# Lezione 25

Saverio Salzo*

9 novembre 2022

## 1 Approssimazione del numero di Nepero

**Teorema 1.1** (Approssimazione del numero di Nepero). *Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora*

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}. \tag{1}$$

*Dimostrazione.* Evidentemente si ha

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+n+1)!}$$

Valutiamo la serie resto. A tal fine notiamo che

$$(k+n+1)! = \underbrace{(k+n+1)(k-1+n+1)\cdots(1+n+1)}_{k \text{ fattori}}(n+1)! \geq (n+2)^k (n+1)!.$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+n+1)!} &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{1 - 1/(n+2)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \\
&= \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2} \\
&< \frac{1}{n!n},
\end{aligned}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

perché $(n+2)/(n+1)^2 < 1/n$. Perciò risulta

$$e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!},$$

da cui segue la tesi. $\square$

**Corollario 1.2.** *Il numero e di Nepero è irrazionale.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $e = m/n$ con $n, m \in \mathbb{N}^*$. Allora si avrebbe

$$0 < \frac{m}{n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{nn!}.$$

Se moltiplichiamo per $n!$ abbiamo allora $0 < m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} n!/k! < 1/n$. Ma

$$\nu = m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = m(n-1)! - \sum_{k=0}^{n} \underbrace{n(n-1)\dots(k+1)}_{n-k \text{ fattori}}$$

è un numero naturale e avremmo che $0 < \nu < 1/n$ che è assurdo. $\square$

**Esempio 1.3.** La rappresentazione di $e$ mediante la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 1/k!$ è molto più efficiente di quella mediante la successione $(1 + 1/n)^n$. Infatti quando abbiamo introdotto il numero di Nepero abbiamo visto che per $n = 12$, $(1 + 1/n)^n \approxeq 2.61$, mentre per $n = 10$ la (1) fornisce una precisione pari a $(nn!)^{-1} \approx 3.6 \cdot 10^{-7}$, cioè individua correttamente le prime 7 cifre decimali del numero $e$.

# 2 Serie numeriche alternanti

**Definizione 2.1.** Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali positivi ($a_n \geq 0$). Una serie numerica del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \quad \text{o} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{2}$$

si chiama *serie a segno alterno*. Quindi più esplicitamente essa è del tipo

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \quad \text{oppure} \quad - a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

**Osservazione 2.2.** Evidentemente si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = (-1) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n.$$

Quindi il carattere delle due serie in (2) è lo stesso e ci si può limitare allo studio del primo tipo soltanto.

**Esempio 2.3.** La seguente è una serie a segno alterno

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

**Teorema 2.4** (Criterio di Leibniz)**.** *Supponiamo che la successione numerica a termini positivi* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soddisfi le seguenti condizioni*

(*a*) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

(*b*) $a_{n+1} \leq a_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *(la successione è decrescente).*

*Allora la serie* $\sum(-1)^n a_n$ *è convergente. Inoltre se* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è la successione delle somme parziali di* $\sum(-1)^n a_n$ *e* $s \in \mathbb{R}$ *è la sua somma, allora* $s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$ *e*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon |s - s_n| \leq a_{n+1} \tag{3}$$

*Dimostrazione.* Sia $s_n$ la somma parziale $n$-esima della serie $\sum(-1)^n a_n$. Allora si ha

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} \\ &= s_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n} \end{aligned}$$

e perciò la successione $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Poi si ha, per $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= s_{2n-1} + (-1)^{2n}a_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+1} \\ &= s_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1} \end{aligned}$$

e perciò la successione $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Inoltre

$$s_{2n} - s_{2n+1} = -(-1)^{2n+1}a_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0 \tag{4}$$

e quindi, ricordando che $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente e $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, si ha

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0. \tag{5}$$

Da questo segue che le successioni $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sono limitate e quindi (essendo monotone) convergenti. Inoltre da (4) e dalla ipotesi ($a$) segue che hanno lo stesso limite. Infine essendo

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = s \in \mathbb{R},$$

Allora, per un teorema noto sulle sulle sucessioni, si ha $s_n \to s$ e questo prova la convergenza della serie $\sum(-1)^n a_n$. Inoltre da (5) essendo $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ crescente si ha

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$$

e quindi

$$|s - s_{2n}| \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \quad \text{e} \quad |s - s_{2n-1}| \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$$

da cui segue la (3). $\square$

**Esempio 2.5.**

(i) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

è convergente perchè $1/n^\alpha$ tende a zero in modo decrescente.

