# Lezione 24

Saverio Salzo*

8 novembre 2022

## 1 La serie armonica generalizzata

Iniziamo con lo studio della *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R}, p > 0). \tag{1}$$

Consideriamo diversi casi per $p$

**Caso** $p = 1$ La serie è divergente (positivamente). La dimostrazione è dovuta a Nicola Oresme (1350). La serie è a termini positivi e quindi è regolare. Allora si può applicare la proprietà associativa e si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots \\
&\overset{(*)}{=} 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ termini}} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots\cdots \\
&\overset{(**)}{\geq} 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ termini}} \\
&\qquad + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots\cdots
\end{aligned}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = +\infty.$$

Notiamo che nell'uguaglianza $(*)$ si è applicata la proprietà associativa per serie regolari e che nell'uguaglianza $(**)$ si è applicato il criterio di confronto.
Notiamo che questo risultato si può dimostrare anche nel seguente modo. Supponiamo per assurdo che la serie $\sum 1/n$ sia convergente. Chiamiamo con $s_n$ la sua somma parziale $n$-esima e supponiamo che $s_n \to s \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$s_{2n} - s_n \to s - s = 0.$$

D'altra parte si ha anche

$$s_{2n} - s_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termini}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si ha quindi una contraddizione, perché non può essere simultaneamente che

$$s_{2n} - s_n \to 0 \quad \text{e} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\colon s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}.$$

**Caso $p < 1$.** Si ha chiaramente $n^p < n$ e quindi $1/n^p > 1/n$. Dato che abbiamo visto che $\sum 1/n$ è divergente, per confronto, risulta anche $\sum 1/n^p$ divergente.

**Caso $p = 2$.** Lo abbiamo già visto, la serie è convergente. Si dimostra per confronto con la serie di Mengoli $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

**Caso $p > 2$.** Evidentemente $n^p > n^2$ e quindi $1/n^p < 1/n^2$. Perciò, per confronto, essendo $\sum 1/n^2$ convergente, si conclude che $\sum 1/n^p$ è convergente.

**Caso $1 < p < 2$.** Si prova che la serie è convergente mediante il *criterio di condensazione di Cauchy* che spieghiamo nella prossima sezione.

In definitiva la serie armonica generalizzata (1) è convergente se e solo se $p > 1$.

**Osservazione 1.1.**

(i) Osserviamo che stabilire il carattere di una serie è in generale molto più facile che calcolarne la somma, nel caso che la serie converga. Per esempio il problema di calcolare la somma $\sum 1/n^2$ è noto come il *problema di Basilea* ed è stato posto da Mengoli nel 1650 e risolto da Eulero nel 1734 che ha provato che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eulero ha anche trovato le somme per $p$ pari, ma, per esempio, al momento non è nota la somma per $p = 3$.

(ii) La funzione $\zeta\colon\ ]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$, tale che

$$\forall\, p > 1\colon\ \ \zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

si chiama *funzione zeta di Riemann*. E' una funzione che è legata allo studio della distribuzione dei numeri primi e ad un problema irrisolto in matematica che si chiama *ipotesi di Riemann* che riguarda gli zeri dell'estensione analitica della funzione zeta ai numeri complessi.

## 2 Criterio di condensazione di Cauchy

Data una serie a termini *positivi e decrescenti*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

si chiama *serie condensata* di $\sum a_n$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = a_0 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots$$

Vale il seguente importante criterio di convergenza.

