Lezione 40

Saverio Salzo*

7 dicembre 2022

1 Definizione di integrale secondo Riemann

Definizione 1.1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Chiamiamo *suddivisione di* $[a, b]$, un sottoinsieme finito $P \subset [a, b]$ tale che $a, b \in P$. Evidentemente gli elementi di P si possono ordinare in modo crescente in modo che

$$P = \{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{e} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

per qualche intero $n \geq 1$. Scriveremo per brevità

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.$$

La suddivisione P determina n sottointervalli chiusi di $[a, b]$,

$$I_k := [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n$$

che hanno interni a due a due disgiunti e la cui unione è $[a, b]$. La suddivisione si dice poi *equispaziata* se per ogni $k = 1, \dots, n$, $|I_k| = x_k - x_{k-1} = h > 0$. In tal caso evidentemente si ha $x_k = a + kh$ e $h = (b - a)/n$. L'insieme delle suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ si denota con $\mathcal{D}([a, b])$. Date due suddivisioni $P, Q \in \mathcal{D}([a, b])$, si dice che Q *è più fine di* P (o che P *è meno fine di* Q) se $Q \supset P$.

Definizione 1.2. Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Per ogni $P \in \mathcal{D}([a, b])$, si chiamano *somma inferiore* e *somma superiore* associata a f e P le quantità

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k \quad \text{e} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k,$$

dove $m_k = \inf_{I_k} f$ e $M_k = \sup_{I_k} f$. Si veda Figura 1.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

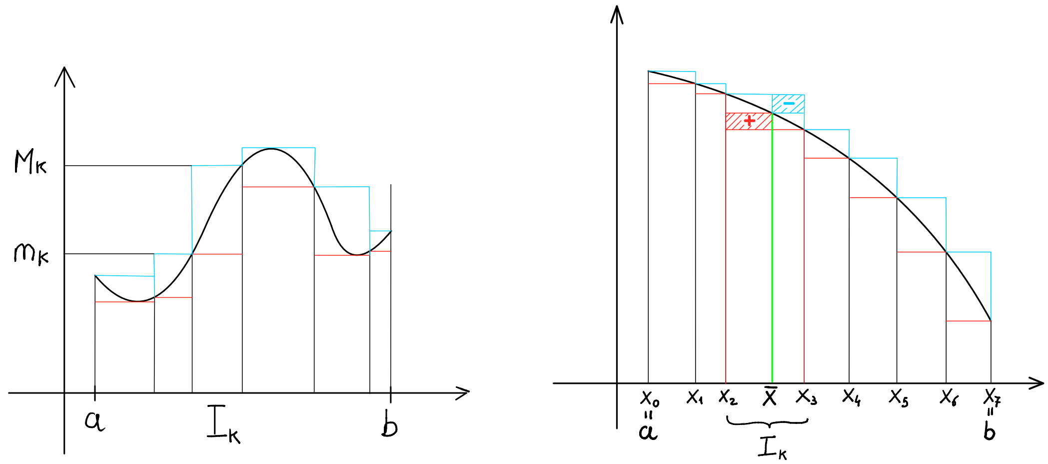

Figura 1: Somme inferiori e superiori associate ad una data suddivisione (a sinistra). Illustrazione della dimostrazione del Lemma 1.3 (a destra).

Lemma 1.3. *Sia* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata e* $P, Q \in \mathcal{D}([a,b])$*. Allora*

$$Q \text{ più fine di } P \;\Rightarrow\; s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P).$$

Dimostrazione. Supponiamo che

$$Q \setminus P = \{\bar{x}\},$$

cioè che Q abbia un solo punto in più di P. Evidentemente $\bar{x} \in \,]x_{k-1}, x_k[$ per qualche $k \in \{1, \dots, n\}$. Quindi

$$Q = \{a = x_0 < \cdots < x_{k-1} < \bar{x} < x_k < \cdots < x_n = b\}.$$

Allora l'intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ è spezzato in due sottointervalli $I_{k,1} = [x_{k-1}, \bar{x}]$ e $I_{k,2} = [\bar{x}, x_k]$ e, posto $m_k = \inf_{I_k} f$, risulta

$$m_k \leq \inf_{I_{k,1}} f =: \overline{m}_{k,1} \quad \text{e} \quad m_k \leq \inf_{I_{k,2}} f =: \overline{m}_{k,2}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} s(f,P) &= m_1(x_1 - x_0) + \;\cdots\cdots\cdots\; + m_k(x_k - x_{k-1}) + \;\cdots\cdots\cdots\; + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ &= m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(\bar{x} - x_{k-1}) \;+\; m_k(x_k - \bar{x}) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$s(f,Q) = m_1(x_1 - x_0) + \cdots + \overline{m}_{k,1}(\bar{x} - x_{k-1}) + \overline{m}_{k,2}(x_k - \bar{x}) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

