Lezione 27

Saverio Salzo*

11 novembre 2022

1 Derivata

La definizione di derivata prevede l'esistenza del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \tag{1}$$

con $l \in \mathbb{R}$. Notiamo che questo limite, si può scrivere equivalentemente come segue

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l, \tag{2}$$

dove h denota l'incremento $x - x_0$ (positivo o negativo). In effetti si tratta semplicemente di un cambio di variabili nel limite (teorema sui limiti delle funzioni composte). Nel seguito useremo indifferentemente la forma (1) o (2).

Se f non è derivabile in x_0, ma esiste il limite (1), tale limite si chiama ancora *derivata di f in x_0* e, con un po' di abuso di notazione, si denota con uno dei simboli $f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}(x_0)$ e $\dot{f}(x_0)$. Pertanto, si dice che *f è dotata di derivata nel punto x_0* se esiste (finito o no) il limite (1).

Osservazione 1.1. Nella definizione di funzione derivabile, si chiede che il punto x_0 sia un punto di A che sia anche di accumulazione per A. Quest'ultima condizione (essere di accumulazione) è automaticamente verificate se A è una unione di intervalli di $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.2 (Interpretazione cinematica del concetto di derivata)**.** Sia t la variabile tempo e considero la funzione $t \mapsto s(t)$, dove $s(t)$ rappresenta lo spazio percorso da un punto lungo una retta r all'istante t. In un certo istante t_0, lo spazio percorso è $s(t_0)$. Considero il rapporto incrementale

$$t \mapsto \frac{s(t) - s(s_0)}{t - t_0},$$

dove il rapporto $(s(t) - s(t_0))/(t - t_0)$ rappresenta la velocità media del punto nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$. Se tale funzione è derivabile in t_0, si ha che $s'(t_0)$ rappresenta la *velocità istantanea* del punto all'istante t_0.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

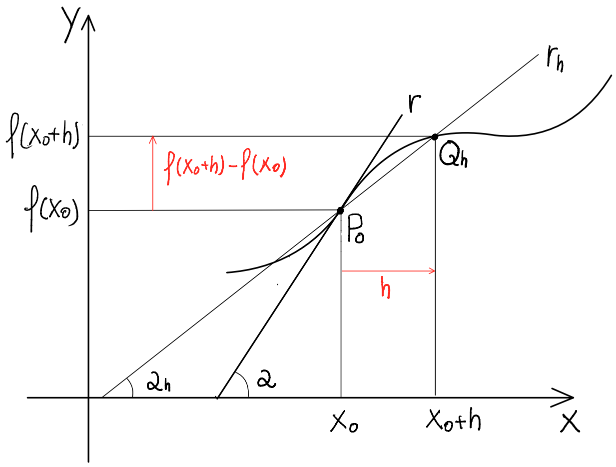

Figura 1: Significato geometrico della derivata. $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Osservazione 1.3 (Significato geometrico della derivata)**.** La derivata permette di risolvere il problema delle tangenti a una curva piana accennato all'inizio. Consideriamo il grafico di una funzione, come mostrato in Figura 1. Dalla geometria elementare deduciamo che

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \operatorname{tg} \alpha_h = \text{coefficiente angolare o pendenza della retta } r_h.$$

Quando $h \to 0$, $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è fisso e $Q_h = (x_0+h, f(x_0+h))$ si muove verso P_0 mantenendosi sul grafico di f e la retta r_h cambia direzione. Se f è derivabile in x_0, allora $\operatorname{tg} \alpha_h \to f'(x_0)$ per $h \to 0$ e le rette r_h tendono a una *retta limite* r, con pendenza $f'(x_0)$, che si chiama *retta tangente* al grafico di f nel punto P_0. In riferimento alla figura abbiamo dunque

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

e l'equazione della retta tangente nel punto P_0 è

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esempio 1.4.

(i) Una funzione costante è derivabile in ogni punto e la sua derivata vale sempre zero. Infatti se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è costante, con valore c, allora per ogni punto $x_0 \in A$, che sia anche di accumulazione per A, si ha

$$\forall\, x \in A_{x_0}\colon \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = 0,$$

cioè la funzione rapporto incrementale in x_0 è identicamente nulla e quindi il suo limite per $x \to x_0$ vale zero. In modo conciso si può scrivere che $Dc = 0$.

(ii) Siano $a, b \in \mathbb{R}$. La funzione affine $f(x) = ax + b$, definita in $A = \mathbb{R}$, è derivabile in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e risulta $f'(x_0) = a$. Infatti la funzione rapporto incrementale in x_0 è

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}: \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(ax + b) - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a,$$

quindi è costante e perciò converge a a. In altri termini si può scrivere che $D(ax+b) = a$.

(iii) La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e risulta $f'(x) = 2x$. Infatti se $x \in \mathbb{R}$, scrivendo il rapporto incrementale in x nella forma (2), si ha

$$\frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \to 2x \quad \text{per } h \to 0.$$

Il risultato di sopra si può scrivere come $Dx^2 = 2x$.