**Teorema 2.1** (Criterio di condensazione di Cauchy)**.** *Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione decrescente di numeri reali positivi. Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e la sua serie condensata $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere. Più precisamente si ha*

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una generalizzazione di quella di Oresme vista in precedenza. Si usa quindi la proprietà associativa per le serie regolari e il criterio di confronto (per serie a termini positivi). Si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \cdots \\
&= a_1 + \underbrace{(a_2)}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{(a_5 + a_6 + a_7 + a_8)}_{2^2 \text{ termini}} + \underbrace{(a_9 + a_{10} + \cdots + a_{16})}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots \\
&\overset{(*)}{\ge} a_1 + \underbrace{(a_2)}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{(a_4 + a_4)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{(a_8 + a_8 + a_8 + a_8)}_{2^2 \text{ termini}} + \underbrace{(a_{16} + a_{16} + \cdots + a_{16})}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + 8a_{16} + \cdots \\
&= a_1 + \frac{1}{2}\big(2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots\big) \\
&\geq \frac{1}{2}\big(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \cdots\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}.
\end{aligned}
$$

Si noti che nella disuguaglianza $(*)$ di sopra si è usata la monotonia della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, perché nei vari gruppi di termini tra parentesi si è minorato ogni termine con l'ultimo termine del gruppo, che è il più piccolo termine nel gruppo. D'altra parte si ha anche

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \cdots \\
&= \underbrace{(a_1)}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{2^2 \text{ termini}} + \underbrace{(a_8 + a_9 + \cdots + a_{15})}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots \\
&\overset{(**)}{\leq} \underbrace{(a_1)}_{2^0 \text{ termini}} + \underbrace{(a_2 + a_2)}_{2^1 \text{ termini}} + \underbrace{(a_4 + a_4 + a_4 + a_4)}_{2^2 \text{ termini}} + \underbrace{(a_8 + a_8 + \cdots + a_8)}_{2^3 \text{ termini}} + \cdots \\
&= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}.
\end{aligned}
$$

Qui nella disuguaglianza $(**)$ si è maggiorato ogni termine nelle parantesi con il primo termine, essendo questo il più grande termine del gruppo. □

**Esempio 2.2.**

(i) Applichiamo il criterio di condensazione alle serie armonica $\sum 1/n$. La sua serie condensata è

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + 1 + \cdots = +\infty.
$$

Perciò riotteniamo il risultato della divergenza della serie armonica.

(ii) Possiamo ora completare lo studio della serie armonica generalizzata. In realtà, utilizzando il criterio di condensazione di Cauchy, si ottiene un risultato generale valido per ogni $p > 0$. Infatti la serie condensata della serie armonia è la serie

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^p}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n.
$$

Questa è una serie geometrica di ragione $1/2^{p-1}$; e perciò è convergente se e solo se

$$\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \;\Leftrightarrow\; 2^{p-1} > 1 \;\Leftrightarrow\; p-1 > 0 \;\Leftrightarrow\; p > 1.$$

Quindi la serie armonica generalizzata (1) è convergente per $p > 1$ e divergente per $0 < p \leq 1$.

(iii) Studiamo la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} \tag{2}$$

Notiamo che la successione dei termini della serie è un infinitesimo di ordine superiore a $1/n$. Nonostante questo, applicando il criterio di condensazione di Cauchy si scopre che la serie è divergente. Infatti la serie condensata di (2) è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

e quindi è divergente.

(iv) Il criterio di condensazione di Cauchy si presta bene a studiare serie dove compare il logaritmo. Consideriamo infatti la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p (\log n)^q} \qquad (p, q > 0).$$

La sua serie condensata è

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p (\log 2^n)^q} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n \frac{1}{n^q (\log 2)^q} \\ &= \frac{1}{(\log 2)^q} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2^{p-1})^n}{n^q}. \end{aligned}$$

Perciò, se $p < 1$ i termini della serie tendono a $+\infty$ e la serie diverge (per qualunque valore di $q > 0$). Se $p = 1$, la serie è convergente se e solo se $q > 1$. Infine se $p > 1$ la serie è convergente per qualunque $q > 0$.

# 3 Ancora sul confronto asintotico per le serie

Richiamiamo alcune definizioni sugli infinitesimi.

