Lezione 1

Logica matematica e teoria degli insiemi

1.1 Logica delle proposizioni. Operatori logici.

Con *proposizioni* o *enunciati* intendiamo delle frasi affermative a cui è possibile attribuire, in modo inequivocabile, un valore di verità o falsità, cioè dire se sono vere o false. Per esempio, sono proposizioni le seguenti frasi:

- "Socrate è un uomo";
- "4 è divisibile per 2";
- "Il leone è un animale domestico";
- "6 è un numero dispari".

Non sono invece proposizioni frasi di comando come "Chiudi la porta!" oppure frasi vaghe come "Roma è lontana da Napoli", a meno di specificare con precisione il concetto di lontananza. Le proposizioni saranno indicate con le lettere maiuscole: $\mathsf{P}, \mathsf{Q}, \mathsf{R}$, ecc. ed è possibile combinarle mediante l'applicazione di *operatori logici* (chiamati anche *connettivi logici*):

"non"	"e"	"o"	"se...allora..."	"se e solo se"
$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
negazione	*congiunzione*	*disgiunzione*	*implicazione*	*equivalenza*

Quello che è importante nella composizione di proposizioni è stabilire i valori logici di verità/falsità delle proposizioni composte. Analizzeremo di seguito i vari connettivi logici.

Se P è una proposizione, $\neg\mathsf{P}$ è la *negazione di* P e si ha

$$\neg\mathsf{P} \text{ è vera se } \mathsf{P} \text{ è falsa, ed è falsa se } \mathsf{P} \text{ è vera.}$$

Si può riassumere il comportamento dell'operatore logico $\neg$ con la seguente *tabella di verità*

Saverio Salzo (saverio.salzo@uniroma1.it) DIAG, Sapienza Università di Roma.

P	$\neg\mathsf{P}$
V	F
F	V

Se P e Q sono proposizioni, allora $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$ e $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$ sono proposizioni e risulta:

$\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$	è vera, se P e Q sono entrambe vere; negli altri casi è falsa
$\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$	è falsa, se P e Q sono false; negli altri casi è vera
$\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$	è falsa, se P è vera e Q è falsa; negli altri casi è vera.
$\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$	è vera, se P e Q sono entrambe vere o entrambe false; negli altri casi è falsa.

Il comportamento degli operatori logici è riassunto nella seguente *tabella di verità*

P	Q	$\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$	$\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$	$\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$	$\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Utilizzando questi operatori logici, insieme alle parentesi, si possono comporre proposizioni più complesse come

$$(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) \vee (\neg \mathsf{R}), \quad (\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q})) \Rightarrow \mathsf{R}$$

i cui valori di verità si possono dedurre applicando le regole stabilite nelle tabelle di sopra.

Di seguito elenchiamo una serie di proposizioni sempre vere qualunque siano i valori di verità delle proposizioni componenti (tali proposizioni si chiamano *tautologie*)

$$\begin{array}{rcll}
 & \mathsf{P} \vee \neg \mathsf{P} & & \text{(principio del terzo escluso)} \\
\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) & \Leftrightarrow & (\neg \mathsf{P}) \vee (\neg \mathsf{Q}) & \text{(leggi di De Morgan)} \\
\neg(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) & \Leftrightarrow & (\neg \mathsf{P}) \wedge (\neg \mathsf{Q}) & \\
(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) & \Leftrightarrow & (\neg \mathsf{Q} \Rightarrow \neg \mathsf{P}) & \text{(legge della contronominale)} \\
(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}) & \Leftrightarrow & (\mathsf{P} \wedge \neg \mathsf{Q} \Rightarrow \mathsf{R} \wedge \neg \mathsf{R}) & \text{(dimostrazione per assurdo)}
\end{array}$$

Esse mostrano che le proposizioni a sinistra e destra del segno di equivalenza hanno gli stessi valori logici di verità/falsità, o in altre parole hanno una tabella di verità identica. Facciamo alcuni esempi per illustrare queste leggi. Cominciamo con quelle di De Morgan. Supponiamo che

$$\mathsf{P}: \text{“Giovanni è romano”} \quad \text{e} \quad \mathsf{Q}: \text{“Giovanni è uno studente”}.$$

