Lezione 30

Saverio Salzo*

17 novembre 2022

1 Conseguenze del Teorema di Lagrange (parte II)

Abbiamo visto nella lezione precedente alcuni criteri di monotonia. In particolare se la derivata di una funzione è strettamente positiva (risp. negativa) in un intervallo, allora la funzione è strettamente crescente (risp. decrescente). Questa condizione è in realtà troppo forte, infatti non è soddisfatta per esempio per la funzione x^3. Il seguente risultato da' una condizione più debole per la stretta monotonia di una funzione in cui è ammesso che la derivata possa annullarsi in un sottoinsieme che non sia troppo grande (per esempio un numero finito di punti).

Teorema 1.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in $\mathring{I}$. Supponiamo che*

(i) $\forall\, x \in \mathring{I}\colon\ \ f'(x) \geq 0$

(ii) *l'insieme $\{x \in \mathring{I} \,|\, f'(x) = 0\}$ non contenga un intervallo.*[1]

Allora f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) in I.

Dimostrazione. Dalla prima proprietà segue che f è crescente. Se f non fosse strettamente crescente esisterebbero due punti $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Ma essendo f crescente risulta allora che, per ogni $x \in [x_1, x_2]$, $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$ e quindi f è costante in $[x_1, x_2]$. Perciò $f'(x) = 0$ su $]x_1, x_2[$, che contraddice la seconda assunzione. □

Teorema 1.2 (criterio per estremi locali)**.** *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $x_0 \in \mathring{A}$. Supponiamo che esista U intorno di x_0 tale che $U \subset A$, che f sia derivabile in U_{x_0} e*

$$\forall\, x \in U_{x_0}\colon \quad \begin{cases} x < x_0 \ \Rightarrow\ f'(x) > 0 \ \ (\textit{risp. } f'(x) < 0) \\ x > x_0 \ \Rightarrow\ f'(x) < 0 \ \ (\textit{risp. } f'(x) > 0). \end{cases}$$

Allora x_0 è punto di massimo (risp. minimo) locale proprio per f.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

[1] In altre parole, detto insieme deve avere interno vuoto.

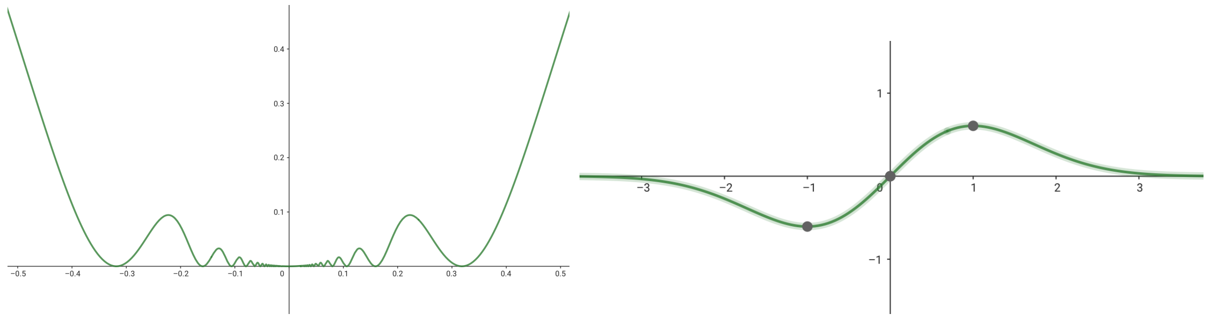

Figura 1: Funzioni considerate nell'Osservazione 1.3 (a sinistra) e nell'Esempio 1.4 (destra)

Dimostrazione. Supponiamo che $U =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Per il Teorema sui criteri di monotonia f è strettamente crescente (risp. decrescente) in $]x_0 - \delta, x_0]$ e strettamente decrescente (risp. crescente) in $[x_0, x_0 + \delta[$. Allora si ha

$$\forall\, x \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : \quad \begin{cases} x < x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0) \;\; (\text{risp. } f(x) > f(x_0)) \\ x > x_0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0) \;\; (\text{risp. } f(x) > f(x_0)). \end{cases}$$

