Lezione 39

Saverio Salzo*

6 dicembre 2022

1 Serie di Taylor

Supponiamo che $f\colon I \to \mathbb{R}$ sia derivabile $n-1$ volte in I e n volte in x_0. La formula di Taylor stabilisce che

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \quad \text{con } \ R_n(x) = o((x-x_0)^n) \text{ per } x \to x_0.$$

Nella formula di sopra si ha che

- $n \in \mathbb{N}$ è fissato, e la formula stabilisce un risultato di approssimazione per $x \to x_0$.

Oltre al caso descritto sopra, è interessante osservare anche un'altra situazione, cioè quella in cui

- $x \in I_{x_0}$ è fissato e $n \to +\infty$.

In particolare ci chiediamo se l'errore nel punto x (fissato) tende a zero per $n \to +\infty$, cioè

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \ ? \tag{1}$$

A tal fine notiamo prima di tutto che per rispondere a questa questione dobbiamo assumere che la funzione f abbia derivate in x_0 (e quindi in un intorno di x_0) di qualsiasi ordine, cioè che f sia derivabile infinite volte in I, in modo da poter calcolare $f^{(k)}(x_0)$ per qualunque $k \in \mathbb{N}$. Poi, la condizione in (1) è equivalente a

$$\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k \right) \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi, rispondere al quesito (1) equivale a chiedere se

$$\text{la serie } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ è convergente e ha somma } f(x).$$

Per analizzare questo problema, cominciamo con una definizione

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

Definizione 1.1. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile infinite volte in I e $x_0 \in I$. Si chiama *serie di Taylor di f, centrata in x_0*, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (x \in I). \tag{2}$$

Se $x_0 = 0$ la serie di dice anche *serie di MacLaurin di f*. La funzione f si dice *sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 in $J \subset I$* se per ogni $x \in J$ la serie di Taylor (2) è convergente e converge a $f(x)$.

Quindi il problema che ci poniamo è quello di capire per quali punti $x \in I$ la serie di Taylor di f è convergente e se converge a $f(x)$. Notiamo che in generale possono esistere dei punti $x \in I$ per cui la serie di Tayor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- non è convergente
- è convergente ma la sua somma è diversa da $f(x)$.

Di seguito diamo due esempi che illustrano queste situazioni.

Esempio 1.2.

(i) Consideriamo la funzione $f(x) = 1/(1+x)$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Abbiamo visto che vale la seguente formula

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}. \tag{3}$$

Questo dice che

$$P_n[f,0](x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \quad \text{e} \quad R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}.$$

in questo caso abbiamo una espressione esplicita del resto e quindi si può studiare direttamente sua convergenza. Infatti è chiaro che

$$|x| < 1 \;\Rightarrow\; |R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+x|} \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$
$$|x| \geq 1 \;\Rightarrow\; |(-1)^n x^n| = |x|^n \not\to 0.$$

Allora la serie di MacLaurin di f converge a $f(x)$ per $x \in \left]-1,1\right[$, mentre non converge per $|x| \geq 1$. Quindi questo esempio illustra il caso in cui la serie di Taylor di una funzione non è sempre convergente per tutti i punti dell'insieme di definizione della funzione.

(ii) Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1+x)$ che è definita per $x \in I :=]-1, +\infty[$. Notiamo che

$$\forall\, x \in I\colon\;\; f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

che è la funzione considerata al punto precedente. Procediamo come nell'esempio della funzione arcotangente. Ricordiamo che, per $n \geq 1$,

$$(P_n[f,0])'(x) = P_{n-1}[f',0](x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k. \tag{4}$$

Allora si tratta di trovare un polinomio che ha derivata uguale a (4). Dato che $D[x^{k+1}/(k+1)] = x^k$, allora

$$P_n[f,0](x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

e la serie di MacLaurin di $\log(1+x)$ è

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{5}$$

Abbiamo così ricavato in un'altro modo un risultato già visto. Dimostriamo ora che

- per $|x| < 1$, la serie (5) converge a $\log(1+x)$
- per $x > 1$, la serie (5) non converge.

