

# DOMANDE ESAMI ORALI CONTI – ADAMO (a distanza)

09-06-2020 DALLE ORE 08:00 ALLE ORE 21:00

## 1° ESAME

Inizio ore 08:33

Fine ore: 09:05

- Mi dice qualcosa sullo sviluppo di Taylor?
- Mi scrive la formula generale di un polinomio di Taylor di ordine  $n$ ?
- Sviluppo di  $e^x$  (termine generico)
- sviluppo di  $\sin(x)$  con primi 2 termini
- Sviluppo di  $e^{\sin x}$  fino al terzo ordine
- Ipotesi di continuità e derivabilità di  $e^{\sin x}$
- Esempio di una serie di Taylor che converge ma che non converge la funzione data
- Discutere la continuità e la derivabilità delle funzioni a due variabili
- Data  $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$  discutere derivabilità e continuità nell'origine
- Data  $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$  e sapendo che  $f(0,0) = 0$  continuare la discussione precedente
- Cosa succede se calcolo i valori verso l'origine nella diagonale  $x = y$ ? e in quella  $y = -x$ ? Cosa deduce da questo?
- Definizione di "differenziabile" in  $x_0$  e  $y_0$
- Parlare delle successioni
- Teorema di monotonia delle successioni
- Data una successione convergente crescente quindi  $a_n$  monotona crescente abbiamo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$
- Esempio:  $a_n = 1 - 1/n$ , cosa è 1? [estremo superiore]

## 2° ESAME

Inizio ore 09:15

Fine ore: 09:39

- Funzioni integrabili: esempi di funzioni integrabili e non (caso di funzione a tratti)
- Citare un esempio di una funzione discontinua in tutti i punti della retta reale
- Definizione: funzione continua in un punto  $x_0$
- Definizione: primitiva di una funzione
- Teoremi fondamentali del calcolo integrale
- Integrali multipli: 2 modi di integrare gli integrali tripli
- Formule di De Moivre
- Formule di Eulero
- Domanda: il coseno iperbolico è invertibile? Questa funzione è suriettiva e suriettiva?
- Quale è la sua immagine di  $f(x)$ ?

### 3° ESAME

Inizio ore 09:53

Fine ore: 10:35

- Formule di Eulero
- Formula di De Moivre
- Parte reale di  $e^{ix}$
- Domanda: coseno iperbolico è invertibile? [per invertire devo limitare da 0 a + infinito]
- Come ricostruire la funzione inversa del coseno iperbolico? (sette iperbolico)
- $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$  ora scriviamo  $e^{inx}$  con n intero, lei può scrivere questa cosa in due modi distinti
- Tipi equazioni differenziali
- Esempio  $y'' + 1 = 0$ . Risolvere e dire integrale generale
- Esempio  $y'' + y = 0$ . Risolvere e dire integrale generale
- Equazione differenziale primo ordine
- Criterio di Leibnitz nelle serie. Cosa dice sul resto della serie in questione?

### 4° ESAME

Inizio ore 10:48

Fine ore: 11:20

- Serie armonica generalizzata. Per quale motivo converge per  $\alpha \geq 2$ ?  
In che modo ci siamo arrivati? [La serie di Mengoli è una serie telescopica e si riconosce molto facilmente essere una serie convergente. Qui abbiamo potuto stabilire che anche la serie armonica generalizzata con esponente 2 è convergente grazie al criterio del confronto asintotico]
- Criteri nelle serie a termini non negativi. Quando due serie asintotiche?
- Cosa significa definitivamente?
- Teorema di Weierstrass
- Funzioni a più variabili vale ancora Weierstrass? Quali sono le ipotesi?
- Cosa significa che un dominio è chiuso e limitato? Quando è aperto?
- Definizione di campo
- Teorema di Lagrange
- La funzione  $f(x) = |\sin(\pi/(x+1))|$  in  $[0,2]$  soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange?