Dato che $m_k \leq \overline{m}_{k,1}, \overline{m}_{k,2}$, si ha immediatamente che $s(f,P) \leq s(f,Q)$. Con lo stesso ragionamento di sopra, essendo

$$\overline{M}_{k,1} := \sup_{I_{k,1}} f \leq \sup_{I_k} f = M_k \quad \text{e} \quad \overline{M}_{k,2} := \sup_{I_{k,2}} f \leq \sup_{I_k} f = M_k$$

risulta $S(f, Q) \leq S(f, P)$. Abbiamo provato la tesi nel caso che Q abbia un solo punto in più di P. Nel caso generale, basta aggiungere a P un punto alla volta fino a raggiungere l'insieme Q. $\square$

Dal Lemma 1.3 consegue che se $P, Q \in \mathcal{D}([a, b])$, essendo $P \cup Q$ una suddivisione di $[a, b]$ più fine di P e di Q, risulta

$$s(f, P) \leq s(f, P \cup Q) \leq S(f, P \cup Q) \leq S(f, Q). \tag{1}$$

Perciò gli insiemi numerici

$$A := \left\{ s(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\} \quad \text{e} \quad B := \left\{ S(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\}$$

sono (non vuoti e) separati, cioè per ogni $a \in A$ e $b \in B$, risulta $a \leq b$.

Definizione 1.4. Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si chiamano *integrale inferiore e superiore di f su* $[a, b]$ rispettivamente

$$I_*(f) = \sup \left\{ s(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\}$$
$$I^*(f) = \inf \left\{ S(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\}$$

e risulta $-\infty < I_*(f) \leq I^*(f) < +\infty$. Se $I^*(f) = I_*(f)$ si dice che f è *integrabile secondo Riemann su* $[a, b]$ e il valore comune di $I^*(f)$ e $I_*(f)$ si chiama *integrale (di Riemann)* di f su $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f(x)dx.$$

La funzione f è detta *integranda* e $[a, b]$ *dominio di integrazione.* L'insieme delle funzioni limitate e integrabili secondo Riemann su $[a, b]$ si denota con $\mathcal{R}([a, b])$.

Teorema 1.5 (criteri di integrabilità)**.** *Sia $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *f è integrabile su* $[a, b]$

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \in \mathcal{D}([a, b])$ tale che $S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.*

(iii) *esiste $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione di suddivisioni di $[a, b]$ tale che $\lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) - s(f, P_n) = 0$.*

Inoltre, se è vera la (iii) *(e quindi sono vere anche le altre), allora*

$$\lim_{n \to +\infty} s(f, P_n) = \lim_{n \to +\infty} S(f, P_n) = \int_a^b f. \tag{2}$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione degli insiemi contingui richiamata nella lezione precedente e applicata agli insiemi numerici

$$A = \left\{ s(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ S(f, P) \,\middle|\, P \in \mathcal{D}([a, b]) \right\},$$

la (i) equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, Q, R \in \mathcal{D}([a,b]) \text{ tali che } S(f,Q) - s(f,R) < \varepsilon \tag{3}$$

ed è chiaro che (ii) $\Rightarrow$ (3). Proviamo (3) $\Rightarrow$ (ii). Sia $\varepsilon > 0$ e $Q, R \in \mathcal{D}([a,b])$ tali che $S(f,Q) - s(f,R) < \varepsilon$. Allora, posto $P = Q \cup R$, per la (1), si ha

$$s(f,R) \leq s(f,P) \leq S(f,P) \leq S(f,Q).$$

Da cui segue che $S(f,P) - s(f,P) \leq S(f,Q) - s(f,R) < \varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Evidentemente per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $P_n \in \mathcal{D}([a,b])$ tale che

$$0 \leq S(f,P_n) - s(f,P_n) < \frac{1}{n+1}.$$

Perciò $\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Dato che $\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0$, se $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $S(f,P_n) - s(f,P_n) < \varepsilon$ e la tesi è dimostrata.

