Lezione 41 (complementi)

Saverio Salzo*

13 dicembre 2022

1 Integrabilità di funzioni discontinue

Abbiamo visto che le funzioni continue definite su un intervallo compatto $[a, b]$ sono integrabili secondo Riemann. Qui facciamo vedere che anche in presenza di punti di discontinuità, purché siano in numero finito, la funzione rimane integrabile secondo Riemann. Cominciamo con il seguente risultato.

Proposizione 1.1. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Valgono le seguenti affermazioni (si veda Figura 1).*

(i) *Se, per ogni $c \in \,]a, b[\, : f \in \mathcal{R}([c, b])$, allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e vale*

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f \tag{1}$$

(ii) *Se per ogni $c \in \,]a, b[\, : f \in \mathcal{R}([a, c])$, allora $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e vale*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = \int_a^b f. \tag{2}$$

Dimostrazione. Proviamo solo la prima affermazione (la seconda si prova allo stesso modo). Sia $c \in \,]a, b[$ e sia Q una suddivisione dell'intervallo $[c, b]$. Allora evidentemente $P = Q \cup \{a\}$ è una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ e risulta

$$\begin{aligned} S(f, P) &= (c - a) \sup_{[a,c]} f + S(f, Q) \\ s(f, P) &= (c - a) \inf_{[a,c]} f + s(f, Q). \end{aligned} \tag{3}$$

Sottraendo termine a termine le due equazioni in (3) si ha

$$S(f, P) - s(f, P) = (c - a)\big(\sup_{[a,c]} f - \inf_{[a,c]} f\big) + S(f, Q) - s(f, Q). \tag{4}$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

Inoltre, posto $M = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$, risulta

$$-M \le \inf_{[a,c]} f \le \sup_{[a,c]} f \le M \tag{5}$$

e quindi $\sup_{[a,c]} f - \inf_{[a,c]} f \le 2M$. Perciò dalla (4) si ha

$$S(f,P) - s(f,P) \le 2M(c-a) + S(f,Q) - s(f,Q). \tag{6}$$

Proviamo adesso l'integrabilità di f su $[a,b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Evidentemente si può scegliere c in $]a,b[$ in modo che

$$2M(c-a) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Poi, per un c così scelto, dato che f è integrabile su $[c,b]$, esiste $Q \in \mathcal{D}([c,b])$ tale che $S(f,Q) - s(f,Q) < \varepsilon/2$. Perciò, posto $P = Q \cup \{a\} \in \mathcal{D}([a,b])$, dalla (6), segue

$$S(f,P) - S(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La tesi segue dai criteri di integrabilità (Teorema 1.5, Lezione 40). Proviamo ora la formula (1). Per lo stesso $\varepsilon > 0$ fissato sopra, da (3)-(5) e dalla definizione di integrale, risulta

$$-(c-a)M + s(f,Q) \le s(f,P) \le \int_a^b f \le S(f,P) \le S(f,Q) + (c-a)M.$$

Inoltre si ha pure

$$s(f,Q) \le \int_c^b f \le S(f,Q).$$

Perciò si ha

$$\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| \le S(f,Q) - s(f,Q) + (c-a)2M.$$

Quindi, in accordo a (7), se si pone $\delta = \varepsilon/(4M)$, allora si ha

$$|c-a| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Osservazione 1.2. Dalla formule (1) e (2) della Proposizione 1.1 (essendo c è sempre diverso da a e b) segue che l'integrale di f su $[a,b]$ non dipende dai valori della funzione agli estremi dell'intervallo $[a,b]$. In particolare nel caso (i) si può cambiare il valore di $f(a)$ e nel caso (ii) si può cambiare il valore di $f(b)$ senza che queste modifiche incidano sulla integrabilità di f su $[a,b]$ e sul valore dell'integrale.

