Complementi

Proviamo il punto (iv) del teorema 2, cioè che $\exp_a$ è l'unica funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+^*$ che sia strettamente monotona e che verifica la condizione

$$\boxed{\exp_a(x_1+x_2) = \exp_a(x_1)\cdot\exp_a(x_2) \quad e \quad \exp_a(1)=a.}$$

Per questo, supponiamo che $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ sia strett. monotona e tale che $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ e $f(1)=a$ e proviamo che necessariamente $f=\exp_a$.

Infatti

- $0<f(0)=f(0+0)=f(0)\cdot f(0) \implies \underline{f(0)=1}$
- se $n\in\mathbb{N}^*$: $f(n)=f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}})=\underbrace{f(1)\cdot f(1)\cdots f(1)}_{n \text{ volte}}=a^n$
- se $n\in\mathbb{N}^*$: $a=f(1)=f(n\cdot\frac{1}{n})=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{n \text{ volte}})$

$$=\underbrace{f(\tfrac{1}{n})\cdot\dots\cdot f(\tfrac{1}{n})}_{n \text{ volte}} = f(\tfrac{1}{n})^n,$$

quindi $f(\frac{1}{n})=\sqrt[n]{a}$

- se $q \in \mathbb{Q}_+^*$ e $q = \frac{m}{n}$, con, $n, m \in \mathbb{N}^*$, allora

$$f(q) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ volte}}\Big) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^q$$

Inoltre $1 = f(0) = f(q + (-q)) = f(q) \cdot f(-q) = a^q \cdot f(-q)$,

quindi $f(-q) = \frac{1}{a^q} = a^{-q}$.

Perciò f è completamente determinata sui numeri razionali, e $\forall q \in \mathbb{Q}$ $f(q) = a^q$.

Dato che abbiamo visto che

$$q \longmapsto a^q \text{ è } \begin{cases} \text{strett. crescente} & \text{se } a > 1 \\ \text{strett. decrescente} & \text{se } a < 1, \end{cases}$$

allora, essendo f strett. monotona, f stessa (come funzione di $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$) dovrà essere strett. crescente se $a > 1$ e strett. decrescente se $a < 1$.

Quindi se $a > 1$ e $x \in \mathbb{R}$, si ha

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ $q_1 < x < q_2$, $a^{q_1} = f(q_1) < f(x) < f(q_2) = a^{q_2}$

In altri termini $f(x)$ è un elemento separatore

degli insiemi A e B, definiti nel teorema 1.
Ma A e B sono contigui e quindi hanno un solo elemento separatore che è stato chiamato a^x.
Allora necessariamente deve essere $a^x = f(x)$.