Lezione 28

Saverio Salzo*

15 novembre 2022

1 Esercizio svolto sulle serie

Proviamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/n))}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/n)))}{\sqrt{n}}}_{=:\, a_n}$$

è assolutamente convergente. Per brevità di notazione poniamo $y_n = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/n))$. Allora

$$y_n = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/n))}{\operatorname{sen}(1/n)}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

e risulta (dalla disuguaglianza triangolare)

$$|a_n| \leq \left|\frac{y_n}{n^{1/3}}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}(y_n)}{n^{1/2}}\right| =: b_n. \tag{1}$$

Cerchiamo di capire l'ordine di infinitesimo dei due termini di b_n separatamente. Si ha

$$\begin{cases} \left|\dfrac{y_n}{n^{1/3}}\right| = \left|\dfrac{y_n}{(1/n)}\dfrac{1}{nn^{1/3}}\right| = \left|\dfrac{y_n}{(1/n)}\right|\dfrac{1}{n^{4/3}} \sim \dfrac{1}{n^{4/3}} \\[2ex] \left|\dfrac{\operatorname{sen}(y_n)}{n^{1/2}}\right| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}(y_n)}{y_n}\dfrac{y_n}{(1/n)}\dfrac{1}{nn^{1/2}}\right| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}(y_n)}{y_n}\dfrac{y_n}{(1/n)}\right|\dfrac{1}{n^{3/2}} \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}. \end{cases}$$

Perciò $b_n \sim 1/n^{4/3}$ (è asintotico al termine di ordine inferiore nella somma). Infatti

$$b_n = \left|\frac{y_n}{n^{1/3}}\right|\left(1 + \left|\frac{\operatorname{sen}(y_n)}{y_n}\frac{n^{1/3}}{n^{1/2}}\right|\right) = \frac{1}{n^{4/3}}\Bigg|\underbrace{\frac{y_n}{(1/n)}}_{\downarrow \atop 1}\Bigg|\left(1 + \Bigg|\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(y_n)}{y_n}}_{\downarrow \atop 1}\Bigg|\underbrace{\frac{1}{n^{1/6}}}_{\downarrow \atop 0}\right) \sim \frac{1}{n^{4/3}}.$$

In definitiva la serie $\sum b_n$ (che è a termini positivi) è convergente per il criterio di confronto asintotico e quindi, da (1), consegue che anche la serie $\sum|a_n|$ è convergente per il criterio del confronto.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

2 Ancora sulle regole di derivazione

Teorema 2.1 (sulla derivazione delle funzioni composte)**.** *Siano* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *due funzioni reali di una variabile reale tali che* $f(A) \subset B$ *e consideriamo la funzione composta* $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$*. Supponiamo che*

- $x_0 \in A$ *sia un punto di accumulazione per* A *e che* f *sia derivabile in* x_0
- $f(x_0)$ *sia di accumulazione per* B *e che* g *sia derivabile in* $f(x_0)$*.*

Allora $g \circ f$ *è derivabile in* x_0 *e risulta*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).} \tag{2}$$

Dimostrazione. Sia $x \in A_{x_0}$ e definiamo il seguente prolungamento del rapporto incrementale di g nel punto $f(x_0)$,

$$\Phi\colon B \to \mathbb{R}, \quad \Phi(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

Evidentemente la funzione Φ è continua in $f(x_0)$. Inoltre

$$\forall\, x \in A_{x_0}\colon \quad \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \Phi(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si noti che l'uguaglianza di sopra è vera chiaramente se $f(x) \neq f(x_0)$, ma è anche vera se $f(x) = f(x_0)$. Adesso, si osserva che f è continua in x_0 (perché derivabile) e Φ è continua in $f(x_0)$. Perciò $\Phi \circ f$ è continua in x_0. Allora si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \Phi(f(x_0)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0). \qquad \square$$

Osservazione 2.2.

