La méthode FeHMM : présentation et mise en oeuvre

1 décembre 2016

Nous cherchons dans ce TP à implémenter la méthode appelée Finite Element Heterogeneous Multiscale Method (FeHMM) qui permet d'approcher la solution d'une très grande classe de problèmes dans des milieux hétérogènes ! Si on veut calculer numériquement cette solution, il faudrait que le pas de maillage soit plus petit que la taille des hétérogénéités. Si la taille des hétérogénéités est très petite devant la taille du domaine, le coût de calcul peut devenir très important, voire prohibitif. Comme nous l'avons vu en cours, dans le cas d'un problème de type Poisson où les coefficients sont périodiques, la solution a un comportement macroscopique ou effectif quand la période est petite. D'ailleurs ce comportement macroscopique peut être déduit d'un problème homogénéisé dont les coefficients sont calculés à partir de la résolution de problèmes de cellule. En réalité, même quand les coefficients ne sont pas périodiques, la solution a ce type de comportement macroscopique. L'objectif de la méthode FeHMM est de calculer numériquement ce comportement effectif sans avoir à résoudre le problème avec un maillage très fin et cela pour des milieux très généraux. En d'autres termes, l'algorithme est général et marche que le milieu soit périodique, quasi-périodique,...

Nous considérons dans ce TP la solution du problème variationnel suivant

Trouver $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(1) \qquad \int_\Omega A_\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, A_ε un tenseur caractéristique du matériau qui satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme. Nous allons décrire la méthode FeHMM dans le cas *quasi-périodique* correspondant au cas où A_ε est de la forme

$$A_\varepsilon(x) = A(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

avec $x = (x_1, x_2)$, A un tenseur $1-$périodique par rapport à sa deuxième variable. Le cas *périodique* où A_ε vérifie

$$A_\varepsilon(x) = A(\frac{x}{\varepsilon})$$

avec A un tenseur $1-$périodique est un cas particulier du cas quasi-périodique. Dans le cas quasi-périodique, l'analyse numérique de la méthode FeHMM peut se faire simplement.

La méthode s'étend également au cas général $A_\varepsilon(x)$ où on ne connait pas a priori ε mais on suppose connaitre seulement un ordre de grandeur de ε. Cependant l'analyse numérique est plus complexe.

1 Principe de la méthode

1.1 Extension des résultats de l'homogénéisation au cas quasi-périodique

Dans le cas périodique, on a vu dans le cours que quand ε tend vers 0, u_ε converge fortement dans L^2 et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une fonction u^{eff} solution de :

Trouver $u^{\text{eff}} \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega A^{\text{eff}} \nabla u^{\text{eff}}(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2}$$

où le tenseur effectif A^{eff} est donné par

$$A^{\text{eff}}_{jk} = \int_Y A(y)(e_k + \nabla_y w_k(y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(y))\, dy$$

où w_1 et w_2 sont solutions des problèmes de cellule suivants :

pour $i \in \{1, 2\}$, trouver $w_i \in V$ telle que

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y A(y)\, \nabla_y w_i(y) \cdot \nabla_y \phi(y)\, dy = -\int_Y A(y)\, e_i \cdot \nabla_y \phi(y)\, dy \tag{3}$$

où $Y = (-1/2, 1/2)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et

$$V = \{\psi \in H^1_\#(Y),\ \int_Y \psi(y)\, dy = 0\}.$$

On admettra dans la suite que ce résultat s'étend au cas quasi-périodique sous des hypothèses sur A_ε que nous ne détaillerons pas ici. Ainsi on peut montrer que, quand ε tend vers 0, u_ε converge fortement dans L^2 et faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers u^{eff}, solution du problème suivant :

Trouver $u^{\text{eff}} \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega A^{\text{eff}}(x) \nabla u^{\text{eff}}(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

où le tenseur effectif $A^{\text{eff}}(x)$ dépend de la variable macroscopique x et est donné par

$$\text{Pour p.p. } x, \quad A^{\text{eff}}_{jk}(x) = \int_Y A(x, y)(e_k + \nabla_y w_k(x, y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(x, y))\, dy$$

où pour presque tout x, $w_1(x, \cdot)$ et $w_2(x, \cdot)$ sont solutions des problèmes de cellule suivants :

Pour $i \in \{1, 2\}$, trouver $w_i(x, \cdot) \in V$ telle que

$$\forall \phi \in V, \quad \int_Y A(x, y)\, \nabla_y w_i(x, y) \cdot \nabla_y \phi(y)\, dy = -\int_Y A(x, y)\, e_i \cdot \nabla_y \phi(y)\, dy. \tag{5}$$

Il y aurait donc pour chaque point de Ω, deux problèmes de cellule à résoudre !

