Lezione 19

Saverio Salzo*

27 ottobre 2022

1 Funzioni continue

Teorema 1.1. *Siano $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ funzioni continue in x_0. Allora valgono le seguenti proposizioni.*

(i) *$f + g$ è continua in x_0*

(ii) *fg è continua in x_0*

(iii) *Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora f/g è continua in x_0.*

(iv) *$|f|$ è continua in x_0*

(v) *Se $x_0 \in B \subset A$, allora $f_{|B}$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Se x_0 è punto isolato di A, la tesi segue dal fatto che ogni funzione è continua in un punto isolato del suo insieme di definizione. Supponiamo che x_0 è punto di accumulazione per A. In tal caso si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

e la tesi segue dal teorema sulle operazioni algebriche sui limiti, dal fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, e dal teorema sui limiti delle restrizioni. □

Lemma 1.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad e \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $a \leq b$. Allora

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = \frac{a + b + b - a}{2} = b = \max\{a, b\}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (`saverio.salzo@uniroma1.it`).

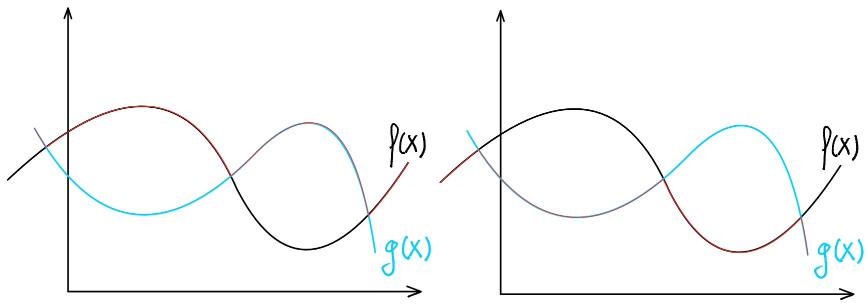

Figura 1: In rosso, le funzioni $\max\{f, g\}$ (a sinistra) e $\min\{f, g\}$ (a destra).

$$\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-(b-a)}{2} = a = \min\{a, b\}.$$

Se $a \geq b$, allora

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a = \max\{a, b\}$$
$$\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b = \min\{a, b\}.$$

□

Definizione 1.3. Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$. Allora le funzioni $\max\{f, g\}\colon A \to \mathbb{R}$ e $\min\{f, g\}\colon A \to \mathbb{R}$ sono tali che

$$\forall\, x \in A\colon \quad \max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{e} \quad \min\{f, g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Spesso le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ si denotano rispettivamente con $f \vee g$ e $f \wedge g$.

Proposizione 1.4. *Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon A \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $x_0 \in A$. Allora $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ sono funzioni continue in x_0.*

Dimostrazione. Dal Lemma 1.2 e dalle definizioni di $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ si ha evidentemente che

$$\begin{aligned} f \vee g &:= \max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2} \\ f \wedge g &:= \min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Quindi la tesi segue dal Teorema 1.1 □

Definizione 1.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto. L'insieme delle funzioni reali definite in A e continue in A si denota con $\mathscr{C}(A)$, cioè si pone

$$\mathscr{C}(A) = \{f \in \mathbb{R}^A \mid f \text{ è continua in } A\}.$$

Osservazione 1.6. Dai risultati precedenti segue che

1) $f \in \mathscr{C}(A)$, $g \in \mathscr{C}(A) \;\Rightarrow\; f + g \in \mathscr{C}(A)$.
2) $f \in \mathscr{C}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lambda f \in \mathscr{C}(A)$.
3) $f \in \mathscr{C}(A)$, $g \in \mathscr{C}(A) \;\Rightarrow\; fg \in \mathscr{C}(A)$.
4) $f \in \mathscr{C}(A)$, $\;\Rightarrow\; |f| \in \mathscr{C}(A)$.
5) $f \in \mathscr{C}(A)$, $g \in \mathscr{C}(A) \;\Rightarrow\; f \vee g, f \wedge g \in \mathscr{C}(A)$.

Le proprietà 1) e 2) dicono che $\mathscr{C}(A)$ è uno *spazio vettoriale reale*. Le proprietà $1), 2)$ e 3) dicono che $\mathscr{C}(A)$ è un *algebra reale* e tutte insieme dicono che $\mathscr{C}(A)$ è un *algebra reticolata*.