**6° ESAME****Inizio ore 11:27****Fine ore: 11:56**

- Definizione: estremo superiore e inferiore in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$
- Differenza estremo superiore e massimo e differenza estremo inferiore e minimo. Quali proprietà differenziano questi tipi? [Estremo superiore non è necessariamente un elemento dell'insieme mentre il massimo sì]
- Domanda: cosa si intende per sotto-insieme limitato in  $\mathbb{R}^n$  [insieme limitato se può essere contenuto all'interno di una grossa palla o sfera]
- Domanda: cosa si intende per insieme chiuso?
- Domanda: cosa si intende per insieme numerabile?
- $\mathbb{R}$  è numerabile? di Cantor
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/x)(\sin x)(e^{(x^3+\cos(x))/(x^5+x^2+1)})$
- Integrale Gaussiano:  $e^{-x^2}dx$  come ci si arriva?
- Integrale doppio:  $e^{(x^2+y^2)}$  in un cerchio di raggio  $r$

**7° ESAME****Inizio ore 12:03****Fine ore: 12:30**

- Ricerca massimi e minimi in più variabili
- Ricerca massimi e minimi di  $f(x,y) = x^2 + y$  in triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$
- Definizione di differenziabile in due variabili in un punto  $(x_0, y_0)$
- Condizione sufficiente di differenziabilità in due variabili
- Cosa sono le derivate direzionali?
- Integrale indefinito di  $\arctan(x)$

**8° ESAME****Inizio ore 12:38****Fine ore: 13:13**

- Cosa significa che una serie è assolutamente convergente? Se una serie è convergente è assolutamente convergente? (con contro esempio)
- Sviluppo di Taylor di  $\ln(1+x)$  e  $x_0 = 0$
- Serie armonica alternante [è un esempio di una serie che converge ma non assolutamente]
- Serie di Mengoli
- Definizione di convergenza per una serie
- Serie irregolare
- Successioni/Funzioni monotone
- Legame monotonia e invertibilità (es. se ho una funzione strettamente crescente)
- $y = x$  da 0 a  $\frac{1}{2}$  e  $y = x + 1$  da  $\frac{1}{2}$  a 1 è continua? [no, ma è strettamente crescente].  
E' biettiva, iniettiva o suriettiva?
- Regola di dell'Hopital

**9° ESAME****Inizio ore 13:18****Fine ore: 13:48**

- Integrali tripli: due procedure
- limite per  $x \rightarrow 0^+$  di  $(1/\tan(x) - 1/\cos(x)) \cdot (\ln(1+x\cos(x)))/x$  [+infinito]

**10° ESAME****Inizio ore 15:10****Fine ore: 16:00**

- Definizione numero  $e$  [della successione], comportamento
- Data  $b_n = (1 + 1/n)^{n+1}$  e  $a_n = (1 + 1/n)^n$   
si sa che  $a_n$  è convergente a  $e$  partendo dal fatto che  $a_n$  è monotona crescente
- Limiti che derivano da  $e$
- Gerarchia degli infiniti
- Perché  $n^n$  batte tutti con criterio del rapporto  $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/n^n$
- Formula di Sterling
- Integrale triplo di  $x^2 + y^2$  con  $D = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  e  $0 \leq z \leq 1$
- Teorema di Fermat ad una variabile
- Principio di induzione e disuguaglianza di Bernoulli. Quali condizioni ci sono per le  $x$ ?

