Lezione 22

Saverio Salzo*

3 novembre 2022

1 Successioni di Cauchy

Consideriamo una successione reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un certo numero $l \in \mathbb{R}$. Allora sappiamo che si può rendere $|a_n - l|$ piccolo quanto si vuole pur di prendere n grande abbastanza (più grande di un certo $\nu \in \mathbb{N}$). Ora, se si prendono due termini della successione a_n e a_m risulta (utilizzando la disuguaglianza triangolare)

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |l - a_m| \tag{1}$$

e perciò anche $|a_n - a_m|$ potrà essere reso piccolo a piacere a patto di prendere i due indici grandi abbastanza (più grandi di un certo $\nu \in \mathbb{N}$). Più precisamente preso $\varepsilon > 0$, si può fare in modo che

$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni numero naturale } n \text{ più grande di un certo } \nu \in \mathbb{N}.$$

E allora da (1) seguirà che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \in \mathbb{N} \text{ più grandi di } \nu \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Si veda Figura 1. Le successioni che verificano (2) hanno un ruolo fondamentale in analisi matematica. Di seguito diamo la definizione precisa.

Definizione 1.1. Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ si dice *di Cauchy* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \colon n, m > \nu \colon \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Proposizione 1.2. *Una successione di Cauchy è limitata.*

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

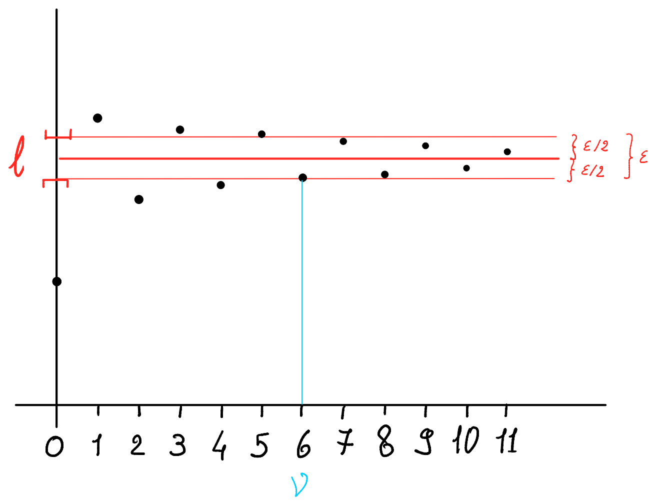

Figura 1: Una successione convergente è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Allora, dalla definizione, in corrispondenza di 1 esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}, n > \nu$, $|a_n - x_{\nu+1}| < 1$ e quindi $|a_n| \leq |a_n - x_{\nu+1}| + |x_{\nu+1}| \leq 1 + |x_{\nu+1}|$. Allora,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_0|, \dots, |a_\nu|, 1 + |x_{\nu+1}|\} < +\infty$$

e la tesi è dimostrata. □

Teorema 1.3. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica. Allora sono equivalenti*

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è convergente in* $\mathbb{R}$.

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è di Cauchy*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): E' già stato dimostrato.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supponiamo ora che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia di Cauchy e proviamo che essa è convergente. Per la proposizione precedente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$a_{n_k} \to l \in \mathbb{R} \text{ per } k \to +\infty.$$

Proviamo che $a_n \to l$ per $n \to +\infty$. Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ in modo che $|a_n - l| < \varepsilon$ per tutti gli interi $n > \nu$. Allora per prima cosa, essendo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy, possiamo affermare che esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\colon\ n, m > \nu \ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Poi, dato che $a_{n_k} \to l$, esiste $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon\ k > \nu_0 \ \Rightarrow\ |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scegliamo quindi un $k \in \mathbb{N}$ tale che $k > \nu_0$ e $k > \nu$. Allora $n_k \geq k > \nu$ e quindi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ n > \nu \ \overset{n_k > \nu}{\Longrightarrow}\ |a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

e questo prova la tesi. □

2 Serie numeriche (parte I)

2.1 Introduzione: il paradosso di Zenone

Del paradosso di Zenone ne parla Aristotele nel libro *Fisica* di Aristotele [Libro VI, cap 9]: *Il secondo argomento prende il nome "dell'Achille" e consiste in questo: il concorrente più lento nella corsa non sarà mai raggiunto dal più veloce perché l'inseguitore prima sarebbe costretto a raggiungere il luogo da cui quello che fugge ha preso le mosse, e intanto, di necessità, il più lento sarà sempre un po' più avanti.*

Ne parla anche lo scrittore argentino Jorge Luis Borges nel saggio *La corsa perpetua di Achille e della tartaruga* [contenuto nel libro *Discussione*. Adelphi 2017]: *Achille corre dieci volte più veloce della tartaruga e le dà dieci metri di vantaggio. Achille percorre quei dieci metri, la tartaruga ne percorre uno; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille, il millimetro, la tartaruga un decimo di millimetro e così all'infinito, di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla. Questo il paradosso immortale.* E continuando dice: *Basta fissare la velocità di Achille in un metro al secondo, per stabilire il tempo necessario.*

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10.000} + \cdots$$

In questa sezione descriviamo in modo formale "l'immortale" paradosso di Zenone (con velocità arbitrarie) e mostriamo come questo paradosso sia legato al concetto di somma di una serie geometrica.

