Soluzioni Esercizi
Fondamenti di Matematica - I Canale

Prof. Salzo Saverio
Tutor: Halitchi Andrei, Christian Piermarini

23 ottobre 2022

Indice

1 Soluzioni Esercizi pdf n.1

1.a)

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$A \cap\ B = \{a, b, c, d\},\ A \setminus B = \{d, e\},\ B \setminus A = \{g, h\}$$

1.b)

$$A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B =]-\infty, -1] \cup \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

$$A \setminus B = [-1, 1]\,, B \setminus A = \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$$

1.c)

$$\bigcap_{x \in F} = \{2\},\ \bigcup_{x \in F} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

1.d)

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

2.a)

$$f(A) = \{4, 12, 52\},\ f^{-1}(B) = \{0, 1, 2, 3\}$$

2.b) La funzione è ingettiva ma non surgettiva.

2.c.1)

$$f \circ g(x) = 2(x^3) - 7 = 2x^3 - 7,\ g \circ f(x) = (2x - 7)^3$$

2.c.2)

$$f \circ g(n) = |(n^2 + 1) - 3|,\ g \circ f(n) = (|n - 3|)^2 + 1 = (n - 3)^2 + 1$$

2.c.3)

$$f \circ g(x) = \pi,\ g \circ f(x) = \pi^2$$

2.d.1)

$$y = 3x - 5 \to x = f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}$$

2.d.2)

$$y = \frac{3}{x^3 - 2} \to x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{3+2y}{y}}$$

3.a.1)

$$\textit{Impossibile}\ (\nexists x \in \mathbb{R})$$

3.a.2)

$$]-20, \infty[$$

3.a.3)

$$]-\infty, -4[\cup]0, 1[$$

3.a.4)

$$], -\infty, -2] \cup [2, \infty[$$

3.a.5) Bisogna imporre due sistemi, il primo

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1} & \geq 0 \\ x+2 & \geq 0 \\ \frac{x^2-4}{x+1} & > (x+2)^2 \end{cases}$$

unito al secondo

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1} & \geq 0 \\ x+2 & < 0 \end{cases}$$

Risolvendo il primo sistema vediamo che la prima disequazione ha soluzione per

$$-2 \leq x < -1 \cup x \geq 2$$

la seconda disequazione ha soluzione per

$$x \geq -2$$

e la terza

$$\frac{x^2-4}{x+1} - (x+2)^2 > 0 \iff \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} - (x+2)^2 > 0 \iff (x+2)\frac{-x^2-2x-4}{x+1} > 0$$

notiamo che l'equazione di secondo grado al numeratore non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, avendo il coefficiente a negativo capiamo che è rivolta verso il basso e

non avendo soluzioni che è sempre negativa. Lo studio del segno si riduce allo studio del segno delle altre due equazioni di primo grado ($(x + 2)$ al numeratore e $(x + 1)$ al denominatore).
Mettendo insieme queste soluzioni abbiamo che il primo sistema vale per $-2 < x < 1$.
Il secondo sistema se proviamo a risolverlo non ammette soluzione, la soluzione dell'esercizio è data dalla soluzione del primo sistema.

3.b.1) $\mathbb{R}$, è sempre positiva in $\mathbb{R}$

3.b.2) Sempre negativa in $\mathbb{R}$, quindi l'insieme di validità è l'insieme vuoto

3.b.3) $\mathbb{R}$, è sempre positiva in $\mathbb{R}$

4.a.1) Trovando le soluzioni in $\mathbb{R}$, facendo poi l'intersezione con $\mathbb{N}$ si trova $\{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}$, quindi inf=min=2 e sup $= +\infty$.

4.a.2) Stesso procedimento dell'esercizio precedente, stessa soluzione.

4.b.1) Per verificare che $sup(A) = 1$ bisogna che sussitano contemporaneamente:

- $$\frac{n^2 - 1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

  questo è sempre vero perché stiamo sottraendo a 1 quantità sempre positive, in particolare quantità positive minori di uno, il risultato sarà sempre un numero compreso tra 0 e 1 (in particolare non è mai uguale a 1, questo rende 1 solo un sup).

