Lezione 18

Saverio Salzo*

26 ottobre 2022

1 Limiti delle funzioni composte

Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e

$$f\colon A \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g\colon B \to \mathbb{R} \quad \text{con } f(A) \subset B.$$

Siano $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A e $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per B.

Teorema 1.1 (sul limite delle funzioni composte)**.** *Nelle assunzioni sopra elencate, supponiamo inoltre che*[a]

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *e* $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$

b) $f(x) \neq y_0$ *in un intorno di* x_0

Allora $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l$.
Inoltre se $y_0 \in B$ *e* $l = g(y_0)$*, allora la conclusione di sopra sussiste anche se non è verificata la condizione b).*

[a] Si noti che le ipotesi $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ e $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0, assicurano automaticamente che y_0 è di accumulazione per B.

Dimostrazione. Sia W un intorno di l in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esiste V intorno di y_0 in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$y \in V \cap B_{y_0} \;\Rightarrow\; g(y) \in W. \tag{1}$$

Dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ e che V è un intorno di y_0, risulta che

$$f(x) \in V \text{ in un intorno di } x_0. \tag{2}$$

Ma dall'ipotesi $b)$ segue che

$$f(x) \neq y_0 \text{ in intorno di } x_0. \tag{3}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (`saverio.salzo@uniroma1.it`).

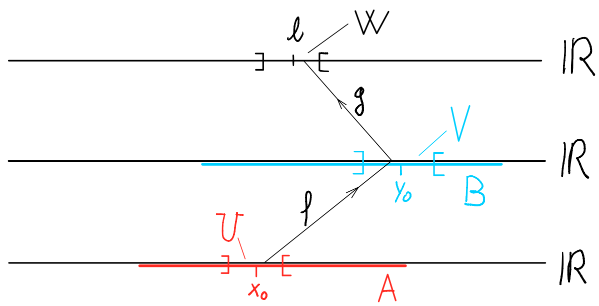

Figura 1: Illustrazione della dimostrazione del Teorema 1.1 sui limiti delle funzioni composte.

Allora, come al solito, le (2) e 3 si possono rendere vere in uno stesso intorno di x_0 (prendendo l'intersezione degli intorni). Perciò, essendo anche $f(x) \in B$, si ha

$$f(x) \in B \cap V_{y_0} \quad \text{in un intorno di } x_0.$$

Ma allora dalla (1) si ha che $g(f(x)) \in V$ in un intorno di x_0. $\square$

Osservazione 1.2. Il Teorema 1.1 stabilisce una regola di calcolo dei limiti per *sostituzione*. In altre parole se si vuole calcolare

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)),$$

allora formalmente si pone $y = f(x)$ e si controlla il limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Se $f(x) = y \to y_0$ per $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Notiamo che per denotare la funzione composta $g(f(x))$ si usa anche la notazione

$$g(y)\big|_{y=f(x)}.$$

In tal caso il teorema sui limiti delle funzioni composte si può scrivere come segue

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(y)\big|_{y=f(x)} = \lim_{y \to y_0} g(y).$$

Gli esempi che seguono chiariscono la questione.

Esempio 1.3.

(i) Abbiamo visto che $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{sen} x)/x = 1$. Inoltre abbiamo visto che $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x^2 = 0$. Allora si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x^2)}{1/x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\bigg|_{y=1/x^2} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1,$$

dove si è posto $y = 1/x^2$ e risulta che $y \to 0$ per $x \to +\infty$.

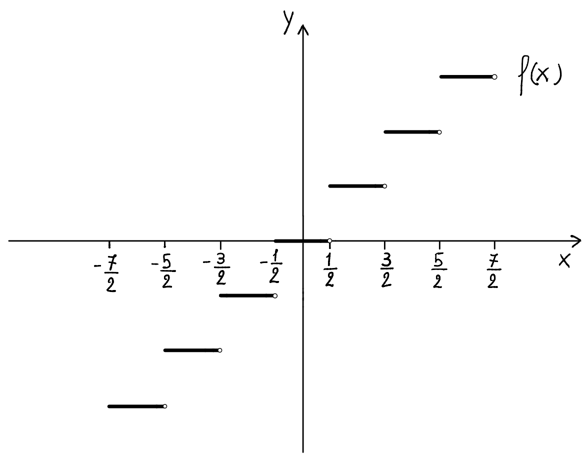

Figura 2: Illustrazione dell'Osservazione 1.4. La funzione f è la funzione parte intera traslata di $-1/2$. Quando si valuta $g(f(x))$ con $x \in [-1/2, 1/2[$ viene zero.