Quindi x_0 è punto di massimo (risp. minimo) locale proprio. $\square$

Osservazione 1.3. Una funzione che ha un minimo in punto x_0 non è necessariamente crescente (risp. decrescente) in un intorno destro (risp. sinistro) di x_0. Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; f(x) = \begin{cases} 2x^2 \sin^2(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione è chiaramente derivabile in tutti i punti $x \neq 0$, perché prodotto e composizione di funzione derivabili. Nel caso $x = 0$, verifichiamo la derivabilità direttamente calcolando il limite del rapporto incrementale. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \operatorname{sen}^2(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}^2(1/x) = 0,$$

perché $\operatorname{sen}^2(1/x)$ è limitata. Dato che la funzione è sempre positiva e $f(0) = 0$, il punto 0 è un punto di minimo (assoluto) per f e inoltre $f'(0) = 0$. Ma, ci sono infiniti punti di minimo di f vicini quanto si vuole a 0 e sono quelli dove si annulla la funzione, cioè

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(1/x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{k\pi} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^*.$$

Perciò in ogni intorno $]-\delta, \delta[$ di 0 la funzione f oscilla infinite volte tra il valore 0 e valori strettamente positivi. Si veda Figura 1 (a sinistra).

Esempio 1.4 (identificazione di punti di minimo e massimo locali)**.** Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \ f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Evidentemente

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} + xe^{-\frac{1}{2}x^2}(-x) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Allora,

$$0 \le f'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2} \ \Leftrightarrow\ 0 \le 1-x^2 \ \Leftrightarrow\ x^2 \le 1 \ \Leftrightarrow\ x \in [-1,1].$$

Perciò si ha

$$f'(x) < 0 \text{ per } x \in\,]-\infty,-1[\,, \quad f'(x) > 0 \text{ per } x \in\,]-1,1[\,, \quad f'(x) < 0 \text{ per } x \in\,]1,+\infty[\,.$$

Allora, per il Teorema 1.2, il punto -1 è punto di minimo locale proprio per f e 1 è punto di massimo locale proprio per f. Si veda Figura 1 (a destra).

Esempio 1.5. Dimostriamo che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \ \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Definiamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \ f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1.$$

La derivata è $f'(x) = -\operatorname{sen} x + x$. Perciò, dato che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\colon\ \ -x < \operatorname{sen} x < x,$$

allora risulta che f è strettamente crescente su $[0,+\infty[$ e strettamente decrescente su $]-\infty,0]$. Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \ge f(0) = 0$.

Esempio 1.6. Consideriamo il problema di trovare il cilindro a base circolare con volume assegnato V e superficie totale minima. Sia r il raggio della base e h l'altezza del cilindro. Allora il volume e la superficie totale è rispettivamente

$$V = \pi r^2 h \quad \text{e} \quad S = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$

Se ricaviamo h dalle prima formula e sostituiamolo nella espressione della superficie S, si ottiene

$$S(r) = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right).$$

Notiamo che $S\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$0 < S'(r) = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right) \ \Leftrightarrow\ 2\pi r > \frac{V}{r^2} \ \Leftrightarrow\ r > \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Perciò, la funzione S ha un unico punto critico $r_0 = \sqrt[3]{V/(2\pi)}$ e risulta strettamente crescente su $[r_0, +\infty[$ e strettamente decrescente su $]0, r_0[$. Quindi r_0 è punto di minimo assoluto per S (ed è unico). In definitiva le dimensioni corrispondenti alla superficie minima sono

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{e} \quad h_0 = 2r_0.$$

Quindi il cilindro ottimale ha altezza uguale al diametro della base.