Per la seconda parte dell'enunciato, supponiamo che valga la (iii). Allora, dato che f è integrabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$s(f,P_n) \leq \int_a^b f \leq S(f,P_n)$$

e quindi

$$0 \leq \int_a^b f - s(f,P_n) \leq S(f,P_n) - s(f,P_n) \;\text{ e }\; 0 \leq S(f,P_n) - \int_a^b f \leq S(f,P_n) - s(f,P_n).$$

Perciò, dal teorema dei carabinieri si ottiene (2). □

Esempio 1.6 (Integrabilità delle funzioni costanti)**.** Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione costante, con $f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$, per $x \in [a,b]$. Allora f è integrabile secondo Riemann e

$$\int_a^b f = (b-a) \cdot \alpha.$$

Infatti, per ogni $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} \in \mathcal{D}([a,b])$, risulta $m_k = \inf_{I_k} f = \alpha$ e $M_k = \sup_{I_k} f = \alpha$ e quindi

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \alpha = (b-a)\alpha$$
$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \alpha = (b-a)\alpha.$$

Perciò $I_*(f) = I^*(f) = (b-a) \cdot \alpha$.

Esempio 1.7 (Area di un settore di parabola)**.** Sia $b > 0$ e calcoliamo l'integrale

$$\int_0^b x^2 dx.$$

Consideriamo una suddivisione equispaziata $P_n = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ dell'intervallo $[0, b]$ di ampiezza $h > 0$, cioè tale che per ogni $k = 1, \ldots, n$, $x_k - x_{k-1} = h$. Evidentemente si ha necessariamente $x_k = kh$ con $h = b/n$. Poniamo $f(x) = x^2$. Allora

$$s(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) = h \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 = h \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = h \sum_{k=0}^{n-1} k^2 h^2 = h^3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$S(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k) = h \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = h \sum_{k=1}^{n} k^2 h^2 = h^3 \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Ora, ricordando che

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

dalla definizione di integrale si ha

$$s(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$S(f, P_n) = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Prendendo il limite per $n \to +\infty$, si vede che entrambe le somme inferiori e superiori convergono a $b^3/3$ e quindi per il Teorema 1.5(iii) si ha che f è integrabile secondo Riemann su $[0, b]$ e

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Esempio 1.8 (funzione di Dirichlet)**.** Sia $a < b$ e $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione f non è integrabile secondo Riemann. Infatti se $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ è una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$, allora per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, in ogni intervallo I_k esistono punti razionali e irrazionali. Perciò $m_k = 0$ e $M_k = 1$ e quindi

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot 0 = 0 \quad \text{e} \quad S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \cdot 1 = b - a$$

Perciò $I_*(f) = 0$ e $I^*(f) = b - a > 0$ e quindi f non è integrabile.

Teorema 1.9 (interpretazione geometrica dell'integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann su $[a,b]$. Supponiamo che, per ogni $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$. Allora l'insieme*

$$X = \Big\{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} \,\Big|\, 0 \leq y \leq f(x)\Big\}$$

è misurabile secondo Peano-Jordan e risulta $m(X) = \int_a^b f$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Dato che f è integrabile su $[a,b]$ esiste una suddivisione $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{D}([a,b])$ tale che

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

dove

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k, \quad m_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f$$
$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k, \quad M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

Allora, se definiamo i rettangoli cartesiani (a due a due disgiunti)

$$R_k = [x_{k-1}, x_k[\times [0, m_k] \text{ per } k < n \text{ e } R_n = [x_{n-1}, x_n] \times [0, m_n]$$
$$T_k = [x_{k-1}, x_k[\times [0, M_k] \text{ per } k < n \text{ e } T_n = [x_{n-1}, x_n] \times [0, M_n],$$

è chiaro che i polirettangoli

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} R_k \quad \text{e} \quad F = \bigcup_{k=1}^{n} T_k$$

verificano

$$E \subset X \subset F.$$

Inoltre

$$m(E) = \sum_{k=1}^{n} m(R_k) = s(f,P) \quad \text{e} \quad m(F) = \sum_{k=1}^{n} m(T_k) = S(f,P)$$

e quindi si ha $m(F) - m(E) < \varepsilon$. Da questo segue che X è misurabile secondo Peano-Jordan. Poi si ha anche, per definizione di integrale e di misura di un insieme,

$$m(E) = s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P) = m(F)$$
$$m(E) \leq m(X) \leq m(F)$$

e quindi

$$\left| m(X) - \int_a^b f \right| \leq m(F) - m(E) < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε segue che $m(X) = \int_a^b f$. $\square$

Osservazione 1.10. Si può dimostrare che nel teorema precedente vale anche l'implicazione contraria e quindi

$$f \text{ è integrabile secondo Riemann su } [a,b] \iff X \text{ è misurabile secondo Peano-Jordan.}$$