(ii) Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{1/x} \overset{\overset{y=\frac{1}{x}}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to+\infty} 2^y = +\infty,$$

dove si è fatta la sostituzione $y = 1/x$ e $y \to +\infty$ per $x \to 0^+$.

(iii) Si ha

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \lim_{x\to 1} \left|\frac{x+1}{x-1}\right|^2 = \lim_{x\to 1} y^2\Big|_{y=\left|\frac{x+1}{x-1}\right|} = \lim_{y\to+\infty} y^2 = +\infty.$$

Osservazione 1.4. L'ipotesi b) nel Teorema 1.1 è necessaria. Infatti se si prende la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; f(x) = \lfloor x + 1/2 \rfloor \quad (\lfloor\cdot\rfloor \text{ è la funzione parte intera})$$

e la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\colon\;\; g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{se } y \neq 0, \end{cases}$$

allora risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, ma $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1$. Quindi in questo caso non vale la regola della composizione dei limiti. Il motivo è che per ogni $x \in [-1/2, 1/2[\, :\, f(x) = 0$ e perciò non è possibile soddisfare l'ipotesi b).

2 Infinitesimi, infiniti e loro gerarchia

Definizione 2.1. Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reali di una variabile reale e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Se

$$f(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0,$$

allora si dice che f è un *infinitesimo in* x_0 o che $f(x)$ è un *infinitesimo al tendere di* x *a* x_0. Inoltre se,

$$|f(x)| \to +\infty \text{ per } x \to x_0,$$

allora si dice che f è un *infinito in* x_0 o che è un *infinito al tendere di* x *a* x_0.

Gli infinitesimi e gli infiniti si possono confrontare.

Definizione 2.2. Siano $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Supponiamo che f e g siano due infinitesimi (risp. infiniti) in x_0 e che $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0. Allora

- se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ con $l \neq 0$, si dice che f e g sono infinitesimi (risp. infiniti) *dello stesso ordine*.
- se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, si dice che f è un infinitesimo (risp. infinito) *di ordine superiore* (risp. *inferiore*) a g per $x \to x_0$.
- se $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, si dice che f è un infinitesimo (risp. infinito) *di ordine inferiore* (risp. *superiore*) a g per $x \to x_0$.

Se poi non si verifica alcune delle condizioni precedenti, allora si dice che f e g sono due infinitesimi (risp. infiniti) non confrontabili.

Osservazione 2.3. Se f e g sono entrambe diverse da zero in un intorno di x_0, allora dal teorema sui limiti delle funzioni reciproche, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0} \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = +\infty.$$

Perciò dire che f è un infinitesimo (risp. infinito) di ordine superiore (risp. inferiore) a g equivale a dire che g è un infinitesimo (risp infinito) di ordine inferiore (risp. superiore) a f.

Proposizione 2.4. *Vale il seguente*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty.$$

Dimostrazione. Evidentemente, per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, risulta

$$\begin{aligned} e^n > 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &\geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &= 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + n + \frac{n^2}{2} > \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*: \ \frac{e^n}{n} > \frac{n}{2}$$

e la tesi segue per confronto, dato che $n/2 \to +\infty$ per $n \to +\infty$. □

Proposizione 2.5. *Sia* $a > 1$ *e* $\alpha > 0$. *Valgono i seguenti limiti*

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^x = 0.$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to0} x^\alpha \log_a x = 0.$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty.$

Dimostrazione. (i): Proviamo prima il caso $a = e$ e $\alpha = 1$. Dato che, per ogni $x > 0$, risulta $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, allora

$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{e^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

Poi, utilizzando il risultato nella proposizione precedente e il teorema sui limiti delle funzioni composte, notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor + 1} = \lim_{x\to+\infty} \left.\frac{e^n}{n+1}\right|_{n=\lfloor x \rfloor} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n}\frac{n}{n+1} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty.$$