**Definizione 3.1.** Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni a termini strettamente positivi che siamo infinitesime, cioè $a_n \to 0$ e $b_n \to 0$. Allora

(i) se $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$, $a_n$ *è un infinitesimo di ordine superiore a* $b_n$ e si scrive

$$a_n = o(b_n) \quad \text{(e si legge } a_n \textit{ è un o-piccolo di } b_n\text{).}$$

(ii) Se $\dfrac{a_n}{b_n} \to l \in\, ]0, +\infty[$, $a_n$ *è un infinitesimo dello stesso ordine di* $b_n$ e si scrive

$$a_n \asymp b_n.$$

Se in particolare $l = 1$, allora si scrive $a_n \sim b_n$ e si legge $a_n$ *è asintotico con* $b_n$.

(iii) se $\dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$, $a_n$ *è un infinitesimo di ordine inferiore a* $b_n$. Questa situazione è equivalente a $b_n/a_n \to 0$ e perciò a $b_n = o(a_n)$.

**Osservazione 3.2.** Se si prova che

$$a_n = c_n b_n \quad \text{con } c_n \to l \in [0, +\infty]\,,$$

allora è chiaro che

$$\begin{cases} a_n = o(b_n) & \text{se } l = 0 \\ a_n \asymp b_n & \text{se } l \in\, ]0, +\infty[ \\ b_n = o(a_n) & \text{se } l = +\infty. \end{cases}$$

Per il confronto tra infinitesimi è comune prendere come riferimento l'infinitesimo $1/n^p$ con $p > 0$. Si danno allora le seguenti definizioni. Si dice che $a_n$ è un infinitesimo

- *di ordine* $p$ se se $a_n \asymp 1/n^p$
- *di ordine maggiore di* $p$ se $\frac{a_n}{1/n^p} \to 0$.
- *di ordine minore di* $p$ se $\frac{a_n}{1/n^p} \to +\infty$.

Date le definizioni di sopra, il criterio di confronto asintotico si può riformulare nel modo seguente

**Teorema 3.3** (Criterio di confronto asintotico, 2° forma)**.** *Siano* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni infinitesime a termini strettamente positive. Valgono le seguenti affermazioni.*

(i) *Se* $a_n$ *è un infinitesimo di ordine superiore a* $b_n$ *(cioè,* $a_n = o(b_n)$*), allora:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \text{ convergente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente,}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ divergente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ divergente.}$$

(ii) *Se* $a_n$ *è un infinitesimo dello stesso ordine di* $b_n$ *(cioè,* $a_n \asymp b_n$*)), allora le serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *hanno lo stesso carattere.*

**Osservazione 3.4** (Come condurre lo studio del carattere di una serie)**.** Nello studio del carattere di una serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

si seguono i seguenti passi.

- Si controlla se la successione dei termini della serie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima. Se non lo è, la serie è divergente (positivamente).

- Se $a_n \to 0$, allora si cerca di confrontare la serie $\sum a_n$ con un'altra serie

  $$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad (\text{con } b_n \to 0)$$

  di cui si conosce il carattere. Si confrontano gli infinitesimi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usando il criterio di confronto asintotico stabilito nel Teorema 3.3. Spesso risulta che la serie di riferimento $b_n$ è la serie armonica generalizzata $1/n^p$. In tal caso si tratta di stabilire l'ordine di infinitesimo di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: se è minore o uguale a $p < 1$, allora la serie converge. Se l'ordine di infinitesimo è uguale o maggiore di 1, allora la serie è divergente.

- Se $a_n \to 0$ ma non appare evidente alcuna serie di riferimento per un confronto, allora si procede con i criteri del rapporto o della radice. In generale per il criterio del rapporto si usa quando l'espressione $a_{n+1}/a_n$ è semplice (per esempio questo succede spesso in presenza di fattoriali e potenze in $a_n$). Il criterio del rapporto invece si usa quando in $a_n$ ci sono potenze $n$-esime.

**Esempio 3.5.**

(i) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} =: a_n. \tag{3}$$

Evidentemente $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, quindi la condizione necessaria per la convergenza è verificata. Inoltre $a_n \geq 0$, cioè la serie è a termini positivi. Infine

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n},$$

e quindi, per il criterio di confronto asintotico, la serie (3) ha lo stesso carattere di $\sum 1/n$ e quindi è divergente.