(i) Se consideriamo due funzioni $x \mapsto f(x)$ e $y \mapsto g(y)$. Allora la regola (2) si può scrivere alternativamente come

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y)\Big|_{y=f(x_0)} f'(x_0).$$

Questo mostra che per valutare la derivata $(g \circ f)'(x_0)$, si calcola $g'(y)$ sostituendo y con $f(x_0)$ e poi si moltiplica per $f'(x_0)$. Con la notazione di Eulero la regola si scrive come segue

$$D[g(y)_{|y=f(x)}] = [Dg(y)]_{|y=f(x)} Df(x).$$

(ii) Se si scrive $y = f(x)$ e $w = g(y)$ e si usa la notazione di Leibniz per le derivate, la regola (2) si scrive

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} \quad \text{(come se } dy \text{ si semplificasse).}$$

Esempio 2.3.

(i) Consideriamo la funzione $\sin^2 x$. Essa è evidentemente di tipo composto con $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(y) = y^2$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

(ii) La funzione $a^{\cos x}$ si può scrivere come $g \circ f$, dove $f(x) = \cos x$ e $g(y) = a^y$. Allora essa è derivabile e risulta

$$Da^{\cos x} = (a^{\cos x} \log a) D \cos x = -(\log a) a^{\cos x} \operatorname{sen} x.$$

(iii) La funzione $e^{(x^2)}$ si può scrivere come $g \circ f$, dove $f(x) = x^2$ e $g(y) = e^y$. Allora essa è derivabile e risulta

$$De^{(x^2)} = e^{(x^2)}(2x) = 2xe^{(x^2)}.$$

Concludiamo con la regola per la derivazione di una funzione inversa. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ iniettiva e $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbb{R}$ la funzione inversa. Evidentemente risulta

$$\forall\, x \in A\colon\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x. \tag{3}$$

Sia $x_0 \in A$ di accumulazione per A e supponiamo che f sia derivabile in x_0 e che f^{-1} sia derivabile in $f(x_0)$ (si vede facilmente che $f(x_0)$ è di accumulazione per $f(A)$). Allora per il Teorema 2.1 si ha

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0).$$

D'altro canto, valendo l'equazione (3), si ha $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$. Allora si ha

$$1 = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0).$$

Questo prova che

$$f'(x_0) \neq 0,\ (f^{-1})'(f(x_0)) \neq 0 \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Nel derivare questo risultato abbiamo supposto che f^{-1} fosse derivabile in $f(x_0)$; il teorema seguente mostra che questa ipotesi si può indebolire.

Teorema 2.4 (sulla derivazione delle funzioni inverse). *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva e $x_0 \in A$, punto di accumulazione per A. Supponiamo che*

- *f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$*
- *f^{-1} sia continua in $f(x_0)$.*

Allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ e risulta

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Basta notare che il rapporto incrementale di f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ si può scrivere come segue

$$\forall\, y \in f(A)\setminus\{y_0\}\colon\ \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \varphi(f^{-1}(y)),$$

dove

$$\varphi\colon A_{x_0} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Dato che

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0, \quad f^{-1}(y) \neq x_0 \text{ in un intorno di } y_0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

allora, per il Teorema sui limiti delle funzioni composte, risulta

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \square$$

Se la funzione f è iniettiva e definita in un intervallo, allora, per il teorema sulla continuità delle funzioni inverse, la funzione inversa è automaticamente continua. Si ha perciò il seguente risultato

Corollario 2.5. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva su I. Se f è derivabile in un punto $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$, allora la funzione inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x_0)$ e risulta*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Osservazione 2.6.

(i) Se si definisce $y_0 = f(x_0)$, la formula sulle derivate delle funzioni inverse del Teorema 2.4 si può scrivere equivalentemente

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.} \tag{4}$$

Quindi per calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1} in un punto del suo dominio y_0, si calcola il reciproco della derivata della funzione f nel punto $f^{-1}(y_0)$.