A tal fine, consideriamo il resto di ordine n

$$R_n(x) = f(x) - P_n[f,0](x) = \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \tag{6}$$

Allora, la derivata di R_n, tenendo conto di (4) e (3), si scrive

$$R_n'(x) = f'(x) - (P_n[f,0])'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k = \frac{(-1)^n x^n}{1+x}.$$

Perciò dal teorema di Lagrange, se $x \in]-1,1[$ esiste c tra 0 e x tale che

$$R_n(x) = R_n(x) - R_n(0) = R_n'(c)(x-0) = \frac{(-1)^n c^n}{1+c} x.$$

Dato che c è compreso tra 0 e x, risulta $|c| < |x| < 1$ e quindi anche $-c < |x| < 1 \;\Rightarrow\; 1+c > 1-|x| > 0$ e in definitiva

$$|R_n(x)| = \frac{|c|^n}{1+c}|x| < \frac{|x|^n}{1-|x|}|x| \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Questo prova il primo punto, cioè che la serie di MacLaurin di $\log(1+x)$ è convergente a $\log(1+x)$ per $x \in]-1,1[$. Vediamo il secondo punto. Se $x > 1$, allora per il termine generale della serie si ha

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right| = \frac{x^n}{n} \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$

e quindi la serie non è convergente per ogni $x > 1$, dato che il termine generale della serie non è infinitesimo.

Infine per il caso $x = 1$, la serie è con termini a segni alterni e per il criterio di Leibniz si conclude che è convergente. Nella sezione complementi si dimostra che anche in questo caso la serie converge al valore della funzione, che è $\log(1 + x) = \log 2$. Questo risultato dimostra che la somma della serie armonica a segni alterni è $\log 2$, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2.$$

Si noti che con il criterio di Leibniz si è provato che questa serie è convergente, ma questo criterio non permette di calcolare la sommma.

(iii) Consideriamo la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Notiamo prima di tutto che, dato che $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, la funzione è continua in 0 e quindi in $\mathbb{R}$. La funzione è poi derivabile infinite volte in $x \neq 0$ (perchè composta di funzioni derivabili infinite volte in $x \neq 0$). Proveremo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Da questo poi consegue che la funzione è derivabile infinite volte in 0 e $f^{(n)}(0) = 0$. Proviamo a calcolare qualche derivata.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-1/x^2} \cdot D\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \\ f^{(2)}(x) &= e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)^2 - e^{-1/x^2}\,\frac{3!}{x^4} \\ f^{(3)}(x) &= e^{-1/x^2}\left(\frac{2}{x^3}\right)^3 - e^{-1/x^2} \cdot \frac{4}{x^3} \cdot \frac{3!}{x^4} - e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \frac{3!}{x^2} + e^{-1/x^2} \cdot \frac{4!}{x^5}. \end{aligned}$$

E' chiaro allora che una derivata di qualsiasi ordine sarà somma di termini del tipo

$$e^{-1/x^2} \cdot \frac{c}{x^k} \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{N}^*$$

e quando si deriva ulteriormente si ottengono ancora termini dello stesso tipo, perché

$$D\left[e^{-1/x^2}\cdot\frac{c}{x^k}\right]=e^{-1/x^2}\cdot\frac{2}{x^3}\cdot\frac{c}{x^k}+e^{-1/x^2}\cdot\left(-\frac{kc}{x^{k+1}}\right)$$

Quindi in definitiva

$$f^{(n)}(x)=e^{-1/x^2}\frac{c_1}{x^{m_1}}+e^{-1/x^2}\frac{c_2}{x^{m_2}}+\cdots+e^{-1/x^2}\frac{c_k}{x^{m_k}}.$$

Ora, dato che[1]

$$\forall\, m\in\mathbb{N}^*:\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x^2}}{x^m}=0,$$

si riconosce allora che

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*:\ \ \lim_{x\to 0}f^{(n)}(x)=0.$$

Come abbiamo già osservato questo implica che f è derivabile un qualunque numero di volte in 0 e $f^{(k)}(0)=0$. Da questo segue allora che la serie di MacLaurin di f è nulla (cioè i suoi coefficienti sono tutti nulli). Allora in questo caso la serie di MacLaurin di f è convergente per ogni $x\in\mathbb{R}$ ma non converge a $f(x)$ per $x\neq 0$ (perché $f(x)\neq 0$ per $x\neq 0$). Più esplicitamente si ha

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^*:\ \ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0\neq f(x).$$

In altri termini possiamo dire che il polinomio di MacLaurin di qualunque ordine n della funzione f è nullo e quindi

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^*\,\forall\, n\in\mathbb{N}:\ \ R_n(x)=f(x)\neq 0\ \text{ e }\ R_n(x)\not\to 0 \text{ per } n\to+\infty.$$

Questo esempio illustra il caso che la serie di Taylor può essere convergente, anche su $\mathbb{R}$, e non convergere a $f(x)$ per nessun $x\neq x_0$ (per $x=x_0$ converge sempre a $f(x_0)$).