Supponiamo che Achille abbia una velocità v_A e la tartaruga abbia una velocità $v_T < v_A$ e che inizialmente la Tartaruga abbia un vantaggio pari a una distanza uguale a d. Il tempo impiegato da Achille per coprire la distanza d è

$$t_1 = \frac{d}{v_A}$$

e nel frattempo la tartaruga si sarà spostata di

$$d_1 = v_T t_1 = \frac{v_T}{v_A} d.$$

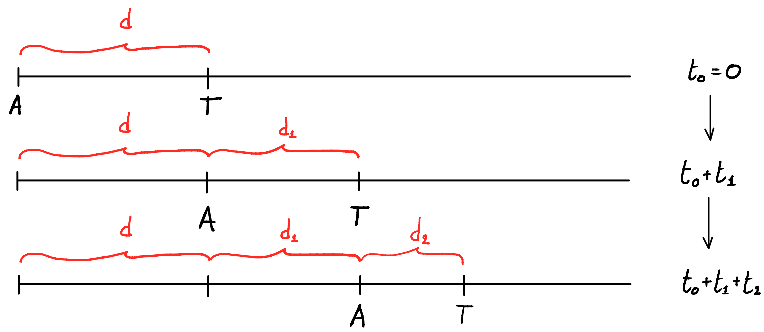

Figura 2: Illustrazione del paradosso di Zenone.

A questo punto la tartaruga ha un vantaggio su Achille di una distanza uguale a d_1. Il ragionamento si ripete. Quindi il tempo impiegato da Achille per coprire la distanza d_1 che lo separa dalla tartaruga è

$$t_2 = \frac{d_1}{v_A}$$

e nel frattempo la tartaruga si sarà spostata di

$$d_2 = \frac{v_T}{t_2} = \frac{v_T}{v_A} d_1 = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 d.$$

A questo punto la tartaruga ha un vantaggio su Achille pari alla distanza d_2. Continuiamo in questo modo. Il tempo impiegato da Achille per coprire la distanza d_2 che lo separa dalla tartaruga è

$$t_3 = \frac{d_2}{v_A}$$

e nel frattempo la tartaruga si sarà spostata di

$$d_3 = \frac{v_T}{t_3} = \frac{v_T}{v_A} d_2 = \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3 d.$$

Ragionando in questo modo sembra che Achille non raggiungerà mai la tartaruga, dato che ci sarà sempre una distanza che lo separa dalla tartaruga. In particolare, se poniamo $q = v_T/v_A$, la distanza totale percorsa da Achille è

$$d + d_1 + d_2 + \cdots = d + qd + q^2 d + \cdots$$

(per $q = 1/10$ e $d = 10$ si ha la serie considerata da Borges) mentre quella percorsa dalla tartaruga è

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots = qd + q^2 d + q^3 d + \cdots .$$

Si noti che entrambe queste distanze vengono percorse nel tempo

$$t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = \frac{d}{v_A} + q\frac{d}{v_A} + q^2 \frac{d}{v_A} + \cdots$$

Si veda Figura 2. Essendo queste distanze totali somme infinite di termini si credeva che la somma sarebbe stata infinita e che quindi Achille non avrebbe mai raggiunto la tartaruga. Questo è il punto fallace del ragionamento di Zenone, perché la somma di infiniti termini positivi può essere finita come vedremo. In effetti le serie di sopra sono geometriche con ragione $q < 1$ e queste sono convergenti (si veda Esempio 2.6).

2.2 Definizioni e prime proprietà

Data una successione numerica $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiamo la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ delle sue *somme parziali*

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{3}$$

Quindi la somma parziale n-esima s_n somma tutti i termini a_k per k che parte da 0 fino a $k = n$

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Formalmente la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita ricorsivamente mediante le relazioni

$$\begin{cases} s_0 = a_0, \\ s_{n+1} = s_n + a_{n+1}. \end{cases}$$

Osservazione 2.1. Si noti che nel definire le somme parziali (3) la variabile k è *muta*, cioè ha semplicemente il ruolo di indicare i numeri interi compresi tra 0 e n. A tale scopo si sarebbe benissimo potuto usare un'altra variabile e scrivere $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Si chiama *serie numerica* la coppia $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ dove s_n è definito come in (3) e si denota con il simbolo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{oppure più semplicemente con} \quad \sum a_n.$$

Definizione 2.2. Si dice che la serie numerica $\sum a_n$ è *convergente*, se la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e in tal caso se $s_n \to s \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, il limite s si chiama *somma della serie* e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s.$$

Diciamo che la serie $\sum a_n$ è *divergente positivamente* (risp. *negativamente*) se $\lim_n s_n = +\infty$ (risp. $\lim_n s_n = -\infty$) e in tal caso si pone

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\text{risp. } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty\right).$$

Diciamo che la serie $\sum a_n$ è *determinata* o *regolare* se la serie è convergente, divergente positivamente o divergente negativamente, altrimenti la serie si dice *indeterminata* o *irregolare*. Questi casi determinano il *carattere* della serie.

