Lezione 16

Saverio Salzo*

21 Ottobre 2022

Esempio 0.1.

(i) Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora
$$\lim_{x \to x_0} ax^n = ax_0^n.$$
La tesi si prova per induzione. Infatti per $n = 0$ è vera, perché la funzione $x \mapsto ax^0$ è costante. Supponiamo che la tesi sia vera per n. Allora
$$ax^{n+1} = (ax^n)x$$
e quindi, essendo $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, dal teorema sul prodotto dei limiti, risulta
$$\lim_{x \to x_0} ax^{n+1} = \big(\lim_{x \to x_0} ax^n\big)\big(\lim_{x \to x_0} x\big) = ax_0^n x_0 = ax_0^{n+1}.$$

(ii) Si chiama *funzione polinomiale* una funzione del tipo
$$P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
dove $a_k \in \mathbb{R}$, per $k = 0, 1, \ldots, n$. Quindi $P(x)$ è una somma di monomi del tipo considerato nel punto precedente. Allora, per il teorema sulla somma dei limiti risulta che
$$\lim_{x \to x_0} P(x) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

(iii) Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi. E definiamo la funzione razionale
$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
dove gli x_i sono gli zeri di $Q(x)$. Quindi $f\colon A \to \mathbb{R}$ con $A = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$. Dal punto precedente segue che se $x_0 \in A$, allora $\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0) \neq 0$. Perciò per il teorema sul limite del rapporto si ha
$$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (`saverio.salzo@uniroma1.it`).

1 Limiti e ordinamento

Teorema 1.1 (della permanenza delle disuguaglianze). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A in $\overline{\mathbb{R}}$. Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ due funzioni e supponiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \quad con \quad l_1 > l_2.$$

Allora

$$f(x) > g(x) \quad \text{in un intorno di } x_0.$$

Dimostrazione. Per ipotesi $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $l_1 > l_2$. Possiamo quindi scegliere due intorni V_1 e V_2, rispettivamente di l_1 e l_2, in modo che

$$\forall\, y_1 \in V_1, \forall\, y_2 \in V_2 \colon \quad y_1 > y_2. \tag{1}$$

Poi, dato che, sempre per ipotesi $f(x) \to l_1$ e $g(x) \to l_2$ per $x \to x_0$, si deve avere

$$f(x) \in V_1 \text{ in un intorno di } x_0 \quad \text{e} \quad g(x) \in V_2 \text{ in un intorno di } x_0.$$

Allora risulta che

$$f(x) \in V_1 \;\text{ e }\; g(x) \in V_2 \;\text{ simultaneamente in un intorno di } x_0$$

e quindi, per la (1), che

$$f(x) > g(x) \text{ in un intorno di } x_0.$$

□

Osservazione 1.2. Il teorema precedente si può scrivere in forma compatta come

$$l_1 > l_2 \;\Rightarrow\; f(x) > g(x) \text{ in un intorno di } x_0.$$

Notiamo invece che

$$l_1 \geq l_2 \;\not\Rightarrow\; f(x) \geq g(x) \text{ in un intorno di } x_0.$$

In particolare può accadere che $l_1 = l_2$ senza che sia necessariamente $f(x) \leq g(x)$ o $g(x) \leq f(x)$ in un intorno di x_0.

Corollario 1.3. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A in $\overline{\mathbb{R}}$. Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ e supponiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad l > \lambda \; (risp.\; l < \lambda).$$

Allora

$$f(x) > \lambda \; (risp.\; f(x) < \lambda) \; \text{in un intorno di } x_0$$

Dimostrazione. Consegue dal teorema precedente se si sceglie $g \equiv \lambda$. □

Corollario 1.4 (Teorema della permanenza del segno)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $f\colon A \to \mathbb{R}$*. Sia* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione per* A *e* $l \in \overline{\mathbb{R}}$*. Supponiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad e \quad l > 0 \quad (risp.\ l < 0).$$

Allora $f(x) > 0$ *in un intorno di* x_0*.*

Dimostrazione. Consegue dal teorema precedente con $\lambda = 0$. □

Corollario 1.5 (Teorema di prolungamento delle disuguaglianze)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione per* A *in* $\overline{\mathbb{R}}$*. Siano* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon A \to \mathbb{R}$ *due funzioni e supponiamo che*

a) $f(x) \leq g(x)$ *in un intorno di* x_0*.*

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ *con* $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