Corollario 1.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ e continua nell'intervallo $]a,b[$. Allora f è integrabile sull'intervallo chiuso $[a,b]$ e l'integrale non dipende dai valori della funzione agli estremi dell'intervallo.*

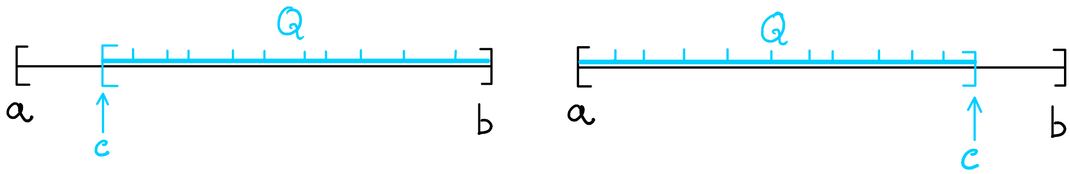

Figura 1: Illustrazione della Proposizione 1.1. A sinistra: f è integrabile su ogni intervallo del tipo $[c, b]$. A destra: f è integrabile su ogni intervallo del tipo $[a, c]$

Dimostrazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in due intervalli uguali. Consideriamo quindi gli intervalli

$$[a, (a+b)/2] \quad \text{e} \quad [(a+b)/2, b]\,. \tag{8}$$

Evidentemente f è limitata in ciascuno di questi intervalli. Consideriamo il primo degli intervalli (8). Allora per ogni $c \in]a, (a+b)/2] : f \in \mathcal{R}([c, (a+b)/2])$, perché f è continua su $[c, (a+b)/2]$. Quindi per la Proposizione 1.1 f è integrabile su $[a, (a+b)/2]$. Allo stesso modo per il secondo degli intervalli (8), risulta che per ogni $c \in [(a+b)/2, b[: f \in \mathcal{R}([(a+b)/2, c])$, perché f è continua su $[(a+b)/2, c]$. Quindi per la Proposizione 1.1 f è integrabile su $[(a+b)/2, b]$. Poi, dall'additività dell'integrale si conclude che f è integrabile su $[a, b]$. Infine, osserviamo che la Proposizione 1.1 stabilisce anche che

$$\int_a^{(a+b)/2} f = \lim_{c\to a} \int_c^{(a+b)/2} f \quad \text{e} \quad \int_{(a+b)/2}^b f = \lim_{c\to b} \int_{(a+b)/2}^c f$$

e quindi

$$\int_a^b f = \lim_{c\to a} \int_c^{(a+b)/2} f + \lim_{c\to b} \int_{(a+b)/2}^c f.$$

Si vede allora che l'integrale $\int_a^b f$ non dipende dal valore della funzione f in a e b (perché nel limite c è sempre diverso dagli estremi). $\square$

Esempio 1.4. Sia $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è limitata su $[0, 1]$ ed è continua su $]0, 1]$. Perciò f è integrabile su $[0, 1]$.

Mettendo insieme i risultati precedenti si arriva al seguente teorema.

Teorema 1.5. *Una funzione limitata su $[a, b]$ e con un numero finito di punti di discontinuità in $[a, b]$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Inoltre il valore dell'integrale non cambia se si modifica il valore della funzione in un numero finito di punti.*

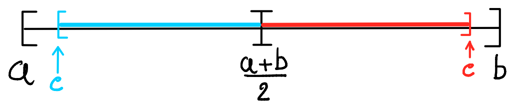

Figura 2: Illustrazione della dimostrazione del Corollario 1.3.

Dimostrazione. Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Siano

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_n$$

i punti di discontinuità di f interni ad $[a,b]$ (quindi $a < c_1$ e $c_n < b$). Allora evidentemente f è continua in ognuno degli intervalli $]a,c_1[$, $]c_1,c_2[$, $\dots$, $]c_n,b[$ e quindi, per il Corollario 1.3, è integrabile sugli intervalli chiusi $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$, $\dots$, $[c_n,b]$. Perciò le tesi segue dall'additività dell'integrale. $\square$