Allora

$$\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q} = \text{“Giovanni è uno studente romano”}$$

$$\neg(\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}) = (\neg\mathsf{P}) \vee (\neg\mathsf{Q}) = \text{“Giovanni non è romano oppure non è studente”}$$
$$\mathsf{P} \vee \mathsf{Q} = \text{“Giovanni o è romano o è studente” (o entrambe le cose)}$$
$$\neg(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}) = (\neg\mathsf{P}) \wedge (\neg\mathsf{Q}) = \text{“Giovanni non è né romano, né studente”}$$

Concludiamo commentando l'equivalenza sulla dimostrazione per assurdo. La dimostrazione per assurdo di una implicazione $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$ procede nel modo seguente. Si assume che P sia vera e che Q non sia vera e si prova una proposizione del tipo $\mathsf{R} \wedge \neg\mathsf{R}$, che è sempre falsa (una contraddizione). In altre parole se P è vera, l'ipotesi che Q non sia vera porta ad una contraddizione, e perciò Q deve necessariamente essere vera.

1.2 Logica dei predicati. Quantificatori

Un *predicato* è una proposizione che contiene una o più variabili e il cui valore di verità può dipendere dal valore assegnato alla variabili. Quindi in generale non è possibile assegnare un valore di verità ad un predicato a meno di specificare il valore delle variabili. Per esempio il predicato

$$\mathsf{P}:\ 3 + x = 9$$

è vero per $x = 6$ e falso se $x = 3$. Come per le proposizioni, i predicati si possono comporre mediante l'uso degli operatori logici visti nella sezione precedente, ma in aggiunta a questi ai predicati si possono applicare anche i quantificatori universale e esistenziale

$$\begin{array}{cc} \forall & \exists \\ \text{(per ogni)} & \text{(esiste)} \end{array}$$

Più precisamente, se P è un predicato, sono predicati anche

$$\begin{array}{ll} (\forall\, x)(\mathsf{P}) & \quad \text{(si scrive anche } \forall\, x\colon \mathsf{P}) \\ (\exists\, x)(\mathsf{P}) & \quad \text{(si scrive anche } \exists\, x\colon \mathsf{P}). \end{array}$$

Esempi di predicati sono i seguenti

$$(\forall\, x)(\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}), \quad (\exists x)(\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}), \quad (\forall\, x)(\exists y)((\neg\mathsf{P}) \wedge \mathsf{Q}).$$

Se in un predicato P è presente la variabile x e questa non è immediatamente preceduta da i quantificatori $\forall$ e $\exists$, allora la variabile x si dice *libera* e il predicato si indica con $\mathsf{P}(x)$ (ad indicare che la variabile x non è quantificata), altrimenti la variabile x si dice *legata*. Per esempio, nel predicato

$$(\forall\, x)(x + 7 \leq y)$$

la variabile x è legata, mentre la variabile y è libera. Le seguenti sono leggi fondamentali della quantificazione

$$\begin{aligned} \neg(\forall\, x\colon \mathsf{P}(x)) \ &\Leftrightarrow\ \exists\, x\colon \neg\mathsf{P}(x) \\ \neg(\exists\, x\colon \mathsf{P}(x)) \ &\Leftrightarrow\ \forall\, x\colon \neg\mathsf{P}(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Facciamo un esempio per spiegare queste leggi. Se x è una variabile che denota gli studenti di una classe e $\mathsf{P}(x)$ è il predicato "lo studente x ha la maglietta rossa", allora

$$\begin{aligned}
\forall\, x\colon \mathsf{P}(x) &\quad \text{sta per "tutti gli studenti della classe hanno la maglietta rossa"}\\
\neg(\forall\, x\colon \mathsf{P}(x)) &\quad \text{sta per "non tutti gli studenti della classe hanno la maglietta rossa"}\\
\exists\, x\colon \neg\mathsf{P}(x) &\quad \text{sta per "c'è almeno uno studente della classe che non ha la maglietta rossa"}
\end{aligned}$$