Allora $l_1 \leq l_2$*.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede per assurdo. Se fosse $l_1 > l_2$, per il teorema della permanenza delle disuguaglianze (Teorema 1.1) si avrebbe

$$f(x) > g(x) \ \text{ in un intorno di } x_0.$$

Ma dall'ipotesi *a*) sappiamo che $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di x_0 e quindi (prendendo come al solito l'intersezione degli intorni) si arriverebbe a

$$f(x) \leq g(x) \ \text{ e } \ f(x) > g(x) \ \text{ simultaneamente in un intorno di } x_0.$$

E questo produce una contraddizione, dato che un numero reale non può essere simultaneamente minore o uguale e strettamente maggiore di un'altro numero reale. □

Osservazione 1.6. In riferimento al Corollario 1.5 si noti che si conserva la disuguaglianza $\leq$ e non $<$. Per esempio risulta

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}\colon \ x^2 < |x|,$$

ma $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} |x|$.

Teorema 1.7 (del confronto o della convergenza obbligata o dei carabinieri)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *un punto di accumulazione per* A *in* $\overline{\mathbb{R}}$*. Siano* f*,* g *e* h *tre funzioni definite in* A *a valori in* $\mathbb{R}$ *e supponiamo che*

a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *in un intorno di* x_0*.*

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *e* $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$ *con* $l \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$*.*

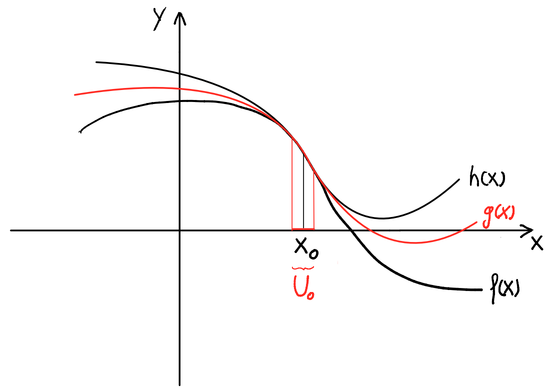

Figura 1: In Italia il Teorema 1.7 è comunemente chiamato *Teorema dei carabinieri*.

Dimostrazione. Sia V un intorno di l. Si deve provare che $g(x) \in V$ in un intorno di x_0. Osserviamo preliminarmente che, essendo V un intervallo di $\overline{\mathbb{R}}$, vale che

$$x, y \in V \quad \text{e} \quad x < y \;\Rightarrow [x, y] \subset V. \tag{2}$$

Iniziamo ora la dimostrazione. Dall'ipotesi b) si ha

$$f(x) \in V \;\text{ in un intorno di } x_0 \quad \text{e} \quad h(x) \in V \;\text{ in un intorno di } x_0.$$

Inoltre, per l'ipotesi a), si ha anche che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \;\text{ in un intorno di } x_0.$$

Perciò, possiamo affermare che

$$\begin{cases} f(x) \in V \\ h(x) \in V \\ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \end{cases} \qquad \text{sono simultaneamente vere in un intorno di } x_0.$$

Allora, ricordando la (2), si può concludere che che $g(x) \in V$ in un intorno di x_0. □

Osservazione 1.8. Nel Teorema 1.7 se $l = +\infty$ si può fare a meno della funzione h (basta un solo carabiniere!), cioè è sufficiente chiedere che

- $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di x_0.

Infatti se $V =]\beta, +\infty]$ è un intorno di $+\infty$, allora

$$f(x) \in]\beta, +\infty] \;\text{ in un intorno di } x_0.$$

Quindi

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \in \,]\beta, +\infty] \end{cases} \qquad \text{simultaneamente in un intorno di } x_0.$$

Ma allora si ha $g(x) \in V$ in un intorno di x_0.
Allo stesso modo si vede che se nel Teorema 1.7, $l = -\infty$, si può fare a meno di f e si può chiedere soltanto che

- $g(x) \leq h(x)$ in un intorno di x_0.

Corollario 1.9. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A in $\overline{\mathbb{R}}$. Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ due funzioni e supponiamo che*

$$|f(x)| \leq g(x) \quad \textit{in un intorno di } x_0.$$

Allora si ha

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Dato che $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ in un intorno di x_0, dal Teorema 1.7 consegue che $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$. Ma questo è equivalente a $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. □

Esempio 1.10. Proviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3}$$

A tal fine si nota prima di tutto che vale

$$\forall\, x \in \,]0, \pi/2[\,: \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{4}$$