Una classe importante di funzioni continue sono le funzioni *Lipschitziane*. La definizione è data di seguito.

Definizione 1.7. Una funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice *Lipschitziana* se esiste $L > 0$ tale che

$$\forall\, x, y \in A\colon\; |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

La costante L si chiama *costante di Lipschitz* di f.

Proposizione 1.8. *Una funzione Lipschitziana è continua.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$, se definiamo $\delta = L/\varepsilon$, si ha

$$\forall\, x \in A\colon\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta = \varepsilon.$$ □

Esempio 1.9.

(i) Le funzioni sen e cos sono Lipschitziane con costante di Lipschitz uguale a 1, cioè

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}\colon\; |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y| \quad \text{e} \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

Per provare questo risultato si usano le formule di prostaferesi

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Poi si usa che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\; |\operatorname{sen} x| \leq |x|.$$

Allora, se $x, y \in A$, risulta

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = 2\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\
&\leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| \\
&= |x-y|.
\end{aligned}
$$

Allo stesso modo si prova la Lipschitzianità della funzione coseno.

(ii) Dato che $||x|-|y|| \leq |x-y|$, la funzione valore assoluto $|\cdot|$ è Lipschitziana (di costante di Lipschitz uguale a 1) e quindi è continua.

(iii) La funzione $\operatorname{tg}\colon \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ è continua nel suo insieme di definizione in quanto rapporto di funzioni continue.

Teorema 1.10 (sulla continuità delle funzioni composte)**.** *Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$. Allora*

$$f \text{ è continua in } x_0 \text{ e } g \text{ è continua in } f(x_0) \;\Rightarrow\; g \circ f \text{ è continua in } x_0.$$

Perciò, se f è continua e g è continua, allora $g \circ f$ è continua.

Dimostrazione. Sia W un intorno di $g(f(x_0))$. Dato che g è continua in $f(x_0)$, allora esiste V intorno di $f(x_0)$ tale che

$$g(V \cap B) \subset W.$$

Adesso, dato che f è continua in x_0, in corrispondenza di V intorno di $f(x_0)$ esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(U \cap A) \subset V.$$

Allora risulta

$$(g \circ f)(U \cap A) = g(f(U \cap A)) \subset g(V \cap B) \subset W.$$

Quindi $g \circ f$ è continua in x_0. La seconda parte del teorema segue dalla prima ricordando che la continuità in un insieme significa continuità in tutti i punti dell'insieme. □

Osservazione 1.11 (sui limiti delle funzioni composte)**.** Nel teorema sui limiti delle funzioni composte nel caso che g sia continua in $y_0 \in B$, non è necessario richiedere che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0. Più precisamente si ha che se

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in B$ e g è continua in y_0,

allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$.

2 Continuità delle funzioni monotone

Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ monotona crescente e $x_0 \in A$. Se x_0 è punto isolato di A sappiamo che f è continua in x_0. Altrimenti, se x_0 è punto di accumulazione per A, si possono presentare tre situazioni (si veda Figura 2).

(i) x_0 è punto di accumulazione a sinistra (e non a destra) per A. In tal caso risulta

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \tag{2}$$

e f è continua in $x_0 \;\Leftrightarrow\; f(x_0-) = f(x_0)$.

(ii) x_0 è punto di accumulazione a destra (e non a sinistra) per A. In tal caso risulta

$$f(x_0) \leq f(x_0+) \tag{3}$$

e f è continua in $x_0 \;\Leftrightarrow\; f(x_0+) = f(x_0)$.

(iii) x_0 è punto di accumulazione sia a sinistra che a destra per A. In tal caso risulta

$$f(x_0-) \leq f(x_0) \leq f(x_0+) \tag{4}$$

e f è continua in $x_0 \;\Leftrightarrow\; f(x_0-) = f(x_0)$ e $f(x_0+) = f(x_0)$.