Alcune volte le funzioni sono definite a tratti, cioè sono definite per intervalli con una espressione analitica diversa per ogni intervallo. In questi casi in generale si può stabilire facilmente la derivabilità della funzione nell'interno di ciascun intervallo, ma invece rimane incerta la derivabilità agli estremi di detti intervalli. Consideriamo per esempio la seguente funzione.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ 2 + x - x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La funzione f ha un'espressione analitica differente negli intervalli $]-\infty, 0]$ e $]0, +\infty[$. Osserviamo preliminarmente che f è continua in tutto $\mathbb{R}$. Infatti questo è chiaramente vero per $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ basta calcolare i limiti sinistro e destro in 0 e verificare che sono entrambi uguali a 2. Riguardo la derivabilità, si può certamente affermare che f è derivabile in $\mathbb{R}^*$, perché le funzioni esponenziale e i polinomi sono funzioni derivabili. Invece, sul punto 0 non si può a priori dire nulla. Sarebbe quindi necessario controllare direttamente il limite del rapporto incrementale (sinistro e destro). In alternativa, si può seguire un'altro procedimento, che spieghiamo di seguito. La derivata di f esiste in $\mathbb{R}^*$ e risulta

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ 1 - 2x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Inoltre vale

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 + 2x = 1.$$

Quindi esistono i limiti sinistro e destro della derivata. Allora la questione è: si può affermare che la funzione f è derivabile in 0 e $f'(0) = 1$? La risposta è affermativa e il risultato seguente da' una risposta completa alla questione.

Teorema 1.7 (criterio di derivabilità)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo di estremi $a < b$ e $x_0 \in I$. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I e derivabile in I_{x_0}. Allora si ha:*

(i) $x_0 > a$ *e* $\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; f'_-(x_0) = l.$

(ii) $x_0 < b$ *e* $\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \;\Rightarrow\; f'_+(x_0) = l.$

In particolare se $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0) = l$.

Dimostrazione. Proviamo solo il primo punto (l'altro si prova allo stesso modo). Supponiamo che $x_0 > a$ e che $\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Dobbiamo provare che

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

A tal fine notiamo che se $x \in I_{x_0}^-$ (cioè $x \in I$ e $x < x_0$), allora $[x, x_0] \subset I$ e f è continua in $[x, x_0]$ e derivabile in $]x, x_0[$; e quindi per il teorema di Lagrange

$$\exists\, c(x) \in \,]x, x_0[\ \text{ t.c. } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x)).$$

Si viene così a definire una funzione

$$c\colon I_{x_0}^- \to I_{x_0}^- \quad \text{ tale che } \ \forall\, x \in I_{x_0}^-\colon\ x < c(x) < x_0 \ \text{ e } \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c(x)).$$

Allora evidentemente si ha $\lim_{x\to x_0} c(x) = x_0$ e $\lim_{t\to x_0^-} f'(t) = l$. Per il teorema sui limiti delle funzioni composte si ha

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(c(x)) = l. \qquad \square$$

Osservazione 1.8. Dal teorema precedente consegue che se f è derivabile in x_0 e esistono i limiti destro e sinistro di f', allora si ha necessariamente $f'(x_0-) = f'(x_0) = f'(x_0+)$, cioè i limiti sinistro e destro della derivata esistono finiti e sono entrambi uguali alla valore della derivata in x_0. Perciò f' può avere solo discontinuità di seconda specie (cioè in cui almeno uno dei limiti sinistro e destro della derivata non esiste). Un esempio in tal senso viene fornito nell'esempio seguente.

Esempio 1.9. Consideriamo la funzione definita nell'Osservazione 1.3. Abbiamo visto che la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$. La derivata nei punti $x \neq 0$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 4x \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{x}\right). \end{aligned}$$

Risulta chiaro che il limite del primo termine per $x \to 0$ esiste e vale 0, mentre il secondo termine non ha limite nè sinistro nè destro. Quindi non esistono i limiti $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ e 0 è un punto di discontinuità di seconda specie per f'.

Esercizio 1.10.