Quindi per confronto si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Proviamo ora il caso $a > 1$ e $\alpha = 1$. Si ha

$$\frac{a^x}{x} = \frac{e^{x\log a}}{x} = \frac{e^{x\log a}}{x\log a}\log a.$$

Dato che $\log a > 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \log a \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x\log a}}{x\log a} = \log a \lim_{x\to+\infty} \left.\frac{e^y}{y}\right|_{y=x\log a} = \log a \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$$

Infine per il caso $\alpha > 0$, si ha
$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{a^{x/\alpha}}{x/\alpha}\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$$
e chiaramente
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{a^{x/\alpha}}{x/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lim_{x\to+\infty} \frac{a^y}{y}\Big|_{y=x/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\lim_{y\to+\infty}\frac{a^y}{y} = \frac{1}{\alpha}(+\infty) = +\infty.$$
In definitiva
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} t^\alpha\Big|_{t=\frac{1}{\alpha}\frac{a^{x/\alpha}}{x/\alpha}} = \lim_{t\to+\infty} t^\alpha = +\infty.$$

(ii): Ci si riconduce al caso precedente in questo modo
$$\lim_{x\to-\infty}(-x)^\alpha a^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)^\alpha}{a^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{y^\alpha}{a^y}\Big|_{|y=-x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^\alpha}{a^y} = 0.$$

(iii): Si nota che $y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; a^y = x$ e quindi
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{a^{\alpha y}}\Big|_{y=\log_a x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{a^{\alpha y}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\alpha y}{a^{\alpha y}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{a^t}\Big|_{t=\alpha y} = \frac{1}{\alpha}0 = 0.$$

(iv): Si pone $y = 1/x$ e allora
$$\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log_a x = \lim_{y\to+\infty}\frac{\log_a y^{-1}}{y^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\log_a y}{y^\alpha} = 0. \qquad \square$$

(v): Per ogni $x > 0$ si ha
$$\frac{x^x}{a^x} = \frac{e^{x\log x}}{e^{x\log a}} = e^{x(\log x - \log a)}.$$
Dato che $\lim_{x\to+\infty} x(\log x - \log a) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$ e $\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty} x^x/a^x = +\infty$.

Osservazione 2.6. Alcune volte quando $f(x)$ è un infinito (risp. infinitesimo) di ordine inferiore a $g(x)$ per $x \to x_0$, cioè se $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 0$ (risp. $\lim_{x\to x_0}|f(x)|/|g(x)| = +\infty$) si scrive
$$f(x) \preccurlyeq g(x) \quad \text{per } x \to x_0$$
Allora la Proposizione 2.5 stabilisce la seguente gerarchia di infiniti
$$\log_a \preccurlyeq x^\alpha \preccurlyeq a^x \preccurlyeq x^x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Osservazione 2.7. Relazioni analoghe per le successioni si possono dedurre dalle relazioni per le funzioni restringendo il dominio ai numeri naturali.[1]

[1] Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, allora per il teorema sul limite di una restrizione di funzione, $\lim_{n\to+\infty} f_{|\mathbb{N}}(n) = l$.

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0.$
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{a^n} = +\infty.$

Per le successioni ci sono ulteriori infiniti e infinitesimi. Per il confronto di tali infiniti o infinitesimi si usa il seguente criterio.

Proposizione 2.8 (criterio del rapporto per successioni)**.** *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale a termini strettamente positivi e supponiamo che*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty].$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } l > 1 \\ 0 & \textit{se } l < 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $l < 1$. Prendiamo $q \in \left]l, 1\right[$. Allora, per il teorema della permanenza delle disuguaglianze, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ n > \nu \ \Rightarrow\ 0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \ \Rightarrow\ a_{n+1} < q a_n.$$

Quindi per ogni $n > \nu$, iterando la disuguaglianza di sopra

$$a_n \le q a_{n-1} \le q^2 a_{n-2} \le \cdots \le q^{n-\nu-1} a_{\nu+1} = q^n \frac{a_{\nu+1}}{q^{\nu+1}}.$$