1.2 Idées de la méthode

On cherche à calculer une approximation numérique de la solution du problème effectif (4). Pour cela, on introduit $\mathcal{T}_H$ une triangulation du domaine Ω, et V_H l'approximation de $H_0^1(\Omega)$ par des éléments finis P^ℓ d'ordre ℓ associés à la triangulation $\mathcal{T}_H$. Le problème variationnel discrétisé devient

Trouver $u_H^{\text{eff}} \in V_H$ telle que

$$(6) \qquad \int_\Omega A^{\text{eff}}(x)\nabla u_H^{\text{eff}}(x) \cdot \nabla v_H(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v_H(x)\, dx \quad \forall v_H \in V_H.$$

Comme on ne peut pas espérer avoir une expression analytique de $A^{\text{eff}}(x)$ pour tout point x, on utilise une formule de quadrature. Le problème approché devient

Trouver $u_H^{\text{eff}} \in V_H$ telle que

$$(7) \qquad \sum_{T\in\mathcal{T}_H} \sum_{k=1}^{K} \omega_{T,k}\, A^{\text{eff}}(x_{T,k})\nabla u_H^{\text{eff}}(x_{T,k}) \cdot \nabla v_H(x_{T,k}) = \int_\Omega f(x) v_H(x)\, dx \quad \forall v_H \in V_H$$

On sait que pour résoudre un tel problème, il suffit de prendre comme fonction test v_H, les fonctions de base $(w_i)_{i=1,N}$ définie par $w_i(S_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le N$ où dans le cas des EF d'ordre 1, les points S_i sont les sommets des triangles de $\mathcal{T}_H$. Il faut également décomposer u_H^{eff} dans cette même base. Pour assembler la matrice de rigidité, on calcule pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_H$ la matrice de rigidité élémentaireoù interviennent les termes suivants

$$(8) \qquad \forall i, j, \quad \sum_{k=1}^{K} \omega_{T,k} A^{\text{eff}}(x_{T,k})\nabla w_j(x_{T,k}) \cdot \nabla w_i(x_{T,k}).$$

Là, on pourrait utiliser directement le calcul des solutions des problèmes de cellule (5) au point $x = x_{T,j}$. On va cependant aller un peu plus loin et vous montrer comment on peut calculer plus directement les termes (8) qui nous intéressent. Cette méthode de calcul se généralise à des cas plus généraux que le cas quasi-périodique.

On rappelle que pour tout $\bar{x}$ fixé, $A^{\text{eff}}(\bar{x})$ est donné par

$$A_{jk}^{\text{eff}}(\bar{x}) = \int_Y A(\bar{x}, y)(e_k + \nabla_y w_k(\bar{x}, y)) \cdot (e_j + \nabla_y w_j(\bar{x}, y))\, dy.$$

Question 1. En effectuant le changement de variable $y = x/\varepsilon$ avec $x \in Y_\varepsilon = (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)^2$ et en posant $\eta_i(\bar{x}, x/\varepsilon) = \varepsilon w_i(\bar{x}, x/\varepsilon)$, montrer que

$$A_{jk}^{\text{eff}}(\bar{x}) = \frac{1}{|Y_\varepsilon|} \int_{Y_\varepsilon} A(\bar{x}, x/\varepsilon)(e_k + \nabla_x \eta_k(\bar{x}, x/\varepsilon)) \cdot (e_j + \nabla_x \eta_j(\bar{x}, x/\varepsilon))\, dx.$$

Question 2. En posant $Y_\varepsilon(\bar{x}) = \bar{x} + (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)^2$, montrer que

$$A_{jk}^{\text{eff}}(\bar{x}) = \frac{1}{|Y_\varepsilon(\bar{x})|} \int_{Y_\varepsilon(\bar{x})} A(\bar{x}, x/\varepsilon)(e_k + \nabla_x \tilde{\eta}_k(\bar{x}, x/\varepsilon)) \cdot (e_j + \nabla_x \tilde{\eta}_j(\bar{x}, x/\varepsilon))\, dx$$

où $\tilde\eta_j(\bar x, x/\varepsilon)) = \varepsilon w_i(\bar x, (x-\bar x)/\varepsilon)$ pour $x \in Y_\varepsilon(\bar x)$ est solution du problème de micro-cellule autour de $\bar x$:

Pour $i \in \{1,2\}$, trouver $\tilde\eta_i(\bar x, \cdot/\varepsilon) \in V_\varepsilon(\bar x)$ telle que

$$(9)\ \ \forall \phi \in V_\varepsilon(\bar x), \quad \int_{Y_\varepsilon(\bar x)} A(\bar x, x/\varepsilon)\,\nabla_x \tilde\eta_i(\bar x, x/\varepsilon)\cdot\nabla_x\phi(x)\,dx = -\int_{Y_\varepsilon(\bar x)} A(\bar x, x/\varepsilon)\,e_i\cdot\nabla_x\phi(x)\,dx$$

$$V_\varepsilon(\bar x) = \{\psi \in H^1_\#(Y_\varepsilon(\bar x)),\ \int_{Y_\varepsilon(\bar x)} \psi(x)\,dx = 0\}.$$

Revenons maintenant au terme qui nous intéresse

$$A^{\mathrm{eff}}(x_{T,k})\nabla w_j(x_{T,k})\cdot\nabla w_i(x_{T,k}).$$

Question 2. Appliquer ce que nous venons de trouver à $\bar x = x_{T,k}$ et montrer que le terme qui nous intéresse est egal à

$$\frac{1}{|Y_\varepsilon(x_{T,k})|}\int_{Y_\varepsilon(x_{T,k})} A(x_{T,k}, x/\varepsilon)\big(I_2+\nabla_x\tilde\eta(x_{T,k}, x/\varepsilon)\big)\nabla w_j(x_{T,k})\cdot\big(I_2+\nabla_x\tilde\eta(x_{T,k}, x/\varepsilon)\big)\nabla w_i(x_{T,k})\,dx$$

où I_2 est la matrice unité $2x2$, $\tilde\eta$ est un vecteur à 2 composantes $(\tilde\eta_1, \tilde\eta_2)$.