(iv) Si consideri la funzione $f(x) = 1/x$ definita sull'insieme $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Si ha allora per ogni $x \neq 0$ e $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x - (x + h)}{h(x + h)x} = -\frac{h}{h(x + h)x} = -\frac{1}{(x + h)x} \to -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } h \to 0. \end{aligned}$$

Risulta quindi che $D1/x = -1/x^2$.

(v) La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, perché in tali punti è localmente costante (cioè è costante in un intorno di detti punti). D'altra parte f non è derivabile in 0. Infatti

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}: \qquad \frac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x - 0} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x} = \frac{1}{|x|}$$

e chiaramente $\lim_{x\to 0} 1/|x| = +\infty$.

Proposizione 1.5. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in A$ punto di accumulazione di A. Allora*

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \;\Rightarrow\; f \text{ è continua in } x_0.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in A_{x_0}$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0).$$

Quindi se f è derivabile in x_0 risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0.$$

E allora, per il teorema sul prodotto dei limiti, risulta $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Questo prova che f è continua in x_0. □

Osservazione 1.6. Osserviamo che se $f'(x_0) = \pm\infty$, allora non è detto che f sia continua in x_0. Si veda l'Esempio 1.4(v).

Esempio 1.7 (funzioni continue ma non derivabili)**.**

(i) La funzione $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in 0. Infatti il rapporto incrementale in 0 è
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn}(x)$$
e abbiamo visto che sgn non ha limite per $x \to 0$. La funzione f è poi derivabile in $x_0 \neq 0$ e vale
$$f'(x_0) = \operatorname{sgn}(x_0).$$
Infatti se, per esempio $x_0 > 0$, preso $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}_+^*$, si ha
$$\forall\, x \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$
Quindi il rapporto incrementale è localmente costante in un intorno di x_0 e vale 1; da cui segue che $f'(x_0) = 1$.

(ii) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$, definita in $A = \mathbb{R}_+$ è continua in A ma non è derivabile in 0. Infatti
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

(iii) Un esempio simile al precedente è la funzione $\sqrt[3]{\cdot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma in zero non è derivabile. Infatti
$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \to +\infty \text{ per } x \to 0.$$

(iv) Si consideri, per esempio, la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
La funzione f è continua in $\mathbb{R}$ (incluso in 0), ma non è derivabile in 0. Infatti il rapporto incrementale in 0 vale
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x \sin(1/x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
e si è già visto che il limite di $\sin(1/x)$ per $x \to 0$ non esiste.

(v) Fino al XIX secolo si credeva che le funzioni continue fossero derivabili in tutti i punti ad eccezione di pochi punti isolati (come i casi trattati nei punti precedenti). Bolzano e poi Weierstreass hanno mostrato funzioni continue in un intervallo e ivi mai derivabili. Per esempio la funzione di Weierstrass si scrive

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

dove $0 < a < 1$ e $ab > 1 + 3\pi/2$. Essa è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ ma non è derivabile in alcun punto di $\mathbb{R}$.

2 Derivate delle funzioni elementari (parte I)

Derivata 1

Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

$$\boxed{Dx^n = nx^{n-1}} \tag{3}$$

Dimostrazione. La funzione potenza n-esima (con $n \geq 1$), $p_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon x \mapsto x^n$ è derivabile in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ e risulta $p_n'(x) = nx^{n-1}$. Infatti, ricordando la formula del binomio di Newton, il rapporto incrementale in x si scrive

$$\begin{aligned}
\frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} \\
&= nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \cdots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + \binom{n}{n} h^{n-1}.
\end{aligned}$$

Quindi, il rapporto incrementale è un polinomio $P(h)$ di grado $n-1$ che è una funzione continua. Perciò $\lim_{h\to 0} P(h) = P(0) = nx^{n-1}$. □

Derivata 2

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}} \tag{4}$$

Dimostrazione. La funzione potenza con esponente reale α è la funzione $f \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^\alpha$. Sia $x \in \mathbb{R}_+^*$. Allora

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} = x^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}}.$$

Ricordando il limite notevole $\lim_{y\to 0}[(1+y)^\alpha - 1]/y = \alpha$, si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{h/x} = \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha.$$

Perciò $(f(x+h) - f(x))/h \to \alpha x^{\alpha-1}$ per $h \to 0$. $\square$

Derivata 3

$$\boxed{D \sin x = \cos x} \tag{5}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Infatti scrivendo il rapporto incrementale e usando le formule di addizione si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \frac{\cos h - 1}{h^2} h + \cos x \frac{\sin h}{h}.
\end{aligned}$$

Perciò, utilizzando i limiti notevoli sul seno e coseno, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \sin x \frac{\cos h - 1}{h^2} h + \cos x \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.
\end{aligned}$$ $\square$

