Lezione 29

Saverio Salzo*

16 novembre 2022

1 Teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange

Nello studio di una funzione ha grande importanza stabilire la presenza di punti di massimo o di minimo. La derivata di una funzione può servire a identificare questi punti speciali. Cominciamo col dare alcune definizioni.

Definizione 1.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in A$ si dice *interno ad* A se esiste un intorno U di x_0 tale che $U \subset A$. L'insieme dei punti interni ad A si chiama *interno di* A e si indica con $\mathring{A}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *esterno ad* A se esiste un intorno Udi x_0 tale che $U \subset \complement A$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *di frontiera di* A se x_0 non è né interno ad A né esterno ad A, quindi se per ogni intorno U di x_0, risulta che $U \cap A \neq \varnothing$ e $U \cap \complement A \neq \varnothing$ (in ogni intorno di x_0 devono cadere punti di A e punti che non appartengono ad A). L'insieme dei punti di frontiera di A si chiama *la frontiera di* A.

Esempio 1.2.

(i) Se A è un intervallo (aperto, semiaperto, o chiuso) di estremi $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora $\mathring{A} =]a, b[$, e la frontiera di A è l'insieme $\{a, b\}$.

(ii) Sia $A = [1, 2[\cup]2, 3]$. Allora $\mathring{A} =]1, 2[\cup]2, 3[$ e la frontiera di A è l'insieme $\{1, 2, 3\}$.

(iii) Sia $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Allora $\mathring{A} = \varnothing$ e la frontiera di A è l'insieme $\{0\} \cup A$.

(iv) In generale si vede che la frontiera di A è l'insieme $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

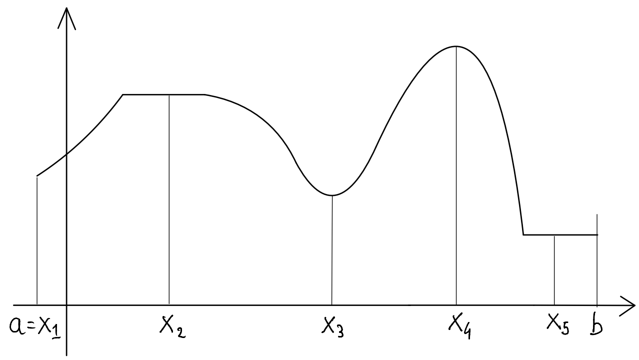

Figura 1: Punti estremali di una funzione f definita in $[a, b]$: x_1 e x_3 sono punti di minimo locale proprio, x_2 è punto di massimo locale, x_4 è punto di massimo assoluto, x_5 è punto di minimo assoluto.

Definizione 1.3. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Allora

1) x_0 si dice *punto di minimo locale* (o *relativo*) *per* f se esiste U intorno di x_0 tale che
$$\forall\, x \in U \cap A_{x_0}\colon\ \ f(x_0) \le f(x) \tag{1}$$
e si dice *punto di minimo locale proprio* se nella (1) vale la disuguaglianza stretta $<$.

2) x_0 si dice *punto di massimo locale* (o *relativo*) *per* f se esiste U intorno di x_0 tale che
$$\forall\, x \in U \cap A_{x_0}\colon\ \ f(x) \le f(x_0) \tag{2}$$
e si dice *punto di massimo locale proprio* se nella (2) vale la disuguaglianza stretta $<$.

3) I punti di minimo locale o massimo locale si chiamano anche *punti di estremo locale* (o *punti estremali*) *per* f.

4) Un punto $x_0 \in A$ si dice un *punto critico* (o *stazionario*) *per* f, se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Osservazione 1.4. Ricordiamo che, se esiste il minimo (risp. massimo) di una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, ogni punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \min_A f$ (risp. $f(x_0) = \max_A f$) si chiama *punto di minimo* (*risp. massimo*) *assoluto o globale di* f. Si noti che ci possono essere più punti di minimo o massimo assoluti. Inoltre è chiaro che i punti di minimo e massimo assoluti sono anche estremi locali.

