

Nome:

Cognome:

Matricola:

| | |
|----------|--|
| D1 | |
| D2 | |
| E1 | |
| E2 | |
| E3 | |
| E4 | |
| E5 | |
| E6 | |
| Σ | |

Domanda 1

[2+3 punti]

- (i) Scrivere la formula della lunghezza per l'arco di curva in \mathbb{R}^2 ottenuto come grafico della funzione $f \in C^1([a, b])$.
- (ii) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva grafico dell'esponenziale $f(x) = e^x$ tra gli estremi $x = 0$ e $x = 1$.

Risposta

(i) _____

(ii) _____

Domanda 2

[2+3 punti]

- (i) Dare la definizione di differenziabilità in un punto di \mathbb{R}^2 per una funzione di due variabili a valori reali.
- (ii) Stabilire se la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(|x| + |y|)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

sia differenziabile nell'origine.

Risoluzione

(i) _____

(ii) _____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia f una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; allora $f \circ f \circ \dots \circ f$ ($n - 1$ composizioni) è

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) sempre pari; | <input type="checkbox"/> b) pari se n è pari, e dispari se n è dispari; |
| <input type="checkbox"/> c) dispari, se f è dispari | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti. |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[3 punti]

Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ è

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> a) convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$; | <input type="checkbox"/> b) assolutamente convergente per ogni $x > 0$; |
| <input type="checkbox"/> c) divergente per $x > 1/2$; | <input type="checkbox"/> d) nessuna delle precedenti |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Si considerino i sottoinsiemi del piano complesso $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \in [0, 1]\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = -1\}$. Allora

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> a) $A \cap B$ è finito; | <input type="checkbox"/> b) $A \cap B$ è aperto; |
| <input type="checkbox"/> c) $A \cup B$ è limitato; | <input type="checkbox"/> d) $A \setminus B$ non è connesso. |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)}{e^{-x} + \frac{1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1\right)}{e^{-x} + \frac{1}{x}}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 + 1) \, dx dy$$

dove D è la regione del primo quadrante compresa tra l'asse x e i grafici delle funzioni $h_1(x) = x^2$ e $h_2(x) = 2 - x$.

Risoluzione

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.