Le relazioni (2), (3) e (4) vengono dal teorema sui limiti unilaterali di funzioni monotone in quanto

$$f(x_0-) = \sup_{\substack{x\in A\\ x<x_0}} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_0+) = \inf_{\substack{x\in A\\ x>x_0}} f(x).$$

Quindi si vede che f è continua in A se e solo se per ogni $x_0 \in A$ risulta che $f(x_0-) = f(x_0)$ se x_0 è punto di accumulazione a sinistra per A e $f(x_0+) = f(x_0)$ se x_0 è punto di accumulazione a destra per A. Poi si giunge ad una analoga conclusione se f è decrescente, con la sola differenza che le disuguaglianze di sopra sono invertite.

Teorema 2.1. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ monotona. Se $f(A)$ è un intervallo, allora f è continua. Si veda Figura 3.*

Dimostrazione. Ricordiamo che se $f(A)$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ allora è verificata la proprietà

$$\forall\, y_1, y_2 \in f(A)\colon\;\; y_1 < y_2 \;\Rightarrow\; [y_1, y_2] \subset f(A).$$

Supponiamo, per fissare le idee, che f sia crescente. In virtù di quanto discusso in precedenza si tratta di provare che se x_0 è punto di accumulazione a sinistra per A allora $f(x_0-) = f(x_0)$ e se x_0 è punto di accumulazione a destra per A allora $f(x_0+) = f(x_0)$. Proviamo la prima e supponiamo quindi che x_0 sia punto di accumulazione a sinistra per A. Allora si ha che $f(x_0-) \leq f(x_0)$ e inoltre (dalla definizione di $f(x_0-)$ e dalla crescenza di f)

$$\forall\, x \in A\colon \qquad \begin{cases} x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0-) \\ x \geq x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0). \end{cases}$$

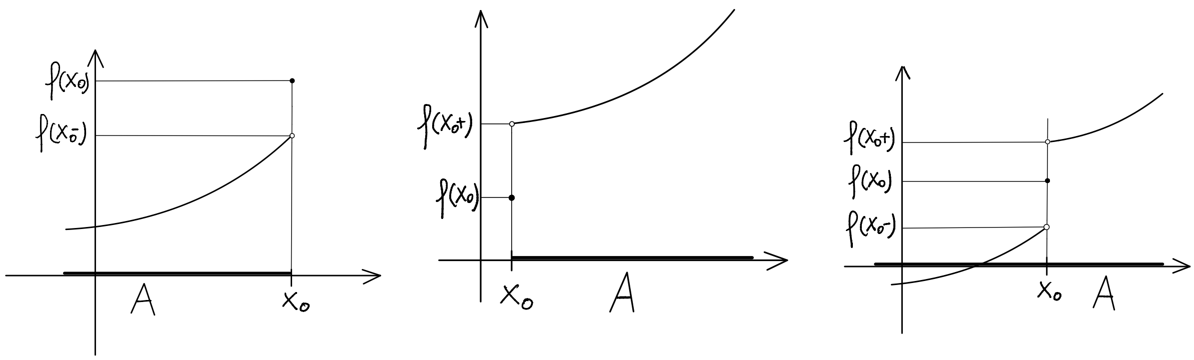

Figura 2: Illustrazione delle tre situazioni presentate all'inizio della Sezione 2.

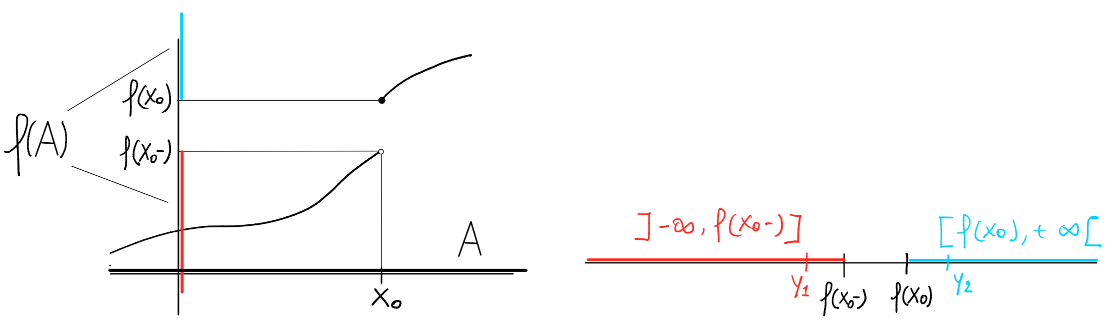

Figura 3: Illustrazione della dimostrazione del Teorema 2.1 sulla continuità delle funzioni monotone.

