV.29})$$

Cette pression est tracée sur la figure IV.11 dans le régime préthermal $z \gg z_{NL}$, en utilisant l'équation (IV.21) pour évaluer la fonction g_j et l'équation (E.1) pour la fonction g_1^j . Dans ce régime, la pression ne dépend (presque) pas de z . La figure IV.11 met en évidence deux régions bien distinctes séparées par la limite $L \sim \sigma$. Pour des distances $L \lesssim \sigma$, tout d'abord, la contribution principale est donnée par la fonction de corrélation de courant g_1^j (voir annexe E). Nous trouvons alors l'expression :

$$\mathsf{P}(L \lesssim \sigma, z) \sim +\frac{\epsilon_o}{8} \frac{\varepsilon^2 I_o}{(k\zeta)^2} \frac{\sigma}{L} \sqrt{\frac{\pi}{1 + \varepsilon^2 \sigma^2 / (4\zeta^2)}} . \quad (\text{IV.30})$$

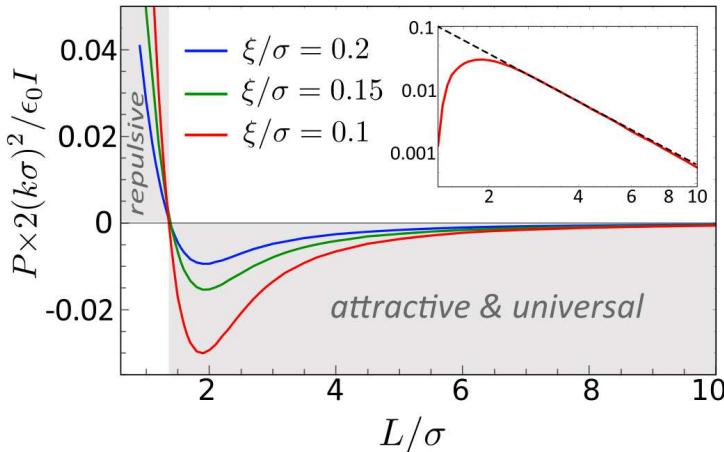


Fig. IV.11 Graphe de la pression de Casimir, tracée à partir de l'expression (IV.29), en fonction de l'espacement entre les plaques L/σ , dans le régime pré-thermal $z \gg z_{NL}$. Les trois courbes correspondent à trois valeurs du rapport ζ/σ (un ζ plus petit correspondant à une interaction plus forte). L'insert montre la pression pour $\zeta/\sigma = 0.1$ en double échelle logarithmique, pour mettre en évidence la décroissance algébrique. La courbe pointillée est la loi asymptotique (IV.31).

Le signe positif indique ici une force répulsive entre les plaques. Cette expression (IV.30) indique par ailleurs que la force est algébrique à courte distance. Il est important de noter, néanmoins, que ce résultat dépend de la forme spécifique de γ , la fonction de corrélation du speckle initial. La relation (IV.30) est donc non-universelle, elle dépend fortement des détails de l'état initial. Notons également que dans ce régime de petites séparations L/σ , les effets de champ proches au voisinage des plaques deviennent importants, et l'approche de diffusion utilisée ici devient probablement moins applicable en pratique.

Pour les distances $L \gg \sigma$, la contribution de la fonction de corrélation de courant g_1^j est en revanche négligeable (voir annexe E). De plus, pour $\Delta r \gg \sigma$ la variation de la fonction de corrélation $\partial_x^2 g_1$ décroît très rapidement, de sorte que la pression de Casimir (IV.28) est essentiellement donnée par le premier terme de la somme sur n . Nous avons donc :

$$P(L \gg \sigma, z) \sim -\frac{\epsilon_o}{2k^2} \left. \frac{\partial^2 g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z)}{\partial(\Delta x)^2} \right|_{\Delta \mathbf{r}_\perp = (2L, 0)} .$$

À l'intérieur du cône de lumière, où la fonction g_1 est donnée par l'expression (IV.23), nous obtenons alors l'expression de la pression :

$$P(L \gg \sigma, z \gg z_{NL}) \sim -\frac{\epsilon_o I_o}{(k\sigma)^2} \frac{e^{\frac{\alpha}{2}\psi(1/2)}}{8} \alpha(\alpha+1) \left(\frac{2\sigma}{L} \right)^{\alpha+2} \quad (\text{IV.31})$$

où nous rappelons que

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2 \sigma^2}{2 \zeta^2} . \quad (\text{IV.32})$$

Contrairement au régime de courte séparation (IV.30), le résultat à grande séparation (IV.31) est universel, au sens où la pression ne dépend pas de la forme spécifique de

γ , la fonction de corrélation du speckle initial. Par ailleurs, dans ce régime, la force est attractive, comme pour la force de Casimir dans le vide. Notons toutefois que l'expression (IV.31) est uniquement valide tant que la séparation entre les plaques reste plus petite que le bord $c_s z$ du cône de lumière (dans le cas contraire, la fonction g_1 devient constante et la pression de Casimir est ainsi nulle).

IV.3.4 Discussion sur les résultats

Le résultat le plus intéressant de notre étude est la mise en évidence d'un régime universel de force attractive pour des séparations $L \gg \sigma$. Dans ce régime, la pression décroît algébriquement suivant (IV.31). L'exposant (IV.32) de cette décroissance peut, a priori, avoir une valeur quelconque. En effet, bien que nous ayons supposé $\varepsilon \ll 1$, le rapport σ/ζ peut être pris bien plus grand que 1 (voir figure IV.11). Le choix de sa valeur par l'expérimentateur·rice permet ainsi de régler l'amplitude de la pression de Casimir. Notons au passage que nous vérifions bien ici que le régime considéré $\sigma/\zeta > 1$ est le plus favorable pour ce qui est de l'amplitude de la pression de Casimir. Cela se comprend par le fait que comme nous l'avons vu dans la partie IV.2, en prenant $\sigma > \zeta$, on ne sélectionne que les excitations phononiques qui sont celles qui contribue à l'ordre à longue portée.

Un autre point intéressant, et qui permet de confirmer l'intérêt de ce système dans l'étude des forces de type Casimir, est de comparer nos résultats au cas d'un speckle initial d'amplitude I_o et de même fonction de corrélation (IV.18) se propageant librement dans un milieu linéaire. Dans cette configuration, la pression de Casimir est simplement donnée par :

$$P(L) \sim \frac{\epsilon_o I_o}{k^2} \gamma''(2L).$$

Pour $L \gg \sigma$, nous avons alors :

$$P(L \gg \sigma) \sim -\frac{\epsilon_o I_o}{(k\sigma)^2} \left(\frac{L}{\sigma}\right)^2 e^{-L^2/\sigma^2}$$

qui est très faible devant l'expression (IV.31) pour $\alpha \gtrsim 1$. En d'autres termes, que ce soit en terme d'amplitude ou d'universalité de la force de Casimir, il est bien plus intéressant d'envoyer une petite fluctuation et de laisser un milieu Kerr l'amplifier plutôt que de propager un faisceau présentant de grandes fluctuations dans un milieu linéaire.

Notons ici que nous avons quelque peu passé sous silence la physique induite par l'interférence entre l'extérieur et le milieu Kerr, à $z = 0$. Des simulations préliminaires réalisées par S. Pigeon semblent indiquer qu'à cette interface, la présence des plaques crée une petite perturbation au sein du fluide de lumière qui engendre la création de deux paires de particules de Bogoliubov. La moitié de ces fluctuations ainsi créées reste piégée au sein de la cavité et induit probablement une contribution répulsive à la pression sur les plaques. Nous n'avons pas étudié ici cette contribution, cependant en pratique elle peut être mesurée en propageant uniquement la composante stationnaire du faisceau et être ensuite soustraite de la pression mesurée en présence du speckle.

IV.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que lorsque l'on propage un faisceau lumineux faiblement incohérent spatialement dans un milieu Kerr, les fluctuations initiales acquièrent une nature phononique et sont rapidement amplifiées. Ce processus amène à l'émergence d'un régime de préthermalisation qui s'effectue à des échelles $z \sim z_{NL}$ (typiquement quelques millimètres en pratique). Il est caractérisé par une décroissance algébrique de la fonction de cohérence du faisceau, c'est-à-dire par un ordre à longue portée qui rappelle la physique des quasi-condensats dans le contexte des gaz quantiques en basse dimension. Ces éléments nous ont amené à considérer un tel système comme étant un bon candidat à l'émergence d'une force de Casimir. Nous avons ainsi pu obtenir l'expression de la pression de Casimir dans le régime de préthermalisation, où elle présente deux régimes différents : un régime répulsif non-universel à courte distance $L < \sigma$, et un régime attractif universel à longue distance $L > \sigma$.

Un point que nous n'avons pas abordé dans notre étude est l'influence du coefficient ε (l'amplitude relative des fluctuations initiales) sur la dynamique du faisceau. Le comportement de la fonction g_1 obtenu numériquement pour des valeurs croissantes de ε est représenté ici sur la figure IV.12. Cette figure met en évidence une transition, quand ε augmente, du régime préthermal (décroissance algébrique de g_1) vers un autre régime où g_1 décroît exponentiellement. Ce comportement rappelle là encore celui des gaz quantiques à basse dimension, qui passent d'un régime de quasi-condensat à basse température à un régime de gaz de bosons sans interaction (le coefficient ε joue ainsi le rôle d'une température effective du faisceau initial). Si ce régime à grand ε n'est clairement pas un bon candidat pour y étudier une pression de Casimir (les corrélations y étant de nouveau de courte portée), son étude ouvre des perspectives intéressante dans le cadre des fluides classiques ou quantiques hors-équilibre.