Si vede quindi come la prima legge in (1.1) appare perfettamente plausibile. Per quanto riguarda la seconda legge basta osservare quanto segue

$$\begin{aligned}
\exists\, x\colon \mathsf{P}(x) &\quad \text{sta per "c'è almeno uno studente della classe che ha la maglietta rossa"}\\
\neg(\exists\, x\colon \mathsf{P}(x)) &\quad \text{sta per "non c'è nessuno studente della classe che ha la maglietta rossa"}\\
\forall\, x\colon \neg\mathsf{P}(x) &\quad \text{sta per "tutti gli studenti della classe non hanno la maglietta rossa".}
\end{aligned}$$

Facciamo ancora un altro esempio con i quantificatori. Supponiamo che $\mathsf{P}(x,y)$ significhi che "x è capace di fare il lavoro y" dove le variabili x e y denotano rispettivamente gli impiegati e i tipi di lavori di una certa azienda. Allora

$(\forall\, y)(\exists\, x)(\mathsf{P}(x,y))$: "per ogni lavoro c'è almeno un impiegato che è capace di farlo"
$(\exists\, x)(\forall\, y)(\mathsf{P}(x,y))$: "esiste un impiegato che è capace di fare tutti i lavori"
$(\forall\, x)(\exists\, y)(\mathsf{P}(x,y))$: "per ogni impiegato esiste un lavoro che (l'impiegato) è capace di svolgere"
$(\exists\, y)(\forall\, x)(\mathsf{P}(x,y))$: "esiste un lavoro che può essere svolto da qualunque impiegato"

Notiamo applicando due volte le leggi della quantificazione (1.1) si ha

$$\neg\big((\forall\, y)(\exists\, x)(\mathsf{P}(x,y))\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)(\forall\, x)(\neg\mathsf{P}(x,y)).$$

Infatti negare che "per ogni lavoro c'è almeno un impiegato capace di farlo" significa affermare che "esiste un lavoro che nessun impiegato è in grado di svolgere (con diligenza)".

Infine, mostriamo l'uso dell'implicazione contronominale. Abbiamo visto che

$$(\forall\, x)(\mathsf{P}(x) \Rightarrow \mathsf{Q}(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)(\neg\mathsf{Q}(x) \Rightarrow \neg\mathsf{P}(x)) \tag{1.2}$$

Facciamo un esempio. Consideriamo il predicato $\mathsf{P}(x)$: "x^2 è pari", dove la variabile x denota un numero naturale, e il predicato $\mathsf{Q}(x)$: "x è pari". Allora il predicato a sinistra dell'equivalenza (1.2) (chiamata implicazione *diretta*) diventa

$$(\forall\, x)(x^2 \text{ è pari} \Rightarrow x \text{ è pari}).$$

Per stabilire il valore logico di questa implicazione si può equivalentemente considerare la sua *contronominale*

$$(\forall\, x)(x \text{ è dispari} \Rightarrow x^2 \text{ è dispari}),$$

che è di più immediata verifica.[1] Infatti se $x = 2k+1$, allora $x^2 = 4k^2 + 4k + 1$ che quindi è ancora dispari (essendo del tipo $2n+1$).

[1] dove si è tenuto conto che chiaramente $\neg\mathsf{P}(x)$: "x^2 è dispari" e $\neg\mathsf{Q}(x)$: "x è dispari".

1.3 Teoria degli insiemi

La teoria degli insiemi è stata iniziata da Georg Cantor e Richard Dedekind intorno al 1870 e poi formalizzata da Gottlob Frege nei primi anni del 1900. In seguito alla scoperta di diversi paradossi da parte di Bernard Russell e Ernest Zermelo è stata poi perfezionata, tra gli altri, da Ernest Zermelo stesso (1908) e poi da Abraham Fraenkel e Thoralf Skolem (1922). Qui presenteremo la teoria di questi ultimi indicata spesso con ZF (Zermelo-Fraenkel) in una versione più elementare (nello spirito del bel libro di P. Halmos [11]) e neanche completa, ma comunque ampiamente sufficiente per gli scopi di questi appunti.

