Lezione 36

Saverio Salzo*

30 novembre 2022

1 Teoremi di Cauchy e di de l'Hôpital

In questa sezione ci occupiamo di un metodo che può essere utile per risolvere limiti di forme indeterminate del tipo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{con } \begin{cases} \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty. \end{cases}$$

Cominciamo con un risultato preliminare.

Teorema 1.1 (di Cauchy)**.** *Siano $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$. Supponiamo che, per ogni $x \in]a,b[:\ g'(x) \neq 0$. Allora*

$$g(a) \neq g(b) \quad \textit{e} \quad \exists\, c \in]a,b[\ \textit{ tale che } \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che $g(a) \neq g(b)$ perché se fosse $g(a) = g(b)$, per il Teorema di Rolle, avrei che esisterebbe $x \in]a,b[$ con $g'(x) = 0$ e questo sarebbe in contrasto con le ipotesi. Notiamo adesso che la tesi è equivalente a provare che

$$(f(b)-f(a))g'(c) - f'(c)(g(b)-g(a)) = 0. \tag{1}$$

Questo suggerisce di definire la funzione $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in [a,b]\colon\ h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - f(x)(g(b)-g(a)).$$

Chiaramente h è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ e inoltre

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b)-f(a))g(a) - f(a)(g(b)-g(a)) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \\ &= (f(b)-f(a))g(b) - f(b)(g(b)-g(a)) = h(b). \end{aligned}$$

Allora, per il Teorema di Rolle, esiste $c \in]a,b[$ tale che $h'(c) = 0$, da cui segue la (1). □

*DIAG, Sapienza Università di Roma (`saverio.salzo@uniroma1.it`).

Teorema 1.2 (di de l'Hôpital, caso 0/0)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per I. Poniamo $I_{x_0} = I \setminus \{x_0\}$. Siano $f, g\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in I_{x_0} e supponiamo che*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

(ii) $\forall\, x \in I_{x_0} \colon g'(x) \neq 0$.

(iii) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora, per ogni $x \in I_{x_0}$: $g(x) \neq 0$ e $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Dimostrazione. Evidentemente si possono avere due casi $x_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 = \pm\infty$. Consideriamo separatamente questi due casi.
Caso $x_0 \in \mathbb{R}$. In questa situazione, x_0 può essere interno a I oppure un suo estremo (si ricordi che x_0 è di accumulazione per I). Allora, dall'ipotesi (i) segue che f e g si possono prolungare per continuità in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Così, possiamo assumere che f e g siano definite e continue in un intervallo I che contiene x_0 e siano derivabili in I_{x_0}. Perciò per il Teorema 1.1 di Cauchy si ha che per ogni $x \in I_{x_0}$

$$\begin{cases} x < x_0 \;\Rightarrow\; g(x) \neq g(x_0) \quad \text{e} \quad \exists\, c(x) \in \,]x, x_0[\; \text{tale che } \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{g(x_0) - g(x)} = \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))} \\[2ex] x_0 < x \;\Rightarrow\; g(x_0) \neq g(x) \quad \text{e} \quad \exists\, c(x) \in \,]x_0, x[\; \text{tale che } \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \end{cases}$$

Quindi, in ogni caso risulta che per ogni $x \in I_{x_0}$, $g(x) \neq g(x_0)$ e

$$\exists\, c(x) \in I_{x_0} \text{ con } |c(x) - x_0| \leq |x - x_0| \text{ tale che } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Allora si ha $\lim_{x \to x_0} c(x) = x_0$ e, dato che per ipotesi $\lim_{t \to x_0} f'(t)/g'(t) = l$, per il teorema sui limiti delle funzioni composte, risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = l.$$

Caso $x_0 = \pm\infty$: Supponiamo per fissare le idee che $x_0 = +\infty$ (se $x_0 = -\infty$, si procede allo stesso modo). Quindi $+\infty$ è l'estremo destro dell'intervallo I e sicuramente esiste $a > 0$ tale che $[a, +\infty[\, \subset I$. Definiamo allora le funzioni

- $F(t) = f(1/t)$ con $t \in \,]0, 1/a]$
- $G(t) = g(1/t)$ con $t \in \,]0, 1/a]$.

