Lezione 2

Funzioni e relazioni

2.1 Funzioni

Intuitivamente una funzione è data quando sono dati nell'ordine due insiemi, un'insieme di partenza e uno di arrivo (detti anche dominio e codominio, o ancora di input e di output), e una legge che ad ogni elemento del primo insieme fa corrispondere in modo univoco un ben determinato elemento del secondo insieme. La legge della funzione, purché chiaramente definita, può essere completamente arbitraria. Essa si può dare in termini analitici (per le funzioni numeriche), come in

$$f(x) = x^3 - 2,$$

oppure in termini geometrici come nella *proiezione stereografica* (vedi Figura 2.1). L'importanza del concetto di funzione deriva dal fatto che esse risultano fondamentali per descrivere moltissimi fenomeni reali: fisici, economici, sociali e biologici.

Nella teoria degli insiemi, le funzioni saranno esse stesse insiemi e in particolare saranno definite come *terne ordinate di insiemi*, in cui il primo elemento è l'insieme di partenza, il secondo elemento è l'insieme di arrivo della funzione, e il terzo elemento è una particolare relazione tra l'insieme di arrivo e quello di partenza. Quindi, al fine di descrivere formalmente una funzione introduciamo prima il concetto di terna di insiemi. Siano x, y e z insiemi. Si pone $(x, y, z) := ((x, y), z)$ e si chiama *terna* ordinata formata da x, y e z.

Saverio Salzo (saverio.salzo@uniroma1.it) DIAG, Sapienza Università di Roma.

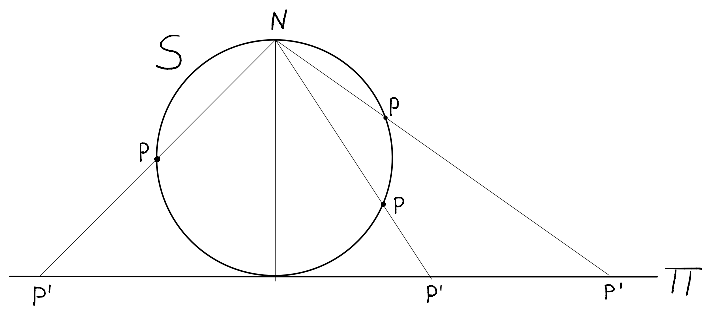

Figura 2.1: Sia S la superficie sferica e N il polo nord. La funzione che associa ad ogni punto $P \in S \setminus \{N\}$ il punto P' intersezione tra la retta NP e il piano Π, cioè $r_{NP} \cap \Pi = \{P'\}$, si chiama *proiezione stereografica*.

Definizione 2.1. Siano A e B insiemi. Si chiama *relazione funzionale tra A e B* un sottoinsieme $R \subset A \times B$ tale che

$$(\forall\, x \in A)(\exists!\, y \in B)(\,(x, y) \in R\,).$$

Equivalentemente si può richiedere che

$$\mathrm{dom}(R) = A \quad \text{e} \quad (\,(x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R\,) \;\Rightarrow\; y_1 = y_2,$$

dove $\mathrm{dom}(R)$ è stato definito nella Definizione 1.20 di relazione tra due insiemi. In tal caso la terna $f = (A, B, R)$ si chiama *funzione* (o anche *applicazione*) di A in B e si indica con

$$f \colon A \to B.$$

Per ogni $x \in A$, l'unico elemento $y \in B$ tale che $(x, y) \in R$ si indica con $f(x)$ e si chiama *immagine* di x mediante f. L'insieme A si chiama *dominio* o *insieme di partenza* di f e B si chiama *codominio* o *insieme di arrivo* della funzione f. Infine, l'insieme delle funzioni di A in B si indica con

$$B^A.$$

Si sottolinea che una funzione può far corrispondere a due elementi distinti del dominio uno stesso elemento del codominio (si veda Figura 2.2), mentre non può far corrispondere ad un elemento del dominio più elementi distinti del codominio.

Osservazione 2.2. Se $f \colon A \to B$ è una funzione, la sua relazione funzionale è

$$R = \big\{ z \in A \times B \,|\, (\exists x \in A)(\, z = (x, f(x))\,) \big\} \tag{2.1}$$

Questa si chiama anche *il grafico* della funzione f e si indica con G_f. Da (2.1) si vede anche che la relazione funzionale R è univocamente determinata dai valori $f(x)$ della funzione f sul dominio A. Per questa ragione nel definire una funzione si può evitare di definire R esplicitamente ma semplicemente si da' per ogni $x \in A$ il valore $f(x)$. Nel seguito adotteremo questo approccio.