(ii) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log(1+n)} =: (-1)^n a_n$$

è convergente perché $a_n = 1/\log(1+n) \to 0$ e

$$\frac{1}{\log(2+n)} \leq \frac{1}{\log(1+n)} \;\Leftrightarrow\; \log(2+n) \geq \log(1+n).$$

(iii) La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} =: (-1)^n a_n \tag{6}$$

Evidentemente $a_n \to 0$. Proviamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Notiamo che

$$a_n = \frac{1}{n + 1/n},$$

perciò possiamo equivalentemente provare che $(n + 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Ma questo è immediato dato che

$$n + 1 + \frac{1}{n+1} > n + \frac{1}{n} \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n},$$

e quest'ultima è vera perché il termine a sinistra è $> 1$ e il termine a destra è $\leq 1$. Allora per il criterio di Leibniz la serie (6) è convergente.

(iv) Si può provare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Questo risultato è dovuto a Leibniz.

## 3 Convergenza assoluta

**Definizione 3.1.** La serie numerica $\sum a_n$ si dice *assolutamente convergente* se la serie $\sum |a_n|$ è convergente.

Prima di enunciare il teorema principale sulla convergenza delle serie assolutamente convergenti ricordiamo che

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \quad \text{e} \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

si chiamano *la parte positiva* e *parte negativa* di $a_n$. Quindi associata alla serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tag{7}$$

ci sono le serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$$

delle parti positive e negative dei termini della serie (7).

Il risultato principale sulle serie assolutamente convergenti è il seguente.

**Teorema 3.2.** *Sia $\sum a_n$ una serie numerica. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) *La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente*

(ii) *Le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ sono convergenti.*

*Inoltre, se è vera una delle delle affermazioni precedenti (e quindi anche l'altra), risulta che*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente e } \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|.$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ a_n^+, a_n^- \leq |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Perciò se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, per il criterio del confronto si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- < +\infty. \tag{8}$$

Viceversa, se sono vere le (8), allora essendo $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- < +\infty.$$

Quindi si è provata l'equivalenza delle due affermazioni nell'enunciato. Adesso supponiamo che le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ siano convergenti. Allora, essendo

$$a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

anche la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente. Inoltre se

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to s \in \mathbb{R},$$

dato che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la seguente generalizzazione della disuguaglianza triangolare (si prova per induzione su $n$)

$$|s_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|,$$

e che $|s_n| \to |s|$, per il teorema di prolungamento delle disuguaglianze risulta

$$|s| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|. \qquad \square$$

**Osservazione 3.3.** Si noti che in generale

$$\text{convergenza} \not\Rightarrow \text{assoluta convergenza}.$$

Infatti se si considera la serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

abbiamo visto che essa è convergente, ma la serie dei valori assoluti è la serie armonica che non è convergente.

**Esempio 3.4.** Sia $x \in \mathbb{R}$ Proviamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{9}$$

è assolutamente convergente, qualunque sia il valore di $x \in \mathbb{R}$. Si deve quindi provare che la serie (a termini positivi)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}.$$

è convergente.

Se $x = 0$ la tesi è ovvia, perché i termini della serie sono zero. Nel caso $x \neq 0$, la convergenza si prova utilizzando il criterio del rapporto. Infatti

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Dato che la serie (9) è convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$ si può definire una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Si prova che $f$ verifica le proprietà:

- $f(1) = e$ (questo è immediato dalla definizione di $f$ e di $e$)
- $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x+y) = f(x)f(y)$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.
- $f$ è strettamente crescente.

Perciò per la caratterizzazione della funzione esponenziale, deve essere $f(x) = e^x$. Quindi vale

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Questo è un esempio di serie di potenze.

**Esempio 3.5.** Proviamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(e^{3n}+5)}{n^{5/2}+n\log n+2} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right) =: a_n.$$

è assolutamente convergente. La serie non è a termini positivi e nemmeno a termini a segno alterno. Verifichiamo che sia assolutamente convergente. Evidentemente, dato che $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, si ha

$$|a_n| \leq \frac{\log(e^{3n}+5)}{n^{5/2}+n\log n+2} =: b_n.$$

Quindi la serie $\sum |a_n|$ è maggiorata dalla serie a termini positivi $\sum b_n$. Se la serie $\sum b_n$ è convergente, per confronto, potremo dedurre che la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente. Valutiamo allora l'ordine di infinitesimo della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$b_n = \frac{\log\left(e^{3n}(1+5e^{-3n})\right)}{n^{5/2}+n\log n+2} = \frac{\log e^{3n} + \log(1+5e^{-3n})}{n^{5/2}+n\log n+2} = \frac{3n+\log(1+5e^{-3n})}{n^{5/2}+n\log n+2}$$

$$= \frac{n}{n^{5/2}} \cdot \frac{3 + \dfrac{\log(1+5e^{-3n})}{n}}{1 + \dfrac{n\log n}{n^{5/2}} + \dfrac{2}{n^{5/2}}} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{3 + \dfrac{\log(1+5e^{-3n})}{n}}{1 + \dfrac{\log n}{n^{3/2}} + \dfrac{2}{n^{5/2}}}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+5e^{-3n})}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{5/2}} = 0,$$

allora

$$b_n \asymp \frac{1}{n^{3/2}}$$

e quindi $\sum b_n$ è convergente.