Ora, per rispondere alla questione se la serie di Taylor converge a $f(x)$ abbiamo bisogno di rappresentare il resto di ordine n nella formula di Taylor in un'altra forma. La forma del resto

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n),$$

presente nel teorema di Taylor, si chiama *forma di Peano*. Il teorema seguente fornisce un'altro modo di rappresentare il resto che si dice essere nella *forma di Lagrange*. La dimostrazione viene data nella sezione dei complementi.

[1]Infatti $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|\frac{e^{-1/x^2}}{x^m}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{|x|^m}\overset{y=1/x^2}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{m/2}}{e^y}=0.$

Teorema 1.3 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $f \in \mathscr{C}^n(I)$ e che f sia derivabile $n+1$ volte in I_{x_0}. Poniamo*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^k.$$

Allora $\forall\, x \in I_{x_0}$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Osservazione 1.4. Nal caso $n = 0$ si ha che $f : I \to \mathbb{R}$ è continua in I e derivabile in I_{x_0}. Allora il Teorema 1.3 stabilisce che per ogni $x \in I_{x_0}$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che

$$f(x) - f(x_0) = R_0(x) = f'(c)(x - x_0).$$

Si riconosce allora che il teorema non è altro che il teorema di Lagrange.

La formula di Taylor con il resto nella forma di Lagrange data nel Teorema 1.3 può essere utile per studiare la questione della convergenza della serie di Taylor di una funzione alla funzione stessa (cioè se il resto tende a zero per $n \to +\infty$). Infatti anche se il punto c (compreso tra x_0 e x_0) non è noto, spesso è possibile maggiorare $f^{(n+1)}(c)$ con una funzione di x che non dipende da n, cioè esiste una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall\, x \in I_{x_0}\, \forall\, c \text{ compreso tra } x \text{ e } x_0\colon\ |f^{(n+1)}(c)| \le g(x).$$

In tal caso per l'errore $R_n(x)$ in $x \in I_{x_0}$ si ha la maggiorazione

$$|R_n(x)| \le g(x)\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

e il termine a destra converge a zero per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.5.

(i) Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = e^x$, che è infinitamente derivabile in $\mathbb{R}$. Sappiamo che la formula di MacLaurin è

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!} + R_n(x).$$

Adesso notiamo che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) = e^x$, che è monotona crescente. Perciò, per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ e per ogni c compreso tra x e 0 risulta $c \le |c| \le |x|$ e quindi

$$|f^{(n+1)}(c)| = e^c \le e^{|c|} \le e^{|x|}.$$

Allora il resto nella forma di Lagrange (con $x_0 = 0$) si scrive

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Perciò si ha

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\;\; e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

cioè la serie di MacLaurin di e^x converge a e^x per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Supponiamo che f sia la funzione seno o la funzione coseno ($f(x) = \operatorname{sen} x$ o $f(x) = \cos x$). Evidentemente f è derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$ e

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\, \forall\, k \in \mathbb{N}\colon |f^{(k)}(x)| \leq 1.$$

Perciò per il resto nella forma di Lagrange si ha

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Quindi le serie di MacLaurin del seno e del coseno convergono, per ogni $x \in \mathbb{R}$, rispettivamente a $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

