7 Soluzioni esercizi pdf n.7

a) Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1-x)}{\tan x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 \log(1-x)}{\sin x - x\cos x} \cos x \tag{50}$$

L'ultima equivalenza è dovuta alla necessità di riscrivere $\tan x$ come $\frac{\sin x}{\cos x}$ e utilizzare gli sviluppi di Taylor di $\sin t$ e $\cos t$, inoltre, ricordando gli sviluppi di Taylor di e^t e $\log(1+t)$ abbiamo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \to e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\log(1-x) = \log(1+(-x)) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3) =$$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \to x\cos x = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \left(x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

quindi il nostro limite è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 \log(1-x)}{\sin x - x\cos x} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^4)} \cos x =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^4)} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^3}\right)} \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^2 x - x^3}{5x\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{5\log(1+x^4)} \tag{51}$$

Ricordando gli sviluppi di Taylor di $\sin(t)$ e $\log(1+t)$ abbiamo:

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{6^2} + o(x^6) - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - o(x^6) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

e dovendo considerare l'o-piccolo con il grado minore, cioè $o(x^4)$, i monomi di grado più grande possono essere ignorati.

$$\log(1+x^4) = x^4 + o(x^4)$$

quindi il nostro limite è

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{5\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2}{5x^4 + 5o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{5x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(-\frac{1}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{x^4\left(5 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} = -\frac{1}{15}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4} \tag{52}$$

Ricordando gli sviluppi di Taylor di e^t e $\cos t$ abbiamo

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$-\cos x = -\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

quindi il nostro limite è

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) - \frac{3}{2}x^2}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{24}$$

b) Utilizzando il teorema di de l'Hopital, quando possibile, risolvere i seguenti limiti:
Si nota da subito che tutti e tre i limiti proposti sono una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ e che soddisfano le ipotesi del teorema di de l'Hopital, avremo quindi:

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{e^{3(x-2)} - (x-1)^3 - \frac{3}{2}(x-2)^2}{(x-2)^4} \overset{H}{=} \tag{53}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2^\pm} \frac{3e^{3(x-2)} - 3(x-1)^2 - 3(x-2)}{4(x-2)^3} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 2^\pm} \frac{9e^{3(x-2)} - 6(x-1) - 3}{12(x-2)^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^\pm} \frac{27e^{3(x-2)} - 6}{24(x-2)} = \frac{7}{8}\frac{1}{0^\pm}$$

l'ultimo limite non è più una forma indeterminata, per $x \to 2^+$ vale $+\infty$ e per $x \to 2^-$ vale $-\infty$, perciò per la regola di de l'Hopital esistono i limiti sinistro e destro e sono diversi. Quindi il limite (53) non esiste.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^2 x - x^3}{5x\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{5\log(1+x^4)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - 2x}{\frac{5\cdot 4x^3}{1+x^4}} = \tag{54}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1}{20}\frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1}{20}\frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^4+1}{20}\frac{-4\sin 2x}{3\cdot 2x} = -\frac{1}{15}$$

Possiamo risolvere lo stesso limite anche in quest'altro modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin^2 x - x^3}{5x\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x + x)(\sin x - x)}{5\log(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x}\frac{\sin x - x}{x^3}\frac{x^4}{\log(1+x^4)}\frac{1}{5} \overset{H}{=}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x}{x}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\frac{x^4}{\log(1+x^4)}\frac{1}{5} = 2\left(-\frac{1}{6}\right)1\frac{1}{5} = -\frac{1}{15}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\overset{H}{=} \tag{55}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\cos^2 x-\sin^2 x)-2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin^2 x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4\sin^2 x}{x^2}}{\frac{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-4\sin^2 x}{x^2}}{2\frac{\sin^2 x}{x^2}+8\frac{\sin 2x}{2x}+2\cos 2x}=-\frac{4}{2+8+2}=-\frac{4}{10}$$

ATTENZIONE: la risoluzione appena presentata è errata, è una dimostrazione di come de l'Hopital possa complicare e portare a risultati errati. Di seguito una risoluzione corretta:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x\sin x}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\frac{\sin x-x}{x\sin^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)\frac{\sin x-x}{x^3}\frac{x^2}{\sin^2 x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+1\right)\frac{\cos x-1}{3x^2}\frac{x^2}{\sin^2 x}=2\left(-\frac{1}{6}\right)1=-\frac{1}{3}$$