(i) Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; f(x) = \begin{cases} 1 + b \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ a - x - x^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

sia derivabile in $\mathbb{R}$.
Svolgimento. La funzione f è definita a tratti ed è chiaramente derivabile in $\mathbb{R}^*$. Si tratta quindi di controllare la derivabilità di f in 0. Verifichiamo prima la continuità di f in 0 (che è una condizione necessaria per la derivabilità in 0). Risulta

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 + b \operatorname{sen} x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a - x - x^2 = a.$$

Perciò la funzione f è continua se e solo se $a = 1$. Poi, per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ risulta

$$f'(x) = \begin{cases} b \cos x & \text{se } x < 0 \\ -1 + 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = b \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1.$$

Dal Teorema 1.7[2] segue che $f'_-(0) = -b$ e $f'_+(0) = -1$. Perciò f è derivabile in 0 se e solo se $b = -1$.

(ii) Determinare i punti di estremo assoluto della funzione $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; f(x) = 3x + |x^3 - 8|.$$

Svolgimento. La funzione è continua perché composta di funzioni continue ed è definita in un intervallo chiuso e limitato. Perciò, per il teorema di Weierstrass, essa ammette estremi assoluti. Evidentemente si ha

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^3 + 8 & \text{se } x \in [-2, 2] \\ 3x + x^3 - 8 & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

e quindi, f è derivabile in $[-2, 3] \backslash \{2\}$ e risulta

$$\forall\, x \in [-2, 3] \backslash \{2\}\colon\;\; f'(x) = \begin{cases} 3(1 - x^2) & \text{se } x \in [-2, 2[\\ 3(1 + x^2) & \text{se } x \in]2, 3]\,. \end{cases} \tag{1}$$

[2]Si noti che il Teorema 1.7 richiede che la funzione f sia continua in x_0. Quindi per applicare il teorema bisogna prima assicurarsi della continuità di f in x_0.

Notiamo che $f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = -9$ e $f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 15$, quindi il punto 2 è un punto angoloso (e la funzione non è derivabile). La funzione derivata è allora $f'\colon [-2,3]\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ e i punti critici si ottengono risolvendo

$$f'(x) = 0 \text{ con } x \in [-2,3]\backslash\{2\}.$$

Evidentemente, ricordando (1), si riconosce che $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$ e $f'(x) \leq 0 \iff |x| \geq 1 \iff (x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1)$. Quindi il punto -1 è un punto di minimo relativo proprio e il punto 1 è un punto di massimo relativo proprio. Per individuare i punti di estremo assoluto si devono considerare

- i punti critici interni a $[-2,3]$: -1, 1
- i punti interni a $[-2,3]$ in cui f non è derivabile: 2
- i punti di frontiera di $[-2,3]$: -2, 3.

Valutiamo il valore di f sui 5 punti elencati sopra

$$f(-1) = 6, \quad f(-1) = 10, \quad f(2) = 6, \quad f(-2) = 10, \quad f(3) = 28.$$

Quindi si riconosce che -1 e 2 sono punti di minimo assoluti per f e 3 è punto di massimo assoluto per f.

2 Asintoti

Definizione 2.1. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un insieme A non limitato superiormente (risp. inferiormente). Si dice che la retta di equazione

$$y = mx + q \quad (m, q \in \mathbb{R})$$

è un *asintoto a destra* (risp. *a sinistra*) *per il grafico di* f, se risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx - q\big) = 0 \quad \Big(\text{risp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx - q\big) = 0\Big). \tag{2}$$

Se $m \neq 0$, l'asintoto si dice *obliquo*, altrimenti si dice *orizzontale*. Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è di accumulazione a sinistra (oppure a destra) per A e se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \qquad \left(\text{oppure } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty\right),$$

allora si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale per il grafico di f.