La teoria degli insiemi si occupa di oggetti che vengono chiamati *insiemi*. Il concetto di insieme è assunto come primitivo, cioè non è riconducibile a nozioni più elementari, e viene definito soltanto attraverso degli assiomi.[2] Intuitivamente gli insiemi rappresentano collezioni di oggetti. Per parlare di questi oggetti useremo la *logica dei predicati*. Le lettere minuscole o maiuscole $a, b, x, y, A, B, X, Y, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ sono variabili del linguaggio che denotano insiemi. Tra gli insiemi è definita una *relazione di appartenenza*, anch'essa assunta come primitiva, che viene denotata con $\in$. Perciò scriveremo

$$x \in A$$

per dire che x *è un elemento di* A o x *appartiene a* A. La scrittura di sopra va intesa come un predicato atomico (non è un enunciato, cioè non si può stabilire se è vero o falso a meno che la variabili x e A non siano interpretate). Un'altra relazione tra insiemi è quella di uguaglianza che si scrive

$$x = y$$

ed è considerato anch'esso un predicato atomico. A partire dai predicati atomici si formano tutti gli altri predicati per mezzo dei connettivi logici

$$\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$$

La relazione di uguaglianza gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè sono veri i seguenti enunciati

$$(\forall x)(x = x), \quad (\forall x)(\forall y)(x = y \ \Rightarrow \ y = x), \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \ \wedge \ y = z \ \Rightarrow \ x = z).$$

Se P e Q sono predicati, allora

$$\neg\mathsf{P}, (\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}), (\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}), (\mathsf{P} \ \Rightarrow \ \mathsf{Q}), (\mathsf{P} \ \Leftrightarrow \ \mathsf{Q})$$

sono predicati. Se poi x è una variabile allora anche

$$(\forall\, x)(\mathsf{P}) \text{ e } (\exists\, x)(\mathsf{P})$$

sono predicati.

[2] La situazione è simile alla geometria Euclidea in cui punti e rette sono assunti come concetti primitivi e il loro uso corretto è stabilito attraverso gli assiomi.

Gli enunciati $\neg(x \in A)$ e $\neg(x = y)$ si indicano rispettivamente con $x \notin A$ e $x \neq y$. Poi se x, A sono insiemi e P è un predicato allora il predicato $(\forall\, x)((x \in A) \Rightarrow \mathsf{P})$ si abbrevia con $(\forall\, x \in A)(\mathsf{P})$ e il predicato $(\exists\, x)((x \in A) \wedge \mathsf{P})$ con $(\exists x \in A)(\mathsf{P})$.

Nel seguito descriveremo gli assiomi della teoria degli insiemi secondo Zermelo-Fraenkel.

Il primo assioma stabilisce la più importante proprietà dell'appartenenza, che è quella della sua relazione con la relazione di uguaglianza.

Assioma 1.1 (Assioma di estensionalità)**.** *Se A e B sono due insiemi, allora*

$$A = B \iff (\forall\, x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Questo assioma stabilisce che due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Quindi gli insiemi sono caratterizzati esclusivamente dei loro elementi o, in termini un po' più vaghi, dalla loro *estensione*.

Assioma 1.2 (Assioma dell'insieme vuoto[a])**.** *Esiste (ed è unico) l'insieme che non ha elementi. Questo insieme si chiama* insieme vuoto *e si indica con $\varnothing$. Quindi si ha*

$$(\forall\, x)(x \notin \varnothing).$$

[a] L'esistenza dell'insieme vuoto non avrebbe bisogno di un assioma, dato che si può ottenere mediante l'Assioma 1.5 di specificazione.