On note pour tout i, $\nabla_x\tilde w_i(x_{T,k}, x) = (I_2 + \nabla_x\tilde\eta(x_{T,k}, x/\varepsilon))\nabla w_i(x_{T,k})$.

Question 3. Montrer que pour $i \in \{1,2\}$, $\tilde w_i$ est solution de

Trouver $\tilde w_i \in w_{i,lin(x_{T,k})} + H^1_\#(Y_\varepsilon(x_{T,k}))$ telle que

$$(10)\qquad \forall\phi \in H^1_\#(Y_\varepsilon(x_{T,k})), \quad \int_{Y_\varepsilon(x_{T,k})} A(x_{T,k}, x/\varepsilon)\,\nabla_x\tilde w_i(\bar x, x)\cdot\nabla_x\phi(x)\,dx = 0$$

où $w_{i,lin(x_{T,k})}$ est tel que $\nabla_x w_{i,lin(x_{T,k})} = \nabla w_i(x_{T,k})$ (par exemple $w_{i,lin(x_{T,k})} = w_i(x_{T,k}) + \nabla w_i(x_{T,k})\cdot x)$.

Nous appelons ces problèmes, les micro-problèmes. Ils n'ont pas en général de solution analytique donc il faut utiliser de nouveau une methode de type EF pour calculer une approximation numérique de la solution . On introduit donc une triangulation $\mathcal{T}_h$ du domaine $Y_\varepsilon(x_{T,k})$ et l'espace $V_{h,\#}(Y_\varepsilon(x_{T,k}))$ une approximation de $H^1_\#(Y_\varepsilon(x_{T,k}))$ par des éléments finis P^q d'ordre q associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. Le problème variationnel discrétisé correspondant à (10) est

Trouver $\tilde w_{i,h} \in w_{i,lin(x_{T,k})} + V_{h,\#}(Y_\varepsilon(x_{T,k}))$ telle que

$$(11)\qquad \forall\phi_h \in V_{h,\#}(Y_\varepsilon(x_{T,k})), \quad \int_{Y_\varepsilon(x_{T,k})} A(x_{T,k}, x/\varepsilon)\,\nabla_x\tilde w_{i,h}(\bar x, x)\cdot\nabla_x\phi_h(x)\,dx = 0$$

2 Algorithme, validation, résultats numériques

Nous allons donc chercher à résoudre un problème qui s'écrit sour la forme matricielle

$$\mathbb{K}^{\text{eff}}\mathbb{U}^{\text{eff}} = \mathbb{F}$$

où la matrice de rigidité $\mathbb{K}^{\text{eff}}$ est donnée par

$$\mathbb{K}^{\text{eff}}_{i,j} = \sum_{T\in\mathcal{T}_H}\sum_{k=1}^{K}\frac{\omega_{T,k}}{|Y_\varepsilon(x_{T,k})|}\int_{Y_\varepsilon(x_{T,k})} A(x_{K,j}, x/\varepsilon)\nabla\tilde{w}_{j,h}(x)\cdot\nabla\tilde{w}_{i,h}(x)\,dx$$

où pour tout triangle T, tout point de quadrature $x_{T,k}$, pour tout $i = 1, 2$, $w_{j,h}$ est solution de

Trouver $\tilde{w}_{i,h} \in w_{i,lin(x_{T,k})} + V_{h,\#}(Y_\varepsilon(x_{T,k}))$ telle que

$$\forall\phi_h \in V_{h,\#}(Y_\varepsilon(x_{T,k})),\quad \int_{Y_\varepsilon(x_{T,k})} A(x_{T,k}, x/\varepsilon)\,\nabla_x\tilde{w}_{i,h}(\bar{x}, x)\cdot\nabla_x\phi_h(x)\,dx = 0$$

Question 4. Implémenter la méthode numérique.

Question 5. Valider les calculs en utilisant les éléments de validation du TP2.

Question 6. Tracer des courbes d'erreur pertinentes pour étudier l'erreur liée à la discrétisation des macro-problèmes puis celle liée à la discrétisation des micro-problèmes.

Question 7. Expliquer comment étendre la méthode dans le cas quasi-périodique où on ne connait pas ε mais seulement un ordre de grandeur et dans le cas général (ou le tenseur n'est pas nécessairement quasi-périodique). Montrer des résultats numériques.