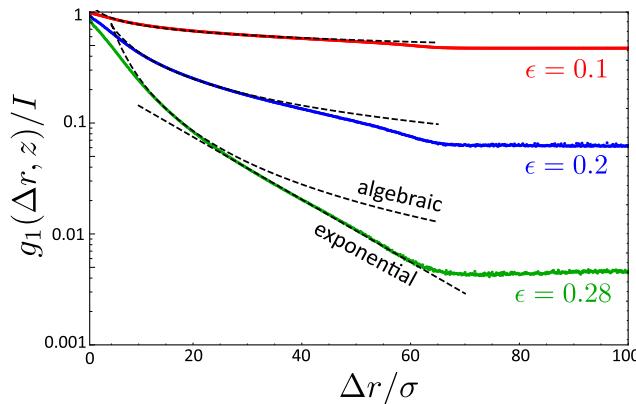


Fig. IV.12 Courbes de la fonction de cohérence obtenues pour des valeurs croissantes de ε à l'aide de la simulation numérique présentée dans la partie IV.2.3 (les autres paramètres sont les mêmes que ceux de la figure IV.8). Ces courbes mettent en évidence un nouveau régime de décroissance exponentielle lorsque ε est augmenté. Ici, le nombre de réalisations du speckle est $N = 2$ pour $\varepsilon = 0.1$, $N = 10^3$ pour $\varepsilon = 0.2$ et $N = 10^4$ pour $\varepsilon = 0.28$.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons vu qu'il était possible d'utiliser les propriétés de la lumière pour reproduire des phénomènes issus de la matière condensée ou des gaz quantiques. Pour cela, nous avons étudié la propagation de faisceaux lumineux dans deux milieux complexes différents : un désordre transverse dans lequel nous avons montré l'existence d'un effet Hall de spin optique, puis un milieu non-linéaire de type Kerr où nous avons mise en évidence une force de type Casimir induite par un quasi-condensat de lumière.

Dans un premier temps, l'étude de la propagation d'un faisceau lumineux au sein d'un désordre transverse au-delà de l'approximation paraxiale nous a permis d'y mettre en évidence un nouveau type d'effet Hall de spin optique. Nous avons en effet montré que la trajectoire du faisceau balistique dans un tel milieu subit un déplacement proportionnel à son hélicité et inversement proportionnel au nombre d'onde transverse. Cette dernière propriété est intéressante par rapport aux effets de couplage spin-orbite déjà connus dans la littérature qui font, eux, intervenir le nombre d'onde total. De plus, le nombre d'onde transverse peut être directement contrôlé en faisant varier l'angle d'incidence du faisceau dans le milieu. Cela constitue l'un des intérêts de cette configuration de désordre transverse. Cependant, le désordre implique également l'existence d'un phénomène de diffusion multiple au sein du milieu susceptible de masquer l'effet Hall de spin du faisceau balistique. Pour pouvoir contourner cette difficulté, nous avons proposé d'adapter une méthode polarimétrique, déjà utilisée pour étudier les effets de couplage spin-orbite, à notre configuration avec du désordre. Avec cette méthode, nos résultats suggèrent qu'une mesure de l'effet Hall de spin en présence de désordre est accessible. Notre étude constitue une première étape vers une approche plus systématique des interactions spin-orbite de la lumière en présence du désordre. Parmi les questions ouvertes, il serait intéressant de rechercher également des manifestations de l'effet Hall de spin dans le halo de diffusion multiple, que nous n'avons pas considéré dans cette thèse. Un autre phénomène intéressant à étudier est le régime de localisation d'Anderson dans lequel, en l'absence d'interaction spin-orbite, le centre de masse du faisceau s'annule [178]. Ce que devient ce phénomène en présence de l'effet Hall de spin reste à comprendre.

Dans la seconde partie de la thèse, nous avons considéré l'évolution de fluctuations au sein d'un fluide de lumière sans cavité, en étudiant la propagation d'un faisceau paraxial faiblement incohérent spatialement au sein d'un milieu Kerr. Dans ce système, nous avons dérivé la relation de dispersion de Bogoliubov pour les fluctuations et mis en évidence l'existence d'un domaine phononique qui conduit à l'amplification des fluctuations lors de la propagation dans le milieu Kerr. En étudiant, ensuite, les corrélations de ces fluctuations,

nous avons montré qu'elles présentent un régime de décroissance algébrique longue portée, caractéristique des quasi-condensats de Bose-Einstein en deux dimensions. Dans le cas du fluide de lumière généré par un laser, cependant, la propagation de la lumière correspond naturellement à une dynamique hors-équilibre. Dans ce cadre, la loi algébrique que nous avons obtenue se manifeste dans un régime quasi-stationnaire appelé préthermalisation. Dans ce régime, nous avons alors calculé la pression de Casimir s'exerçant sur deux plaques placées au sein du fluide. En particulier, nous avons montré que la décroissance algébrique des corrélations se traduit par une force de Casimir algébrique et universelle à grande distance. Cette pression peut être facilement modulée en jouant sur la non-linéarité du milieu, ce qui constitue un intérêt majeur de ce système. Notons que dans cette thèse, nous avons vu les limites de l'approximation de Bogoliubov pour décrire notre système, puisque celle-ci néglige les interactions entre les fluctuations. Explorer l'évolution dynamique de ces dernières au-delà de cette approximation est une première perspective qui émerge de cette thèse. Un autre question ouverte est la nature du régime préthermal au delà de la limite de faibles fluctuations initiales. En effet des résultats préliminaires mettent en évidence un *cross-over* vers un régime où les corrélations deviennent exponentielles lorsque l'amplitude des fluctuations initiales est augmentée. Ce comportement rappelle là encore celui des gaz quantiques en dimension deux, qui passent d'un état quasi-condensé à un état normal lorsque la température est augmentée.

Annexe A

Polarisabilité non-linéaire

Nous allons développer ici les calculs permettant d'obtenir les expressions de la polarisabilité (III.1), (III.2) que nous avons présenté dans la partie III.1. Dans toute cet annexe, nous omettons la dépendance spatiale afin d'alléger les expressions.

A.1 Deuxième ordre

Pour une réponse non-instantanée du milieu, le second ordre de la polarisabilité est donnée par l'expression complète [84] :

$$P_i^{(2)}(t) = \epsilon_0 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}(t_1, t_2) E_j(t - t_1) E_k(t - t_2).$$

En injectant dans cette équation la transformée de Fourier pour les champs électriques

$$E_i(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E_i(\omega) e^{-i\omega t},$$

nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned} P_i^{(2)}(t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \left[\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}(t_1, t_2) e^{+i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} \right] \\ &\quad \times E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}. \end{aligned}$$

Nous voyons alors apparaître la transformée de Fourier inverse de la susceptibilité que l'on définit par :

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2) = \int dt_1 \int dt_2 \chi_{ijk}^{(2)}(t_1, t_2) e^{+i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}.$$

La polarisabilité s'écrit alors :

$$P_i^{(2)}(t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega_2}{2\pi} \chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t}.$$

Si nous reprenons la définition de la transformée de Fourier :

$$P_i^{(2)}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} P_i^{(2)}(\omega) e^{-i\omega t},$$

nous pouvons identifier les termes $\omega = \omega_1 + \omega_2$ et nous retrouvons bien l'expression donnée dans l'équation (III.1) :

$$P_i^{(2)}(\omega) = \epsilon_o \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega}} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \omega_2; \omega = \omega_1 + \omega_2) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2).$$

Dans le chapitre III, nous avons simplifié l'écriture en notant $\chi^{(2)}(\omega_1, \omega_2; \omega = \omega_1 + \omega_2) \equiv \chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2)$.

A.2 Troisième ordre

Le troisième ordre de la susceptibilité est donné par [84] :

$$P_i^{(3)}(t) = \epsilon_o \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \int_0^t dt_3 \chi_{ijkl}^{(3)}(t_1, t_2, t_3) E_j(t - t_1) E_k(t - t_2) E_l(t - t_3).$$

De la même manière que précédemment, nous introduisons pour la susceptibilité la transformée de Fourier inverse :

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \int dt_1 \int dt_2 \int dt_3 \chi_{ijkl}^{(3)}(t_1, t_2, t_3) e^{+i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3)}$$

et nous obtenons l'expression pour la polarisabilité :

$$P_i^{(3)}(t) = \epsilon_o \int \frac{d\omega_1}{2\pi} \int \frac{d\omega_2}{2\pi} \int \frac{d\omega_3}{2\pi} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3) e^{-i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t}.$$

En identifiant à nouveau les termes tels que $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, nous obtenons l'expression donnée dans l'équation (III.2) :

$$P_i^{(3)}(\omega) = \epsilon_o \sum_{\substack{\omega_1, \omega_2, \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega}} \chi^{(3)}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) E_j(\omega_1) E_k(\omega_2) E_l(\omega_3).$$

Annexe B

Relation de Bogoliubov

Dans la section III.2.3, nous avons obtenu le système d'équations :

$$\begin{cases} \partial_z \delta I(\mathbf{r}_\perp, z) = -\frac{I_o}{k} \Delta \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) \\ \partial_z \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) = \frac{1}{4k} \frac{\Delta(\delta I(\mathbf{r}_\perp, z))}{I_o} - g \delta I(\mathbf{r}_\perp, z) . \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Pour résoudre ce système, nous passons dans l'espace des impulsions en utilisant :

$$\delta I(\mathbf{r}_\perp, z) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} ,$$

$$\theta'(\mathbf{r}_\perp, z) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \theta'(\mathbf{q}_\perp, z) e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} .$$