2 Complementi sulle serie di Taylor

Dimostrazione del Teorema 1.3. Sia $x \in I_{x_0}$ con $x < x_0$ (se $x > x_0$ si procede allo stesso modo). Evidentemente $R_n \in \mathscr{C}^n(I)$ e

$$\forall\, k = 0, 1, \ldots, n\colon\;\; R_n^{(k)}(x_0) = 0.$$

Valutiamo

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}}.$$

Allora R_n è continua in $[x, x_0]$ e derivabile in $]x, x_0[$ e per il teorema di Cauchy (applicato alle funzioni $f(x) = R_n(x)$ e $g(x) = (x-x_0)^{n+1}$),

$$\exists\, x_1 \in\,]x, x_0[\;\text{ tale che }\; \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \frac{R_n'(x_1) - R_n'(x_0)}{(n+1)[(x_1-x_0)^n - (x_0-x_0)^n]}.$$

Di nuovo, R_n' è continua in $[x_1, x_0]$ e derivabile in $]x_1, x_0[$ e per il teorema di Cauchy (applicato a $f(x) = R_n'(x)$ e $g(x) = (n+1)(x-x_0)^n$)

$$\begin{aligned}\exists\, x_2 \in\,]x_1, x_0[\;\;\text{ tale che }\; \frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} &= \frac{R_n''(x_2)}{(n+1)n(x_2-x_0)^{n-1}} \\ &= \frac{R_n''(x_2) - R_n'(x_0)}{(n+1)n[(x_2-x_0)^{n-1} - (x_0-x_0)^{n-1}]}.\end{aligned}$$

Procedendo in questo modo si determinano $x_1, \ldots, x_n$ con $x < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_0$ e

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(x_1)}{(n+1)(x_1-x_0)^n} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{(n+1)!(x_n-x_0)} = \frac{R_n^{(n)}(x_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x_n-x_0)}.$$

Adesso $R_n^{(n)}$ è continua in $[x_n, x_0]$ e derivabile in $]x_n, x_0[$. Perciò dal teorema di Lagrange esiste $c \in]x_n, x_0[\subset]x, x_0[$ tale che

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n)}(x_n) - R_n^{(n)}(x_0)}{(n+1)!(x_n - x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

perche $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ e la derivata $n+1$-esima di P_n è identicamente zero. □

Esempio 2.1. Torniamo ad analizzare il caso della funzione $f(x) = \log(1+x)$ con $x \in I =]-1, +\infty[$. Abbiamo visto nell'Esempio 1.2(ii) che la serie di MacLaurin di f è convergente alla funzione per $x \in]-1, 1[$ mentre non è convergente per $x > 1$. Consideriamo qui il caso $x = 1$, che è il caso della serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Applichiamo il Teorema 1.3. Esiste quindi $c \in]0, 1[$ tale che

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Ricordiamo che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*: \;\; f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Perciò

$$|R_n(1)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ per } n \to +\infty.$$

Dato che il resto tende a zero, allora otteniamo la somma della serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

3 L'integrale di Riemann

3.1 Richiami

Richiamiamo le questioni riguardanti gli insiemi separati di $\mathbb{R}$ e la condizione di continguità. Due insiemi non vuoti $A, B \subset \mathbb{R}$ si dicono *separati* se

$$(\forall\, a \in A)(\forall\, b \in B) \quad a \leq b$$

e per brevità scriviamo $A \leq B$. Quando due insiemi non vuoti A e B sono separati, allora A è limitato superiormente (perché ogni elemento di B è un maggiorante di A e $B \neq \varnothing$) e B è limitato inferiormente (perché ogni elemento di A è un minorante di B e $A \neq \varnothing$). Inoltre

$$-\infty < \sup A \leq \inf B < +\infty.$$

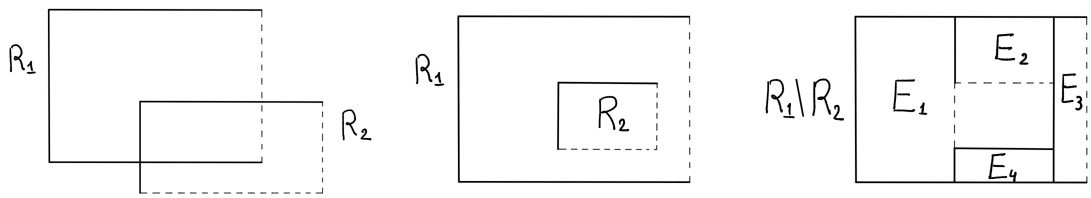

Figura 1: Intersezione e differenza di due rettangoli cartesiani R_1 e R_2.