Definizione 1.3. Siano A e B due insiemi. Si scrive $B \subset A$ per denotare che

$$(\forall\, x)(x \in B \Rightarrow x \in A),$$

e si dice che B *è un sottoinsieme di* (o *contenuto in*, o ancora *è una parte di*) A. Poi se $B \subset A$ e $B \neq A$, allora B si dice *un sottoinsieme proprio di* A.

Esempio 1.4. Sia A un insieme. Evidentemente $\phi \subset A$ e $A \subset A$.

Molti principi su cui si fonda la teoria degli insiemi si prefiggono di ricavare nuovi insiemi da altri già esistenti. Il primo e più importante di questi principi basilari di costruzione di insiemi, afferma, grosso modo, che qualsiasi cosa sensata sia possibile enunciare riguardo agli insiemi, determina un sottoinsieme: il sottoinsieme di quegli elementi per i quali è vero l'enunciato.

Assioma 1.5 (Assioma di specificazione)**.** *Se A è un insieme e $\mathsf{P}(x)$ un enunciato in cui compare libera la variabile x (cioè x non è preceduta da un $(\forall\, x)$). Allora esiste un (unico) insieme, che denotiamo con $\{x \in A \,|\, \mathsf{P}(x)\}$, tale che*

$$(\forall\, a)(a \in \{x \in A \,|\, \mathsf{P}(x)\} \iff a \in A \ \wedge\ \mathsf{P}(a)).$$

Questo assioma serve a definire sottoinsiemi di un insieme una volta specificata una proprietà caratteristica.

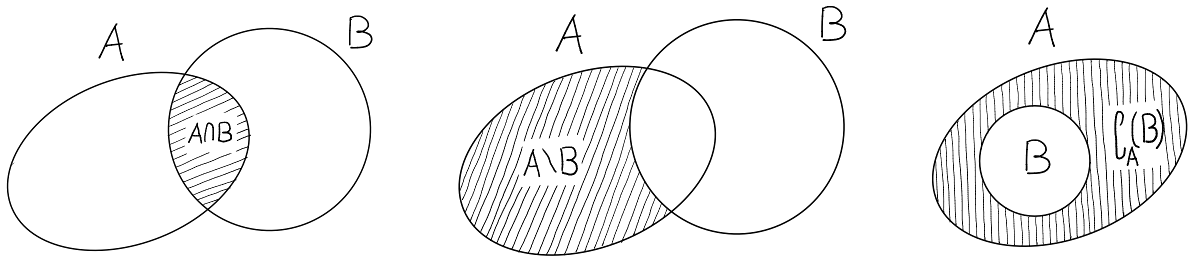

Figura 1.1: Intersezione e differenza di A e B e complementare di B rispetto ad A.

Definizione 1.6. Siano A e B insiemi. Si pone $A \cap B := \{x \in A \,|\, x \in B\}$ e si chiama *intersezione di* A e B. Evidentemente $x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \;\wedge\; y \in B$. Si pone anche $A \setminus B := \{x \in A \,|\, x \notin B\}$ e si chiama *la differenza tra* A *e* B. Se $B \subset A$ l'insieme $A \setminus B$ si indica anche con $\complement_A(B)$ e si chiama *il complementare di* B *rispetto a* A. Si veda Figura 1.1.

Definizione 1.7. Sia $\mathcal{F}$ un insieme non vuoto[3]. Allora esiste $B \in \mathcal{F}$ e dall'assioma di specificazione possiamo definire l'insieme

$$X = \big\{x \in B \,|\, (\forall\, A \in \mathcal{F})(x \in A)\big\}.$$

Evidentemente $x \in X \;\Leftrightarrow\; (\forall\, A \in \mathcal{F})(x \in A)$. L'insieme X non dipende quindi dalla scelta dell'insieme B iniziale e si chiama *intersezione degli elementi di* $\mathcal{F}$ e si indica con $\bigcap \mathcal{F}$ o con $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$.