Queste disuguaglianze sono giustificate in Figura 2 con un ragionamento geometrico. Dalla (4), segue

$$\forall\, x \in \,]0, \pi/2[\,: \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Perciò si ha

$$\forall\, x \in \,]0, \pi/2[\, \setminus \{0\}\colon\ 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}, \tag{5}$$

dove si è utilizzata la formula trigonometrica $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ e la prima delle (4) con $x/2$ al posto di x. Ora si nota che le disuguaglianze in (5) valgono anche in $]-\pi/2, 0[$, perché le funzioni $(\sin x)/x$ e x^2 sono pari. In definitiva vale

$$\forall\, x \in \,]-\pi/2, \pi/2[\, \setminus \{0\}\colon\ 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2},$$

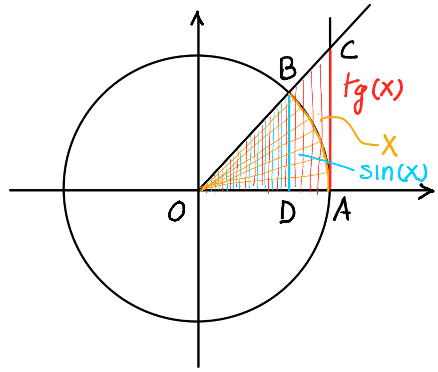

Figura 2: Circonferenza trigonometrica (di raggio 1). Giustificazione della disuguaglianza $\text{sen}(x) < x < \text{tg}(x)$, valida per ogni $x \in \,]0, \pi/2[$. Tenendo conto che il segmento OA ha lunghezza 1, si riconosce che l'area del triangolo OAB è $\text{sen}(x)/2$ ($\text{sen}(x)$ è l'altezza del triangolo), l'area del settore circolare OAB è $x/2$ e l'area del triangolo OAC è $\text{tg}(x)/2$. La tesi segue quindi dal fatto che il triangolo OAB è contenuto nel settore circolare OAB che a sua volta è contenuto nel triangolo OAC

.

o in altri termini che

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2} \text{ in un intorno di } 0.$$

Dato che $\lim_{x\to 0} x^2/2 = 0$, dal Teorema 1.7 si ha $\lim_{x\to 0} 1 - (\sin x)/x = 0$ e quindi la (3). Notiamo infine che dalla prima delle (4) si ha che

$$\forall\, x \in \,]-\pi/2, 0[\,: \quad \sin(-x) < -x,$$

ma per tali x risulta $\sin(-x) = -\sin x = |\sin x|$ e $-x = |x|$, perciò risulta

$$]-\pi/2, \pi/2[\,: \quad |\sin x| \leq |x|$$

e quindi, ancora per confronto $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Esempio 1.11. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Infatti, dalla disuguaglianza di Bernoulli, segue che

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+ : \quad x^n = (1 + x - 1)^n \geq 1 + n(x - 1).$$

Dato che $\lim_{x\to+\infty} 1 + n(x-1) = +\infty$ (questo si può verificare direttamente), allora per l'Osservazione 1.8, si ha $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. Vediamo il caso $x \to -\infty$. Supponiamo che n sia pari. Sia $\beta > 0$. Allora, per quando già provato, esiste $\alpha > 0$ tale

$$x > \alpha \;\Rightarrow\; p_n(x) > \beta.$$

Ora dato che p_n è pari, risulta

$$x < -\alpha \;\Rightarrow\; -x > \alpha \;\Rightarrow\; p_n(-x) > \beta \;\Rightarrow\; p_n(x) > \beta,$$

così si è provato che $\lim_{x\to-\infty} p_n(x) = +\infty$. Supponiamo infine che n è dispari. Di nuovo, per quando già provato, esiste $\alpha > 0$ tale

$$x > \alpha \;\Rightarrow\; p_n(x) > \beta.$$

Ora dato che p_n è dispari, risulta

$$x < -\alpha \;\Rightarrow\; -x > \alpha \;\Rightarrow\; p_n(-x) > \beta \;\Rightarrow\; -p_n(x) > \beta \;\Rightarrow\; p_n(x) < -\beta,$$

così si è provato che $\lim_{x\to-\infty} p_n(x) = -\infty$.

2 Operazioni con i limiti in $\overline{\mathbb{R}}$

Proposizione 2.1. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora valgono le seguenti affermazioni*

(i) *Se $l > -\infty$, allora f è limitata inferiormente in un intorno di x_0, cioè*

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ tale che } \alpha \le f(x) \text{ in un intorno di } x_0.$$

(ii) *Se $l < +\infty$, allora f è limitata superiormente in un intorno di x_0, cioè*

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) \le \beta \text{ in un intorno di } x_0.$$

Dimostrazione. Proviamo solo la prima (la seconda si prova in modo simile). Supponiamo che $l > -\infty$. Allora si può scegliere $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < l$ e, per il Corollario 1.3 (sulla permanenza delle disuguaglianze), si ha che

$$\alpha < f(x) \text{ in un intorno di } x_0. \qquad \square$$

Teorema 2.2. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A. Siano $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$ e supponiamo che*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Valgono le seguenti proposizioni.