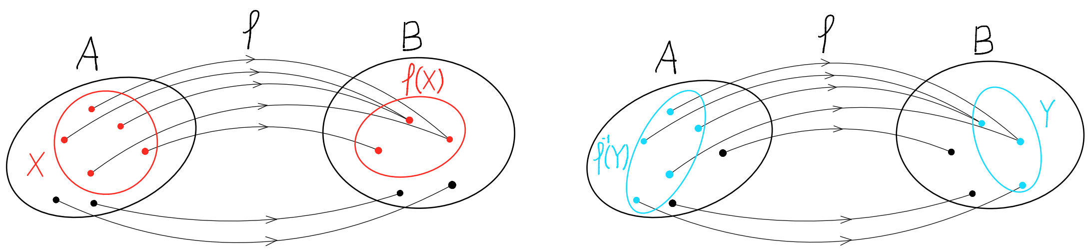

Figura 2.2: Immagine diretta di X mediante f (sinistra) e immagine inversa di Y mediante f (destra).

Esempio 2.3. Sia A un insieme e definiamo la diagonale di A come

$$\Delta_A = \{z \in A \times A \,|\, \exists x \in A,\, z = (x, x)\}.$$

Evidentemente Δ_A è una relazione funzionale su A e la funzione $i_A = (A, A, \Delta_A)$ si chiama *funzione identità di* A. Evidentemente, per ogni $x \in A$, $i_A(x) = x$.

Definizione 2.4. Sia $f\colon A \to B$ e $X \subset A$ e $Y \subset B$. Si pone

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B \,|\, \exists x \in X\colon f(x) = y\} \\ f^{-1}(Y) &= \{x \in A \,|\, f(x) \in Y\} \end{aligned}$$

e si chiamano rispettivamente *immagine (diretta) di* X *mediante* f e *controimmagine* (o anche *immagine inversa*) *di* Y *mediante* f. Essi sono rispettivamente l'insieme delle immagini degli elementi di X mediante f e l'insieme degli elementi di A la cui immagine mediante f cade in Y. Si veda Figura 2.2. L'insieme $f(A)$ si chiama anche *immagine della funzione* f.

Il risultato seguente si verifica facilmente.

Proposizione 2.5. *Siano* $f\colon A \to B$, $X, X' \subset A$ *e* $Y, Y' \subset B$. *Allora*

(i) $X \subset X' \;\Rightarrow\; f(X) \subset f(X')$.

(ii) $Y \subset Y' \;\Rightarrow\; f^{-1}(Y) \subset f^{-1}(Y')$.

(iii) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$ *e* $f(X \cap X') \subset f(X) \cap f(X')$.

(iv) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ *e* $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.

(v) $X \subset f^{-1}(f(X))$ *e* $f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

Definizione 2.6. Sia $f\colon A \to B$. Allora

- f si dice *iniettiva* o *ingettiva* se

$$(\forall\, x \in A)(\forall\, x' \in A)(\, x \neq x' \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x')\,)$$

  o equivalentemente se $(\forall\, x \in A)(\forall\, x' \in A)(\, f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'\,)$.

- f si dice *suriettiva* o *surgettiva* se

$$(\forall\, y \in B)(\exists\, x \in A)(f(x) = y)$$

  o equivalentemente $f(A) = B$.

- f si dice *bigettiva* se è iniettiva e surgettiva, cioè se

$$(\forall\, y \in B)(\exists!\, x \in A)(\, f(x) = y\,)$$

Osservazione 2.7. I concetti di iniettività, surgettività e bigettività sono legati alle proprietà dell'equazione

$$f(x) = y, \quad y \in B. \tag{2.2}$$

In molte applicazioni i problemi si pongono come la soluzione di un'equazione del tipo (2.2) dove y rappresenta il dato. In questi contesti è importante stabilire se il problema ha soluzione, e nel caso, se la soluzione è unica. Allora la surgettività della funzione f equivale al fatto che il problema (2.2) ha almeno una soluzione per ogni dato $y \in Y$. Invece l'iniettività di f equivale al fatto che il problema (2.2) ha al più una soluzione per ogni dato $y \in Y$. Questi problemi si chiamano *problemi inversi* e l'esistenza e l'unicità della soluzione sono condizioni necessarie per la *ben posizione* del problema.