Perciò
$$f(A) \subset \,]-\infty, f(x_0-)] \cup [f(x_0), +\infty[\,.$$
Inoltre è chiaro che $f(A) \cap \,]-\infty, f(x_0-)] \neq \varnothing$ e $f(A) \cap [f(x_0), +\infty[\, \neq \varnothing$. Allora, se fosse $f(x_0-) < f(x_0)$, $f(A)$ non potrebbe essere un intervallo, perché presi due punti
$$y_1 \in f(A) \cap \,]-\infty, f(x_0-)] \quad \text{e} \quad y_2 \in f(A) \cap [f(x_0), +\infty[$$
risulterebbe $[y_1, y_2] \not\subset f(A)$. Perciò deve essere $f(x_0-) = f(x_0)$ (e quindi f è continua a sinistra in x_0). Supponiamo ora che x_0 sia un punto di accumulazione a destra per A. In questo caso, si ha $f(x_0) \leq f(x_0+)$ e
$$\forall\, x \in A\colon \quad \begin{cases} x \leq x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0+). \end{cases}$$
Perciò
$$f(A) \subset \,]-\infty, f(x_0)] \cup [f(x_0+), +\infty[\,.$$
Come prima, se fosse $f(x_0) < f(x_0+)$, $f(A)$ non potrebbe essere un intervallo. Si conclude allora che necessariamente deve essere $f(x_0) = f(x_0+)$, (cioè f è continua a destra in x_0). $\square$

Esempio 2.2.

(i) Sia $a > 0$ e $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la funzione esponenziale di base a. Sappiamo che $\exp_a$ è strettamente monotona e bigettiva. Dato che l'immagine di $\exp_a$ è un intervallo di $\mathbb{R}$, allora $\exp_a$ è continua. Con lo stesso ragionamento si prova che $\log_a\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ è continua.

(ii) Sia $\alpha \neq 0$. Allora, se $\alpha > 0$, la funzione potenza $p_\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è strettamente crescente e bigettiva e se $\alpha < 0$ la funzione potenza $p_\alpha\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ è strettamente crescente e bigettiva. In ogni caso l'immagine di p_α è un intervallo di $\mathbb{R}$ e il Teorema 2.1 garantisce che p_α è continua nel suo insieme di definizione.

(iii) $\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono strettamente crescenti e hanno immagine un intervallo di $\mathbb{R}$. Perciò, per il Teorema 2.1, esse sono continue. Per quanto riguarda il coseno iperbolico, risulta che $\cosh_{|\mathbb{R}_+} \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $\cosh_{|\mathbb{R}_-} \to \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sono strettamente monotone e hanno per immagine l'intervallo $[1, +\infty[$. Perciò esse sono continue e quindi anche $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua.

3 Limiti notevoli

In questa sezione dimostriamo alcuni limiti notevoli che servono di base per il calcolo di limiti più complicati.

Limite 1

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \tag{5}$$

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che l'insieme di definizione della funzione è $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, quindi ha senso considerare i limiti per $x \to \pm\infty$. Poi, ricordiamo che, per definizione,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

da cui segue anche che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e.$$

Consideriamo adesso la funzione parte intera

$$\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \lfloor x\rfloor.$$

Chiaramente essa è crescente e l'immagine è $\mathbb{Z}$ e quindi per il teorema sui limiti unilaterali delle funzioni monotone, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = \sup \mathbb{Z} = +\infty.$$

Allora per il teorema sui limiti delle funzioni composte, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor+1} = e \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor+1}\right)^{\lfloor x \rfloor} = e$$

D'altra parte, dalla relazione

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

segue che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \ge 1$,

$$1+\frac{1}{1+\lfloor x \rfloor} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}$$

e quindi, usando la stretta monotonia della funzione potenza e della funzione esponenziale, si ha

$$\left(1+\frac{1}{1+\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x \rfloor} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor+1}.$$

Perciò per il teorema dei carabinieri, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Adesso, allo scopo di stabilire il caso $x \to -\infty$, si noti che per ogni $x \in \left]-\infty, -1\right[$ si ha