Assioma 1.8 (Assioma della coppia non ordinata)**.** *Siano* x *e* y *insiemi. Esiste un (unico) insieme, che indichiamo con* $\{x, y\}$ *e che chiamiamo* coppia non ordinata formata da x e y, *che ha* x *e* y *come suoi unici elementi, cioè tale che*

$$(\forall\, z)(\, z \in \{x, y\} \;\Leftrightarrow\; z = x \;\vee\; z = y\,).$$

Si pone poi $\{x\} := \{x, x\}$ *che si dice* insieme ridotto ad un solo elemento *o anche* singoletto. *Infatti, evidentemente si ha* $(\forall\, z)(z \in \{x\} \;\Leftrightarrow\; z = x)$.

Assioma 1.9 (Assioma dell'unione)**.** *Sia* $\mathcal{F}$ *un insieme (pensato qui come una collezione di insiemi). Allora esiste un insieme, che denotiamo* $\bigcup \mathcal{F}$ *o con* $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ *e chiamiamo* unione dell'insieme (di insiemi) $\mathcal{F}$, *che ha per elementi tutti e soli gli elementi di insiemi appartenenti a* $\mathcal{F}$, *cioè tale che*

$$(\forall\, x)\Big(x \in \bigcup \mathcal{F} \;\Leftrightarrow\; (\exists A \in \mathcal{F})(x \in A)\Big).$$

Definizione 1.10. Siano A, B insiemi. Allora si definisce l'insieme *unione di* A e B come $A \cup B := \bigcup\{A, B\}$. Evidentemente

$$x \in A \cup B \;\Leftrightarrow\; (\exists A \in \{A, B\})(x \in A) \;\Leftrightarrow\; x \in A \;\vee\; x \in B.$$

[3] Qui intendiamo $\mathcal{F}$ come un insieme di insiemi. In tal caso $\mathcal{F}$ prende anche il nome di *famiglia di insiemi*

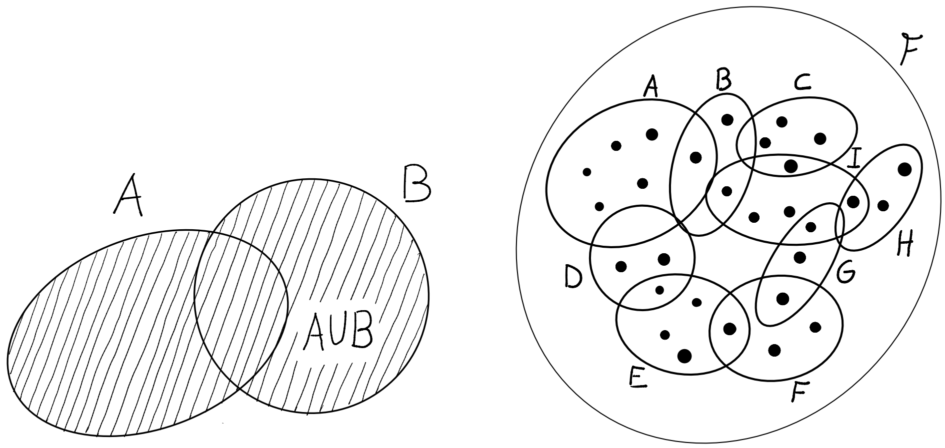

Figura 1.2: A sinistra è illustrata l'unione degli insiemi A e B. A destra è data una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$, l'unione della famiglia mette insieme tutti gli elementi degli insiemi di $\mathcal{F}$ (cioè $A \cup B \cup C \cup \cdots \cup I$).

Esempio 1.11. Siano a, b, c e d insiemi. Possiamo formare gli insiemi $\{a, b\}$ e $\{c\}$ e definire $\{a, b, c\} := \{a, b\} \cup \{c\}$. Poi definire $\{a, b, c, d\} := \{a, b, c\} \cup \{d\}$. Evidentemente

$$(\forall\, x)\big(x \in \{a, b, c, d\} \;\Leftrightarrow\; x = a \;\vee\; x = b \;\vee\; x = c \;\vee\; x = d\big).$$

In questo modo, iterando questo procedimento, si possono definire gli insiemi per *elencazione* dei loro elementi.