En injectant ces expressions dans le système (B.1), nous obtenons les équations :

$$\begin{cases} \partial_z \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) = +\frac{I_o}{k} \mathbf{q}_\perp^2 \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) \\ \partial_z \theta'(\mathbf{r}_\perp, z) = -\left(\frac{1}{4k} \frac{\mathbf{q}_\perp^2}{I_o} + g\right) \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) . \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport à z et en la combinant avec la seconde, nous obtenons alors :

$$\partial_z^2 \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) = -\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{k} \left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4k} + g I_o\right) \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) = -k_B^2(\mathbf{q}_\perp) \delta I(\mathbf{q}_\perp, z) .$$

Nous retrouvons ainsi la relation de Bogoliubov donnée dans l'équation (III.15) :

$$k_B(\mathbf{q}_\perp) = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{k} \left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{4k} + g I_o\right)}$$

Annexe C

Dérivation du tenseur de Maxwell

C.1 Dans un milieu linéaire

Si nous prenons l'expression de la force de Lorentz ([III.22](#)) et y injectons les équations de Maxwell, nous obtenons :

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\partial_t \mathbf{D}) \times \mathbf{B}. \quad (\text{C.1})$$

Nous allons commencer par considérer le terme contenant la dérivée temporelle. Celui-ci peut être réécrit :

$$(\partial_t \mathbf{D}) \times \mathbf{B} = \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times (\partial_t \mathbf{B}).$$

En utilisant l'équation de Maxwell $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, nous avons alors :

$$(\partial_t \mathbf{D}) \times \mathbf{B} = \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{D} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}). \quad (\text{C.2})$$

Cette formule contient deux doubles produits vectoriels qu'il est pratique d'exprimer à l'aide de la notation indicelle. Le produit vectoriel s'écrit alors :

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Levi-Civita. Nous avons ainsi :

$$[(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_i = \epsilon_{ijk}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})_j B_k = \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} (\partial_l B_m) B_k.$$

En utilisant la propriété du tenseur de Levi-Civita

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} = \delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km},$$

nous obtenons finalement :

$$[(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_i = B_k \partial_k B_i - B_k \partial_i B_k. \quad (\text{C.3})$$

En utilisant à nouveau la relation $\partial_k B_k = 0$, nous pouvons réécrire cette expression sous la forme :

$$[(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]_i = \partial_k \left(B_k B_i - \frac{B^2}{2} \delta_{ik} \right).$$

De la même manière, nous obtenons :

$$[\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = D_k \partial_i E_k - D_k \partial_k E_i .$$

Dans un milieu linéaire, nous avons :

$$\mathbf{D} = \epsilon_L \mathbf{E} ,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$[\mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i = \partial_k \left(\frac{\epsilon_L E^2}{2} \delta_{ik} - D_k E_i \right) + E_i \partial_k D_k . \quad (\text{C.4})$$

En regroupant les relations (C.1), (C.2), (C.3) et (C.4), nous obtenons finalement l'expression pour la force :

$$f_i = -\partial_k \left(\frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \delta_{ik} - D_k E_i + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_o} - \frac{1}{\mu_o} B_k B_i \right) - \partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i$$

d'où nous déduisons immédiatement le tenseur de Maxwell (III.26) par identification avec l'expression (III.21).

C.2 Dans un milieu Kerr

Pour un milieu Kerr, les équations (C.1), (C.2) et (C.3) sont toujours valides. Cependant, nous avons à présent :

$$\mathbf{D} = \epsilon_L \mathbf{E} + \epsilon_{NL} \langle E^2 \rangle_t \mathbf{E} .$$

Le calcul pour la partie linéaire est le même que précédemment, nous allons donc ici nous concentrer sur la partie non-linéaire :

$$D_j^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{NL} \langle E^2 \rangle_t E_j = \epsilon_{NL} \int \frac{dt'}{\tau} E_k(\mathbf{r}, t') E_k(\mathbf{r}, t') E_j(\mathbf{r}, t) .$$

Nous avons donc :

$$D_j^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \partial_i E_j(\mathbf{r}, t) = \epsilon_{NL} \langle E^2 \rangle_t E_j = \epsilon_{NL} \int \frac{dt'}{\tau} E_k(\mathbf{r}, t') E_k(\mathbf{r}, t') E_j(\mathbf{r}, t) \partial_i E_j(\mathbf{r}, t) .$$

Pour une onde monochromatique, nous avons :

$$E_j(\mathbf{r}, t_1) \partial_i E_j(\mathbf{r}, t_2) = E_j(\mathbf{r}, t_2) \partial_i E_j(\mathbf{r}, t_1) ,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\partial_i (D_j^{(NL)} E_j) = 4\epsilon_{NL} \int \frac{dt'}{\tau} E_k(\mathbf{r}, t') E_k(\mathbf{r}, t') E_j(\mathbf{r}, t) \partial_i E_j(\mathbf{r}, t) .$$

Nous obtenons ainsi :

$$D_j^{(NL)} \partial_i E_j = \frac{1}{4} \partial_i (D_j^{(NL)} E_j) .$$

Au final, nous avons donc l'expression pour la force :

$$f_i = -\partial_k \left(\left[\frac{\mathbf{D}^{(L)} \cdot \mathbf{E}}{2} + \frac{\mathbf{D}^{(NL)} \cdot \mathbf{E}}{4} \right] \delta_{ik} - \left[D_k^{(L)} + D_k^{(NL)} \right] E_i + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_o} - \frac{1}{\mu_o} B_k B_i \right) - \partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_i .$$

Par identification, nous obtenons alors le tenseur de Maxwell donné par l'équation (III.27).

C.3 Dans l'approximation paraxiale

Dans l'approximation paraxiale, nous écrivons :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{ikz - \omega_o z} \right\} \mathbf{e}_y .$$

Afin d'exprimer le tenseur de Maxwell, nous nous placerons également dans la jauge de Coulomb :

$$\mathbf{E} = -\partial_z \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} .$$

Nous avons alors :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{\omega_o} e^{ikz - \omega_o t} \right\} \mathbf{e}_y$$

et

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\partial_z \left[\operatorname{Im} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\omega_o} e^{i(kz - \omega_o t)} \right\} \right] \mathbf{e}_x + \partial_x \left[\operatorname{Im} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\omega_o} e^{i(kz - \omega_o t)} \right\} \right] \mathbf{e}_z .$$

Pour un champ électrique selon \mathbf{e}_y , l'élément diagonal T_{xx} du tenseur de Maxwell (III.27) est donné par :

$$T_{xx} = \frac{\epsilon_o}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_o} (B_z^2 - B_x^2) + \frac{\epsilon_{NL}}{4} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t \mathbf{E}^2$$

où nous avons ici considéré $\epsilon_L = \epsilon_o$ pour simplifier les équations. Nous nous intéressons ici à la moyenne temporelle du tenseur de Maxwell. Pour l'exprimer, nous utilisons :

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_t = \frac{|\mathcal{E}|^2}{2} ,$$

$$\langle B_z^2 \rangle_t = \frac{|\partial_x \mathcal{E}|^2}{2\omega_o^2} ,$$

$$\langle B_x^2 \rangle_t = -\frac{|\partial_z \mathcal{E} + ik\mathcal{E}|^2}{2\omega_o^2} = \frac{-1}{2\omega_o^2} \left[ik (\mathcal{E} \partial_z \mathcal{E}^* - \mathcal{E}^* \partial_z \mathcal{E}) + |\partial_z \mathcal{E}|^2 + k^2 |\mathcal{E}|^2 \right]$$

et

$$\epsilon_{NL} \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t = \epsilon_o \chi^{(3)} |\mathcal{E}|^2 .$$

Dans l'approximation paraxiale, le terme $|\partial_z^2 \mathcal{E}|^2$ est négligeable. Nous utilisons également les relations :

$$\mu_o \omega_o^2 = \frac{k^2}{\epsilon_o}$$

et

$$g = -\frac{k}{2} \epsilon_o \chi^{(3)}$$

qui nous permettent d'obtenir l'expression :

$$\langle T_{xx} \rangle_t = \frac{\epsilon_o |\partial_x \mathcal{E}|^2}{4k^2} - \frac{\epsilon_o}{2k} \operatorname{Im} (\mathcal{E}^* \partial_z \mathcal{E}) - \frac{g |\mathcal{E}|^4}{4k} .$$

Annexe D

Calcul de la force de Casimir dans le vide

D.1 Base (TE,TM)

Pour décrire les phénomènes de réflexion-transmission, on utilise la base (TE,TM) pour laquelle les vecteurs unitaires sont donnés par [25] :

$$\boldsymbol{\alpha}_{TE}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{TM}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix} \quad (\text{D.2})$$

En définissant les angles (θ, ϕ) tels que :

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}$$

D.2 Calcul de $\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle$

Nous cherchons ici à calculer :

$$\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} (\langle E_{\text{ext}}^2 \rangle - 2\langle E_{\text{ext},x}^2 \rangle) + \frac{1}{2\mu_0} (\langle B_{\text{ext}}^2 \rangle - 2\langle B_{\text{ext},x}^2 \rangle)$$

avec

$$\mathbf{E}_{\text{ext}} = \sum_m \left[\hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\alpha}_m^{(+)} + \hat{E}_{m,\text{out}}^{(-)} e^{i(\mathbf{k}^{(-)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\alpha}_m^{(-)} \right] + h.c.$$

où nous avons noté :

$$\hat{E}_{m,\text{in}}^{(\eta)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \hat{a}_m^{(\eta)}$$

avec $m = (\mathbf{k}, p)$. Nous rappelons que le champ \mathbf{E}_{out} est donné par :

$$\hat{E}_{m,\text{out}}^{(-)} = S_{21}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} + S_{22}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)}.$$

