8 Soluzioni esercizi pdf n.8

Per risolvere i limiti proposti in questa esercitazione si fa usa del Principio di sostituzione presente nella lezione 38. Viene riportato qui di seguito:

Proposizione 2.5 (Principio di sostituzione)**.** *Siano $f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3 \colon A \to \mathbb{R}$ funzioni reali e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Supponiamo che le funzioni siano tutte diverse da zero in un intorno di x_0 e che*

$$f_1(x) \sim g_1(x), \quad f_2(x) \sim g_2(x) \quad e \quad f_3(x) \sim g_3(x) \quad per\ x \to x_0.$$

Allora se $l \in \overline{\mathbb{R}}$ risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) f_2(x)}{f_3(x)} = l \iff \lim_{x \to x_0} \frac{g_1(x) g_2(x)}{g_3(x)} = l.$$

- Esercizio (56)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + \log\left(\frac{1+x}{e}\right)}{2(\cosh x - 1)\sinh x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} + \log(1+x) - 1}{2(\cosh x - 1)\sinh x} \tag{56}$$

Ricordando gli sviluppi di e^t, $\log(1+t)$, $\cosh t$ e $\sinh t$ studiamo separatamente il numeratore ed i due termini del denominatore che costituiscono un prodotto:

$$e^{-x} - 1 = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$N(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{1}{6}x^3$$

$$\cosh x - 1 = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\sinh x = x + o(x^2)$$

$$D(x) = 2(\cosh x - 1) \cdot \sinh x = 2\left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)(x + o(x^2)) = x^3 + o(x^4) \sim x^3$$

il nostro limite può quindi essere riscritto come:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

- Esercizio (57)

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\left[\cos 2x + \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) - 1\right]}{x(e^{2x} - \cosh(2x) - 2x)} \tag{57}$$

Ricordando gli sviluppi di $\cos t$, $\sin t$, e^t e $\cosh t$ studiamo separatamente numeratore e denominatore:

$$\cos 2x - 1 = -\frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(2x)^4 = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin\left(\frac{2}{\sqrt{2}}x\right) = \frac{2}{\sqrt{2}}x - \frac{\sqrt{2}}{3}x^3 + o(x^3) \to \sin^2\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 2x^2 + \frac{2}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^6)$$

$$N(x) = 4\left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) + 2x^2 + \frac{2}{9}x^6 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^6)\right) = 4\big((\frac{2}{3} - \frac{4}{3})x^4 + o(x^4)\big) \sim -\frac{8}{3}x^4$$

$$e^{2x} - 2x = 1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$\cosh 2x = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$D(x) = x\big(1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) - (1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4))\big) = x(\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)) \sim \frac{4}{3}x^4$$

possiamo quindi riscrivere il nostro limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^4}{\frac{4}{3}x^4} = -2$$

- Esercizio (58)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x) + \log(e^x - x) - \frac{1}{6}x^3}{x^3 \sin x} \tag{58}$$

Notando la forma del denominatore possiamo utilizzare il confronto asintotico e riscrivere il denominatore come

$$x^3 \sin x \sim x^4, \quad per\ x \to 0$$

ricordando ora gli sviluppi di $\log(1+t)$, e^t, $\cos t$ studiamo il numeratore:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\log(\cos x) = \log\left[1 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\right] =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3+o\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3$$

Notiamo che l'o-piccolo con il grado minore è $o(x^4)$, dalla prima parentesi, possiamo quindi limitarci a calcolare i monomi con grado non più grande di 4:

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+o(x^6)\right) = -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

Cerchaimo di capire ora l'espressione di $\log(e^x - x)$

$$e^x-x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-x = 1+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)$$

$$\log(e^x - x) = \log\left[1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)^3+o(x^6)$$

Come prima notiamo che l'o-piccolo con grado minore è di nuovo $o(x^4)$, sviluppiamo quindi solo i monomi con grano non maggiore di 4:

$$\log(e^x-x) = \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+o(x^6)\right) = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