Osservazione 2.8. In riferimento alla proprietà (v) della Proposizione 2.5, notiamo che

(i) se $f\colon A \to B$ è iniettiva e $X \subset A$, allora $f^{-1}(f(X)) = X$;

(ii) se $f\colon A \to B$ è surgettiva e $Y \subset B$, allora $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Definizione 2.9. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ due funzioni tali che il codominio della prima è uguale al dominio della seconda. Si definisce la *funzione composta di f e g*, che si indica con $g \circ f\colon A \to C$, in modo che

$$(\forall\, x \in A) \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Teorema 2.10. *Sia $f\colon A \to B$. Allora sono equivalenti*

(i) *f è bigettiva*

(ii) *f è invertibile, nel senso che esiste $g\colon B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$.*

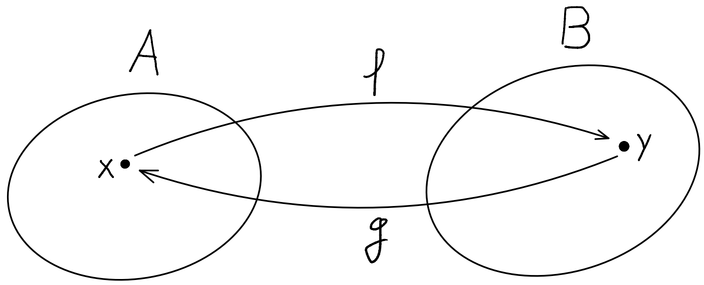

Figura 2.3: Illustrazione dell'enunciato (ii) del Teorema 2.10.

Inoltre la funzione g *in* (ii) *è unica e si chiama* inversa *di* f *e si denota con* f^{-1}.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): Essendo f bigettiva, per ogni $y \in B$, l'equazione

$$f(x) = y \tag{2.3}$$

ha una ed una sola soluzione. Quindi si può definire una funzione $g\colon B \to A$ tale che

$$\forall\, y \in B\colon g(y) \text{ è l'unica soluzione dell'equazione (2.3).}^{1} \tag{2.4}$$

Allora, dato che $g(y)$ risolve (2.3), si ha $f(g(y)) = y$. Inoltre se $x \in A$, dalla (2.4), essendo $f(x) \in B$, si ha che

$$g(f(x)) = x \;\Leftrightarrow\; x \text{ è l'unica soluzione dell'equazione } f(x) = f(x),$$

che è chiaramente vera.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Le equazioni $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$ si possono scrivere

$$\forall\, x \in A\colon g(f(x)) = x \quad \text{e} \quad \forall\, y \in B\colon f(g(y)) = y. \tag{2.5}$$

La seconda delle (2.5) prova che per ogni $y \in B$, l'equazione $f(x) = y$ ha una soluzione, (cioè $g(y)$) e quindi f è surgettiva. Dalla prima delle (2.5) consegue invece che

$$f(x) = f(x') \Rightarrow\; g(f(x)) = g(f(x')) \;\Rightarrow\; x = x'$$

e perciò f è iniettiva.

Proviamo adesso l'unicità di g nell'enunciato (ii). Se $h\colon B \to A$ è tale che $h \circ f = i_A$ e $f \circ h = i_B$, allora, essendo $f \circ g = i_B$, si ha

$$\forall\, y \in B\colon h(y) = h(f(g(y))) = g(y)$$

e quindi $h = g$. □

[1] In altri termini la relazione

$$S = \{(y, x) \in B \times A \mid f(x) = y\}$$

è una relazione funzionale tra B è A. E quindi $g = (B, A, S)$ è una funzione.