1- Terme $\langle \mathbf{E}_{\text{ext}}^2 \rangle$:

En utilisant les propriétés des opérateurs $\hat{a}_\mu^{(\eta)}$, nous avons :

$$\langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(\eta)} \hat{E}_{m',\text{in}}^{(\eta')} \rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V} \delta_{m,m'} \delta_{\eta,\eta'} \quad (\text{D.3})$$

et

$$\langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(\eta)} \hat{E}_{m',\text{in}}^{(\eta')} \rangle = \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(\eta)} \rangle = \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(\eta)} \rangle = 0. \quad (\text{D.4})$$

Nous écrivons ainsi :

$$\langle \mathbf{E}_{\text{ext}}^2 \rangle = \sum_m \left[(1 + |S_{21}^\mu|^2) \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} \rangle + |S_{22}^\mu|^2 \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)} \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)} \rangle \right] = \sum_\mu \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_o V} \left(1 + |S_{21}^m|^2 + |S_{22}^m|^2 \right).$$

L'unitarité de la matrice de scattering nous donne la propriété :

$$|S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$

ce qui nous donne finalement :

$$\langle \mathbf{E}_{\text{ext}}^2 \rangle = \sum_m \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_o V}$$

2- Terme $\langle E_{\text{ext},x}^2 \rangle$:

En utilisant les expressions des vecteurs de polarisation (D.1) et (D.2), nous voyons que seules les ondes TM interviennent ici avec une amplitude $\sin \theta$. Le reste du calcul est équivalent au précédent, nous obtenons donc :

$$\langle E_{\text{ext},x}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_m \frac{\hbar\omega}{\varepsilon_o V} \sin^2 \theta$$

La seule subtilité étant le facteur $1/2$, nécessaire car la somme sur les modes m contient toujours la somme sur les polarisations TE et TM.

3- Expression finale :

En sommant les deux résultats obtenus précédemment, nous obtenons l'expression :

$$\frac{\varepsilon_o}{2} \langle \mathbf{E}_{\text{ext}}^2 \rangle - \varepsilon_o \langle E_{\text{ext},x}^2 \rangle = \sum_m \frac{\hbar\omega}{2V} \left(1 - \sin^2 \theta \right) = \sum_m \frac{\hbar\omega}{2V} \cos^2 \theta.$$

Le calcul est exactement le même pour le champ magnétique et donne la même contribution. On a donc finalement :

$$\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle = \frac{1}{V} \sum_\mu \hbar\omega \cos^2 \theta,$$

qui est bien l'expression (IV.4).

D.3 Calcul de $\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle$

La calcul est très proche de celui développé pour $\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle$, avec cette fois-ci :

$$\mathbf{E}_{\text{cav}} = \sum_m \left[\hat{E}_{m,\text{cav}}^{(+)} e^{i(\mathbf{k}^{(+)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\alpha}_m^{(+)} + \hat{E}_{m,\text{cav}}^{(-)} e^{i(\mathbf{k}^{(-)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \boldsymbol{\alpha}_m^{(-)} \right] + h.c.$$

en rappelant :

$$\hat{E}_{m,\text{cav}}^{(+)} = R_{11}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} + R_{12}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)}$$

$$\hat{E}_{m,\text{cav}}^{(-)} = R_{21}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} + R_{22}^m \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)}.$$

En se servant toujours des expressions (D.3) et (D.4), nous avons à présent :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_{\text{cav}} \rangle &= \sum_m \left[(|R_{11}^m|^2 + |R_{21}^m|^2) \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)} \hat{E}_{m,\text{in}}^{(+)\dagger} \rangle + (|R_{12}^m|^2 + |R_{22}^m|^2) \langle \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)} \hat{E}_{m,\text{in}}^{(-)\dagger} \rangle \right] \\ &= \sum_m \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \left(|R_{11}^m|^2 + |R_{12}^m|^2 + |R_{21}^m|^2 + |R_{22}^m|^2 \right). \end{aligned}$$

Nous notons

$$\mathcal{G}_m = |R_{11}^m|^2 + |R_{12}^m|^2 + |R_{21}^m|^2 + |R_{22}^m|^2.$$

En utilisant l'expression (IV.3) de la matrice R , nous calculons assez facilement que :

$$\mathcal{G}_m = \frac{1 - |r_m|^2}{|1 - r_m e^{i|k_x|L}|^2}.$$

De la même façon que pour $\langle T_{xx}^{\text{ext}} \rangle$, nous obtenons alors l'expression :

$$\langle T_{xx}^{\text{cav}} \rangle = \frac{1}{V} \sum_m \hbar\omega \mathcal{G}_m \cos^2 \theta,$$

qui est bien l'expression (IV.5)

Annexe E

Fonction de corrélation de courant g_1^j

Nous avons introduit dans la partie IV.3, la fonction de corrélation de courant :

$$g_1^j(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) = \frac{2}{k_o} \text{Im} \langle \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \partial_z \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle$$

que nous allons rapidement étudier dans cet annexe.

E.1 Expression dans l'approximation de Bogoliubov

En utilisant le formalisme intensité-phase et l'approximation des fluctuations d'intensité faible, nous écrivons au premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(\mathbf{r}_\perp, z) \partial_z \mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) &\sim \left(\frac{\partial_z \delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z)}{2} + i \partial_z \theta \left[1 + \frac{\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z)}{2I_o} + \frac{\delta I(\mathbf{r}_\perp, z)}{2I_o} \right] \right) \\ &\quad \times \exp [i \Delta \theta(\Delta \mathbf{r}_\perp, z)] \end{aligned}$$

où nous avons noté $\Delta \theta(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) = \theta(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) - \theta(\mathbf{r}_\perp, z)$. En utilisant le théorème des probabilités de Wick tout comme pour l'expression de la fonction de cohérence, nous avons :

$$\langle X_1 e^{iX_2} \rangle = \langle X_1 X_2 \rangle e^{-\frac{\langle X_2^2 \rangle}{2}}.$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} g_1^j(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) &= \frac{1}{k_o} e^{-\frac{\langle \Delta \theta^2(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle}{2}} \{ \langle \partial_z \theta(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) [\delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) + \delta I(\mathbf{r}_\perp, z)] \rangle \\ &\quad + \langle \partial_z \delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \Delta \theta(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle \} \\ &\quad - \frac{1}{k_o} e^{-\langle \theta^2 \rangle} \{ \langle \partial_z \delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \theta(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle \\ &\quad \quad \langle \partial_z \theta(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \delta I(\mathbf{r}_\perp + \Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle \}. \end{aligned}$$

Les fluctuations d'intensité étant négligeables devant les fluctuations de phase pour $z \gg z_{NL}$, nous identifions

$$\exp \left(-\frac{\langle \Delta \theta^2(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) \rangle}{2} \right) \simeq \frac{g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z)}{I_o}$$

et

$$\exp\left(-\langle\theta^2(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle\right) = \frac{\langle\mathcal{E}(\mathbf{r}_\perp, z)\rangle^2}{I_o} = g_1(\Delta r_\perp \rightarrow +\infty, z).$$

En utilisant les expressions (IV.13) et (IV.14), nous obtenons finalement pour la fonction de corrélation de courant l'expression :

$$g_1^j(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) = g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z) [F(\Delta \mathbf{r}_\perp) + G(z)] - g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp \rightarrow +\infty, z)G(z) \quad (\text{E.1})$$

avec

$$\begin{aligned} F(\Delta \mathbf{r}_\perp) &= -\frac{\varepsilon^2}{k_o} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) \left(\frac{\mathbf{q}_\perp^2}{k_o} + 2gI_o \right) \cos(\mathbf{q}_\perp \cdot \Delta \mathbf{r}_\perp) \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{k_o} \left(-\frac{\nabla^2 \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp)}{k_o} + 2gI_o \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp) \right) \end{aligned}$$

et

$$G(z) = -2\varepsilon^2 \frac{gI_o}{k_o} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \gamma(\mathbf{q}_\perp) \left[1 - 2 \sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z) \right].$$

E.2 Contribution à la pression de Casimir

Nous nous concentrerons ici spécifiquement sur le régime $z \gg z_{NL}$. Dans cette limite, comme nous l'avons déjà vu dans la partie IV.2.1, le terme $\sin^2(k_B(\mathbf{q}_\perp)z)$ oscille rapidement et nous pouvons utiliser la valeur moyenne. La fonction $G(z)$ est alors négligeable, nous écrivons donc :

$$g_1^j(\Delta \mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \sim g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z)F(\Delta \mathbf{r}_\perp).$$

Nous voyons ainsi que celle-ci dépend principalement des corrélations initiales du speckle et est ainsi de courte portée. La fonction g_1^j contribue à la pression de Casimir uniquement pour des distances $\Delta r_\perp \lesssim \sigma$. Pour simplifier l'expression de la fonction $F(\Delta \mathbf{r}_\perp)$, nous utilisons le fait que :

$$\nabla^2 \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp) \sim \sigma^{-2} \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp),$$

or

$$\frac{2gI_o/k_o}{1/(k_o\sigma)^2} = \sigma^2 k_o g I_o = \left(\frac{\sigma}{\zeta}\right)^2 > 1,$$

la contribution principale à la fonction $F(\Delta \mathbf{r}_\perp)$ est ainsi :

$$F(\Delta \mathbf{r}_\perp) \sim -\varepsilon^2 \frac{2gI_o}{k_o} \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{1}{(k_o\zeta)^2} \gamma(\Delta \mathbf{r}_\perp).$$