(ii) Se si pone $y = f(x)$, si ha $x = f^{-1}(y)$, e, usando la notazione di Leibniz, la formula (4) si scrive

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

3 Derivate delle funzioni elementari (parte II)

Derivata 6

$$\boxed{D\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.} \tag{5}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione potenza n-esima, $p_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ con $p_n(t) = t^n$. Sappiamo che p_n è invertibile e $p_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Inoltre p_n è derivabile e $p_n'(t) = nt^{n-1} \neq 0$, per $t > 0$. Perciò per il Corollario 2.5 (equazione (4)) risulta che p_n^{-1} è derivabile in $x > 0$ e

$$(p_n^{-1})'(x) = \frac{1}{p_n'(p_n^{-1}(x))} = \frac{1}{n(p_n^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \qquad \square$$

Si noti che la formula (5) si può scrivere anche come segue

$$Dx^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1},$$

rivelando una regola di derivazione analoga a quella per esponenti interi positivi.

Derivata 7

$$\boxed{D\log x = \frac{1}{x}}$$

Dimostrazione. La funzione logaritmo $\log\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione esponenziale $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, che è continua iniettiva e definita in un intervallo. Allora dato che exp è derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$ e $D\exp(t) = \exp(t) > 0$, si ha che la funzione log è derivabile in $\mathbb{R}_+^*$ e

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\colon\ D\log x = \frac{1}{(D\exp)(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}. \qquad \square$$

Derivata 8

$$\boxed{D\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{e} \quad \boxed{D\operatorname{cotg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

Dimostrazione. Dalle regole di derivazione per il rapporto di due funzioni e ricordando le derivate di sin e cos, si ha

$$D\,\mathrm{tg}\,x = D\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

e

$$D\,\mathrm{cotg}\,x = D\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\operatorname{sen} x \sin x - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \qquad \square$$

Derivata 9

$$\boxed{D\,\mathrm{arcsen}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{D\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Dimostrazione. La funzione arcsen: $[-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ è definita come l'inversa della restrizione della funzione sen all'intervallo $[-\pi/2,\pi/2]$. Se $t \in\,]-\pi/2,\pi/2[$ la funzione sen è derivabile in t e $D\operatorname{sen} t = \cos t \neq 0$. Perciò per il Corollario 2.5 la funzione arcsen è derivabile in $]-1,1[$ e risulta

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,: \quad D\,\mathrm{arcsen}(x) = \frac{1}{\cos(\mathrm{arcsen}\,x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\mathrm{arcsen}\,x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si ha infatti $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y}$ se $y \in [-\pi/2,\pi/2]$. Analogamente arccos: $[-1,1] \to [0,\pi]$ è definita come l'inversa della restrizione di cos all'intervallo $[0,\pi]$ e si ha quindi

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,: \quad D\arccos(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si ha infatti $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y}$ se $y \in [0,\pi]$. Infine la funzione arctg: $\mathbb{R} \to\,]-\pi/2,\pi/2[$ è l'inversa di $\mathrm{tg}_{|]-\pi/2,\pi/2[}\colon]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$. Dato che $D\,\mathrm{tg}\,x = 1+\mathrm{tg}^2 x$, allora

$$D\,\mathrm{arctg}\,x = \frac{1}{(D\,\mathrm{tg})(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\,x)} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

Esempio 3.1. Sia $f(x) = \mathrm{tg}(\sqrt{x})$. Il dominio di f è

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \,\middle|\, x^2 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Allora per ogni $x \in A$ con $x > 0$, f è derivabile in x e

$$f'(x) = (D\,\mathrm{tg})(\sqrt{x})D\sqrt{x} = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}.$$

4 Derivata destra e sinistra, punti angolosi e cuspidi

Definizione 4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto di accumulazione a sinistra (risp. a destra) per A. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \tag{6}$$

allora si dice che f *è derivabile a sinistra* (risp. *a destra*) *in* x_0 e il limite si chiama *derivata sinistra* (risp. *destra*) *di* f *in* x_0 e si indica con

$$f'_-(x_0) \quad (\text{risp. } f'_+(x_0)).$$

Esempio 4.2. Consideriamo la funzione valore assoluto

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

Allora $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

Osservazione 4.3.

