Lezione 20

Saverio Salzo*

28 ottobre 2022

1 Punti di discontinuità

Definizione 1.1. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che f *è discontinua in* x_0 (o che x_0 è un punto di discontinuità di f) se f non è continua in x_0. Supponiamo che x_0 sia punto di discontinuità di f, allora si hanno i seguenti casi

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e $l \neq f(x_0)$. In tal caso x_0 si dice un *punto di discontinuità eliminabile per* f. Infatti in tal caso si può modificare il valore di f in x_0 in modo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi rendere f continua in x_0.

(ii) Se x_0 è punto di accumulazione a destra e a sinistra di x_0 e $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R}$ con $l_- \neq l_+$, allora si dice che x_0 è *punto di discontinuità di prima specie* o *di salto*. In tal caso la quantità $l_+ - l_-$ si chiama salto della funzione f in x_0. Si veda Figura 1.

(iii) se non si verificano i casi precedenti, allora x_0 si dice *punto di discontinuità di seconda specie*.

Esempio 1.2.

(i) La funzione parte intera $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ ha discontinuità di prima specie sui punti di $\mathbb{Z}$. In tali punti il salto vale 1.

(ii) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \quad f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

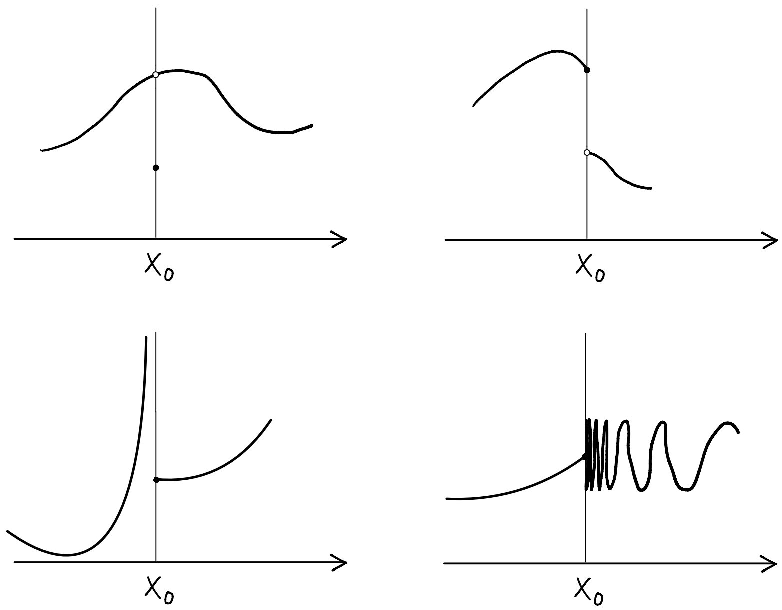

Figura 1: Discontinuità eliminabile (in alto a sinistra), di prima specie (in alto a destra) e di seconda specie (in basso).

Abbiamo visto che il limite $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ non esiste. Proviamo adesso che in realtà non esistono neanche i limiti sinistro e destro di f in 0 e perciò la funzione ha una discontinuità di seconda specie. Si tratta di far vedere che

$$\nexists \lim_{x\to 0} f_{|\mathbb{R}^*_+}(x) \quad \text{e} \quad \nexists \lim_{x\to 0} f_{|\mathbb{R}^*_-}(x).$$

Proviamo solo il primo, l'altro si prova allo stesso modo. Cerchiamo due sottoinsiemi $B_1^+, B_2^+ \subset \mathbb{R}^*_+$ per cui 0 è di accumulazione per entrambi e

$$\lim_{x\to 0} f_{B_1^+}(x) \neq \lim_{x\to 0} f_{B_2^+}(x).$$

Poniamo

$$B_1^+ = \big\{x \in R^*_+ \mid \operatorname{sen}(1/x) = 1\big\} \quad \text{e} \quad B_2^+ = \big\{x \in R^*_+ \mid \operatorname{sen}(1/x) = -1\big\}.$$

Allora evidentemente

$$B_1^+ = \left\{\frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{e} \quad B_1^+ = \left\{\frac{1}{-\pi/2 + 2k\pi} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^*\right\}$$

e quindi 0 è di accumulazione per entrambi e chiaramente

$$\lim_{x\to 0} f_{B_1^+}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f_{B_2^+}(x) = -1.$$

(iii) La funzione di Dirichelet

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è discontinua in ogni punto, con discontinuità di seconda specie: per qualunque x_0 non esistono i limiti destro e sinistro di f per x che tende a x_0. Infatti si può definire

$$B_1^+ = \mathbb{Q} \cap \,]x_0, +\infty[\quad \text{e} \quad B_2^+ = \,]x_0, +\infty[\, \setminus \mathbb{Q}$$

e chiaramente

$$\lim_{x \to x_0} f_{B_1^+}(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f_{B_2^+}(x) = 0.$$

Osservazione 1.3. La Definizione 1.1 richiede che il punto di discontinuità debba appartenere al dominio della funzione. Quindi, per esempio, la funzione $x \mapsto 1/x$ non è discontinua in 0: semplicemente, non ha senso parlare di continuità o discontinuità in 0 poiché 0 non è un punto del dominio.