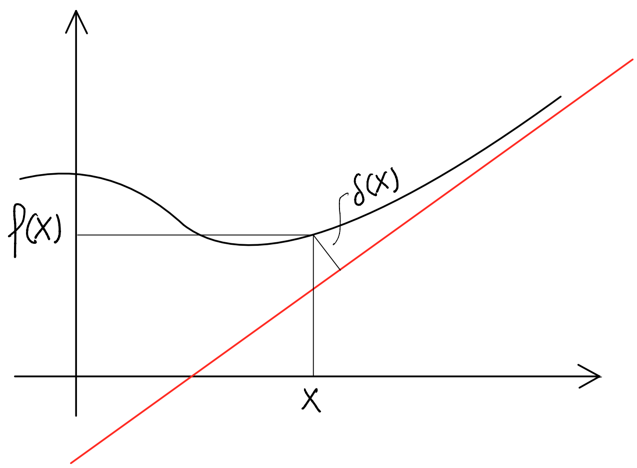

Figura 2: Significato geometrico dell'asintoto

Osservazione 2.2.

(i) Dalla geometria elementare è noto che la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del piano euclideo da una retta di equazione $r\colon ax + by + c = 0$ è

$$\operatorname{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Allora la distanza del punto $(x, f(x))$ sul grafico di f dalla retta $y = mx + q$ è

$$\delta(x) = \frac{|mx - f(x) + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Perciò la condizione (2) nella Definizione 2.1 equivale a chiedere che la distanza del punto $(x, f(x))$ dall'asintoto tende a zero per $x \to \pm\infty$. Quindi il grafico di f si avvicina indefinitamente alla retta $ax + b$ quando x tende a infinito. Si veda Figura 2.

(ii) Se la funzione si riesce a scrivere come

$$f(x) = mx + q + \omega(x) \quad \text{con } \omega(x) \to 0 \text{ per } x \to \pm\infty,$$

allora evidentemente

Proposizione 2.3. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione definita in un insieme A non limitato superiormente (risp. inferiormente). La retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto a destra (risp. a sinistra) per il grafico di f se e solo se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = q \tag{3}$$

(risp. $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = m$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = q$).

Dimostrazione. Chiaramente la seconda condizione in (3) è equivalente alla condizione (2). Si tratta allora di provare che la condizione (2) implica la prima delle condizioni (3). Supponiamo quindi che valga la (2). Allora a maggior ragione si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-mx-q}{x} = 0.$$

Ma

$$\frac{f(x)-mx-q}{x} = \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}$$

e, dato che $\lim_{x\to+\infty} q/x = 0$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m + \lim_{x\to+\infty} \frac{q}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-mx-q}{x} = 0. \qquad \square$$

Osservazione 2.4. L'esistenza di un asintoto orizzontale equivale all'esistenza del limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = q \in \mathbb{R}.$$

Mentre se esiste un asintoto obliquo, allora si ha

$$f(x) = \frac{f(x)}{x} x \to \begin{cases} m\cdot(+\infty) = (\operatorname{sgn} m)\infty & \text{se } x\to+\infty \\ m\cdot(-\infty) = -(\operatorname{sgn} m)\infty & \text{se } x\to-\infty. \end{cases}$$

Quindi la funzione è necessariamente infinita per $x \to \pm\infty$.

Esempio 2.5.

(i) La funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ha asintoti obliqui $y = x$ a destra e e $y = -x$ a sinistra. Infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1+1/x^2} = \pm 1$$

e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

(ii) La funzione $f\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$, con $f(x) = \log(e^{2x}-1)+1$ ha asintoto obliquo a destra di equazione $y = 2x+1$. Infatti

$$\begin{aligned} f(x) = \log(e^{2x}-1)+1 &= \log[e^{2x}(1-e^{-2x})]+1 \\ &= \log(e^{2x}) + \log(1-e^{-2x}) + 1 \\ &= 2x+1+\log(1-e^{-2x}) \end{aligned}$$

e quindi direttamente dalla definizione (2)

$$f(x) - (2x+1) = \log(1-e^{-2x}) \to 0 \quad \text{per } x\to+\infty.$$