Teorema 1.5 (regola di Fermat)**.** *Sia* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* f *sia derivabile in un punto* x_0 *interno ad* A*. Allora*
$$x_0 \text{ è un punto di minimo o massimo locale per } f \ \Rightarrow\ f'(x_0) = 0.$$

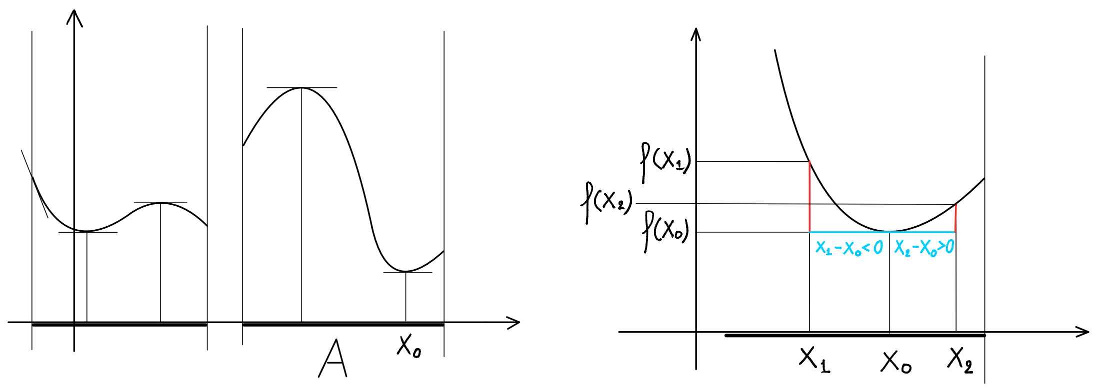

Figura 2: Illustrazione della regola di Fermat per i punti di minimo e massimo locale.

Dimostrazione. Per fissare le idee supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale per f. Allora esiste un intorno U di x_0 tale che

$$x \in U \cap A_{x_0} \;\;\Rightarrow\;\; f(x) - f(x_0) \geq 0. \tag{3}$$

Indichiamo, per brevità, con Φ la funzione rapporto incrementale in x_0, cioè

$$\Phi\colon A_{x_0} \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4}$$

Dato che x_0 è di accumulazione a destra e a sinistra per A e f è derivabile in x_0, risulta

$$\lim_{x \to x_0^-} \Phi(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} \Phi(x) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Ma da (3) segue che (si veda Figura 3, a destra)

$$\forall\, x \in U \cap A^-_{x_0} \colon \Phi(x) \leq 0 \quad \text{e} \quad \forall\, x \in U \cap A^+_{x_0} \colon \Phi(x) \geq 0,$$

infatti il numeratore in (4) è sempre positivo, mentre il denominatore cambia segno a seconda che $x < x_0$ o che $x > x_0$. Perciò per il teorema sul prolungamento delle disuguaglianze, risulta

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad f'(x_0) \geq 0,$$

e quindi $f'(x_0) = 0$. □

Osservazione 1.6.

(i) La regola di Fermat stabilisce che i punti di minimo o massimo locale, che sono interni all'insieme di definizione e in cui la funzione è derivabile, sono punti critici della funzione f. Non è vero il viceversa, cioè ci possono essere punti critici che non sono né di massimo locale né di minimo locale. Un esempio a tal proposito è fornito dalla funzione $f(x) = x^3$ che ha derivata nulla in 0, ma 0 non è né punto di massimo locale né punto di minimo locale per f.