(ii) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} =: a_n. \tag{4}$$

Evidentemente

$$a_n = \frac{\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n^{1/2}} \frac{1}{n^{3/2}} \tag{5}$$

e quindi, dato che $(\log n)/n^{1/2} \to 0$, $a_n$ è un infinitesimo di ordine superiore a $1/n^{3/2}$. Allora ricordando che la serie armonica con $p = 3/2 > 1$ è convergente, si deduce, dal criterio di confronto asintotico che la serie (4) è convergente.

(iii) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} =: a_n. \tag{6}$$

La serie è a termini positivi e $a_n \to 0$. Inoltre, razionalizzando il numeratore si ha

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{1}{n^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}.$$

Perciò $a_n$ è un infinitesimo dello stesso ordine di $1/n^{3/2}$ e sappiamo che la serie $\sum 1/n^{3/2}$ è convergente. Perciò, per il criterio di confronto asintotico, risulta che la serie (6) è convergente.

# 4 Curva e isola di Koch

La curva di Koch è un esempio di frattale. Si ottiene partendo da un triangolo equilatero (per esempio di lato 1). Ogni lato si divide in tre parti, si rimuove la parte centrale e si sostituisce con due lati in modo da formare un triangolo equilatero. A questo punto si è ottenuta una stella. Si procede poi effettuando la stessa costruzione su ogni lato della stella, cioè si divide

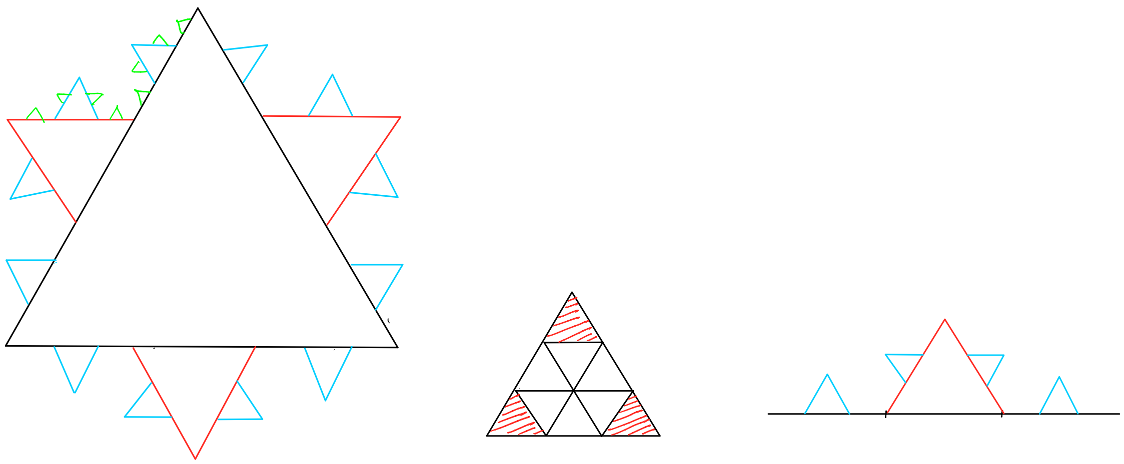

Figura 1: Illustrazione della costruzione della curva di Koch (a sinistra). Ciascuno dei triangoli rossi ha una area pari a 1/9 del triangolo iniziale (al centro). Al primo passo l'area aggiunta è i $3/9 = 1/3$ dell'area del triangolo iniziale. Poi, dal secondo passo in poi, l'area aggiunta ad ogni passo è i 4/9 dell'area aggiunta al passo precedente (a destra).

ogni lato in tre parti e si sostituisce con due lati in modo da formare un triangolo equilatero. Il procedimento si ripete all'infinito. Si veda Figura 1.