De plus, à courte distance, nous avons :

$$g_1(\Delta \mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \sim I_o e^{-\varepsilon^2 \frac{\Delta \mathbf{r}_\perp^2}{16\zeta^2}}.$$

Nous obtenons alors l'expression :

$$g_1^j(\Delta \mathbf{r}_\perp, z \gg z_{NL}) \simeq -\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{I_o}{(k_o\zeta)^2} \exp\left[-\left(\frac{\Delta \mathbf{r}_\perp^2}{4\sigma^2} + \varepsilon^2 \frac{\Delta \mathbf{r}_\perp^2}{16\zeta^2}\right)\right].$$

La contribution à la pression de Casimir est alors donné par :

$$-\frac{\epsilon_o}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_1^j(\Delta x = 2L(n+1), \Delta y = 0, z \gg z_{NL}) \sim +\frac{\epsilon_o}{4} \frac{\varepsilon^2 I_o}{(k_o \zeta)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left[-n^2 L^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon^2}{4\zeta^2} \right) \right].$$

Dans la limite $L \rightarrow 0$, la somme est donnée par l'expression :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp \left[-n^2 L^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{\varepsilon^2}{4\zeta^2} \right) \right] \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{L \sqrt{1/\sigma^2 + \varepsilon^2/(4\zeta^2)}}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$-\frac{\epsilon_o}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_1^j(\Delta x = 2L(n+1), \Delta y = 0, z \gg z_{NL}) \sim \frac{\epsilon_o}{8} \frac{\varepsilon^2 I_o}{(k_o \zeta)^2} \frac{\sigma}{L} \sqrt{\frac{\pi}{1 + \varepsilon^2 \sigma^2 / (4\zeta^2)}}.$$

En comparaison, nous avons :

$$\frac{1}{k_o^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 g_1}{\partial (\Delta x)^2} \Big|_{\Delta x = 2L(n+1)} \simeq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_o}{k_o^2} \frac{\varepsilon^2}{8\zeta^2} \left(\frac{\varepsilon^2 n^2 L^2}{8\zeta^2} - 1 \right) \exp \left(-\frac{\varepsilon^2 n^2 L^2}{4\zeta^2} \right) \xrightarrow[L \rightarrow 0]{} \frac{\varepsilon^2 I_o}{16(k_o \zeta)^2}.$$

Pour $L \ll \sigma$, nous avons ainsi :

$$-\frac{\epsilon_o}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} g_1^j(\Delta x = 2L(n+1), \Delta y = 0, z \gg z_{NL}) \gg \frac{1}{k_o^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^2 g_1}{\partial (\Delta x)^2} \Big|_{\Delta x = 2L(n+1)}$$

ce qui nous amène à l'expression (IV.30).

Bibliographie

- [1] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN and E. A. CORNELL. «Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor». *Science* pp. 198–201 (1995).
- [2] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. J. VAN DRUTEN, D. S. DURFEE, D. KURN and W. KETTERLE. «Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms». *Physical Review Letters* **75**(22), 3969 (1995).
- [3] R. ONOFRIO, C. RAMAN, J. VOGELS, J. ABO-SHAER, A. CHIKKATUR and W. KETTERLE. «Observation of superfluid flow in a Bose-Einstein condensed gas». *Physical Review Letters* **85**(11), 2228 (2000).
- [4] M. GREINER, O. MANDEL, T. W. HÄNSCH and I. BLOCH. «Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate». *Nature* **419**(6902), 51–54 (2002).
- [5] I. B. SPIELMAN, W. D. PHILLIPS and J. V. PORTO. «Mott-insulator transition in a two-dimensional atomic Bose gas». *Physical Review Letters* **98**(8), 080404 (2007).
- [6] P. W. ANDERSON. «Absence of diffusion in certain random lattices». *Physical review* **109**(5), 1492 (1958).
- [7] G. ROATI, C. D'ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO and M. INGUSCIO. «Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate». *Nature* **453**(7197), 895–898 (2008).
- [8] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER and A. ASPECT. «Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder». *Nature* **453**(7197), 891–894 (2008).
- [9] G. LEMARIÉ, J. CHABÉ, P. SZRIFTGISER, J. C. GARREAU, B. GRÉMAUD and D. DELANDE. «Observation of the Anderson metal-insulator transition with atomic matter waves : Theory and experiment». *Physical Review A* **80**(4), 043626 (2009).
- [10] F. JENDRZEJEWSKI, A. BERNARD, K. MUELLER, P. CHEINET, V. JOSSE, M. PIRAUD, L. PEZZÉ, L. SANCHEZ-PALENCIA, A. ASPECT and P. BOUYER. «Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential». *Nature Physics* **8**(5), 398–403 (2012).
- [11] G. SEMEGHINI, M. LANDINI, P. CASTILHO, S. ROY, G. SPAGNOLLI, A. TRENK-WALDER, M. FATTORI, M. INGUSCIO and G. MODUGNO. «Measurement of the mobility edge for 3D Anderson localization». *Nature Physics* **11**(7), 554–559 (2015).

- [12] S. SKIPETROV and J. H. PAGE. «Red light for Anderson localization». *New Journal of Physics* **18**(2), 021001 (2016).
- [13] H. DE RAEDT, A. LAGENDIJK and P. DE VRIES. «Transverse localization of light». *Physical review letters* **62**(1), 47 (1989).
- [14] M. SEGEV, Y. SILBERBERG and D. N. CHRISTODOULIDES. «Anderson localization of light». *Nature Photonics* **7**(3), 197–204 (2013).
- [15] S. KARBASI, C. R. MIRR, P. G. YARANDI, R. J. FRAZIER, K. W. KOCH and A. MAFI. «Observation of transverse Anderson localization in an optical fiber». *Optics letters* **37**(12), 2304–2306 (2012).
- [16] K. BLIOKH, F. R.-F. NO, F. NORI and A. ZAYATS. «Spin-Orbit interactions of light». *Nature Photonics* **9**, 796–808 (2015).
- [17] J. KASPRZAK, M. RICHARD, S. KUNDERMANN, A. BAAS, P. JEAMBRUN, J. KEELING, F. MARCHETTI, M. SZYMAŃSKA, R. ANDRÉ, J. L. STAELI, V. SAVONA, P. LITTLEWOOD, B. DEVEAUD and L. S. DANG. «Bose-Einstein condensation of exciton polaritons». *Science* **443**, 409–414 (2006).
- [18] R. BALILI, V. HARTWELL, D. SNOKE, L. PFEIFFER and K. WEST. «Bose-Einstein Condensation of Microcavity Polaritons in a Trap». *Science* **316**(5827), 1007–1010 (2007).
- [19] SU, GHOSH, WANG, LIU, DIEDERICHS, LIEW and XIONG. «Observation of exciton polariton condensation in a perovskite lattice at room temperature». *Nature Physics* **16**(3), 301–306 (2020).
- [20] A. AMO, J. LEFRÈRE, S. PIGEON, C. ADRADOS, C. CIUTI, I. CARUSOTTO, R. HOUDRÉ, E. GIACOBINO and A. BRAMATI. «Superfluidity of polaritons in semiconductor microcavities». *Nature Physics* **5**(11), 805–810 (2009).
- [21] T. JACQMIN, I. CARUSOTTO, I. SAGNES, M. ABBARCHI, D. SOLNYSHKOV, G. MALPUECH, E. GALOPIN, A. LEMAÎTRE, J. BLOCH and A. AMO. «Direct observation of Dirac cones and a flatband in a honeycomb lattice for polaritons». *Physical review letters* **112**(11), 116402 (2014).
- [22] T. OZAWA, H. M. PRICE, A. AMO, N. GOLDMAN, M. HAFEZI, L. LU, M. C. RECHTSMAN, D. SCHUSTER, J. SIMON, O. ZILBERBERG ET AL. «Topological photonics». *Reviews of Modern Physics* **91**(1), 015006 (2019).
- [23] H. S. NGUYEN, D. GERACE, I. CARUSOTTO, D. SANVITTO, E. GALOPIN, A. LEMAÎTRE, I. SAGNES, J. BLOCH and A. AMO. «Acoustic black hole in a stationary hydrodynamic flow of microcavity polaritons». *Physical review letters* **114**(3), 036402 (2015).
- [24] L. D. LANDAU and L. P. PITAEVSKII. *Electrodynamics of Continuous Media*. Pergamon Press, Oxford, 2nde edition (1960).
- [25] J. D. JACKSON. *Classical electrodynamics*. Wiley, New-York (1962).
- [26] C. BOTTCHER. *Theory of Dielectric Polarization*, volume 1. Elsevier, Amsterdam, 2nde edition (1973).
- [27] P. VARGA and P. TÖRÖK. «The Gaussian wave solution of Maxwell's equations and the validity of scalar wave approximation». *Optics communications* **152**(1-3), 108–118 (1998).