**12° ESAME****Inizio ore 16:04****Fine ore: 16:36**

- Edo primo ordine lineare con problema di Cauchy
- Esistenza e unicità problema di Cauchy
- $y' = (1/(y^2))^x$
- Funzione Lipshitziana
- Teorema di Fubini
- Dominio  $x$ -semplice e  $y$ -semplice
- Dimostrare per induzione che la somma per  $k = 1$  ad  $n$  di  $k^2 + 3k + 2$  è divisibile per 2 per ogni  $n \geq 1$

**13° ESAME****Inizio ore 16:43****Fine ore: 17:00**

- Teorema dei valori intermedi
- Numeri razionali formano un campo e tutti gli altri campi (razionali, reali, naturali)
- Quoziente di numeri complessi
- Forma polare numero complesso

**14° ESAME****Inizio ore 17:08****Fine ore: 17:33**

- Piano di Gauss
- $z = 2 + i$
- Formule di De Moivre
- $(5 + 3i)/(4 - i)$
- A cosa corrisponde il coniugato geometricamente?
- Moltiplico  $z * i$  a cosa corrisponde geometricamente?
- Formula integrali per sostituzione
- Risolvere:  $\sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}$  per sostituzione

**15° ESAME****Inizio ore 17:38****Fine ore: 18:05**

- Criterio condensazione per le serie
- Serie armonica generalizzata
- Serie armonica generalizzata alternata
- Definizione di campo
- $\lim_{x \rightarrow 0} \{x\}(\sin(x)) * (e^{(1/\cos(x) + x/\arctan(x+1))})$  con  $\{x\} = x - |x|$

**16° ESAME****Inizio ore 18:09****Fine ore: 18:37**

- Calcolo derivata:  $(e^x)x(\cos(x))$
- Calcolo deriata:  $x^x$
- Prodotto pari x dispari
- Prodotto dispari x pari
- f composto g con f pari e g dispari [pari]
- f composto g con g dispari e f pari [pari]
- f composto g con g dispari e f dispari [dispari]
- $y'' + 4y = xe^x$
- Metodo somiglianza: idea che sta sotto
- Metodo variazione costanti arbitrarie: idea che sta sotto
- funzione continua in un intervallo  $(0,1]$ . Ammette massimo?

**17° ESAME****Inizio ore 18:42****Fine ore: 19:15**

- Risolvere serie da 1 a + infinito  $(1/n^3)\ln(1 + \cos(n)/n + \sin(n)/n^2)$
- integrale di  $1/(x^a)$  da 1 a + infinito

**18° ESAME****Inizio ore 19:20****Fine ore: 19:43**

- Teoremi di permanenza del segno nelle successioni
- Serie armonica generalizzata e con serie di Mengoli
- Criterio condensazione
- Wroskiano
- Integrale doppio di  $\cosh(2x^2+y^2)$   
con  $D = \{(x,y) \mid 2x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0 \text{ e } x \leq y\}$
- Definizione numero complesso  $z$  e esponenziale complesso

**19° ESAME****Inizio ore 19:53****Fine ore: 20:18**

- $\lim (x,y) \rightarrow (0,0) \quad (1 - \cos(x^2 + y^2)) / (\ln(1 + |x| + |y|))$
- Radice ennesima di un numero complesso. Quante radici quarte complesse ci sono di un numero completo  $z$ ? [4]

**20° ESAME****Inizio ore 20:24****Fine ore: 20:51**

- funzione integrale e teoremi fondamentali calcolo integrale
- quante primitive sono ammissibile ad una funzione?
- regola di dell'Hopital, in quale di un teorema importante è stato usato? [sviluppo di Taylor]
- Esempio di una serie di Taylor che converge ma che non converge la funzione data [sviluppo in serie di Taylor di  $e^{(-1/x^2)}$ , tutte le derivate nell'origine sono uguali a 0]
- Teorema di Weierstrass a priori si applica a funzioni continue ad intervalli chiusi e limitati. Se invece ho una funzione che a 0 all'infinito (es  $e^{(-x^2)}$ ) che va a 0 sia per  $x \rightarrow a + \infty$  sia per  $x \rightarrow a - \infty$ ). E' possibile usare il teorema di Weierstrass per capire se ammette un massimo o minimo assoluto?
- $y' - 3y = x^2 + x$
- Coefficiente binomiale
- Logaritmo complesso