Proposizione 1.11. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è integrabile su $[a,b]$, allora f è integrabile su tutti i sottointervalli chiusi di $[a,b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$ e sia $[c,d] \subset [a,b]$ con $c < d$ un sottointervallo di $[a,b]$. Sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $P \in \mathcal{D}([a,b])$ tale che

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Consideriamo $Q = P \cup \{c,d\}$. Allora Q è una suddivisione di $[a,b]$ più fine di P e per il Lemma 1.3 risulta

$$S(f,Q) - s(f,Q) < \varepsilon.$$

Poi, risulta che $R = Q \cap [c,d] \in \mathcal{D}([c,d])$ e

$$S(f,R) - s(f,R) \leq S(f,Q) - s(f,Q) < \varepsilon,$$

perché $S(f,Q) - s(f,Q)$ è somma di termini positivi corrispondenti agli intervalli determinati da Q e $S(f,R) - s(f,R)$ è composto da una parte di questi termini, cioè quelli corrispondenti agli intervalli di Q contenuti in $[c,d]$. La tesi segue dal Teorema 1.5. □

Teorema 1.12 (additività dell'integrale)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $c \in \,]a,b[$. Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann su $[a,c]$ e su $[c,b]$. Allora f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ e risulta*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{4}$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Allora, per il primo criterio di integrabilità, esistono $Q \in \mathcal{D}([a,c])$ e $R \in \mathcal{D}([c,b])$ tali che

$$S(f,Q) - s(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(f,R) - s(f,R) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adesso, è immediato verificare che $P := Q \cup R \in \mathcal{D}([a,b])$ e

$$s(f,P) = s(f,Q) + s(f,R) \quad \text{e} \quad S(f,P) = S(f,Q) + S(f,R). \tag{5}$$

Perciò

$$S(f,P) - s(f,P) = S(f,Q) - s(f,Q) + S(f,R) - s(f,R) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Si è quindi verificato il secondo punto del Teorema 1.5, e quindi f è integrabile su $[a,b]$.

Proviamo adesso la (4). Considerate le suddivisioni Q e R di sopra, dalla definizione di integrale risulta

$$s(f,Q) \leq \int_a^c f \leq S(f,Q) \quad \text{e} \quad s(f,R) \leq \int_c^b f \leq S(f,R)$$

da cui, tenendo conto delle (5), si ottiene

$$s(f,P) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq S(f,P).$$

Adesso, l'integrale di f su $[a,b]$ soddisfa pure

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P)$$

e quindi

$$\left| \int_a^c f + \int_c^b f - \int_a^b f \right| \leq S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε, si conclude che $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$. □

2 Classi di funzioni integrabili (parte I)

Individueremo ora delle classi di funzioni che sono automaticamente integrabili secondo Riemann.

Teorema 2.1. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona (crescente o decrescente). Allora f è limitata e integrabile secondo Riemann su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo per fissare le idee che f sia crescente. Per prima cosa osserviamo che f è limitata. Infatti risulta

$$\forall\, x \in [a,b]\colon \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b), \tag{6}$$

e quindi $f(a)$ e $f(b)$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di f su $[a,b]$. Dimostriamo che f è integrabile su $[a,b]$. Sia $P \in \mathcal{D}([a,b])$ con $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$. Dato che f è crescente in $[a,b]$ risulta, per ogni $k = 1, \ldots, n$,

$$m_k = \inf_{I_k} f = f(x_{k-1}) \quad \text{e} \quad M_k = \sup_{I_k} f = f(x_k).$$

Perciò

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}) \quad \text{e} \quad S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$$

e quindi

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})(f(x_k) - f(x_{k-1})). \qquad (7)$$

Adesso supponiamo che la suddivisione P sia equispaziata, cioè che per ogni $k = 1, \dots, n$, $x_k - x_{k-1} = h > 0$: questo significa che $x_k = a + kh$ con $h = (b-a)/n$. In tal caso la (7) diventa

$$S(f,P) - s(f,P) = h \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

e la somma nel termine a destra è telescopica e vale

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = & f(x_1) - f(x_0) \\ & + f(x_2) - f(x_1) \\ & + f(x_3) - f(x_2) \\ & + \dots\dots\dots \\ & + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) \\ & + f(x_n) - f(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Perciò tutti i termini si cancellano e rimane solo $f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$. In definitiva abbiamo provato che, se P è equispaziata con $n+1$ punti

$$S(f,P) - s(f,P) = h(f(b) - f(a)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

Allora è chiaro che, dato $\varepsilon > 0$, si può prendere una suddivisione equispaziata $P \in \mathcal{D}([a,b])$ con un numero di punti abbastanza grande in modo da rendere $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Per il Teorema 1.5 risulta che f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$. $\square$