(i) *Se $l = +\infty$ e g è limitata inferiormente in un intorno di x_0, allora $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l$.*

(ii) *Se $l = -\infty$ e g è limitata superiormente in un intorno di x_0, allora $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l$.*

Dimostrazione. Proviamo la (i) soltanto. Per ipotesi si ha che esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(x) \geq \alpha \ \text{ in un intorno di } x_0.$$

Sia $\beta \in \mathbb{R}$. Sempre dalle ipotesi segue che

$$f(x) > \beta - \alpha \ \text{ in un intorno di } x_0.$$

Allora, si ha che

$$g(x) \geq \alpha \ \text{ e } \ f(x) > \beta - \alpha \ \text{ sono simultaneamente vere in un intorno di } x_0$$

e quindi sommandole si ha che $f(x) + g(x) > \beta$ in un intorno di x_0. □

Esempio 2.3. Sia $r \in \mathbb{R}_+^*$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} n^r + \sin(n) = +\infty.$$

Questo segue direttamente dal Teorema 2.2 ricordando che $\lim_{n \to +\infty} n^r = +\infty$ e che $\sin(n)$ è limitata inferiormente.

Osservazione 2.4. Estendiamo l'algebra di $\mathbb{R}$ su $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo

$$\begin{aligned} &\forall\, l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}: \ (+\infty) + l = l + (+\infty) = +\infty \\ &\forall\, l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}: \ l + (-\infty) = (-\infty) + l = -\infty. \end{aligned}$$

In definitiva, sulla retta estesa dei numeri reali vale il seguente risultato.

Corollario 2.5. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$. *Allora,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = l + m,$$

con l'esclusione dei casi in cui uno tra l *e* m *sia* $+\infty$ *e l'altro sia* $-\infty$.

Dimostrazione. Segue dal teorema sulle operazioni sui limiti e dal Teorema 2.2 utilizzando le regole formali stabilite nell'Osservazione 2.4. □

Se la somma dei limiti $l + m$ si presenta in una delle forme

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \text{o} \quad (-\infty) + (+\infty)$$

allora non si può dire nulla sulla somma, nel senso che il limite della somma può essere reale, $+\infty$, $-\infty$ o anche non esistere, come mostra l'Esempio 2.8. Per tale ragione tali forme vengono dette *indeterminate*.

Consideriamo adesso il caso di moltiplicazione di limiti che possono essere infiniti.

Teorema 2.6. *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A, e $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $g\colon A \to \mathbb{R}$. Valgono le seguenti.*

(i) *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(risp.* $-\infty$*) e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$*, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \textit{se } m > 0 \text{ (risp. } m < 0) \\ -\infty & \textit{se } m < 0 \text{ (risp. } m > 0). \end{cases}$$

(ii) *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *e* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in A$*, allora* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(iii) *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *e* $f(x) > 0$ *(risp.* < 0*) in un intorno di* x_0*, allora*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ (risp. } -\infty).$$

(iv) *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *e* g *è limitata in un intorno di* x_0*, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Dimostrazione. (i): Consideriamo solo il caso $m \in]0, +\infty]$ (l'altro si prova allo stesso modo). Sia $\beta > 0$ e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $0 < \alpha < m$. Allora, per il teorema della permanenza delle disuguaglianze, risulta che

$$g(x) > \alpha \ \text{ in un intorno di } x_0.$$

Poi, dato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si ha anche che

$$f(x) > \frac{\beta}{\alpha} \ \text{ in un intorno di } x_0.$$

Allora, entrambe le condizioni sono vere simultaneamente in un intorno di x_0 e quindi moltiplicando si ha che $f(x)g(x) > \beta$ in un intorno di x_0.

(ii): Sia $\varepsilon > 0$. Allora per ipotesi si ha

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \text{ in un intorno di } x_0.$$

Quindi, invertendo la disuguaglianza (essendo tutte quantità strettamente positive), risulta

$$\frac{1}{f(x)} < \varepsilon \text{ in un intorno di } x_0,$$

che è quanto si voleva dimostrare.

(iii): Sia $\beta > 0$. Allora per ipotesi

$$|f(x)| < \frac{1}{\beta} \text{ in un intorno di } x_0 \quad \text{e} \quad f(x) > 0 \text{ in un intorno di } x_0.$$

Allora, le due condizioni valgono simultaneamente in un intorno di x_0 e quindi si ha

$$\frac{1}{f(x)} > \beta \text{ in un intorno di } x_0,$$

che è quanto si voleva dimostrare.