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|} = \left(\frac{|x|}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|} = \left(1+\frac{1}{|x|-1}\right)^{|x|-1}\left(1+\frac{1}{|x|-1}\right).$$

Da quest'ultima relazione e dal Teorema **??**, sui limiti delle funzioni composte, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e,$$

dove si è posto $y = |x| - 1$ (e risulta che $y \to +\infty$, per $x \to -\infty$). □

Limite 2

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} = e^{\alpha}} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} (1+\alpha x)^{1/x} = e^{\alpha}.} \tag{6}$$

Dimostrazione. Se $\alpha = 0$ i due limiti sono evidenti. Supponiamo $\alpha > 0$. Allora per il Teorema **??**, sui limiti delle funzioni composte, risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^\alpha = \lim_{t\to e} t^\alpha = e^\alpha.$$

Se poi $\alpha < 0$, allora quando $x \to +\infty$ risulta che $y = x/\alpha \to -\infty$ e se $x \to -\infty$, allora $y = x/\alpha \to +\infty$; perciò

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}}\right]^\alpha = \lim_{y\to\mp\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^\alpha = \lim_{t\to e} t^\alpha = e^\alpha.$$

Per stabilire il secondo dei limiti in (6), si applica nuovamente il Teorema sui limiti delle funzioni composte al calcolo dei limiti destro e sinistro in 0, con $y = 1/x$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(1+\alpha x)^{1/x} &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{y}\right)^y = e^\alpha \\ \lim_{x\to 0^-}(1+\alpha x)^{1/x} &= \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{\alpha}{y}\right)^y = e^\alpha.\end{aligned}$$

□

Limite 3

Sia $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 1$. Allora

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.} \tag{7}$$

Dimostrazione. Dalle proprietà del logaritmo di base a, si ha

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*_+ :\quad \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

e quindi, dalla seconda delle (6), dal teorema sui limiti delle funzioni composte e dalla continuità della funzione logaritmica di base a, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to e}\log_a y = \log_a e.$$

□

Limite 4

Sia $a > 0$. Allora

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a.} \tag{8}$$

Dimostrazione. Se $a = 1$ la (8) è evidente. Supponiamo che $a \neq 1$. Allora si nota che

$$y = a^x - 1 \;\Leftrightarrow\; 1+y = a^x \;\Leftrightarrow\; \log_a(1+y) = x.$$

Quindi si vede che[1]

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)}\bigg|_{y=a^x-1}$$

e che per $x \to 0$, si ha $y \to 0$. Allora per la (7) e per il Teorema sui limiti delle funzioni composte, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log_a(y+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \log a. \qquad \square$$

Limite 5

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha} \tag{9}$$

Dimostrazione. Evidentemente

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log(1+x)^\alpha}\right)\left(\frac{\alpha \log(1+x)}{x}\right)$$

e

$$y = (1+x)^\alpha - 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + y = (1+x)^\alpha \;\Leftrightarrow\; \log(1+y) = \log(1+x)^\alpha.$$

Perciò

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left(\frac{y}{\log(1+y)}\bigg|_{y=(1+x)^\alpha-1}\right)\left(\frac{\alpha \log(1+x)}{x}\right),$$

con $y \to 0$ per $x \to 0$. La tesi segue allora dal Teorema sui limiti delle funzioni composte e dal limite (7). $\square$

Limite 6

Si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.} \tag{10}$$

Dimostrazione. Moltiplicando e dividendo per $1 + \cos x$ (con $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$) si ha

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2}\frac{1}{1+\cos x} = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}$$

e quindi,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Il secondo limite in (9) segue immediatamente dalla relazione

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \qquad \square$$

[1] Ricordiamo che un modo alternativo per indicare la composizione $g(f(x))$ è $g(y)|_{y=f(x)}$

4 Metodo di Erone per il calcolo della radice quadrata

Sia $b > 0$. Il metodo di Erone per il calcolo della radice quadrata di b definisce una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ricorsivamente, nel modo seguente.

$$\begin{aligned} & a_0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ (arbitrario)} \\ & \text{Per } n = 0, 1, \dots \\ & \left\lfloor\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right). \right. \end{aligned} \tag{11}$$