Dati due insiemi numerici $A, B \subset \mathbb{R}$ non vuoti e separati, ogni elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\sup A \leq \lambda \leq \inf B$ si chiama *elemento di separazione di A e B*. L'intervallo $[\sup A, \inf B]$ si chiama *intervallo di separazione* dei due insiemi. I due insiemi separati A e B si dicono *contigui* se $\sup A = \inf B$. Vale il seguente risultato.

Proposizione 3.1. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi numerici non vuoti e separati. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i) $\sup A = \inf B$.

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $a \in A$ e $b \in B$ tale che $b - a \leq \varepsilon$.*

3.2 Misura della aree secondo Peano-Jordan

Definizione 3.2. Sia chiama *rettangolo cartesiano* un insieme $R \subset \mathbb{R}^2$ del tipo

$$R = I \times J,$$

dove I e J sono intervalli limitati di $\mathbb{R}$ (che possono essere aperti, chiusi o semiaperti[a]). L'insieme di tutti i rettangoli cartesiani lo indicheremo con $\mathscr{R}_2$.

[a]sono quindi inclusi intervalli del tipo $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ e $]a, b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \leq b$.

Proposizione 3.3. *L'insieme $\mathscr{R}_2$ dei rettangoli cartesiani verifica le seguenti proprietà (si veda Figura 1)*

(i) $\varnothing \in \mathscr{R}_2$

(ii) $R_1, R_2 \in \mathscr{R}_2 \;\Rightarrow\; R_1 \cap R_2 \in \mathscr{R}_2$

(iii) *se $R_1, R_2 \in \mathscr{R}_2$ e $R_1 \subset R_2$, allora esistono un numero finito di rettangoli cartesiani $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathscr{R}_2$ a due a due disgiunti[2] tali che $R_2 \setminus R_1 = E_1 \cup E_2 \cdots \cup E_n$.*

Ad ogni rettangolo cartesiano possiamo chiaramente associare una sua *misura* (la sua area). Se $R \in \mathscr{R}_2$ con $R = I \times J$, allora si chiama *misura di R* il numero

$$m(R) = |I| \cdot |J|.$$

[2]significa che presi due qualunque E_i e E_j con $i \neq j$, risulta $E_j \cap E_j = \varnothing$.

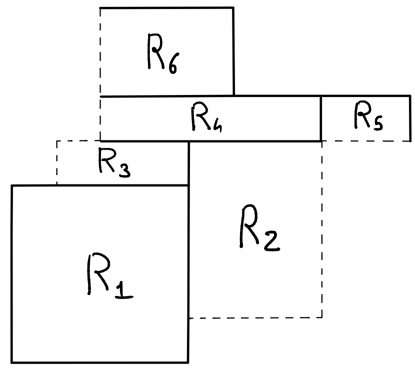

Figura 2: Esempio di polirettangolo. I punti sulla linea tratteggiata non sono parte del polirettangolo.

Questo significa che

$$\text{se } a = \inf I, b = \sup I \text{ e } c = \inf J, d = \sup J, \text{ allora } m(R) = (b-a)\cdot(d-c).$$

Si definisce così una funzione $m\colon \mathscr{R}_2 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni rettangolo cartesiano la sua misura.

Proposizione 3.4. *La funzione $m\colon \mathscr{R}_2 \to \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà*

(i) $m(\varnothing) = 0$

(ii) $m(R) \geq 0$ *(positività della misura)*

(iii) *se $R \in \mathscr{R}_2$ e $R_1, R_2 \in \mathscr{R}_2$ e $R = R_1 \cup R_2$ con $R_1 \cap R_2 = \varnothing$, allora $m(R) = m(R_1) + m(R_2)$ (additività della misura).*

Definizione 3.5. Sia chiama *polirettangolo (o plurirettangolo) cartesiano* una unione di un numero finito di rettangoli cartesiani a due a due disgiunti, cioè un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ del tipo

$$E = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n, \quad \text{con } R_i \in \mathscr{R}_2 \text{ e } R_i \cap R_j = \varnothing \text{ per } i \neq j.$$

Si veda Figura 2. L'insieme di tutti i polirettangoli cartesiani lo indicheremo con $\mathscr{P}_2$.

