Lezione 31

Saverio Salzo*

22 Novembre 2022

1 Derivate di ordine superiore

Definizione 1.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un'unione di intervalli[a] di $\mathbb{R}$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia derivabile in tutti i punti di A con derivata $f'\colon A \to \mathbb{R}$. Se f' è derivabile in un punto $x_0 \in A$, allora f di dice *derivabile due volte in* x_0 e la derivata di f' in x_0 si chiama *derivata seconda di* f *in* x_0 e si indica in uno dei seguenti modi

$$f''(x_0), \quad f^{(2)}(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), \quad \ddot{f}(x_0).$$

Se poi f è derivabile due volte in tutti i punti di A, allora la funzione $x \mapsto f''(x)$ si chiama derivata seconda di f e si indica con uno dei simboli

$$f'', \quad f^{(2)}, \quad D^2 f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \ddot{f}.$$

[a]E' sufficiente che tutti i punti di A siano di accumulazione per A e questo è verificato se A è una unione di intervalli di $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.2. In accordo alla Definizione 1.1 si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.3.

(i) La funzione potenza con esponente $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n(x) = x^n$$

è derivabile con derivata

$$p_n'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_n'(x) = nx^{n-1}.$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

Allora è chiaro che la funzione p_n' è a sua volta derivabile. Perciò p_n è due volte derivabile e risulta

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ p_n''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

(ii) Consideriamo le funzioni seno e coseno

$$\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Abbiamo visto che entrambe sono derivabili e le derivate sono rispettivamente

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad -\operatorname{sen}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Chiaramente queste funzioni sono ancora derivabili e perciò le funzioni seno e coseno sono derivabili due volte e risulta

$$D^2 \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad D^2 \cos x = -\cos x.$$

Più in generale si possono definire le derivate di qualsiasi ordine per ricorrenza.

Definizione 1.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un'unione di intervalli di $\mathbb{R}$ e sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Sia $n \in \mathbb{N}^*$ e supponiamo che f sia derivabile n volte in tutti i punti di A con derivata $f^{(n)}\colon A \to \mathbb{R}$. Se $f^{(n)}$ è derivabile in un punto $x_0 \in A$, allora f di dice *derivabile* $n+1$ *volte in* x_0 e la derivata di $f^{(n)}$ in x_0 si chiama *derivata* $n+1$*-esima di* f *in* x_0 e si indica in uno dei seguenti modi

$$f^{(n+1)}(x_0), \quad D^{n+1}f(x_0), \quad \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}(x_0).$$

Se poi f è derivabile $n+1$ volte in tutti i punti di A, allora la funzione $x \mapsto f^{(n+1)}(x)$ si chiama derivata $n+1$-esima di f e si indica con uno dei simboli

$$f^{(n+1)}, \quad D^{n+1}f, \quad \frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}.$$

Osservazione 1.5. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un'unione di intervalli di $\mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Per induzione su n si prova che se $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ sono funzioni n volte derivabili in A, allora $f+g$ e $f \cdot g$ sono n volte derivabili in A e, per ogni $x \in A$, risulta

$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad \text{e} \quad (f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)g^{(n-1)}(x) + f^{(n-1)}(x)g^{(n)}(x). \tag{1}$$

L'insieme delle funzioni definite in A, derivabili n volte in A e con derivata n-esima continua si indica con

$$\mathscr{C}^n(A).$$

Questo insieme è un'*algebra di funzioni*, cioè

$$\forall\, f, g \in \mathscr{C}^n(A), \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\colon \quad f+g, \alpha f, f \cdot g \in \mathscr{C}^n(A).$$

Dalla seconda di (1), per induzione, si ricava la seguente *regola di Leibniz* per il calcolo della derivata n-esima del prodotto di due funzioni n volte derivabili

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x),$$

dove si è posto $f^{(0)} = f$ e $g^{(0)} = g$.