Osservazione 2.11. La funzione inversa di f è definita come la funzione $f^{-1}\colon B \to A$ tale che
$$\forall\, y \in B\colon\ f^{-1}(y) \text{ è l'unica soluzione dell'equazione} f(x) = y.$$
Quindi, se per esempio $f(x) = x^3 + 7$, allora per trovare l'espressione dell'inversa di f, si prova a risolvere l'equazione
$$x^3 + 7 = y,$$
con y arbitrario. In questo caso si ha
$$x^3 + 7 = y \ \Leftrightarrow\ x^3 = y - 7 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt[3]{y-7}.$$
Perciò è chiaro che $\sqrt[3]{y-7}$ è l'unica soluzione dell'equazione $f(x) = y$ e quindi si ha
$$\forall\, y \in B\colon\ f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}.$$

Osservazione 2.12. Sia $f\colon A \to B$ funzione bigettiva e $f^{-1}\colon B \to A$ la sua inversa. Allora
$$(\forall\, x \in A)(\forall\, y \in B)(f(x) = y \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x). \tag{2.6}$$
Infatti, essendo $f^{-1} \circ f = i_A$ e $f \circ f^{-1} = i_B$, si ha
$$\begin{aligned} f(x) = y \ &\Rightarrow\ f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) \ \Rightarrow\ x = f^{-1}(y) \\ f^{-1}(y) = x \ &\Rightarrow\ f(f^{-1}(x)) = f(x) \ \Rightarrow\ x = f(x). \end{aligned}$$
L'equivalenza (2.6) è quella che si applica normalmente nella soluzione di un'equazione quando si sa che la funzione f è bigettiva. Per esempio si ha
$$x^3 = 7 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt[3]{7},$$
vedremo infatti che la funzione $x \mapsto x^3$ è bigettiva e ha inversa $y \mapsto \sqrt[3]{y}$.

Esempio 2.13. Un esempio importante di applicazioni bigettive occorre in geometria. Se Π è il piano euclideo e se indichiamo con $d(P,Q)$ la distanza euclidea tra i punti $P, Q \in \Pi$, allora si chiama *isometria* ogni applicazione $T\colon \Pi \to \Pi$ che conserva le distanze, cioè tale che
$$\forall\, P, Q \in \Pi\colon\ d(T(P), T(Q)) = d(P,Q).$$
Si vede che una isometria del piano è necessariamente bigettiva e la sua inversa è pure un'isometria. Le isometrie del piano modellano i movimenti rigidi del piano: le traslazioni, le rotazioni e le simmetrie assiali sono tutti esempi di isometrie.

Definizione 2.14. Sia $f\colon A \to B$ e $X \subset A$. Si chiama *restrizione di* f *a* X e si indica con $f_{|X}$ la funzione $(X, B, R_{|X})$ dove $R_{|X} = \{(x,y) \in R \mid x \in X\}$.

E' utile estendere il concetto di funzione invertibile dato nella Proposizione 2.10 come nella definizione seguente.

Definizione 2.15. Una funzione $f\colon A \to B$ si dice *invertibile* se è iniettiva. In tal caso la *funzione inversa* si definisce come segue

$$f^{-1}\colon f(A) \to A, \quad \forall\, y \in f^{-1}(A)\colon f^{-1}(y) = x \text{ dove } x \text{ è l'unico elemento di } A \text{ t.c. } f(x) = y.$$

Evidentemente si ha che

$$f^{-1} \circ f = i_A \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = j_{f(A)}.$$

Definizione 2.16. Siano I e A due insiemi. Una funzione $a\colon I \to A$ si chiama anche una *famiglia di elementi di A*. Quando si usa questa denominazione l'immagine mediante a di un elemento $i \in I$ si indica più spesso con a_i (invece che con $a(i)$) e la funzione stessa si denota con $(a_i)_{i\in I}$. Poi, il dominio I si chiama *insieme d'indici* della famiglia $(a_i)_{i\in I}$.

Definizione 2.17. Siano I e X due insiemi. Una funzione $A\colon I \to \mathcal{P}(X)$ si chiama anche *una famiglia di parti di X* e si denota con $(A_i)_{i\in I}$. Si definiscono poi *l'unione* e *l'intersezione della famiglia* $(A_i)_{i\in I}$ come segue

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \big\{x \in X \,\big|\, (\exists\, i \in I)(x \in A_i)\big\} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \big\{x \in X \,\big|\, (\forall\, i \in I)(x \in A_i)\big\}.$$

2.2 Relazioni d'ordine

Sia X un insieme. Una relazione $R \subset X \times X$ su X si chiama *relazione d'ordine* se verifica le seguenti proprietà

- Riflessiva: $(\forall\, x \in X)(xRx)$
- Antisimmetrica: $(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in X)(xRy \ \wedge\ yRx \ \Rightarrow\ x = y)$
- Transitiva: $(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in X)(\forall\, z \in X)(xRy \ \wedge\ yRz \ \Rightarrow\ xRz)$