Proposizione 3.6. *L'insieme $\mathscr{P}_2$ dei polirettangoli cartesiani verifica le seguenti proprietà*

(i) $\mathscr{R}_2 \subset \mathscr{P}_2$ *e quindi* $\varnothing \in \mathscr{P}_2$

(ii) $E_1, E_2 \in \mathscr{P}_2 \;\Rightarrow\; E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2, E_2 \backslash E_1 \in \mathscr{P}_2$.

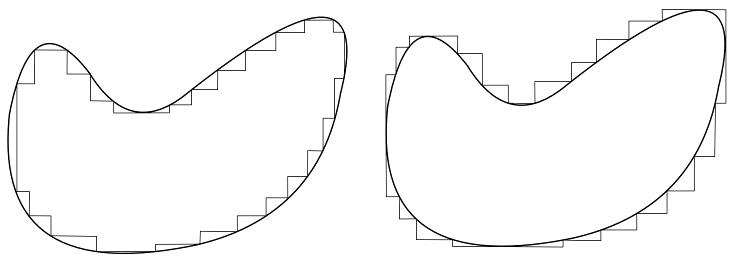

Figura 3: Polirettangoli contenuti e contenenti un insieme (curvo)

Si può definire una misura (area) di un polirettangolo nel modo seguente. Se $E = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$ con gli R_i rettangoli a due a due disgiunti, allora

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(R_i). \tag{7}$$

Si noti che la decomposizione di un polirettangolo E in una unione di rettangoli disgiunti non è necessariamente unica, cioè il polirettangolo potrebbe scriversi in due modi

$$E = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n, \text{ con } R_i \in \mathscr{R}_2 \text{ e } R_i \cap R_j = \varnothing \text{ per } i \neq j.$$
$$E = R'_1 \cup R'_2 \cup \cdots \cup R'_k, \text{ con } R'_i \in \mathscr{R}_2 \text{ e } R'_i \cap R'_j = \varnothing \text{ per } i \neq j.$$

In tal caso, si dimostra che

$$\sum_{i=1}^{n} m(R_i) = \sum_{i=1}^{k} m(R'_i)$$

e quindi la definizione (7) è ben posta e non dipende da come il polirettangolo è decomposto in rettangoli disgiunti.

Si definisce così una funzione $m\colon \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni polirettangolo cartesiano la sua misura e che è una estensione della misura dei rettangoli.

Proposizione 3.7. *La funzione $m\colon \mathscr{P}_2 \to \mathbb{R}$ verifica le seguenti proprietà*

(i) $m(\varnothing) = 0$

(ii) $\forall\, E \in \mathscr{P}_2\colon\ m(E) \geq 0$ *(positività della misura)*

(iii) $E_1, E_2 \in \mathscr{P}_2$ *e* $E_1 \subset E_2 \ \Rightarrow\ m(E_1) \leq m(E_2)$ *(monotonia)*

(iv) $E_1, E_2 \in \mathscr{P}_2$ *e* $E_1 \cap E_2 = \varnothing \ \Rightarrow\ m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ *(additività della misura).*

Definizione 3.8. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato. Consideriamo gli insiemi di tutte le misure (aree) dei polirettangoli cartesiani contenuti e contenenti X

$$M_X^- = \left\{ m(E) \,\middle|\, E \in \mathscr{P}_2 \text{ e } E \subset X \right\} \subset \mathbb{R}$$
$$M_X^+ = \left\{ m(E) \,\middle|\, E \in \mathscr{P}_2 \text{ e } X \subset E \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Evidentemente M_X^- e M_X^+ sono non vuoti e $M_X^- \leq M_X^+$ (cioè i due insiemi sono separati). Si dice che l'insieme X è *misurabile secondo Peano-Jordan* se i due insiemi di misure M_X^- e M_X^+ sono contigui, cioè se

$$\sup M_X^- = \inf M_X^+$$

e in tal caso si pone

$$m(X) := \sup M_X^- = \inf M_X^+.$$

L'insieme di tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^2$ che sono misurabili secondo Peano-Jordan lo indichiamo con $\mathscr{M}_2$

Si dimostra che l'insieme $\mathscr{M}_2$ e la funzione $m\colon \mathscr{M}_2 \to \mathbb{R}$ verificano le stesse proprietà elencate nelle Proposizioni 3.6 e 3.7.