TP1 : Résolution numérique de problèmes elliptiques avec conditions de Neumann avec des éléments finis P^1

21 septembre 2017

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists\, 0 < c < C,\ \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad c|\xi|^2 \leq A(x,y)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \tag{1}$$

où n est la normale unitaire sortante à Ω

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et vérifier que le problème est bien posé.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Question 2. Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ?

Question 3. Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}\,, \tag{2}$$

de solution le vecteur $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ dont la $I^{\text{ème}}$ composante vaut $u_h(S_I)$. Ci-dessus, $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité.

Pour résoudre ce problème, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2).

1 Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω qui est carré.

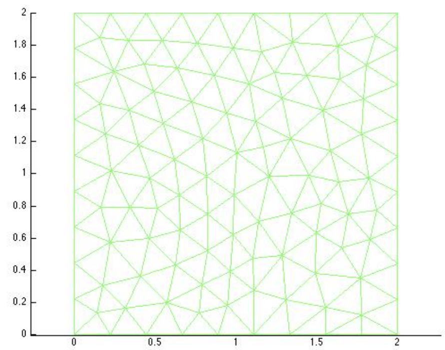

FIGURE 1 – Domaine Ω.

Pour mailler Ω, on choisit le mailleur `Gmsh`. Pour réaliser les calculs, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2).

Question 4. Pour créer des maillages de l'ouvert carré, voici la procédure à suivre :
- — Modifier le fichier `geomCarre.geo` en l'ouvrant avec un éditeur de texte. Par exemple, pour changer le pas du maillage, modifier la valeur de h. Enregistrer les changements.
- — Lancer `Gmsh` dans un terminal et ouvrir le fichier `geomCarre.geo`.
- — Dans la fenêtre `Gmsh`, menu du haut, choisir "`Mesh`". Cliquer ensuite sur "`2D`".
- — Pour sauvegarder le maillage ainsi créé, choisir "`Save Mesh`" dans le menu "`File`".

Un fichier `geomCarre.msh` a été créé.

Attention : le nom du fichier maillage `.msh` est *par défaut* celui du fichier géométrie `.geo`.

Question 5. La routine `lecture_msh.m` permet de lire et de récupérer les données du maillage. Les données de sortie sont

`Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ?

Les données `Refneu,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ne seront pas utilisées pour l'instant. Afficher le maillage précédemment créé à l'aide de la routine `affichemaillage.m`.

2 Calcul des Matrices élémentaires, cas constant

On considère pour l'instant le cas où $A = 1$.

Pour calculer les matrices élémentaires sur un triangle, on peut utiliser les formules ci-dessous. Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, et $S_3(x_3, y_3)$, nous pouvons utiliser les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \text{aire}(T_\ell) \, F\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^0.$$

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3}\ (F(S_1)+F(S_2)+F(S_3)) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^1.$$

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3}\ \left(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_1+S_3}{2}) + F(\frac{S_3+S_2}{2}))\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^2.$$

Question 6. En déduire pour tout triangle T_ℓ, et toutes fonctions de base w_I et w_J, les intégrales

$$\int_{T_\ell} w_I w_J\, d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{T_\ell} \nabla w_I \cdot \nabla w_J\, d\Omega$$

On rappelle que les fonctions de base locales sont égales aux coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3. En un point (x, y) du triangle, celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x-x_3) - x_{23}(y-y_3)) \\
\lambda_2(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1)) \\
\lambda_3(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x-x_2) - x_{12}(y-y_2))
\end{aligned}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ pour i et j différents dans $\{1,2,3\}$, et $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$. Notons que D est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle.

Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ et $S_3(x_3, y_3)$. Compléter les routines `matK_elem.m` et `matM_elem.m` qui à partir des coordonnées des 3 sommets d'un triangle donnent respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

Il est conseillé de vérifier le calcul des matrices élémentaires en le comparant à un calcul fait à la main pour le triangle de référence (composé des sommets $(0,0)$*,* $(1,0)$ *et* $(0,1)$*).*

3 Assemblage des matrices

On rappelle l'algorithme d'assemblage

$\mathbb{M} = 0$, $\mathbb{K} = 0$
Pour $\ell = 1, L$
  Détermination des coordonnées des sommets du triangle ℓ
  Calcul des contributions élémentaires $\mathbb{M}^\ell$, $\mathbb{K}^\ell$
  Pour $i = 1, 3$
    $I = \text{local} \to \text{global}(\ell, i)$
    Pour $j = 1, 3$
      $J = \text{local} \to \text{global}(\ell, j)$
      $\mathbb{M}_{IJ} = \mathbb{M}_{IJ} + \mathbb{M}^\ell_{ij}$ et $\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}^\ell_{ij}$
    Fin pour j
  Fin pour i
Fin pour ℓ

Question 8. Compléter la partie assemblage des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$.

Question 9. Calcul du second membre

Question 9(a) On suppose dans un premier temps que $f = 1$. En remarquant que $1 \in V_h$, calculer le vecteur second membre $\vec{L}$ à partir de la matrice de masse $\mathbb{M}$ et d'un vecteur calculé dans la routine `f.m`.

Question 9(b) Rappeler l'expression du second membre $\vec{L}$ pour une donnée générale $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. En approchant la donnée f par son interpolation $\pi_h f$ dans la base $(w_I)_{I=1,N}$, donner une approximation du second membre $\vec{L}$ faisant intervenir la matrice de masse.

On admettra que quand on remplace f par son interpolée $\pi_h f$ de V_h, l'approximation par des éléments finis P^1 du problème n'est pas altérée.

4 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A = 1$ et une solution u connue égale à $u(x, y) = \cos(\pi x)\,\cos(2\pi y)$, pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

Question 10. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 11. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse $\mathbb{M}$. Comment évolue cette erreur en fonction de h ? On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)$ pour différentes valeurs de h.

Question 12. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$, faisant intervenir la matrice de rigidité $\mathbb{K}$. Comment évolue cette erreur en fonction de h ? On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(|u - u_h|_1/|u|_1\big)$ pour différentes valeurs de h.

5 Calcul des Matrices élémentaires, cas variable

On considère maintenant le cas général $A = A(x, y)$.

Une nouvelle difficulté apparait dans le calcul des matrices élémentaires : la prise en compte des coefficients variables. En effet, les intégrales

$$\int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous allons approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour F une fonction continue par morceaux de T_ℓ

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N} \omega_\ell^q F(M_\ell^q).$$

où M_ℓ^q sont des points de quadrature dans T_ℓ et ω_ℓ^q les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné , ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

$\hat{M}^q$	$(1/3, 1/3)$	$(1/5, 1/5)$	$(1/5, 3/5)$	$(1/5, 3/5)$
$\hat{\omega}^q$	$-9/32$	$25/96$	$25/96$	$25/96$

Pour chaque triangle T_ℓ, nous allons utiliser la transformation géométrique F_ℓ qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans T_ℓ. En effectuant le changement de variable $M = F_\ell(\hat{M})$, l'intégrale sur T_ℓ devient

$$(3) \quad \int_{T_\ell} A(M) \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) \, d\Omega =$$
$$\int_{\hat{T}} A(F_\ell(\hat{M}))[dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1} \nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1} \nabla \hat{w}_J(\hat{M}) \, |\det dF_\ell(\hat{M})| \, d\hat{\Omega}$$

où $dF_\ell(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$.

Question 13. À l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

Question 14. Valider le calcul de la matrice élémentaire dans le cas où A est l'identité puis seulement diagonale, pour le triangle de référence puis pour un triangle quelconque. On pourra comparer au calcul de la matrice élémentaire fait précédemment.

6 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec $A(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + 2$ une solution u que vous choisirez.

Question 15. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 16. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ et $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u - u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de h.

Question 17. Représenter la solution dans le cas d'un terme source quelconque et $A(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + 2$, $\sin(\pi x) \sin(\pi y) + 2$, $\sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2) + 2$, $\sin(\pi x/4) \sin(\pi y/4) + 2$, $\sin(\pi x/8) \sin(2\pi y/8) + 2$. Commenter.