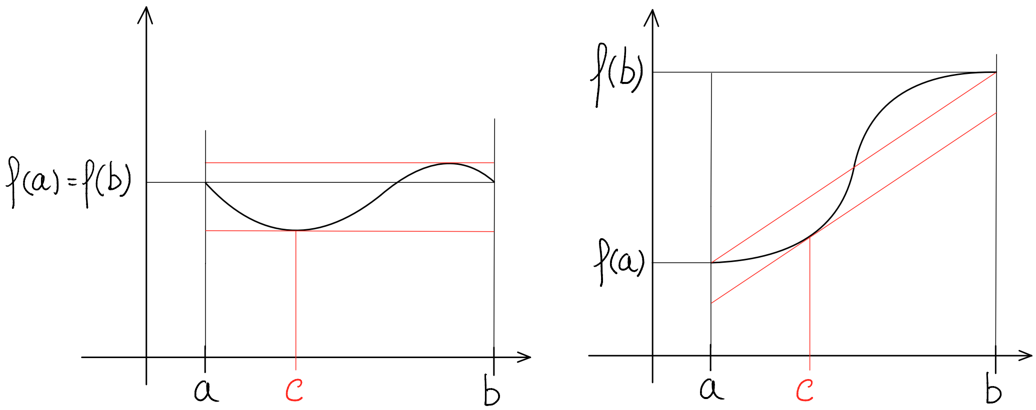

Figura 3: Teorema di Rolle (a sinistra) e teorema di Lagrange (a destra).

(ii) La condizione che x_0 sia interno a A è necessaria per la validità della regola di Fermat. Infatti se x_0 è un punto di frontiera di A, allora x_0 può essere un punto di massimo o di minimo senza che la derivata sia nulla in x_0. Tale situazione può verificarsi per esempio se f è strettamente monotona in A e A è un intervallo. Si pensi infatti alla funzione $f(x) = x$ definita nell'intervallo $[0, 1]$. I punti 0 e 1 sono estremi (assoluti) ma la derivata non si annulla mai in $[0, 1]$.

(iii) Nelle applicazioni è spesso importante determinare i punti di massimo e minimo *globali* di una funzione f definita in A. A tale scopo sarà sufficiente esaminare:

- i punti interni a A che sono critici per f
- i punti interni ad A in cui la funzione f non è derivabile.
- i punti di frontiera di A.

Teorema 1.7 (di Rolle)**.** *Sia* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* $]a, b[$. *Supponiamo che* $f(a) = f(b)$. *Allora esiste* $c \in \,]a, b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per i teorema di Weierstrass, f ha minimo e massimo in $[a, b]$. Quindi esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$\forall\, x \in [a, b]\colon\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Si possono presentare due casi:

1) $x_1, x_2 \in \{a, b\}$. Allora, essendo $f(a) = f(b)$, si ha $f(x_1) = f(x_2)$ e quindi f è costante su $[a, b]$. In tal caso chiaramente ogni $c \in \,]a, b[$ soddisfa $f'(c) = 0$.

2) almeno uno tra x_1 e x_2 appartiene a $]a, b[$. Allora per la regola di Fermat, si ha $f'(x_1) = 0$ o $f'(x_2) = 0$, a seconda che sia x_1 o x_2 ad essere interno all'intervallo $[a, b]$.

In ogni caso si è provata l'esistenza di un punto $c \in \,]a,b[$ su cui la derivata si annulla. $\square$

Esempio 1.8. Il teorema di Rolle non è vero se la funzione f non è continua in $[a,b]$ o se non è derivabile in qualche punto di $]a,b[$. Per esempio la funzione $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = |x|$, verifica $f(-1) = f(1)$, ma la derivata è sempre diversa da zero nei punti di derivabilità.