- [28] H. KOGELNIK and T. LI. «Laser beams and resonators». *Applied optics* **5**(10), 1550–1567 (1966).
- [29] M. LAX, W. H. LOISELL and W. B. MCKNIGHT. «From Maxwell to paraxial wave optics». *Physical Review A* **11**(4), 1365 (1975).
- [30] P. VAVELIUK, B. RUIZ and A. LENCINA. «Limits of the paraxial approximation in laser beams». *Optics letters* **32**(8), 927–929 (2007).
- [31] G. P. AGRAWAL. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press (1995).
- [32] L. NOVOTNY and B. HECHT. *Principles of nano-optics*. Cambridge university press (2012).
- [33] G. D. BOYD and J. P. GORDON. «Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers». *Bell System Technical Journal* **40**(2), 489–508 (1961).
- [34] G. P. AGRAWAL and D. N. PATTANAYAK. «Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation». *JOSA* **69**(4), 575–578 (1979).
- [35] B. E. SALEH and M. C. TEICH. *Fundamentals of photonics*. John Wiley & Sons, New-York (1991).
- [36] J. ALDA. «Laser and Gaussian beam propagation and transformation». *Encyclopedia of optical engineering* **2013**, 999–1013 (2003).
- [37] D. NELSON. «Generalizing the Poynting vector». *Physical review letters* **76**(25), 4713 (1996).
- [38] S. M. BARNETT and L. ALLEN. «Orbital angular momentum and nonparaxial light beams». *Optics Communications* **110**(5-6), 670–678 (1994).
- [39] J. HUMBLET. «Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique». *Physica* **10**(7), 585–603 (1943).
- [40] A. M. YAO and M. J. PADGETT. «Orbital angular momentum : origins, behavior and applications». *Advances in Optics and Photonics* **3**(2), 161–204 (2011).
- [41] F. GOOS and H. HÄNCHEN. «Ein neuer und fundamentalen Versuch zur Totalreflexion». *Annalen der Physik* **1**(6), 333–346 (1947).
- [42] K. ARTMANN. «Berechnung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles». *Annalen der Physik* **2**(6), 87 (1948).
- [43] C. FRAGSTEIN and C. SCHAEFER. «Zur Strahlversetzung bei Reflexion.(Erwiderung an Herrn Artmann)». *Annalen der Physik* **447**(1-3), 84–88 (1953).
- [44] F. BRETENAKER, A. LE FLOC'H and L. DUTRIAUX. «Direct measurement of the optical Goos-Hänchen effect in lasers». *Physical review letters* **68**(7), 931 (1992).
- [45] R. H. RENARD. «Total Reflection : a New Evaluation of the Goos-Hänchen Shift». *Journal of the Optical Society of America* **54**(10), 1190 (1964).
- [46] F. I. FEDOROV. *Dokl. Akad. Nauk CCCP* **105**, 465 (1955).
- [47] C. IMBERT. «L'effet inertiel de spin du photon». *Nouvelle Revue d'Optique Appliquée* **3**(4), 199–208 (1972).
- [48] F. PILLOON, H. GILLES and S. GIRARD. «Experimental observation of the Imbert-Fedorov transverse displacement after a single total reflection». *Applied Optics* **43**(9), 1863 (2004).

- [49] K. Y. BLIOKH and A. AIELLO. «Goos-Hänchen and Imbert-Fedorov beam shifts : an overview». *Journal of Optics* **15**(1), 4001 (2013).
- [50] Y. GORODETSKI, K. Y. BLIOKH, B. STEIN, C. GENET and ET AL. «Weak measurements of light chirality with a plasmonic slit». *Physical Review Letters* **109**, 013901 (2012).
- [51] V. S. LIBERMAN and B. Y. ZEL'DOVICH. «Spin-orbit interaction of a photon in an inhomogeneous medium». *Physical Review A* **46**(8), 5199 (1992).
- [52] G. MAGNUS. «Über die Abweichung der Geschosse, und : Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern». *Annalen der Physik* **164**(1), 1–29 (1853).
- [53] A. V. DOOGHIN, N. D. KUNDIKOVA, V. S. LIBERMAN and B. Y. ZEL'DOVICH. «Optical Magnus effect». *Physical Review A* **45**(11), 8204 (1992).
- [54] K. BLIOKH, A. AIELLO and M. ALONSO. *The angular momentum of light*, chapter Spin-orbit interactions of light in isotropic media, p. 174. Cambridge University Press (2012).
- [55] M. BERRY. *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).
- [56] P. SHENG. *Introduction to wave scattering, localization and mesoscopic phenomena*, volume 88. Springer Science & Business Media (2006).
- [57] A. ISHIMARU. *Wave propagation and scattering in random media*, volume 2. Academic press New York (1978).
- [58] P. SEBBAH. *Waves and imaging through complex media*. Springer Science & Business Media (2001).
- [59] T. CHEN-TO. *Dyadic green functions in electromagnetic theory*. IEEE Press (1915).
- [60] A. LAGENDIJK and B. A. VAN TIGGELEN. «Resonant multiple scattering of light». *Physics Reports* **270**(3), 143–215 (1996).
- [61] E. AKKERMANS and G. MONTAMBAUX. *Mesoscopic Physic of Electrons and Photons*. Cambridge University, Cambridge (2011).
- [62] H. BETHE and E. SALPETER. «A Relativistic Equation for Bound-state Problems». *Physical Review* **84**(6), 1232 (1951).
- [63] M. J. STEPHEN and G. CWILICH. «Rayleigh scattering and weak localization : effects of polarization». *Physical Review B* **34**(11), 7564 (1986).
- [64] E. HALL. «On a New Action of the Magnet on Electric Currents». *American Journal of Mathematics* **2**(3), 287–292 (1879).
- [65] R. S. POPOVIC. *Hall effect devices*. CRC Press, 2nde edition (2003).
- [66] C. CHIEN. *The Hall effect and its applications*. Springer Science & Business Media, New-York (1980).
- [67] M. E. CAGE, K. KLITZING, A. CHANG, F. DUNCAN, M. HALDANE, R. LAUGHLIN, A. PRUISKEN and D. THOULESS. *The quantum Hall effect*. Springer Science & Business Media (2012).
- [68] J. HIRSCH. «Spin Hall Effect». *Physical Review Letters* **83**(9), 1834 (1999).
- [69] M. DYAKONOV. «Spin Hall Effect». *International Journal of Modern Physics B* **23**(12–13), 2556–2565 (2009).

- [70] J. SINOVA, S. O. VALENZUELA, J. WUNDERLICH, C. BACK and T. JUNGWIRTH. «Spin hall effects». *Reviews of Modern Physics* **87**(4), 1213 (2015).
- [71] Y. K. KATO, R. C. MYERS, A. C. GOSSARD and D. D. AWSCHALOM. «Observation of the spin Hall effect in semiconductors». *science* **306**(5703), 1910–1913 (2004).
- [72] K. Y. BLIOKH, A. NIV, V. KLEINER and E. HASMAN. «Geometrodynamics of spinning light». *Nature Photonics* **2**(12), 748 (2008).
- [73] C. LEYDER, M. ROMANELLI, J. P. KARR, E. GIACOBINO, T. C. LIEW, M. M. GLAZOV, A. V. KAVOKIN, G. MALPUECH and A. BRAMATI. «Observation of the optical spin Hall effect». *Nature Physics* **3**(9), 628–631 (2007).
- [74] O. HOSTEN and P. KWIAT. «Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements». *Science* **319**(5864), 787–790 (2008).
- [75] A. TOMITA and R. Y. CHIAO. «Observation of Berry’s topological phase by use of an optical fiber». *Physical review letters* **57**(8), 937 (1986).
- [76] M. BOGUSLAWSKI, S. BRAKE, D. LEYKAM, A. S. DESYATNIKOV and C. DENZ. «Observation of transverse coherent backscattering in disordered photonic structures». *Scientific Reports* **7**(1), 1–8 (2017).
- [77] N. CHERRORET. «Coherent multiple scattering of light in (2+ 1) dimensions». *Physical Review A* **98**(1), 013805 (2018).
- [78] R. BERKOVITS and S. FENG. «Correlations in coherent multiple scattering». *Physics Reports* **238**(3), 135–172 (1994).
- [79] Y. AHARONOV, D. Z. ALBERT and L. VAIDMAN. «How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100». *Physical review letters* **60**(14), 1351 (1988).
- [80] B. TAMIR and E. COHEN. «Introduction to weak measurements and weak values». *Quanta* **2**(1), 7–17 (2013).
- [81] J. DRESSEL, M. MALIK, F. M. MIATTO, A. N. JORDAN and R. W. BOYD. «Colloquium : Understanding quantum weak values : Basics and applications». *Reviews of Modern Physics* **86**(1), 307 (2014).
- [82] P. FRANKEN, A. HILL, C. PETERS and G. WEINREICH. «Generation of optical harmonics». *Physical Review Letters* **7**(4), 118 (1961).
- [83] D. F. G. G. MAYER A. «Action d’une Onde Lumineuse Intense». *Séance de l’Académie des Sciences* **258**(7), 2039 (1964).
- [84] R. W. BOYD. *Nonlinear Optics*. Academic Press (1992).
- [85] Y. SHEN. *The Principles of Nonlinear Optics*. New-York, Wiley-Interscience (1984).
- [86] D. VOCKE, T. ROGER, F. MARINO, E. M. WRIGHT, I. CARUSOTTO, M. CLERICI and D. FACCIO. «Experimental characterization of nonlocal photon fluids». *Optica* **2**(5), 484–490 (2015).
- [87] K. E. WILSON, N. WESTERBERG, M. VALIENTE, C. W. DUNCAN, E. M. WRIGHT, P. ÖHBERG and D. FACCIO. «Observation of photon droplets and their dynamics». *Physical Review Letters* **121**(13), 133903 (2018).