Una relazione d'ordine su X si indica con $\leq$. Perciò si ha $x \leq x$, $x \leq y \ \wedge\ y \leq x \ \Rightarrow\ x = y$, e $x \leq y \ \wedge\ y \leq z \ \Rightarrow\ x \leq z$. Si definisce poi

$$x < y \ \Leftrightarrow\ x \leq y \ \wedge\ x \neq y.$$

Un *insieme ordinato* è una coppia $(X, \leq)$ costituita da un insieme e una relazione d'ordine su di esso. Una relazione d'ordine $\leq$ su X si dice *totale* se

$$(\forall\, x \in X)(\forall\, y \in X)(x \leq y \ \vee\ y \leq x).$$

In tal caso la coppia coppia $(X, \leq)$ si dice insieme totalmente ordinato.

Esempio 2.18. Sia A un insieme. Allora $(\mathcal{P}(A), \subset)$ è un insieme ordinato e, se A possiede almeno due elementi, non è totalmente ordinato.

Definizione 2.19. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subset X$ non vuoto.

- Un elemento $a \in A$ si chiama *massimo di* A se per ogni $x \in A$, $x \leq a$. In tal caso, dalla asimmetria della relazione d'ordine, segue che esso è unico. Si indicherà con $\max_{\leq} A$. Similmente, un elemento $a \in A$ si chiama *minimo di* A se per ogni $x \in A$, $a \leq x$. In tal caso esso è unico e si indica con $\min_{\leq} A$.

- Un elemento $M \in X$ tale che per ogni $x \in A$, $x \leq M$ si chiama *maggiorante di* A *in* X. Se esiste un maggiorante di A in X allora si dice che A è limitato superiormente in X. Un elemento $m \in X$ tale che per ogni $x \in A$, $m \leq x$ si chiama un *minorante di* A *in* X e se esiste allora si dice che A è limitato inferiormente in A.

Definizione 2.20. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $A \subset X$ non vuoto. Supponiamo che A sia limitato superiormente in X. Allora l'insieme $M_X(A)$ dei maggioranti di A in X è non vuoto e se questo insieme ha minimo, allora $\min_{\leq} M_X(A)$ si chiama *l'estremo superiore di* A *in* X *e si denota con* $\sup_X A$. Similmente supponiamo che A sia limitato inferiormente in X. Allora l'insieme $m_X(A)$ dei minoranti di A in X è non vuoto e se questo insieme $m_X(A)$ ha massimo, allora $\max_{\leq} m_X(A)$ si chiama *l'estremo inferiore di* A *in* X *e si denota con* $\inf_X A$.

Esempio 2.21. Sia A un insieme non vuoto e consideriamo l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(A), \subset)$ dove $\mathcal{P}(A)$ è l'insieme della parti di A e $\subset$ è la relazione di inclusione tra le parti di A. Evidentemente si ha

- $\min \mathcal{P}(A) = \varnothing$ e $\max \mathcal{P}(A) = A$.

- Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ è un insieme non vuoto di parti di A, allora

$$\sup_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{F} = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \quad \text{e} \quad \inf_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{F} = \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X.$$

Queste relazioni conseguono dal fatto che se $B \subset A$, allora

$$B \text{ è maggiorante di } \mathcal{F} \text{ in } \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \subset B$$
$$B \text{ è minorante di } \mathcal{F} \text{ in } \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; B \subset \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X.$$

Proposizione 2.22. *Sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, $A \subset X$ limitato superiormente in X e $a \in X$. Allora $a = \sup_X A$ se e solo se*

(i) $(\forall\, x \in A)(x \leq a)$

(ii) $(\forall\, b \in X)(b < a \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A,\, x > b)$.

Dimostrazione. Per definizione $a = \sup_X A$ se e solo se

$$a \in M_X(A) \quad \text{e} \quad (\forall\, b \in X)(b \in M_X(A) \;\Rightarrow\; a \leq b). \tag{2.7}$$

La prima di (2.7) è equivalente a (i). Per quanto riguarda la seconda di (2.7), si osserva che, per la legge della contronominale, $b \in M_X(A) \;\Rightarrow\; a \leq b$ equivale a $a \not\leq b \;\Rightarrow\; b \notin M_X(A)$. Ma dato che la relazione d'ordine è totale, si ha $a \not\leq b \;\Leftrightarrow\; a > b$ e $b \notin M_X(A) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \in A\, x > b$. Perciò segue che la seconda di (2.7) equivale a (ii). □

Allo stesso modo si prova l'analogo risultato per l'estremo inferiore.