Evidentemente, dal teorema sui limiti delle funzioni composte risulta

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{t\to 0} f(1/t) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} G(t) = \lim_{t\to 0} g(1/t) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = 0.$$

Inoltre F e G sono derivabili in $]0, 1/a]$ e

$$\forall\, t \in\,]0, 1/a] : \; F'(t) = f'(1/t)(-1/t^2) \quad \text{e} \quad G'(t) = g'(1/t)(-1/t^2) \neq 0$$

e quindi, applicando nuovamente il teorema sui limiti delle funzioni composte

$$\lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Perciò le funzioni F e G soddisfano le ipotesi della situazione analizzata nel caso precedente e quindi si può concludere che $G(t) \neq 0$ per ogni $t \in\,]0, 1/a]$ e

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = l.$$

Ma allora con un'ultima applicazione del teorema sui limiti delle funzioni composte si ha

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{F(1/x)}{G(1/x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = l.$$

Il teorema è completamente dimostrato. □

Diamo ora senza dimostrazione il teorema di de l'Hôpital per la forma indeterminata ∞/∞ (in effetti si chiede soltanto che il denominatore sia un infinito).

Teorema 1.3 (di de l'Hôpital, caso $\cdot/\infty$)**.** *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per I. Poniamo $I_{x_0} = I \setminus \{x_0\}$. Siano $f, g\colon I_{x_0} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in I_{x_0} e supponiamo che*

(i) $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

(ii) $\forall\, x \in I_{x_0}\colon g'(x) \neq 0$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora, $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 e $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Osservazione 1.4. Se il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
non esiste, allora non si può dire nulla sul limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$
Nel seguito, quando applichiamo il teorema di de l'Hôpital scriveremo
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
con una H sopra il segno di uguaglianza (che sta per Hôpital) e ricorda che si tratta di una uguaglianza nelle ipotesi del teorema di de l'Hôpital, che in particolare richiede che il limite a destra esiste. Come controesempio per la situazione discussa sopra possiamo considerare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{x}.$$
Infatti, si tratta di una forma indeterminata del tipo $0/0$ e chiaramente
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{x}=\lim_{x\to x_0}x\operatorname{sen}(1/x)=0,$$
ma per il limite del rapporto delle derivate si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\operatorname{sen}(1/x)+x^2\cos(1/x)(-1/x^2)}{1}=\lim_{x\to 0}2x\operatorname{sen}(1/x)-\cos(1/x)$$
e quest'ultimo limite non esiste. Si vede quindi come in questo caso non è vero che
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Un ulteriore controesempio per il caso ∞/∞ è dato dal seguente limite
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\operatorname{sen}x}{2x+\operatorname{sen}x}.$$
Infatti si ha
$$\frac{x-\operatorname{sen}x}{x+\operatorname{sen}x}=\frac{2-\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{2+\frac{\operatorname{sen}x}{x}}\to 1 \text{ per } x\to+\infty.$$
Ma se si calcola il limite delle derivate, si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos x}{2+\cos x}$$
e questo limite non esiste (infatti basta considerare le restrizioni agli insiemi $B_1=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x=1\}$ e $B_2=\{x\in\mathbb{R}\mid\cos x=-1\}$ per avere due limiti distinti).

Osservazione 1.5. Il teorema sui limiti della derivata che abbiamo visto nella lezione 30 si può ottenere dal teorema di de l'Hôpital (in effetti è un caso particolare di questo). Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in I_{x_0} (con $x_0 \in I$). Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora basta prendere $g(x) = x - x_0$ e evidentemente $g(x)$ e $f(x) - f(x_0)$ tendono a zero per $x \to x_0$, e inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{1} = l.$$

Quindi esiste il limite del rapporto incrementale ed è uguale a l; perciò se $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile e $f'(x) = l$.