Avremo quindi che il nostro numeratore sarà:

$$N(x) = \left[-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\right]+\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)\right]-\frac{1}{6}x^3 \sim -\frac{1}{6}x^4$$

Possiamo riscrivere il nostro limite come

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^4}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

- Esercizio (59)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\big(\log(1+2x)\big) - e^{2x} + 1}{\tan x^2} \tag{59}$$

Semplifichiamo il denominatore e ricordiamo che

$$\tan x^2 \sim x^2, \quad per\ x \to 0$$

Ricordando ora gli sviluppi di $\sin t,\ e^t,\ \log(1+t)$ studiamo il numeratore:

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin(\log(1+2x)) = \left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)^3+o\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)^4$$

Notiamo che l'o-piccolo con grado minore è $o(x^3)$ dalla prima parentesi,
possiamo quindi sviluppare i monomi con grado non maggiore di 3:

$$\sin(\log(1+2x)) = \left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)-\frac{1}{6}\left(8x^3+o(x^4)\right) = 2x-2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$

$$e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

il nostro numeratore sarà quindi:

$$N(x) = \left[2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right] - \left[2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right] \sim -4x^2$$

possiamo quindi riscrivere il limite come segue

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4x^2}{x^2} = -4$$

- Esercizio (60)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{x^4} - 1} \tag{60}$$

Innanzitutto semplifichiamo il denominatore ricordando che

$$e^{x^4} - 1 \sim x^4 \quad per\ x \to 0$$

Ricordando ora gli sviluppi di $\sinh t$ e $\sin t$ abbiamo:

$$\sinh^2 x = \left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2 = x^2+\frac{1}{36}x^6+\frac{1}{3}x^4+o(x^5) = x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$$

$$\sin^2 x = \left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)^2 = x^2+\frac{1}{36}x^6-\frac{1}{3}x^4+o(x^5) = x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^5)$$

quindi il nostro numeratore sarà:

$$N(x) = \left[x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right] - \left[x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right] \sim \frac{2}{3}x^4$$

possiamo riscrivere il nostro limite come segue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^4} = \frac{2}{3}$$

- Esercizio (61): Determinare massimi e minimi locali e punti di flesso della seguente funzione

$$f(x) = \log(1 + x^2), \quad A = \mathbb{R} \tag{61}$$

Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad A = \mathbb{R}$$

studiando il segno della derivata prima possiamo determinare gli intervalli di monotonia della funzione, avremo quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} > 0 & se\ x > 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} = 0 & se\ x = 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} < 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

Si deduce che la funzione è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$, successivamente si ha un punto stazionario in $x = 0$, la funzione poi è strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Possiamo quindi dire che $x = 0$ è un minimo globale per la funzione $f(x)$.
Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad A = \mathbb{R}$$

Studiando il segno della derivata seconda abbiamo

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} > 0 & se\ x \in]-1, 1[\\ \frac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 & se\ x = \pm 1 \\ \frac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2} < 0 & se\ x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$$

quindi la funzione è convessa in $[-1, 1]$, la funzione poi è concava in $]-\infty, -1]$ e in $[1, +\infty[$. I punti $x = \pm 1$ sono punti di flesso. Valutando la derivata $f'(x)$ in $x = \pm 1$ otteniamo dei valori finiti non nulli, segue quindi che i punti di flesso sono a tangente obliqua.

- Esercizio (62): Determinare massimi e minimi locali e punti di flesso della seguente funzione

$$f(x) = (3x^2 + 1)e^{x+2}, \quad A = \mathbb{R} \tag{62}$$

Calcoliamo la derivata

$$f'(x) = 6xe^{x+2} + (3x^2 + 1)e^{x+2} = e^{x+2}(3x^2 + 6x + 1), \quad A = \mathbb{R}$$

e studiando il segno abbiamo:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x+2}(3x^2 + 6x + 1) > 0 & se\ \left(x < \frac{-3-\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(x > \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right) \\ e^{x+2}(3x^2 + 6x + 1) = 0 & se\ x = \frac{-3\pm\sqrt{6}}{3} \\ e^{x+2}(3x^2 + 6x + 1) < 0 & se\ \frac{-3-\sqrt{6}}{3} < x < \frac{-3+\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

