Appello di Ingegneria Informatica del 11.1.2022 in presenza

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: Cognome: Matricola:

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Scrivere la formula della lunghezza per l'arco di curva in $\mathbb{R}^2$ ottenuto come grafico della funzione $f \in C^1([a,b])$.

(ii) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva grafico dell'esponenziale $f(x) = e^x$ tra gli estremi $x = 0$ e $x = 1$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità in un punto di $\mathbb{R}^2$ per una funzione di due variabili a valori reali.

(ii) Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(|x|+|y|)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sia differenziabile nell'origine.

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; allora $f \circ f \circ \cdots \circ f$ ($n-1$ composizioni) è

- [a] sempre pari;
- [b] pari se n è pari, e dispari se n è dispari;
- [c] dispari, se f è dispari
- [d] nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[3 punti]

Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ è

- [a] convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- [b] assolutamente convergente per ogni $x > 0$;
- [c] divergente per $x > 1/2$;
- [d] nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Si considerino i sottoinsiemi del piano complesso $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \in [0,1]\}$ e $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = -1\}$. Allora

- [a] $A \cap B$ è finito;
- [b] $A \cap B$ è aperto;
- [c] $A \cup B$ è limitato;
- [d] $A \setminus B$ non è connesso.

Risoluzione (giustificare la risposta)

[5 punti]

Esercizio 4

Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)}{e^{-x}+\frac{1}{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\log\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)+1\right)}{e^{-x}+\frac{1}{x}}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+y'-2y=e^{x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 6

[4 punti]

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove D è la regione del primo quadrante compresa tra l'asse x e i grafici delle funzioni $h_1(x) = x^2$ e $h_2(x) = 2 - x$.

Risoluzione