Proposizione 2.23. *Sia $(X, \leq)$ un insieme totalmente ordinato, $A \subset X$ limitato inferiormente in X e $a \in X$. Allora $a = \inf_X A$ se e solo se*

(i) $(\forall\, x \in A)(a \leq x)$

(ii) $(\forall\, b \in X)(b > a \;\Rightarrow\; \exists\, x \in A,\, x < b)$.

Nel seguito, per una maggiore concisione del discorso, se $x \in X$, $A \subset X$ e $B \subset X$ sono due sottoinsiemi non vuoti useremo le seguenti notazioni

$$x \leq A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, a \in A\colon x \leq a \qquad A \leq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, a \in A \forall\, b \in B\colon a \leq b.$$

Quando $A \leq B$ i due sottoinsiemi si dicono *separati*. Poi, un elemento λ tale che $A \leq \lambda \leq B$ si dice un *elemento separatore* tra A e B.

Teorema 2.24. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Allora le proposizioni seguenti sono equivalenti*

(i) *Ogni sottoinsieme $A \subset X$ non vuoto e limitato superiormente in X è dotato di estremo superiore.*

(ii) *Ogni sottoinsieme $A \subset X$ non vuoto e limitato inferiormente in X è dotato di estremo inferiore.*

(iii) *Ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi non vuoti e separati di X ammette un elemento separatore. In altri termini se $A \leq B$, allora esiste $\lambda \in X$ tale che $A \leq \lambda \leq B$.*

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (iii): Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di X tali che $A \leq B$. Allora, è chiaro che ogni elemento di B è maggiorante di A. Dato che $B \neq \varnothing$, risulta che A è limitato superiormente in X. Quindi, per l'ipotesi (i), esiste $\lambda = \sup_X A$. Ora, per definizione di estremo superiore, λ è un maggiorante di A, quindi $A \leq \lambda$. Inoltre λ è il più piccolo dei maggioranti di A e dato che gli elementi di B sono maggioranti di A, risulta $\lambda \leq B$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sia $A \subset X$ non vuoto e limitato superiormente e sia $B = M_X(A)$ l'insieme dei maggioranti di A in X. Allora chiaramente $A \leq B$ e, per l'ipotesi (iii), esiste $\lambda \in X$

tale che $A \le \lambda \le B$. Adesso osserviamo che, $A \le \lambda \Rightarrow \lambda$ è maggiorante di A in X e che $\lambda \le B \Rightarrow \lambda$ è più piccolo di tutti i maggioranti di A. Perciò, per definizione, $\lambda = \sup_X A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di X tali che $A \le B$. Come prima, osserviamo che ogni elemento di A è un minorante di B. Quindi B è limitato inferiormente (perché $A \neq \varnothing$) e, per l'ipotesi (ii), esiste $\lambda = \inf_X B$. Ora, per definizione di estremo inferiore, λ è un minorante di B, e quindi $\lambda \le B$; e inoltre λ è il più grande dei minoranti di B e quindi $A \le \lambda$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sia $A \subset X$ non vuoto e limitato inferiormente e sia $B = m_X(A)$ l'insieme dei minoranti di A in X. Come sopra, si ha chiaramente che $B \le A$. Allora per l'ipotesi (iii), esiste $\lambda \in X$ tale che $B \le \lambda \le A$. Quindi λ è un minorante di A e inoltre è più grande di tutti i minoranti di A. Perciò $\lambda = \inf_X A$. □

Definizione 2.25. Un insieme ordinato che verifica una delle proprietà enunciate nel Teorema 2.24 si dice *completo*.

Proposizione 2.26. *Sia* $(X, \le)$ *un insieme ordinato e completo. Siano* A *e* B *due sottoinsiemi di non vuoti e separati di* X*. Allora*

(i) *esistono* $\sup_X A$ *e* $\inf_X B$ *e risulta* $\sup_X A \le \inf_X B$.

(ii) $\forall\, \lambda \in X\colon\; A \le \lambda \le B \;\Leftrightarrow\; \sup_X A \le \lambda \le \inf_X B$.