Calcoliamo il perimetro della curva di Koch. Indichiamo con $P_n$ il perimetro al passo $n \in \mathbb{N}$. All'inizio il perimetro vale 3. Poi si riconosce facilmente che ad ogni passo il perimetro aumenta di 4/3, perché ogni lato è diviso per 3 e il segmento centrale è sostituito da due segmenti di lunghezza uguale a quello rimosso. Perciò per la successione $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale

$$\begin{cases} P_0 = 3 \\ P_{n+1} = \frac{3}{4} P_n. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n 3 \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$

cioè il perimetro della curva di Koch è infinito. Calcoliamo adesso l'area dell'isola di Koch, cioè della regione del piano racchiusa dalla curva di Koch (questa regione si chiama anche fiocco di neve di Koch). Indichiamo con $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle aree aggiunte ad ogni passo. All'inizio l'area del triangolo è $A_0 = \sqrt{3}/4$. Al primo passo, si sono aggiunti tre triangoli di area un nono di quella iniziale (si veda Figura 1). Poi, dal secondo passo in poi, si vede che ad ogni triangolo appena aggiunto se ne aggiungo altri 4 di area 1/9 di quello appena aggiunto (si veda di nuovo Figura 1, a destra). Perciò l'area aggiunta è i 4/9 dell'area aggiunta al passo precedente. In definitiva per la successione delle aree aggiunte

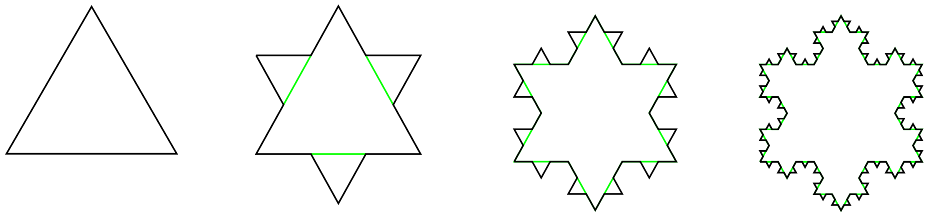

Figura 2: Primi 4 passi della costruzione della curva di Koch.

vale la seguente formula ricorsiva

$$\begin{cases} A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ A_1 = \frac{1}{3} A_0 \\ A_{n+1} = \frac{4}{9} A_n \text{ per } n \geq 1. \end{cases}$$

Allora per $n \geq 1$, si ha

$$A_n = \frac{4}{9} A_{n-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^2 A_{n-2} = \cdots = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} A_1 = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{A_0}{3}$$

e quindi l'area totale vale

$$\begin{aligned} A_{\text{tot}} &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{A_0}{3} = A_0 \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] \\ &= A_0 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 4/9}\right] = A_0 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5}\right] = \frac{8}{5} A_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

# 5 Esercizi

1. Calcolare l'area in blu nella Figura 3. Si assuma che il raggio del cerchio più esterno (in blu) sia 1.

2. Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - n}.$$
Suggerimento: utilizzare il criterio del confronto asintotico.

3. Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} =: a_n.$$
Suggerimento: utilizzare il criterio della radice.

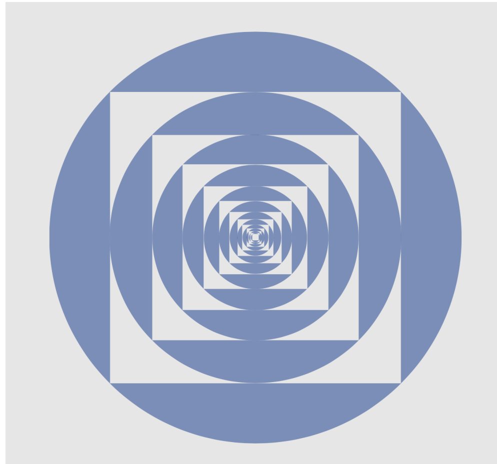

Figura 3

4. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =: a_n.$$

Suggerimento: utilizzare il criterio del confronto asintotico e il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$