Teorema 1.9 (di Lagrange o del valor medio)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Allora*

$$\exists\, c \in \,]a,b[\quad \textit{t.c.} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Dimostrazione. La funzione affine che rappresenta il segmento congiungente i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ha espressione

$$\ell\colon [a,b] \to \mathbb{R} \quad \ell(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Applichiamo il Teorema 1.7, di Rolle, alla funzione

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - \ell(x).$$

Evidentemente g è continua su $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e inoltre $g(a) = 0 = g(b)$. Allora, il teorema di Rolle garantisce che esiste $c \in \,]a,b[$ tale che

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

2 Conseguenze del teorema di Lagrange (parte I)

Teorema 2.1 (degli accrescimenti finiti)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $\mathring{I}$ (interno di I). Supponiamo che la funzione derivata f' sia limitata in $\mathring{I}$, cioè che esiste $L \geq 0$ tale che*

$$\forall\, x \in \mathring{I}\colon \; |f'(x)| \leq L < +\infty.$$

Allora f è Lipschitziana su I con costante di Lipschitz L, cioè

$$\forall\, x, y \in I\colon \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Dimostrazione. E' sufficiente provare la tesi per $x < y$. Siano quindi $x, y \in I$, con $x < y$. Allora $f_{|[x,y]}$ è continua in $[x,y]$ e derivabile in $]x,y[$. Perciò, per il teorema di Lagrange, esiste $c \in \,]x,y[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

e quindi, essendo chiaramente $c \in \mathring{I}$, si ha

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq |f'(c)| \leq L,$$

da cui, moltiplicando per $|x - y|$, segue la tesi. $\square$

Esempio 2.2.

(i) Abbiamo visto che la derivata della funzione seno è la funzione coseno e chiaramente $|\cos x| \leq 1$. Perciò per il teorema degli accrescimenti finiti, risulta che $\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana con costante 1.

(ii) Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con $3x^2 + 2x - 1$. Allora

$$\forall\, x \in [0,1]\colon\ \ |f'(x)| = |6x + 2| \leq 8.$$

Perciò la funzione f è Lipschitziana con costante 8, cioè

$$\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]\colon\ \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq 8|x_1 - x_2|.$$

Corollario 2.3. *Se f è una funzione continua in un intervallo I ed è dotata di derivata nulla in ogni punto di $\mathring{I}$, allora f è costante in I.*

Dimostrazione. La tesi segue direttamente dal Teorema 2.1 con $L = 0$. Si ha quindi che per ogni $x, y \in I$, $f(x) = f(y)$. Basta prendere un punto arbitrario $x_0 \in I$ e allora per ogni $x \in I$ si ha $f(x) = f(x_0)$, cioè f è costante. $\square$

Teorema 2.4 (criteri di monotonia)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I e derivabile in $\mathring{I}$. Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) $\forall\, x \in \mathring{I}\colon\ f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ *è crescente in* I

(ii) $\forall\, x \in \mathring{I}\colon\ f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ *è decrescente in* I

(iii) $\forall\, x \in \mathring{I}\colon\ f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ *è strettamente crescente in* I

(iv) $\forall\, x \in \mathring{I}\colon\ f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ *è strettamente decrescente in* I

Dimostrazione. Proviamo prima le implicazioni "$\Rightarrow$". Siano $x, y \in I$ con $x < y$. Allora $f_{|[x,y]}$ è continua in $[x, y]$ e derivabile in $]x, y[\subset \mathring{I}$. Per il teorema di Lagrange esiste $c \in \,]x, y[$ tale che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Allora, dato che $y - x > 0$, il segno di $f(y) - f(x)$ è uguale a quello di $f'(c)$. Per quanto riguarda le due implicazioni "$\Leftarrow$", basta osservare che il rapporto incrementale

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

ha segno positivo se f è crescente, e segno negativo se f è decrescente. Perciò la tesi segue dal Teorema di prolungamento delle disuguaglianze. $\square$

Esempio 2.5. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definita come

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\colon\;\; f(x) = \frac{1}{x}.$$

La derivata è

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\colon\;\; f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Possiamo concludere che la funzione f è strettamente decrescente su ciascuno dei due intervalli $]{-\infty}, 0[$ e $]0, +\infty[$, separatamente. Ma la funzione non è strettamente decrescente sul suo insieme di definizione (unione dei due intervalli suddetti).