.

Proposizione 1.12 (Proprietà dell'unione e intersezione)**.** *Siano A, B e C insiemi. Allora*

- $A \cap \varnothing = \varnothing$ *e* $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap A = A$ *e* $A \cup A = A$
- $A \cap B = B \cap A$ *e* $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *e* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cap C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *e* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ *e* $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Assioma 1.13 (Assioma dell'insieme potenza)**.** *Sia A un insieme. Esiste un insieme che ha per elementi tutti i sottoinsiemi di A. Questo insieme si denota con $\mathcal{P}(A)$ e si chiama* insieme potenza di A *o* insieme delle parti di A. *In formule*

$$(\forall\, B)\big(B \in \mathcal{P}(A) \;\Leftrightarrow\; B \subset A\big).$$

Esempio 1.14.

- Sia A un insieme. Allora $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$ e quindi l'insieme potenza è sempre non vuoto.
- Sia $\{x, y\}$ una coppia non ordinata. Allora
$$\mathcal{P}(\{x, y\}) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}.$$
- A partire dall'insieme vuoto $\varnothing$, utilizzando l'assioma della potenza si può formare l'insieme $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Applicando ancora l'assioma della potenza si ha $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. E, applicando una terza volta l'assioma della potenza otteniamo
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

Definizione 1.15. Siano x e y insiemi. Si pone $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ e si chiama *coppia ordinata* di prima coordinata x e seconda coordinata y.

Osservazione 1.16. La definizione di coppia ordinata data sopra è dovuta al matematico polacco Kuratowski. Intuitivamente la coppia ordinata è un insieme costituito da due soli elementi, ma dove è importante l'ordine in cui vengono elencati i due elementi. In particolare, se $x \neq y$, risulta $(x, y) \neq (y, x)$. Questo non è vero per la coppia non ordinata per cui invece risulta $\{x, y\} = \{y, x\}$. La proprietà caratteristica delle coppie ordinate viene data nel risultato seguente.

Proposizione 1.17. *Siano x, y, a e b insiemi. Allora*
$$(x, y) = (a, b) \iff x = a \ \wedge \ y = b. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Osserviamo prima di tutto che dalla Definizione 1.15 consegue che $(x, x) = \{\{x\}\}$. Quindi (x, x) ha un solo elemento ed è $\{x\}$. Mentre se $x \neq y$, allora $\{x\} \neq \{x, y\}$ (perché $y \in \{x, y\}$ e $y \notin \{x\}$) e quindi (x, y) ha due elementi distinti.
Fatta questa osservazione preliminare possiamo procedere con la dimostrazione di (1.3). Proviamo solo l'implicazione $\Rightarrow$, perché l'altra è immediata. Supponiamo prima che $x = y$. Allora (x, y) ha come unico elemento l'insieme $\{x\}$. Perciò essendo $(a, b) \subset (x, y) = \{\{x\}\}$ deve essere $\{a\} = \{x\}$ e $\{a, b\} = \{x\}$. Quindi $a = x = b = y$. Supponiamo ora che $x \neq y$. Allora deve essere pure $a \neq b$ (perché altrimenti per quanto già dimostrato sarebbe $x = y$) e necessariamente $\{x\} = \{a\}$ e $\{x, y\} = \{a, b\}$. Da cui segue $x = a$ e $y = b$. $\square$

Siano A, B insiemi, $x \in A$ e $y \in B$. Si ha $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ e quindi $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Perciò $(x, y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Allora utilizzando l'assioma di specificazione, si può dare la seguente definizione.

Definizione 1.18. Siano A e B insiemi. Si pone
$$A \times B := \big\{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \,|\, (\exists x \in A)(\exists y \in B)(z = (x, y))\big\}$$
e si chiama *insieme prodotto cartesiano di A e B*.