Spesso capita nelle applicazioni di definire funzioni continue su sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che siano "piccoli" in qualche senso. Si pone allora il problema di capire se queste funzioni si possono estendere in modo continuo a insiemi più grandi. A tale scopo si ha il seguente risultato.

Teorema 1.4 (di prolungamento per continuità)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Sia $B \subset \mathbb{R}$ tale che*

(i) $A \subset B \subset \overline{A}$

(ii) $\forall\, x_0 \in B \setminus A$ *esiste finito* $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Allora esiste uno ed un solo prolungamento continuo di f a B, cioè una funzione $\bar{f}\colon B \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\bar{f}_{|A} = f$.

Esempio 1.5. La funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ si può prolungare a tutto $\mathbb{R}$ definendo la funzione

$$\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

e la funzione $\bar{f}$ è continua su $\mathbb{R}$

2 Proprietà topologiche per successioni

Teorema 2.1 (Caratterizzazione dei limiti mediante successioni)**.** *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

(ii) *Per ogni successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di A_{x_0} risulta* $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): Questa implicazione è una conseguenza del teorema sui limiti delle funzioni composte. Infatti la successione $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non è altro che la funzione composta

$$f \circ a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Diamo comunque una dimostrazione diretta, perché è istruttiva. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A, diversi da x_0, tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$. Dobbiamo provare che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$, cioè che

$$\forall\, V \text{ intorno di } l, \exists\, \nu \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall\, n \in \mathbb{N}, n > \nu\colon\;\; f(a_n) \in V.$$

Sia quindi V un intorno di l in $\overline{\mathbb{R}}$. Dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, esiste U intorno di x_0 tale che

$$\forall\, x \in U \cap A_{x_0}\colon \quad f(x) \in V. \tag{1}$$

Inoltre, essendo $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$, in corrispondenza di U, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon n > \nu \;\Rightarrow\; a_n \in U. \tag{2}$$

Perciò, essendo $a_n \in A_{x_0}$, da (1) e (2), consegue che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > \nu\colon\;\; f(a_n) \in V.$$

Quindi si è provato che $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Supponiamo per assurdo che l non sia limite di $f(x)$ per $x \to x_0$. Allora esiste V intorno di l tale che

$$\forall\, U \text{ intorno di } x_0\colon \quad f(U \cap A_{x_0}) \not\subset V,$$

e quindi

$$\forall\, U \text{ intorno di } x_0 \;\exists\, x \in U \cap A_{x_0} \text{ tale che } f(x) \notin V. \tag{3}$$

Prendiamo una successione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di di intorni x_0 nel modo seguente

$$U_n = \begin{cases} \left]x_0 - \dfrac{1}{n+1}, x_0 + \dfrac{1}{n+1}\right[& \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ ]n, +\infty] & \text{se } x_0 = +\infty \\ [-\infty, n[& \text{se } x_0 = -\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Allora da (3) segue che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, a_n \in U_n \cap A_{x_0} \text{ tale che } f(a_n) \notin V.$$

Si definisce così una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di punti di A_{x_0} e

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\, a_n \in U_n \;\text{ e }\; f(a_n) \notin V.$$

Allora, per come sono definiti gli intorni U_n in (4), è facile vedere che, per confronto si ha $a_n \to x_0$ per $n \to +\infty$. Ma essendo $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\; f(a_n) \notin V$ e V un intorno di l, $f(a_n)$ non può tendere a l per $n \to +\infty$. Questo contrasta con l'ipotesi in (ii). □

Teorema 2.2 (Caratterizzazione della continuità mediante successioni)**.** *Sia* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$. *Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

(i) f *è continua in* x_0

(ii) *Per ogni successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di punti di* A *si ha* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A tale che $a_n \to x_0$. Proviamo che $f(a_n) \to f(x_0)$. Sia V un intorno di $f(x_0)$. Allora, dato che f è continua in x_0,

$$\text{esiste } U \text{ intorno di } x_0 \text{ tale che } f(U \cap A) \subset V.$$

Adesso, dato che $a_n \to x_0$ ed essendo U intorno di x_0, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > \nu\colon\;\; a_n \in U \text{ e quindi } f(a_n) \in V.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Si procede come nella dimostrazione del Teorema 2.1. Supponiamo che esista un intorno V di $f(x_0)$ tale che

$$\forall\, U \text{ intorno di } x_0\colon\;\; f(U \cap A) \not\subset V.$$

Si definisce una successione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni di x_0 come prima e allora

$$\exists\, a_n \in U_n \cap A \text{ tale che } f(a_n) \notin V$$

e si prova che $a_n \to x_0$, mentre $f(a_n) \not\to f(x_0)$. □

Proposizione 2.3. *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x \in \mathbb{R}$. *Allora*

$$x \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \textit{ tale che } a_n \to x$$