(iv): Per ipotesi, esiste $M > 0$ tale che

$$|g(x)| \leq M \text{ in un intorno di } x_0.$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, si ha

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{in un intorno di } x_0.$$

Quindi entrambe le disuguaglianze sono vere in un intorno di x_0 (l'intersezione) e moltiplicando si ha

$$|f(x)g(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \quad \text{in un intorno di } x_0. \qquad \square$$

Osservazione 2.7. Come conseguenza del Teorema 2.6 possiamo estendere ulteriormente l'algebra di $\overline{\mathbb{R}}$ facendo le seguenti convenzioni

$$\forall\, m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}\colon\ (\pm\infty)m = m(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } m > 0 \\ \mp\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

e

$$\forall\, m \in \mathbb{R}\colon\ \frac{m}{\pm\infty} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{0\pm} = \pm\infty,$$

dove con $0+$ (risp. $0-$) intendiamo considerare il caso che il limite vale zero e la funzione è strettamente positiva (risp. strettamente negativa) in un intorno di x_0. In questo modo si può dire che se $f(x) \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $g(x) \to m \in \overline{\mathbb{R}}$ e $(l, m) \neq (\pm\infty, 0)$ e $(l, m) \neq (0, \pm\infty)$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = lm$$

e che se l e m non sono entrambi infiniti allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}.$$

Anche le forme

$$(\pm\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

sono dette forme *indeterminate*.

Esempio 2.8.

(i) Consideriamo le seguenti coppie di funzioni

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}, \quad g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}, \quad g(x) = -\dfrac{1}{x^4}.$

Si verifica facilmente che in tutti i casi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty.$$

Mentre:

- nel caso (a), $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ non esiste,
- nel caso (b), $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = 2$,
- nel caso (c), $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}(1-x^2) \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$
- nel caso (d), $\lim_{x\to 0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{x^4} = \lim_{x\to 0}(x^2-1) \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^4} = (-1)\cdot(+\infty) = -\infty.$

Esempio 2.9.

(i) $\lim_{x\to +\infty} x^3 - 3x^2 = \lim_{x\to +\infty} x^3 \Big(1 - \dfrac{3}{x}\Big) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$

(ii) Sia $r > 0$. Si può dimostrare direttamente dalla definizione che $\lim_{x\to 0}|x|^r = 0$. Allora segue dal Teorema 2.6(iv) che

$$\lim_{x\to 0}|x|^r \sin\frac{1}{x} = 0,$$

perché la funzione $\sin(1/x)$ è limitata.

(iii) Proviamo che

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$$

Si può provare direttamente dalla definizioni di limite (oppure del teorema sui limiti delle funzioni monotone che vedremo in seguito) che

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Perciò il limite appare come una forma indeterminata $(+\infty)+(-\infty)$. Questa forma indeterminata si può risolvere razionalizzando il rapporto nel modo seguente

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Perciò adesso la tesi segue dal Teorema 2.6(ii).

(iv) Consideriamo la funzione razionale

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

dove $m,n\in\mathbb{N}^*$ e a_n e b_m sono diversi da zero e calcoliamo il limite per $x\to\pm\infty$. Il dominio della funzione è un insieme del tipo $A=\mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_p\}$ dove gli x_i sono gli zeri di Q. Allora

$$\forall\, x\in A\setminus\{0\}\colon\ \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^n}{x^m}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}.$$

Dato che $a_{n-k}/x^k\to 0$ e $b_{n-k}/x^k\to 0$ per $x\to\pm\infty$, si ha che

$$\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\cdots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}\to\frac{a_n}{b_m}\in\mathbb{R}\quad\text{per } x\to\pm\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}+\infty & \text{se } n>m\\ 1 & \text{se } n=m\\ 0 & \text{se } n<m\end{cases}\quad \text{e}\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}+\infty & \text{se } n>m \text{ e } n-m \text{ è pari}\\ -\infty & \text{se } n>m \text{ e } n-m \text{ è dispari}\\ 1 & \text{se } n=m\\ 0 & \text{se } n<m\end{cases}$$

In definitiva si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty) & \text{se } n>m\\[2mm] \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m\\[2mm] 0 & \text{se } n<m.\end{cases}$$

$$\text{e}\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}\cdot(+\infty) & \text{se } n>m \text{ e } n-m \text{ è pari}\\[2mm] \dfrac{a_n}{b_m}\cdot(-\infty) & \text{se } n>m \text{ e } n-m \text{ è dispari}\\[2mm] \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n=m\\[2mm] 0 & \text{se } n<m.\end{cases}$$