Esempio 1.6.

(i) Consideriamo il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Si tratta di una forma indeterminata $0/0$ e la derivata del denominatore non si annulla mai. Facciamo vedere che si può risolvere immediatamente con il Teorema 1.2. Infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

(ii) Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Si tratta di una forma indeterminata $0/0$ e la derivata del denominatore è diversa da zero per $x \neq 0$. Dunque, le ipotesi del Teorema 1.2 sono verificate e si può concludere che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

(iii) Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \log(\cos x)}{x \operatorname{sen} x}.$$

Di nuovo, si tratta di una forma indeterminata $0/0$ e la derivata del denominatore è $\operatorname{sen} x + x\cos x$ che è diversa da zero per $x \in \,]0, \pi/2[$. Allora per il Teorema 1.2 si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \log(\cos x)}{x \operatorname{sen} x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(iv) Consideriamo il limite

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg}(2x)}.$$

Notando che

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\operatorname{sen}(x+\pi/2))}{\operatorname{tg}(2x+\pi)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{tg}(2x)},$$

il limite si può risolvere mediante l'uso di limiti notevoli come segue

$$\frac{\log(\cos x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \underbrace{\frac{\log(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\substack{\downarrow \\ -1/2}} \underbrace{\frac{2x}{\operatorname{sen}(2x)}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} \underbrace{\frac{x\cos(2x)}{2}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \to 0 \quad \text{per } x \to 0.$$

In alternativa, applicando il teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg}(2x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{2}{\cos^2(2x)}} = \frac{0}{-2} = 0.$$

2 Approssimazioni polinomiali e Formula di Taylor

Cominciamo con il problema delle approssimazione lineari di funzioni. Si tratta di trovare una funzione lineare

$$p(x) = ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

che approssima una data funzione f in un intorno di x_0 studiando l'errore

$$r(x) := f(x) - p(x) \text{ per } x \to x_0.$$

Ovviamente una condizione minima perché questa approssimazione sia ragionevole è che

$$r(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0. \tag{2}$$

Ora, se la funzione f è continua in x_0 si ha che $r(x) = f(x) - p(x) \to f(x_0) - P(x_0)$ per $x \to x_0$ e quindi, la condizione (2) è equivalente a

$$f(x_0) = P(x_0) = ax_0 + b \ \Leftrightarrow \ b = f(x_0) - ax_0;$$

e questo conduce ad una espressione di p del tipo

$$p(x) = f(x_0) + a(x - x_0).$$

Osserviamo comunque che la condizione (2) soltanto non garantisce una buona approssimazione della funzione f nelle vicinanze del punto x_0. A tal fine, infatti, si deve richiedere che l'errore vada a zero abbastanza rapidamente quando $x \to x_0$. Si può allora richiedere che

$$\frac{r(x)}{x - x_0} \to 0 \text{ per } x \to x_0. \tag{3}$$

Notiamo adesso che

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a.$$

Perciò la condizione (3) è soddisfatta se e solo se la funzione f è derivabile in x_0 e $a = f'(x_0)$. Possiamo riassumere quanto discusso finora con la seguente proposizione

Proposizione 2.1. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ definita in un intervallo I e $x_0 \in I$. Allora sono equivalenti*

(i) *f è derivabile in x_0*

(ii) *esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che* $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$

e vera l'una e quindi l'altra risulta $a = f'(x_0)$.

Quindi la funzione lineare

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

è l'unica funzione lineare che verifica la condizione (3).

Generalizziamo adesso il problema dell'approssimazione considerando polinomi di grado maggiore di 1. Ricordiamo che un polinomio si scrive come

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_n x^n \tag{4}$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ e che il *grado del polinomio* p, che si indica con $\operatorname{grad} p$, è il più grande esponente dei monomi non nulli di p. Quindi se in (4) $b_n \neq 0$, allora $\operatorname{grad} p = n$, mentre se $b_n = 0$, allora $\operatorname{grad} p < n$. Allora un generico polinomio *p di grado al più n* avrà la forma (4) con i coefficienti $b_0, b_1, \cdots, b_n$ che eventualmente potranno anche essere zero.

Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un intervallo I e $x_0 \in I$. Il problema che ci poniamo è quello di trovare un polinomio $p(x)$ di grado al più $n \in \mathbb{N}^*$, in modo che

$$r(x) := f(x) - p(x) \to 0 \ \text{ abbastanza rapidamente per } x \to x_0.$$

Cominciamo con il notare che ogni polinomio si può riscrivere *centrato in un punto arbitrario* x_0. Con questo intendiamo che il polinomio (4) si può mettere sempre nella forma

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

per opportuni coefficienti $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Per esempio se $p(x) = 4 + 2x - x^2 + 3x^3$, allora se si prende come riferimento il punto $x_0 = 1$ si può scrivere

$$\begin{aligned} p(x) &= 4 + 2(x - 1 + 1) - (x - 1 + 1)^2 + 3(x - 1 + 1)^3 \\ &= 4 + [2 + 2(x - 1)] - [1 + 2(x - 1) + (x - 1)^2] + 3[1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3] \\ &= 8 + 9(x - 1) + 8(x - 1)^2 + 3(x - 1)^3. \end{aligned}$$

In generale vale il seguente risultato.

Proposizione 2.2. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Ogni polinomio a coefficienti reali di grado al più $n \geq 1$ si può scrivere nella forma*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \qquad \text{con} \quad a_k \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dimostrazione. Sia $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Allora

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0 + x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x - x_0)^i x_0^{k-i} \right] \\
&= b_0 \\
&+ b_1[x_0 + (x - x_0)] \\
&+ b_2[x_0^2 + 2x_0(x - x_0) + (x - x_0)^2] \\
&+ b_3[x_0^3 + 3x_0^2(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ b_n[x_0^n + \tbinom{n}{1} x_0^{n-1}(x - x_0) + \tbinom{n}{2} x_0^{n-2}(x - x_0)^2 + \cdots + \tbinom{n}{n-1} x_0 (x - x_0)^{n-1} + (x - x_0)^n] \\
&= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n,
\end{aligned}$$

dove si è posto $a_k = \sum_{i=k}^{n} b_i \binom{i}{k} x_0^{i-k}$. □

Proposizione 2.3. *Supponiamo che p sia un polinomio di grado al più n, I un intervallo non banale (con interno non vuoto) di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ e consideriamo la restrizione $p_{|I} \colon I \to \mathbb{R}$ del polinomio all'intervallo I. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p_{|I}(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \implies p = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{x \to x_0} p_{|I}(x)/(x - x_0)^n = 0$. Sia $k \in \mathbb{N}$ con $0 \le k < n$. Allora

$$\frac{p_{|I}(x)}{(x - x_0)^k} = \underbrace{\frac{p_{|I}(x)}{(x - x_0)^n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{(x - x_0)^{n-k}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \to x_0} p_{|I}(x) = 0 \tag{C-0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p_{|I}(x)}{x - x_0} = 0 \tag{C-1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p_{|I}(x)}{(x - x_0)^2} = 0 \tag{C-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p_{|I}(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{C-n}$$

Per la Proposizione 2.2 p si può scrivere nella forma

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n. \tag{6}$$

Allora, dall'espressione (6), è chiaro che

$$\begin{array}{ll}
\text{(C-0)} & \Rightarrow\ a_0 = 0 \\
a_0 = 0 \text{ e (C-1)} & \Rightarrow\ a_1 = 0 \\
a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 0 \text{ e (C-2)} & \Rightarrow\ a_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \Rightarrow\ \cdots\cdots \\
a_0 = 0 \text{ e } a_1 = 0 \text{ e } \cdots \text{ e } a_{n-1} = 0 \text{ e (C-}n\text{)} & \Rightarrow a_n = 0.
\end{array}$$

Da cui segue che $p = 0$. □