Dimostrazione. (i): Dato che A e B sono non vuoti e $A \le B$, allora A è limitato superiormente (ogni elemento di B è maggiorante di A) e B è limitato inferiormente (ogni elemento di A è minorante di B). Perciò, essendo $(X, \le)$ completo, esistono $\sup_X A$ e $\inf_X B$. Consideriamo adesso un elemento $b \in B$. Allora, evidentemente, b è un maggiorante di A, ed essendo $\sup_X A$ il più piccolo dei maggioranti di A, risulta che $\sup_X A \le b$. Si è così provato che $\forall\, b \in B\colon\; \sup_X A \le b$. In altri termini $\sup_X A$ è un minorante di B. Ma $\inf_X B$ è il più grande dei minoranti di B e quindi $\sup_X A \le \inf_X B$.

(ii): Sia $\lambda \in X$. Allora

$$A \le \lambda \le B \;\Rightarrow\; \begin{cases} \lambda \text{ è maggiorante di } A \\ \lambda \text{ è minorante di } B \end{cases}$$

Perciò, per definizione di estremo superiore e inferiore di A, si ha che $\sup_X A \le \lambda \le \inf_X B$. Abbiamo così provato l'implicazione $\Rightarrow$ nell'enunciato (ii). Ma l'altra implicazione è immediata essendo $A \le \sup_X A$ e $\inf_X B \le B$. □

Osservazione 2.27. La Proposizione 2.26 stabilisce che gli elementi separatori tra A e B non sono altro che gli elementi compresi tra $\sup_X A$ e $\inf_X B$. Da questa caratterizzazione degli elementi separatori tra A e B consegue che

$$\text{esiste un unico elemento separatore tra } A \text{ e } B \;\Leftrightarrow\; \sup A = \inf B.$$

In tal caso i due insiemi A e B si dicono *contigui*.

2.3 Complementi

Osservazione 2.28. Nella Definizione 2.1 si è introdotto anche l'insieme B^A di tutte le funzioni di A in B. Notiamo qui che affinché l'insieme B^A sia ben definito è necessario individuare un insieme, costruito a partire da A e B soltanto, di cui B^A sia un sottoinsieme, in modo che poi si possa applicare l'assioma di specificazione. Questo è possibile andando in qualche modo a "smontare" la terna $f = (A, B, R)$. Di seguito indichiamo questo procedimento, per il lettore più scrupoloso. Siano A e B insiemi e $f\colon A \to B$. Quindi $f = (A, B, R) = ((A, B), R)$ per qualche $R \subset A \times B$. Si ricordi che $R \subset \mathcal{P}^2(A \cup B)$ e quindi $R \in \mathcal{P}^3(A \cup B)$. Poi evidentemente $A, B \subset A \cup B$ e quindi $A, B \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Perciò $(A, B) \in \mathcal{P}^3(A \cup B)$. In definitiva $f = ((A, B), R) \in \mathcal{P}^5(A \cup B)$. Così si può definire, per mezzo dell'assioma di specificazione, l'insieme delle funzioni di A in B come

$$B^A = \Big\{ f \in \mathcal{P}^5(A \cup B) \,\Big|\, \exists R \in \mathcal{P}^3(A \cup B), \\ R \text{ è una relazione funzionale tra } A \text{ e } B \text{ e } f = (A, B, R) \Big\}.$$

Osservazione 2.29. Nella Definizione 2.9 se $f = (A, B, R)$ e $g = (B, C, S)$, allora la relazione funzionale di $g \circ f$ è definita come segue

$$T = \{(x, z) \in A \times C \,|\, (\exists y \in B)(\,(x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in S\,)\}.$$

Verifichiamo che T è una relazione funzionale tra A e C. Sia $x \in X$. Sappiamo che $f(x) \in Y$ e $(x, f(x)) \in R$. Inoltre $(f(x), g(f(x))) \in S$. Perciò per definizione $(x, g(f(x))) \in T$. Se $z \in Z$ è tale che $(x, z) \in T$. Allora esiste $y \in Y$ con $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in S$. Dato che R e S sono relazioni funzionali si ha $y = f(x)$ e $z = g(y)$ e quindi $z = g(f(x))$. Si è quindi provato che per ogni $x \in X$ esiste un unico elemento $z \in Z$ tale che $(x, z) \in T$ e questo elemento è $g(f(x))$. Perciò più esplicitamente risulta che $g \circ f = (X, Z, T)$ e per ogni $x \in X$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.