- [88] D. KLEINMAN. «Theory of second harmonic generation of light». *Physical Review* **128**(4), 1761 (1962).
- [89] G. MAGEL, M. FEJER and R. BYER. «Quasi-phase-matched second-harmonic generation of blue light in periodically poled LiNbO₃». *Applied Physics Letters* **56**(2), 108–110 (1990).
- [90] M. CAZZANELLI, F. BIANCO, E. BORGÀ, G. PUCKER, M. GHULINYAN, E. DEGOLI, E. LUPPI, V. VÉNIARD, S. OSSICINI, D. MODOTTO ET AL. «Second-harmonic generation in silicon waveguides strained by silicon nitride». *Nature materials* **11**(2), 148–154 (2012).
- [91] A. BERTHEREAU. *Les matériaux vitreux pour l'optique non linéaire : étude des verres à base d'oxyde de tellure a fort effet Kerr optique – le phénomène de génération de seconde harmonique dans un verre*. Matériaux, Université Sciences et Technologies – Bordeaux I (1995).
- [92] MAKER and TERHUNE. «Study of optical effects due to an induced polarization third order in the electric field strength». *Physical Review* **137**(3A), A801 (1965).
- [93] HAUCHECORNE, KERHERVE and MAYER. «Mesure des interactions entre ondes lumineuses dans diverses substances». *Journal de Physique* **32**(1), 47–62 (1971).
- [94] S. TRILLO, S. WABNITZ, R. STOLEN, G. ASSANTO, C. SEATON and G. STEGEMAN. «Experimental observation of polarization instability in a birefringent optical fiber». *Applied Physics Letters* **49**(19), 1224–1226 (1986).
- [95] G. GREGORI and S. WABNITZ. «New exact solutions and bifurcations in the spatial distribution of polarization in third-order nonlinear optical interactions». *Physical Review Letters* **56**(6), 600 (1986).
- [96] J. KERR. «XL. A new relation between electricity and light : Dielectrified media birefringent». *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **50**(332), 337–348 (1875).
- [97] E. VOGEL, M. WEBER and D. KROL. «Nonlinear optical phenomena in glass». *Physics and Chemistry of Glasses* **32**(6), 231–254 (1991).
- [98] G. VALLEY, M. SEGEV, B. CROSGNANI, A. YARIV, M. FEJER and M. BASHAW. «Dark and bright photovoltaic spatial solitons». *Physical Review A* **50**(6), R4457 (1994).
- [99] D. CLOSE. «Strong-field saturation effects in laser media». *Physical Review* **153**(2), 360 (1967).
- [100] C. MCCORMICK, D. SOLLI, R. CHIAO and J. HICKMANN. «Nonlinear absorption and refraction in near-detuned rubidium vapor». *JOSA B* **20**(12), 2480–2483 (2003).
- [101] M. O. ARAÚJO, H. L. D. S. CAVALCANTE, M. ORIÁ, M. CHEVROLLIER, T. P. DE SILANS, R. CASTRO and D. MORETTI. «Measurement of the Kerr nonlinear refractive index of Cs vapor». *Physical Review A* **88**(6), 063818 (2013).
- [102] I. CARUSOTTO and C. CIUTI. «Quantum fluids of light». *Review of Modern Physics* **85**, 299 (2013).
- [103] E. P. GROSS. «Structure of a quantized vortex in boson systems». *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **20**(3), 454–477 (1961).

- [104] L. P. PITAEVSKII. «Vortex lines in an imperfect Bose gas». *Sov. Phys. JETP* **13**(2), 451–454 (1961).
- [105] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. PITAEVSKII and S. STRINGARI. «Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases». *Reviews of Modern Physics* **71**(3), 463 (1999).
- [106] M. BRAMBILLA, L. LUGIATO, V. PENNA, F. PRATI, C. TAMM and C. WEISS. «Transverse laser patterns. II. Variational principle for pattern selection, spatial multistability, and laser hydrodynamics». *Physical Review A* **43**(9), 5114 (1991).
- [107] K. STALIUNAS. «Laser Ginzburg-Landau equation and laser hydrodynamics». *Physical Review A* **48**(2), 1573 (1993).
- [108] M. VAUPEL, K. STALIUNAS and C. WEISS. «Hydrodynamic phenomena in laser physics : modes with flow and vortices behind an obstacle in an optical channel». *Physical Review A* **54**(1), 880 (1996).
- [109] J. HOPFIELD. «Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals». *Physical Review* **112**(5), 1555 (1958).
- [110] N. ASHCROFT and N. MERMIN. «Introduction to Solid State Physics». *NY : Brooks Cole* (1976).
- [111] S. PIGEON. *Fluides quantiques et dispositifs à polaritons*. Physique mathématique, Université Paris-Diderot – Paris VII (2011).
- [112] Y. POMEAU and S. RICA. «Diffraction non linéaire». *Comptes rendus de l'Academie des sciences, Paris serie 2* **317**, 1287–1287 (1993).
- [113] T. FRISCH, Y. POMEAU and S. RICA. «Transition to dissipation in a model of superflow». *Physical Review Letters* **69**(11), 1644 (1992).
- [114] W. WAN, S. JIA and J. W. FLEISCHER. «Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics». *Nature Physics* **3**(1), 46–51 (2007).
- [115] M. ISOARD, A. KAMCHATNOV and N. PAVLOFF. «Wave breaking and formation of dispersive shock waves in a defocusing nonlinear optical material». *Physical Review A* **99**(5), 053819 (2019).
- [116] Q. FONTAINE, T. BIENAIMÉ, S. PIGEON, E. GIACOBINO, A. BRAMATI and Q. GLORIEUX. «Observation of the bogoliubov dispersion in a fluid of light». *Physical Review Letters* **121**(18), 183604 (2018).
- [117] P. LEBOEUF and S. MOULIERAS. «Superfluid motion of light». *Physical review letters* **105**(16), 163904 (2010).
- [118] O. BOUGHAD, C. MICHEL and M. BELLEC. «Experimental evidences of light superfluidity in a bulk nonlinear crystal». In «Nonlinear Photonics», pp. NpTh3C–5. Optical Society of America (2018).
- [119] C. MICHEL, O. BOUGHAD, M. ALBERT, P.-E. LARRÉ and M. BELLEC. «Superfluid motion and drag-force cancellation in a fluid of light». *Nature Communication* **9**, 2108 (2018).
- [120] L. PITAEVSKII and S. STRINGARI. *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford University Press (2016).

- [121] P.-E. LARRÉ, S. BIASI, F. RAMIRO-MANZANO, L. PAVESI and I. CARUSOTTO. «Pump-and-probe optical transmission phase shift as a quantitative probe of the Bogoliubov dispersion relation in a nonlinear channel waveguide». *The European Physical Journal D* **71**, 146 (2017).
- [122] D. PETROV. *Bose-Einstein condensation in low-dimensional trapped gases*. Ph.D. thesis, Universiteit van Amsterdam (2003).
- [123] J. DALIBARD. «Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless, cours au Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*».
- [124] Z. HADZIBABIC, P. KRÜGER, M. CHENEAU, B. BATTELIER and J. DALIBARD. «Berezinskii-Kosterlitz-Thouless crossover in a trapped atomic gas». *Nature* **441**(7097), 1118–1121 (2006).
- [125] Z. HADZIBABIC and J. DALIBARD. «Two-dimensional Bose fluids : An atomic physics perspective». *La Rivista del Nuovo Cimento* **34**, 389–434 (2011).
- [126] C. MORA and Y. CASTIN. «Extension of Bogoliubov theory to quasicondensates». *Physical Review A* **67**(5), 053615 (2003).
- [127] J. ROGEL-SALAZAR. «The Gross–Pitaevskii equation and Bose–Einstein condensates». *European Journal of Physics* **34**(2), 247 (2013).
- [128] D. VOCKE, T. ROGER, F. MARINO, E. WRIGHT, I. CARUSOTTO, M. CLERICI and D. FACCIO. «Experimental characterization of nonlocal photon fluids». *Optica* **2**(5), 484–490 (2015).
- [129] A. J. LEGGETT. «Bose-Einstein condensation in the alkali gases : Some fundamental concepts». *Reviews of Modern Physics* **73**(2), 307 (2001).
- [130] L. LANDAU. *J. Phys. (USSR)* **11**(91) (1947).
- [131] L. LANDAU. «On the theory of superfluidity». *Physical Review* **75**(5), 884 (1949).
- [132] J. DALIBARD. «Cohérence et superfluidité dans les gaz atomiques, cours au Collège de France, chaire *Atomes et rayonnement*».
- [133] J. DEVREESE and J. TEMPERE. «Superfluidity from He-4 to ultracold atomic condensed systems». *Physica C : Superconductivity* **479**, 36–40 (2012).
- [134] P.-E. LARRÉ and I. CARUSOTTO. «Optomechanical signature of a frictionless flow of superfluid light». *Physical Review A* **91**, 053809 (2015).
- [135] ABRAHAM. «On the electrodynamics of moving bodies». *Rend. Circ. Mat. Palermo* **28**, 1–28 (1909).
- [136] H. MINKOWSKI. «Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. 53–111 (1908)». *Math. Ann* **68**, 472–525 (1910).
- [137] J. P. GORDON. «Radiation forces and momenta in dielectric media». *Physical Review A* **8**(1), 14 (1973).
- [138] C. BAXTER and R. LOUDON. «Radiation pressure and the photon momentum in dielectrics». *Journal of Modern Optics* **57**(10), 830–842 (2010).
- [139] M. MANSURIPUR. «Resolution of the Abraham–Minkowski controversy». *Optics Communications* **283**(10), 1997–2005 (2010).