- $$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \mid 1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon,$$

  cioè verificare che dato un epsilon arbitrario e positivo la disequazione ammette soluzione:

  $$1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

4.b.2) Per verificare che $inf(B) = 0$ bisogna che susstinato contemporaneamente:

- $$\frac{2}{(7n + 1)^2} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

  disequazione sempre vera, in particolare assume valori da 2 in su, quindi anche in questo caso 0 non è incluso, questo fa di lui, verificando il passo successivo, solo un estremo inferiore.

- $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{2}{(7n+1)^2} < \varepsilon,$$

  cioè verificare che dato un epsilon arbitrario e positivo la disequazione ammette soluzione:

$$\frac{2}{(7n+1)^2} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < (7n+1)^2 \iff 7n+1 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \iff n > \frac{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1}{7}$$

2 Soluzioni esercizi pdf n.2

5.a)

$$\frac{\log 2 - \log 10}{\frac{1}{2}\Big(\log 4 - \log 5\Big)} = \frac{\log \frac{2^3}{10}}{\frac{1}{2}\log\frac{4}{5}} = \frac{\log\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}\log\frac{4}{5}} = 2$$

5b.1) $t = 5^x \to t^2 - t - 6 = 0 \to t_1 = 3$ (unica soluzione ammissibile) $x = \log_3 5$

5b.2) Dato che $\log_9 3 = 1/2$, il termine a sinistra nell'equazione diventa

$$\log_3(5x) + \log_3 x - \log_3 6x = \log_3 \frac{5x^2}{6x} = \log_3 \frac{5x}{6}.$$

Allora l'equazione è equivalente a $\log_3(5x/6) = 2$, da cui si ricava (facendo l'esponenziale di ambo i membri) $5x/6 = 3^2$ e quindi $x = 54/5$.

5.c.1) Ponendo $t = 2^x$, l'equazione diventa $t^3+3t^2-3t-1 > 0$. Scomponendo con Ruffini (t=1) abbiamo $(t-1)(t^2+4t+1) > 0$. Chiaramente il polinomio di secondo grado è sempre positivo per $t > 0$ (si ricordi che $t = 2^x > 0$). Perciò la disequazione è equivalente a $t-1 > 0 \to t > 1 \to 2^x > 1 \to x > 0$

5.c.2) Poniamo $t = \log x$. Allora l'equazione diventa

$$t^3 - 2t \geq 0 \;\Leftrightarrow\; t(t^2-2) \geq 0,$$

che ha soluzioni $-\sqrt{2} \leq t \leq 0$ o $t \geq \sqrt{2}$. Quindi, ricordando che $t = \log x$, e che l'esponenziale e il logaritmo sono strettamente crescenti, si ha che le soluzione dell'equazione iniziale sono $e^{-\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ o $x \geq e^{\sqrt{2}}$.

6.a.1) $z = 4 + i^2 + 2i = 3 + 2i \to |z| = \sqrt{13}$

6.a.2) $z = 10 + 5i - i + \frac{1}{2} = \frac{21}{2} + 4i \to |z| = \sqrt{\frac{21^2+64}{4}}$

6.a.3) $z = \frac{\frac{21}{2}+4i}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{\frac{21}{2}+4i}{1+\frac{1}{2}i}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{4}{5}\cdot\Big(1-\frac{1}{2}i\Big)\cdot\Big(\frac{21}{2}+4i\Big) = 10 - i \to |z| = \sqrt{101}$

6.a.4) $z = \sqrt{2} - i - i - \sqrt{2} = -2i \to |z| = 2$

6.a.5) $z = \overline{(a-ib)+3i} = \overline{a+i(3-b)} = a + i(b-3) \to |z| = \sqrt{a^2+(b-3)^2}$

6.b.1) $z = 4i$ è un numero sull'asse immaginario, ogni numero su questo asse ha argomento $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$, $|z| = 4$

6.b.2) $z = \frac{1}{6}(1-i) \to \; |z| = \frac{1}{6}\sqrt{2}$ e $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to \mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}$.

6.b.3) $z = 1 + \sqrt{3}i \;\to\; |z| = 2$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to\; \mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$.