La successione è definita ricorsivamente usando la funzione

$$f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right),$$

cioè

$$a_{n+1} = f(a_n). \tag{12}$$

Studiamo quindi questa funzione. Per prima cosa osserviamo che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \colon\ x > \sqrt{b} \ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{b}}{x} < 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{b}{x} < \sqrt{b}.$$

Questo stabilisce che se x è un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{b}$, allora b/x è un'approssimazione per difetto di $\sqrt{x}$ e quindi è ragionevole aspettarsi che il punto medio di x e b/x sia una stima migliore di $\sqrt{b}$ di quanto non lo siano x e b/x. Questo fornisce una giustificazione intuitiva del metodo. Adesso al fine di studiare la convergenza valutiamo $f(x) - \sqrt{b}$. Si ha

$$\begin{aligned} f(x) - \sqrt{b} &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{x}\right) - \sqrt{b} \\ &= \frac{x^2 + b - 2\sqrt{b}x}{2x} \\ &= \frac{(x - \sqrt{b})^2}{2x} \geq 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Si vede perciò che qualunque sia l'approssimazione iniziale $x > 0$ (per eccesso o per difetto), l'approssimazione al passo successivo $f(x)$ sarà un'approssimazione per eccesso di $\sqrt{b}$. Le proprietà della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono riassunte nella proposizione seguente.

Proposizione 4.1. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita come in* (11)*. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \colon a_n \geq \sqrt{b}$.

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \colon\ a_{n+1} - \sqrt{b} \leq \dfrac{1}{2}(a_n - \sqrt{b})$.

(iii) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon\ 0 \le a_n - \sqrt{b} \le \dfrac{1}{2^n}\dfrac{(a_0 - \sqrt{b})^2}{a_0}$.

(iv) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{b}$.

(v) *Se* $a_0 = b$, *allora* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon\ 0 \le a_n - \sqrt{b} \le \dfrac{1}{2^n}(\sqrt{b}-1)^2 \le \dfrac{1}{2^n}(b+1)$.

Dimostrazione. (i): Consegue direttamente da (13).

(ii): Da (13) segue che

$$x \ge \sqrt{b} \quad\Rightarrow\quad 0 \le f(x) - \sqrt{b} \le \frac{x-\sqrt{b}}{2x}(x-\sqrt{b}) \le \frac{1}{2}(x-\sqrt{b}), \tag{14}$$

perché chiaramente

$$x \ge \sqrt{b} \quad\Rightarrow\quad \frac{x-\sqrt{b}}{x} \le 1.$$

Quindi, ricordando la (12), da (i) e (14) si ottiene che $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon\ a_{n+1} - \sqrt{b} \le \frac{1}{2}(a_n - \sqrt{b})$.

(iii): Iterando la (ii), si ha

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon\ 0 \le a_n - \sqrt{b} &\le \frac{1}{2}(a_{n-1} - \sqrt{b}) \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^2 (a_{n-2} - \sqrt{b}) \\
&\le \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{b}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (f(a_0) - \sqrt{b}) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{(a_0 - \sqrt{b})^2}{2a_0} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{(a_0 - \sqrt{b})^2}{a_0}.
\end{aligned}$$

(iv): Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/2^n = 0$ e vale la (iii), per il teorema dei carabinieri, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{b}$.

(v): Si ottiene direttamente dalla (iv), scegliendo $a_0 = b$. □

Osservazione 4.2. Data una precisione $\varepsilon > 0$ si può ottenere il numero di iterazioni sufficiente a garantire una precisione minore di ε. Infatti basta osservare che

$$\frac{1}{2^n}(b+1) \le \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n \ge \log_2\left(\frac{b+1}{\varepsilon}\right),$$

e quindi se si prendere $n = \lfloor \log_2((b+1)/\varepsilon) \rfloor + 1$, si ha $0 \leq a_n - \sqrt{b} \leq \varepsilon$. Si noti che

$$\frac{1}{2^{10}} \approx 10^{-3}, \quad \frac{1}{2^{20}} \approx 10^{-6} \text{ e } \frac{1}{2^{30}} \approx 10^{-9}.$$

Perciò con sole 30 iterazioni, l'algoritmo di Erone identifica correttamente le prime 9 cifre decimali della radice quadrata di b.