- [140] S. M. BARNETT. «Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma». *Physical review letters* **104**(7), 070401 (2010).
- [141] N. PAVLOFF. «Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle». *Physical Review A* **66**(1), 013610 (2002).
- [142] L. PITAEVSKII. «Why and when the Minkowski's stress tensor can be used in the problem of Casimir force acting on bodies embedded in media». *arXiv preprint cond-mat/0505754* (2005).
- [143] H. B. G. CASIMIR. *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793 (1948).
- [144] S. K. LAMOREAUX. «Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm range». *Physical Review Letters* **78**(1), 5 (1997).
- [145] U. MOHIDEEN and A. ROY. «Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μm ». *Physical Review Letters* **81**(21), 4549 (1998).
- [146] V. A. PARSEGIAN. *Van der Waals Forces : a Handbook for biologists, chemists, engineers, and physicists*. Cambrigde University Press (2005).
- [147] K. A. MILTON. «Resource Letter : Van der Waals and Casimir-Polder forces». *American Journal of Physics* **79**, 697 (2011).
- [148] L. M. WOODS, D. A. R. DALVIT, A. TKATCHENKO, P. RODRIGUEZ-LOPEZ, A. W. RODRIGUEZ and R. PODGORNIK. «Materials perspective on Casimir and Van der Waals interactions». *Reviews of Modern Physics* **88**(4), 045003 (2016).
- [149] A. LARAZZA, C. HOLMES and R. SUSBILLA. «The force between two parallel rigid plates due to the radiation pressure of broaband noise : an acoustic Casimir effect». *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, 2267 (1998).
- [150] M. E. FISHER and P. DE GENNES. «Wall phenomena in a critical binary mixture». *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie Des Sciences Série B* **287**(8), 207–209 (1978).
- [151] A. GAMBASSI. «The Casimir effect : From quantum to critical fluctuations». In «Journal of Physics : Conference Serie», , volume 161p. 012037 (2009).
- [152] C. HERTLEIN, L. HELDEN, A. GAMBASSI, S. DIETRICH and C. BECHINGER. «Direct measurement of critical Casimir forces». *Nature* **451**(7175), 172–175 (2008).
- [153] S. BISWAS, J. BHATTACHARJEE, D. MAJUMDER, K. SAHA and N. CHAKRAVARTY. «Casimir force on an interacting Bose-Einstein condensate». *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**(8), 085305 (2010).
- [154] M. JAECKEL and S. REYNAUD. «Casimir force between partially transmitting mirrors». *Journal de Physique I* **1**, 1395–1409 (1991).
- [155] S. REYNAUD and A. LAMBRECHT. «Vaccum energy and Casimir forces : an introduction, Summerschool *Frontiers in Casimir Physic*» (2012).
- [156] K. A. MILTON and M. BORDAG. *The Scattering Approach to the Casimir Force*.
- [157] J.-N. FUCHS. «Symmetries and quantum field theory : an introduction, lecture notes» (2017).
- [158] A. LAMBRECHT and S. REYNAUD. «Recent experiments on the Casimir effect : description and analysis». *Progress in Mathematical Physics* **30**, 109–126 (2003).

- [159] M. J. SPARNAAY. «Measurements of attractive forces between flat plates». *Physica* **24**(6-10), 751–764 (1958).
- [160] G. KLIMCHITSKAYA, U. MOHIDEEN and V. MOSTEPANENKO. «The Casimir force between real materials : Experiment and theory». *Reviews of Modern Physics* **81**(4), 1827 (2009).
- [161] T. UENO, S. BALIBAR, T. MIZUSAKI, F. CAUPIN and E. ROLLEY. «Critical Casimir effect and wetting by helium mixtures». *Physical review letters* **90**(11), 116102 (2003).
- [162] M. KRECH and S. DIETRICH. «Specific heat of critical films, the Casimir force, and wetting films near critical end points». *Physical Review A* **46**(4), 1922 (1992).
- [163] A. GAMBASSI, A. MACIOŁEK, C. HERTLEIN, U. NELLEN, L. HELDEN, C. BECHINGER and S. DIETRICH. «Critical Casimir effect in classical binary liquid mixtures». *Physical Review E* **80**(6), 061143 (2009).
- [164] A. GANSHIN, S. SCHEIDEMANTEL, R. GARCIA and M. H.-W. CHAN. «Critical Casimir Force in He 4 Films : Confirmation of Finite-Size Scaling». *Physical review letters* **97**(7), 075301 (2006).
- [165] A. HUCHT. «Thermodynamic Casimir Effect in He 4 Films near $T \lambda$: Monte Carlo Results». *Physical review letters* **99**(18), 185301 (2007).
- [166] D. ROBERTS and Y. POMEAU. «Casimir-like force arising from quantum fluctuations in a slowly moving dilute Bose-Einstein condensate». *Physical review letters* **95**(14), 145303 (2005).
- [167] D. ROBERTS. «Force on a moving point impurity due to quantum fluctuations in a Bose-Einstein condensate». *Physical Review A* **74**(1), 013613 (2006).
- [168] M. SCHECTER and A. KAMENEV. «Phonon-mediated casimir interaction between mobile impurities in one-dimensional quantum liquids». *Physical review letters* **112**(15), 155301 (2014).
- [169] B. REICHERT, Z. RISTIVOJEVIC and A. PETKOVIĆ. «The Casimir-like effect in a one-dimensional Bose gas». *New Journal of Physics* **21**(5), 053024 (2019).
- [170] C. J. PETHICK and H. SMITH. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge university press (2008).
- [171] S. NAZARENKO, M. ONORATO and D. PROMENT. «Bose-Einstein condensation and Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in the two-dimensional nonlinear Schrödinger model». *Physical Review A* **90**(1), 013624 (2014).
- [172] J. BERGES, S. BORSÁNYI and C. WETTERICH. «Prethermalization». *Physical review letters* **93**(14), 142002 (2004).
- [173] M. GRING, M. KUHNERT, T. LANGEN, T. KITAGAWA, B. RAUER, M. SCHREITL, I. MAZETS, D. A. SMITH, E. DEMLER and J. SCHMIEDMAYER. «Relaxation and prethermalization in an isolated quantum system». *Science* **337**(6100), 1318–1322 (2012).
- [174] S. TROTZKY, Y.-A. CHEN, A. FLESCH, I. P. MCCULLOCH, U. SCHOLLWÖCK, J. EISERT and I. BLOCH. «Probing the relaxation towards equilibrium in an isolated strongly correlated one-dimensional Bose gas». *Nature physics* **8**(4), 325–330 (2012).

- [175] G. I. MARTONE, P.-É. LARRÉ, A. FABBRI and N. PAVLOFF. «Momentum distribution and coherence of a weakly interacting Bose gas after a quench». *Physical Review A* **98**(6), 063617 (2018).
- [176] R. KUHN. *Coherent Transport of Matter Waves in Disordered Optical Potentials*. Theses, Université Nice Sophia Antipolis (2007).
URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00717232>
- [177] T. R. TAHA and M. I. ABLOWITZ. «Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation». *Journal of Computational Physics* **55**(2), 203–230 (1984).
- [178] T. PRAT, D. DELANDE and N. CHERRORET. «Quantum boomeranglike effect of wave packets in random media». *Physical Review A* **99**(2), 023629 (2019).

Sujet : Propagation de la lumière en milieu complexe : effet Hall de spin optique en présence de désordre et force de Casimir en milieu Kerr

Résumé : Dans cette thèse, nous étudions théoriquement la propagation de faisceaux lumineux dans deux types de milieux complexes où une inhomogénéité d'indice non triviale est présente. Le premier est un milieu présentant du désordre spatial dans un plan transverse à l'axe optique. Dans ce système, nous montrons qu'un faisceau collimaté polarisé non paraxial exhibe un effet Hall de spin optique, analogue à celui observé dans les solides pour les électrons sujets à une interaction spin-orbite. Le second est un milieu Kerr dont l'inhomogénéité d'indice est induite par un faisceau lumineux incident présentant de petites fluctuations spatiales dans son profil de champ. Dans cette configuration, nous montrons que les fluctuations initiales sont amplifiées par le milieu Kerr et acquièrent des corrélations à longue portée. Nous décrivons enfin comment ce phénomène peut être avantageusement utilisé pour générer une force de type Casimir, universelle et contrôlable. Ces résultats constituent deux illustrations de la possibilité de réaliser des analogues optiques de phénomènes habituellement rencontrés dans les systèmes de la matière condensée ou dans les fluides quantiques, dans une configuration expérimentale relativement simple.

Mots clés : Optique non-linéaire, Ondes en milieu désordonné, Interaction spin-orbite de la lumière, Effet Hall de spin optique, Milieu Kerr, Fluide de lumière, Quasi-condensat, Force de Casimir

Subject : Light propagation in complex media : optical spin-Hall effect in the presence of disorder and Casimir force in Kerr media

Abstract: In this thesis, we theoretically explore the propagation of light beams in two types of complex media where a non trivial refractive-index inhomogeneity shows up. The first one in a medium displaying spatial disorder in a plane transverse to the optical axis. In this system, we demonstrate that a polarized, collimated nonparaxial beam exhibits an optical spin-Hall effect, analogous to the one usually observed in solids for electrons subjected to a spin-orbit coupling. The second one is a Kerr medium where the index inhomogeneity is induced by a light beam exhibiting small spatial fluctuations. In this configuration, we show that the initial fluctuations are amplified by the medium and acquire long-range correlations. We finally describe how this phenomenon can be used to advantageously generate a universal and tunable Casimir-like force. These results illustrate the possibility to achieve optical counterparts of phenomena usually arising in condensed-matter systems or in quantum fluids, within a relatively simple experimental configuration.

Keywords : Nonlinear optics, Waves in disordered media, Spin-orbit interactions of light, Optical spin-Hall effect, Kerr medium, Fluid of light, Quasi-condensate, Casimir force