6.c.1) $|w| = 1$, $\mathrm{Arg}(w) = \pi$ e $z = \sqrt[3]{w} \;\to\; |z| = 1$ e $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$

6.c.2) $|w| = \sqrt{2}$, $\text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{3}$ e $z = \sqrt{w} \;\rightarrow\; \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2}, k = 0, 1$

6.d.1) Innanzitutto segnalo un errore di battitura, l'equazione è di secondo grado. Per risolverla dobbiamo riscrivere il polinomio con il metodo del completamento del quadrato, che in generare procede come segue ($a, b, c \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right),
\end{aligned}$$

dove $\sqrt{\Delta}$ è una delle radici quadrate del numero complesso $\Delta = b^2 - 4ac$. Allora si ha che

$$az^2 + bz + c = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ oppure } z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Quindi si ottengono le due soluzioni (complesse) $z_{1/2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2$. Applicando questa procedura al nostro caso si ottengono le due soluzioni: $x_{1/2} = \frac{1+3i\pm\sqrt{-2i}}{2}$. Uno dei due valori di $\sqrt{-2i}$ è $1 - i$ e sostituendo abbiamo

$$x_{1/2} = \frac{1 + 3i \pm (1 - i)}{2} \rightarrow x_1 = 2i \;,\; x_2 = 1 + i \tag{1}$$

6.d.2) Si tratta di trovare le radici quadrate di $1 - 2i$. Il modulo di $1 - 2i$ è $|1-2i| = \sqrt{5}$, mentre l'argomento è determinato dalle equazioni $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen}\,\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, che però non danno valori di un angolo noto. Le radici cercate sono formalmente

$$\pm\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Per ovviare alla mancanza del valore esatto di θ possiamo esprimere i valori $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ in funzione dei valori di $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ utilizzando le formule di bisezione $\cos(\theta/2) = \sqrt{(1 + \cos\theta)/2}$ e $\text{sen}(\theta/2) = \sqrt{(1 - \cos\theta)/2}$.

Facendo questa sostituzione otteniamo

$$x_{1/2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

6.d.3) Si possono usare le stesse formule utilizzate nelle soluzioni 6.c.1) e 6.c.2).
$z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt[3]{3}$, $z_4 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

$z_5 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

7.a.1) Utilizzare $t = \sin\theta \to 2t^2 + 5t + 2 = 0 \to t_1 = -1$ unica soluzione ammissibile. Quindi $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

7.a.2) $\theta = k\pi \vee \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

7.b.1)

$$\cos\theta + \sin\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} > 1 \to 0 < \cos\theta < 1$$

Utilizzando il grafico del coseno abbiamo $0 + 2k\pi < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2km$

7.b.2) $k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

8.a.1) Comunque fissiamo un valore piccolo a piacere ε dobbiamo trovare un $\delta > 0$ tale che per $0 < |x - (-2)| < \delta$ si abbia $|2x + 1 - (-3)| < \varepsilon$. Dobbiamo quindi risolvere $|2x + 4| < \varepsilon$. Ma $|2x + 4| < \varepsilon \iff 2|x + 2| < \varepsilon$. Perciò se si prende $\delta = \varepsilon/2$, si ha $0 < |x - (-2)| < \delta \Rightarrow |2x + 1 - (-3)| < \varepsilon$.

8.a.2) Seguendo un ragionamento analogo al precedente si ha

$$\left|\frac{x-6}{3} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{|x-9|}{3} < \varepsilon \iff |x-9| < 3\varepsilon.$$

Perciò, se si prende $\delta = 3\varepsilon$, si ha

$$0 < |x - 9| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x-6}{3} - 1\right| < \varepsilon.$$

8.a.3) Fissiamo $0 < \varepsilon < 2$ e risolviamo

$$|\sqrt{x} + 1 - 3| < \varepsilon.$$

Evidentemente

$$\begin{aligned}|\sqrt{x} + 1 - 3| < \varepsilon &\iff |\sqrt{x} - 2| < \varepsilon \iff 2 - \varepsilon < \sqrt{x} < 2 + \varepsilon \\ &\iff (2-\varepsilon)^2 < x < (2+\varepsilon)^2 \iff 4 - \varepsilon(2-\varepsilon) < x < 4 + \varepsilon(2+\varepsilon)\end{aligned}$$

Perciò dato che $\varepsilon(2 - \varepsilon) < \varepsilon(2 + \varepsilon)$, se si prende $\delta = \varepsilon(2 - \varepsilon)$, si ha $0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} + 1 - 3| < \varepsilon$.