cioè, in ordine, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in $\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{6}}{3}\right]$, la funzione è strettamente decrescente in $\left[\frac{-3-\sqrt{6}}{3}, \frac{-3+\sqrt{6}}{3}\right]$ e infine è nuovamente strettamente crescente in $\left[\frac{-3+\sqrt{6}}{3}, +\infty\right[$. I punti $x = \frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$, essendo zeri della derivata e considerato lo studio del segno, sono quindi punti di estremo locale per la funzione $f(x)$.

Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = e^{x+2}(3x^2+6x+1)+e^{x+2}(6x+6) = e^{x+2}(3x^2+12x+7), \quad A = \mathbb{R}$$

Studiamo ora il segno:

$$f''(x) = \begin{cases} e^{x+2}(3x^2+12x+7) > 0 & se \left(x < \frac{-12-\sqrt{60}}{6}\right) \cup \left(x > \frac{-12-\sqrt{60}}{6}\right) \\ e^{x+2}(3x^2+12x+7) = 0 & se\ x = \frac{-12\pm\sqrt{60}}{6} \\ e^{x+2}(3x^2+12x+7) < 0 & se\ \frac{-12-\sqrt{60}}{6} < x < \frac{-12+\sqrt{60}}{6} \end{cases}$$

cioè la funzione è convessa in $\left]-\infty, \frac{-12-\sqrt{60}}{6}\right]$ e in $\left[\frac{-12-\sqrt{60}}{6}, +\infty\right[$ ed è concava in $\left[\frac{-12-\sqrt{60}}{6}, \frac{-12+\sqrt{60}}{6}\right]$. I punti $x = \frac{-12\pm\sqrt{60}}{6}$ sono punti di flesso per la funzione $f(x)$. Sostituendo questi valori nell'espressione della derivata prima otteniamo valori finiti e non nulli, quindi possiamo dire che i punti di flesso hanno tangente obliqua.

- Esercizio (63): Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \tag{63}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz:

- Ipotesi di positività $a_n \geq 0$ soddisfatta $\forall\, n$ in quanto l'argomento del logaritmo è strettamente maggiore di 1
- Ipotesi sul carattere infinitesimo del termine generale a_n soddisfatta: $a_n \to 0 \quad per\ n \to +\infty$
- Studiamo la decrescenza del termine generale utilizzando il calcolo differenziale. Studiamo la derivata della funzione $f(x) = \log(1+\frac{3}{x-2})$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{3}{x-2}}\frac{-3}{(x-2)^2} = -\frac{(x-2)3}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

Affinché il termine generale sia decrescente dobbiamo verificare che $(x+1)(x-2) > 0$. Questo è vero per $x < -1 \cup x > 2$.

Possiamo quindi dire che per $n > 3$ il termine generale è strettamente decrescente quindi per il criterio di Leibniz la serie converge.

- Esercizio (64): Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3} \tag{64}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz:

  – Ipotesi di positività di a_n soddisfatta in quanto il denominatore per $n \geq 1$ assume solo valori non negativi.

  – Ipotesi sul carattere infinitesimo di a_n soddisfatta in quanto $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \quad per\ n \to +\infty$

  – Studiamo la decrescenza del termine generale utilizzando il calcolo differenziale. Studiamo la derivata della funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\log x^3}$:

$$f'(x) = \frac{0 - \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{x^3}\right)}{(\sqrt{x}+\log x^3)^2} = -\frac{6+\sqrt{x}}{2x}\frac{1}{(\sqrt{x}+\log x^3)^2}$$

    e affinché la derivata sia sempre negativa dobbiamo considerare $x > 0$, quindi nel nostro caso affinché il termine generale sia strettamente decrescente dobbiamo considerare $n > 0$.

Considerato che la sommatoria parte da $n = 1$ e che il criterio di Leibniz è soddisfatto possiamo concludere che la serie converge.