Osservazione 2.3. In accordo alla definizione data sopra, si osserva che il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ denota sia la serie stessa che la sua somma.

Osservazione 2.4. In alcuni casi si possono considerare delle serie numeriche con un indice iniziale diverso da 0, cioè del tipo

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n, \quad \text{con } m \in \mathbb{N}^*.$$

In tal caso le somme parziali si definisco come

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n < m \\ \sum\limits_{k=m}^{n} a_k & \text{if } n \geq m, \end{cases}$$

rappresentando in ogni caso la somma dei primi termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}, n\geq m}$ fino a quello di indice n. Si noti che risulta

$$\sum_{n=m}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n},$$

nel senso che le due serie hanno lo stesso carattere e, se regolari, la stessa somma. Infatti la somma parziale della seconda è

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=m}^{m+n} a_k = s_{m+n}$$

e chiaramente[1]

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = l \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to+\infty} s_{m+n} = l,$$

per qualunque $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Esempio 2.5.

(i) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n. \tag{4}$$

La successione delle somme parziali è costituita dalla somma dei primi n numeri naturali

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Evidentemente la serie (4) è divergente positivamente perché $s_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

(ii) Consideriamo la serie (di Mengoli)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

La successione delle somme parziali è

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}^*) \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Si riconosce allora che $s_n \to 1$ per $n \to +\infty$ e quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. La serie di Mengoli fornisce un esempio di una *serie telescopica* cioè una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad a_n = b_n - b_{n+1}.$$

Per tali tipi di serie si ha $s_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1}$. Perciò il carattere della serie $\sum a_n$ dipende soltanto dal carattere della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In particolare se esiste il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n$.

(iii) Consideriamo la serie di termine costante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad a_n = 1.$$

Evidentemente la somma parziale n-esima è $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = n + 1$. Perciò si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

[1] Se $s_n \in V$ per ogni intero $n > \nu$, allora a maggior ragione per $n > \nu$ risulta $s_{m+n} \in V$. Viceversa se $s_{m+n} \in V$ per ogni intero $n > \nu$, allora per ogni intero $n > \nu + m$ risulta che $s_n \in V$.

(iv) Consideriamo la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n. \tag{5}$$
Evidentemente la successione delle somme parziali vale
$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$
Allora, si vede che la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è irregolare e di conseguenza lo è anche la serie (5).

Esempio 2.6 (Serie geometrica)**.** Si chiama *serie geometrica* una serie del tipo
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \qquad q \in \mathbb{R}.$$
Abbiamo già visto che per la successione delle somme parziali vale
$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{if } q \neq 1 \\ n+1 & \text{if } q = 1. \end{cases} \tag{6}$$
Ora, dalla formula (6), ricordando che
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{if } |q| < 1 \\ +\infty & \text{if } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{if } q \leq -1, \end{cases}$$
consegue che
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{if } |q| < 1 \\ +\infty & \text{if } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{if } q \leq -1. \end{cases}$$
Proposizione 2.7 (linearità della somma di una serie)**.** *Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie numeriche convergenti. Allora la serie $\sum(a_n+b_n)$ è convergente e*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$
Inoltre se $\lambda \in \mathbb{R}$ la serie $\sum \lambda a_n$ è convergente e
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

e dalle regole del calcolo dei limiti per la somma di successioni e per un prodotto di una successione per uno scalare. □

Teorema 2.8 (Condizione necessaria per la convergenza di una serie)**.** *Sia* $\sum a_n$ *una serie numerica. Allora*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente } \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e supponiamo che $s_n \to s \in \mathbb{R}$. Allora è chiaro che anche $s_{n+1} \to s$. Perciò

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n \to 0$$

e quindi anche $a_n \to 0$. □

Osservazione 2.9. Il Teorema 2.8 fornisce una condizione necessaria per la convergenza di una serie, quindi può essere utile per stabilire che una serie non converge. Come esempio si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$$

che non può convergere, perché $n/(n+1) = 1/(1+1/n) \to 1$ per $n \to +\infty$.

Osservazione 2.10. Non è vero il viceversa del Teorema 2.8. Infatti i termini della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

convergono a zero, ma la serie non è convergente. Infatti, si ha

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ addendi}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$$

e quindi per confronto si ha che $s_n \to +\infty$. Un altro esempio è la serie armonica $\sum(1/n)$. Vedremo che non è convergente, ma chiaramente $1/n \to 0$ per $n \to +\infty$.