Ricordando che $q^n \to 0$ per $n \to +\infty$ (essendo $0 < q < 1$), per il teorema dei carabinieri risulta che $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Poi se $l > 1$, allora preso $q \in \left]1, l\right[$, risulta $l > q$ e di nuovo per il teorema della permanenza delle disuguaglianze, risulta che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > \nu\colon\ a_{n+1} > q a_n$$

e come prima iterando la disuguaglianza si ha

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > \nu\colon\ a_n > q^n \frac{a_{\nu+1}}{q^{\nu+1}}.$$

Adesso $q > 1$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ e per confronto risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. □

Proposizione 2.9. *Valgono i seguenti limiti.*

(i) *Per $a > 1$, risulta* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$

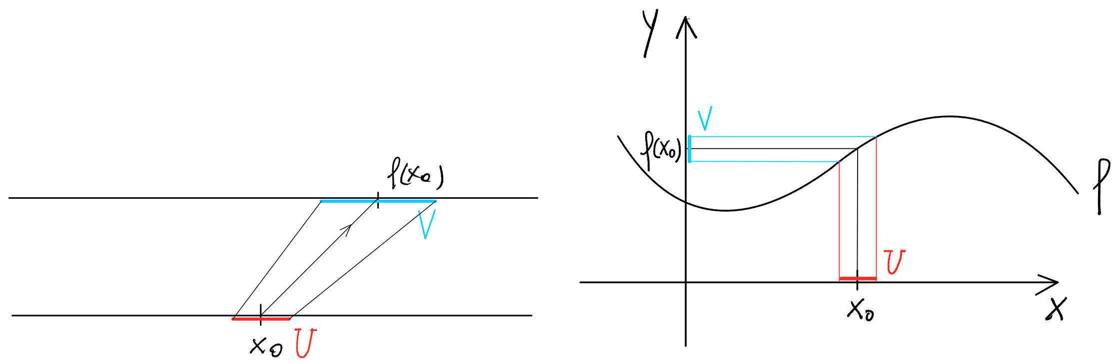

Figura 3: Illustrazione della definizione di funzioni continue.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$

Quindi si ha $n^n \succcurlyeq n! \succcurlyeq a^n$.

Dimostrazione. In tutti i casi si applica il criterio del rapporto per successioni.

(i): Poniamo $a_n = n!/a^n$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}}\frac{a^n}{n!} = \frac{n+1}{a} \to +\infty.$$

(ii): Poniamo $a_n = n^n/n!$ e applichiamo il criterio del rapporto. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n!}\frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1.$$

□

3 Funzioni continue

Definizione 3.1. Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che f *è continua in* x_0 se

per ogni V intorno di $f(x_0)$ esiste U intorno di x_0 tale che $f(U \cap A) \subset V$.

Se f è continua in tutti i punti di un insieme $B \subset A$, si dice che f *è continua in* B *(o su* B*)*. La funzione f di dice *continua* se è continua in A (ossia in tutto il suo insieme di definizione).

Osservazione 3.2. Chiaramente la continuità in x_0 si può scrivere come

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0 \text{ t.c. } \forall\,x \in A\colon\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Proposizione 3.3. *Sia $f\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Allora, valgono le seguenti proposizioni.*

(i) *Se x_0 è punto isolato di A, allora f è continua in x_0.*

(ii) *Se x_0 è punto di accumulazione per A, allora: f è continua in x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Dimostrazione. (i): Supponiamo che x_0 sia punto isolato di A. Questo significa che esiste un intorno U di x_0 tale che $U \cap A = \{x_0\}$. Allora è chiaro che per qualsiasi intorno V di $f(x_0)$ risulta $f(U \cap A) = \{f(x_0)\} \subset V$.

(ii): Supponiamo che x_0 sia punto di accumulazione per A. Allora dato che ogni intorno V di $f(x_0)$ contiene $f(x_0)$, risulta che

$$\forall\, U \text{ intorno di } x_0\colon\; f(U \cap A) \subset V \;\Leftrightarrow\; f(U \cap A_{x_0}) \subset V.$$

Perciò, la definizione di continuità in x_0 equivale a quella che $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$. $\square$

Esempio 3.4.

(i) Abbiamo già dimostrato che se $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, allora

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\colon\; \lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Perciò $P(x)$ è continua su $\mathbb{R}$.

(ii) Abbiamo visto che per una funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

risulta che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

per ogni x_0 appartenente all'insieme di definizione di P/Q. Quindi P/Q è continua nel suo insieme di definizione.