(i) Se x_0 è punto di accumulazione sia a destra che a sinistra per A. Allora

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff f \text{ è derivabile a sinistra e destra in } x_0 \text{ e } f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Inoltre se x_0 è punto di accumulazione solo a sinistra (risp. a destra) per A. Allora

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \iff \exists\, f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \quad (\text{risp. } \exists\, f'_+(x_0) \in \mathbb{R}).$$

(ii) Se il limite (6) esiste ma non è finito, cioè

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \quad \left(\text{risp. } \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty \right)$$

allora, con un abuso di notazione, tale limite si denota ancora con $f'_-(x_0)$ (risp. $f'_+(x_0)$) e talvolta si chiama ancora derivata sinistra (risp. destra) di f in x_0.

Definizione 4.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ un punto di accumulazione a sinistra e a destra per A. Supponiamo che esistano le derivate sinistra e destra di f in x_0 (finite o no). Il punto x_0 si dice un *punto angoloso* di f (o del suo grafico) se f è continua in x_0 e $f'_-(x_0) \neq f'_-(x_0)$ e le due derivate non sono entrambe infinite. Il punto x_0 si dice un *punto di cuspide* se $f'_-(x_0) = +\infty$ e $f'_+(x_0) = -\infty$ o se $f'_-(x_0) = -\infty$ e $f'_+(x_0) = +\infty$.

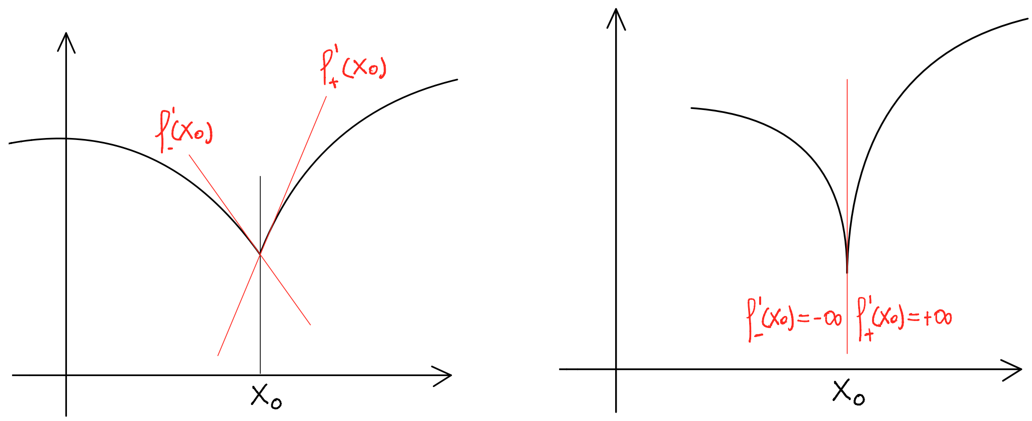

Figura 1: Punto angoloso (a sinistra) e cuspide (a destra).

Esercizio 4.5. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; f(x) = \frac{3 - |x^3 - 1|}{2}.$$

Verificare che 1 è un punto angoloso del grafico di f e calcolare $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$.

Proposizione 4.6. *Se f è derivabile a sinistra (risp. a destra) in x_0, allora f è continua a sinistra in x_0 (risp. a destra), cioè $f(x_0-) = f(x_0)$ (risp. $f(x_0+) = f(x_0)$).*

Dimostrazione. La dimostrazione procede come nel caso derivabile. Infatti si ha

$$\forall\, x \in A^-_{x_0}\colon\;\; f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

e quindi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) + f'_-(x_0) \cdot 0 = f(x_0)$. □