Dimostrazione. Proviamo prima l'implicazione "$\Leftarrow$". Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di A e $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$, allora per ogni V intorno di x esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\;\; n > \nu \;\Rightarrow\; a_n \in V,$$

e quindi $V \cap A \neq \varnothing$ (per esempio $x_{\nu+1} \in V \cap A$). Viceversa, supponiamo che $x \in \overline{A}$. Consideriamo gli intorni di x del tipo

$$V_n = \left]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right[\quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Allora, essendo $x \in \overline{A}$, si ha

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ V_n \cap A \neq \varnothing$$

e quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a_n \in V_n \cap A$. Si definisce così una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A e chiaramente risulta

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ x - \frac{1}{n+1} < a_n < x + \frac{1}{n+1}.$$

Perciò per il teorema dei carabinieri si deduce che $a_n \to x$. □

Proposizione 2.4. *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti*

(i) *A è chiuso*

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}\colon\ \lim_{n\to+\infty} a_n = x \ \Rightarrow\ x \in A.$

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di A convergente ad un punto $x \in \mathbb{R}$. Per la Proposizione 2.3 $x \in \overline{A}$. Ma A è chiuso e quindi $\overline{A} = A$ e perciò $x \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sia $x \in \overline{A}$. Allora, per la Proposizione 2.3 esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tale che $a_n \to x$. Da (ii) si conclude che $x \in A$. Si è quindi provato che $\overline{A} \subset A$ e quindi che $\overline{A} = A$. Perciò A è chiuso. □

Teorema 2.5 (di Bolzano–Weierstrass[a])**.** *Da ogni successione numerica limitata si può estrarre una sottosuccesione convergente.*

[a]Si vedano anche le note manoscritte sul metodo di bisezione in generale

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale limitata. Dato che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, esiste un intervallo $I_0 = [\alpha_0, \beta_0]$ che contiene tutti gli elementi della successione. Sia $\gamma_0 = (\alpha_0 + \beta_0)/2$, il punto medio tra α_0 e β_0. Evidentemente uno dei due insiemi

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in [\alpha_0, \gamma_0]\} \quad \text{e} \quad \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in [\gamma_0, \beta_0]\}$$

è infinito, perché la loro unione è $\mathbb{N}$ che è infinito. Chiamiamo $\mathbb{N}_1$ tale insieme e indichiamo con $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ l'intervallo corrispondente, per cui

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_1\} \quad \text{è infinito.}$$

Si noti che $|I_1| = \beta_1 - \alpha_1 = (\beta_0 - \alpha_0)/2$ (essendo $I_1 = [\alpha_0, \gamma_0]$ o $I_1 = [\gamma_0, \beta_1]$). Adesso prendiamo $\gamma_1 = (\alpha_1 + \beta_1)/2$, il punto medio di α_1 e β_1, e consideriamo gli insiemi

$$\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in [\alpha_1, \gamma_1]\} \quad \text{e} \quad \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in [\gamma_1, \beta_1]\}.$$

Evidentemente questi sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}_1$ e la loro unione è $\mathbb{N}_1$ che è un insieme infinito, per cui almeno uno dei due deve essere infinito. Chiamiamo con $\mathbb{N}_2$ tale insieme e indichiamo con $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ l'intervallo corrispondente, per cui

$$\mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_2\} \quad \text{è infinito.}$$

Si ha $|I_2| = |I_1|/2 = (\beta_0 - \alpha_0)/2^2$. Procedendo in questo modo si costruisce una successione $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ di intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} I_{k+1} \subset I_k \\ |I_k| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} \\ \big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_k\big\} \text{ è infinito.} \end{cases} \tag{5}$$

Allora per il principio degli intervalli incapsulati $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \{x_0\}$. Definiamo una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x. Poniamo $n_0 = 0$ e poi

$$\begin{aligned} n_1 &= \min\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_1 \text{ e } n > n_0\big\} \\ n_2 &= \min\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_2 \text{ e } n > n_1\big\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

In generale, se $n_k \in \mathbb{N}$ è stato definito, si definisce

$$n_{k+1} = \min\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_{k+1} \text{ e } n > n_k\big\}.$$

Si noti che la definizione è ben posta, perché essendo $\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_{k+1}\big\}$ infinito, l'insieme $\big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_{k+1} \text{ e } n > n_k\big\}$ è non vuoto. Si definisce così per ricorrenza una successione di numeri naturali $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon\ \ n_k \in \big\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \in I_k\big\} \quad \text{e} \quad n_{k+1} > n_k.$$

Allora, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e si ha

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon a_{n_k} \in I_k.$$

Proviamo che $a_{n_k} \to x$ per $k \to +\infty$. Basta notare che, essendo $a_{n_k}, x_0 \in I_k$, risulta

$$|a_{n_k} - x_0| \leq |I_k| = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \to 0 \quad \text{per } k \to +\infty. \qquad \square$$