Derivata 4

$$\boxed{D \cos x = -\sin x} \tag{6}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Infatti scrivendo il rapporto incrementale e usando le formule di addizione si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\
&= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\
&= \cos x \frac{\cos h - 1}{h^2} h - \sin x \frac{\sin h}{h}.
\end{aligned}$$

Adesso come prima si ha

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} &= \lim_{h\to 0}\cos x\frac{\cos h-1}{h^2}h-\sin x\frac{\sin h}{h}\\ &= \cos x\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x.\end{aligned}$$

□

Derivata 5

$$\boxed{Da^x = a^x\log a} \tag{7}$$

Dimostrazione. Sia $x\in\mathbb{R}$. Allora

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\frac{a^x a^h-a^x}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}\to a^x\log a \quad \text{per } h\to 0,$$

dove si è utilizzato il limite notevole $\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h=0$. □

Osservazione 2.1. Dalla formula (8) segue che se $a=e$ (numero di Nepero), si ha

$$\boxed{De^x = e^x} \tag{8}$$

quindi la funzione $f(x)=e^x$ verifica le condizioni

$$\begin{cases} f'(x)=f(x)\\ f(0)=1.\end{cases}$$

Questo è un primo esempio di equazione differenziale con condizioni iniziali (e si chiama anche problema di Cauchy).

3 Regole di derivazione

Proposizione 3.1. *Sia $A\subset\mathbb{R}$ e $x_0\in A$ punto di accumulazione per A. Siano $f\colon A\to\mathbb{R}$ e $g\colon A\to\mathbb{R}$ funzioni derivabili in x_0 e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti proposizioni.*

(i) *$\alpha f+\beta g$ è derivabile in x_0 e*

$$(\alpha f+\beta g)'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)$$

(ii) *fg è derivabile in x_0 e*

$$(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) *Se $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in A$, allora f/g è derivabile in x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione. (i): Per ogni $x \in A_{x_0}$ risulta

$$\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x_0)}{x-x_0} = \alpha\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \beta\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0), \tag{9}$$

la tesi segue dalle regole del calcolo dei limiti per la somma e il prodotto per uno scalare.

(ii): Per ogni $x \in A_{x_0}$ risulta

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0).\end{aligned}$$

Dato che valgono i limiti (9) ed inoltre $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, di nuovo la tesi segue dalle regole del calcolo dei limiti per la somma e il prodotto di funzioni.

(iii): Consideriamo prima il caso che $f \equiv 1$. Per ogni $x \in A_{x_0}$ risulta

$$\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\left(\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}\right).$$

Dato che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} = -g'(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

si ha che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(1/g)(x)-(1/g)(x_0)}{x-x_0} = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \tag{10}$$

Per il caso generale basta osservare che $f/g = f(1/g)$ e applicare (10) e (ii). □

Osservazione 3.2. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e siano $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in I e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora la Proposizione 3.1(i) stabilisce che $\alpha f + \beta g$ è derivabile in I e risulta

$$D(\alpha f+\beta g) = \alpha Df + \beta Dg.$$

In altri termini se indichiamo con $\mathcal{D}(I)$ l'insieme delle funzioni reali definite e derivabili in I, si ha che $\mathcal{D}(I)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e la derivata $D\colon \mathcal{D}(I) \to \mathbb{R}^I$ è un'applicazione lineare.

Esempio 3.3.

(i) La regola (3) per la derivazione della funzione potenza n-esima, si può provare anche in mediante la Proposizione 3.1(ii) per induzione su n. Infatti la (3) è chiaramente vera per $n = 1$. Supponiamo che essa sia vera per $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora dalla regola di derivazione del prodotto si ha

$$Dx^{n+1} = D(x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

(ii) Calcoliamo la derivata della funzione

$$f(x) = x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Evidentemente

$$f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

Allora dalla Proposizione 3.1(iii) (con $f \equiv 1$) e dalla regola (3), si ha

$$f'(x) = -\frac{Dx^n}{x^{2n}} = -n\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = (-n)x^{(-n)-1}.$$

Perciò la regola (3) vale anche quando l'esponente è negativo.

(iii) Calcoliamo la derivata della funzione

$$f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Utilizzando la Proposizione 3.1(iii), si ha

$$\begin{aligned} D\frac{3x^2 - 1}{x^2 + 1} &= \frac{[D(3x^2 - 1)](x^2 + 1) - (3x^2 - 1)D(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x(x^2 + 1) - (3x^2 - 1)2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{8x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

(iv) Calcoliamo la derivata della funzione tangente $\operatorname{tg}\colon \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$. Dato che

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})\colon \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

possiamo applicare la regola di derivazione di un rapporto di funzioni. Si ha

$$D \operatorname{tg} x = \frac{(D \operatorname{sen} x)\cos x - \operatorname{sen} x(D\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$