Esempio 1.19. Sia $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$. Allora

$$A \times B = \big\{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\big\}.$$

Definizione 1.20. Siano A e B insiemi. Si chiama *relazione tra A e B* ogni sottoinsieme R di $A \times B$. Una relazione tra A e A si chiama anche una *relazione (binaria) su A*. Se $R \subset A \times A$ è una relazione su A per denotare che $(x, y) \in R$ si usa anche la notazione infissa xRy. Si chiama *dominio* della relazione R l'insieme

$$\operatorname{dom}(R) = \{x \in A \,|\, \exists y \in B \colon (x, y) \in R\}.$$

Esempio 1.21. Se A è l'insieme delle persone viventi. Una relazione su A è quella di "essere genitore di", cioè la relazione $R \subset A \times A$ definita come segue

$$x \, R \, y \;\Leftrightarrow\; x \text{ è genitore di } y$$

Si noti che il dominio di questa relazione non è tutto l'insieme A dato che ci sono persone viventi che non hanno figli.

1.4 Complementi

Di seguito diamo il concetto di successivo di un insieme e l'assioma di infinito. Mediante questo assioma si può definire l'insieme dei numeri naturali, seguendo una costruzione dovuta a Dedekind [7]. Poi, a partire dai numeri naturali, sempre Dedekind ha mostrato come si possono definire i numeri interi relativi, razionali e infine i numeri reali. Noi non seguiremo questo approccio perché richiederebbe un corso a se. Ne accenneremo soltanto brevemente di seguito.[4]

Definizione 1.22. Sia x un insieme. Si chiama *successivo di x* l'insieme $x^+ := x \cup \{x\}$. Quindi il successivo di x continene tutti gli elementi di x e l'insieme x stesso.

Assioma 1.23 (Assioma dell'infinito)**.** *Esiste un insieme che contiene $\varnothing$ e il successivo di ogni suo elemento.*

Un insieme come nell'assioma dell'infinito si chiama *induttivo*. Si vede facilmente che se $\mathcal{F}$ è un insieme non vuoto di insiemi e se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è induttivo, allora $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$ è induttivo. Da queso consegue il seguente

Teorema 1.24. *Esiste il più piccolo insieme induttivo e si denota con $\mathbb{N}$.*

[4] In queste note per la definizione degli insiemi numerici seguiremo un approccio assiomatico in cui si presentano degli assiomi per i numeri reali e a partire da questi si definiscono i numeri naturali, interi e razionali come opportuni sottoinsiemi.

Dimostrazione. Sia W un insieme induttivo. Ricordiamo che questo significa che $\varnothing \in W$ e $(\forall\, x)(x \in W \;\Rightarrow\; x^+ \in W)$. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(W) \mid A \text{ insieme induttivo}\}. \tag{1.4}$$

Questa famiglia è non vuota dato che $W \in \mathcal{F}$. Allora possiamo considerare l'intersezione degli elementi di questa famiglia e definire (mediante l'assioma di specificazione)

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A.$$

Abbiamo già notato che in questo modo $\mathbb{N}$ è un insieme induttivo. Se poi E è un insieme induttivo, allora $E \cap W \in \mathcal{F}$ e quindi $\mathbb{N} \subset E \cap W \subset E$. $\square$

Si definisce:

$$\begin{aligned}
&0 := \varnothing \\
&1 := 0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} \\
&2 := 1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} \\
&3 := 2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\
&4 := 3^+ = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}
\end{aligned}$$

e così via. E ovviamente $0, 1, 2, 3, 4, \dots \in \mathbb{N}$.

Concludiamo con l'assioma della scelta

Assioma 1.25 (Assioma della scelta)**.** *Per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di insieme non vuoti e a due a due disgiunti, cioè tale che $(\forall\, A, B \in \mathcal{F})(A \neq B \;\Rightarrow\; A \cap B = \varnothing)$, esiste un insieme $X \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ tale che per ogni $A \in \mathcal{F}$: $A \cap X$ è ridotto ad un solo elemento.*