Lezione 17

Saverio Salzo*

25 ottobre 2022

1 Limiti di funzioni monotone

Teorema 1.1 (sull'esistenza dei limiti unilaterali delle funzioni monotone)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ crescente (risp. decrescente) e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora valgono le seguenti proposizioni*

(i) *Se x_0 è punto di accumulazione a sinistra per A, allora*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{\substack{x \in A \\ x < x_0}} f(x) \quad \Big(\mathit{risp.}\ \inf_{\substack{x \in A \\ x < x_0}} f(x)\Big).$$

In particolare, se $x_0 = +\infty$, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup_A f \quad \big(\mathit{risp.}\ \inf_A f\big)$.

(ii) *Se x_0 è punto di accumulazione a destra per A, allora*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{\substack{x \in A \\ x > x_0}} f(x) \quad \Big(\mathit{risp.}\ \sup_{\substack{x \in A \\ x > x_0}} f(x)\Big).$$

In particolare, se $x_0 = -\infty$, allora $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \inf_A f \quad \big(\mathit{risp.}\ \sup_A f\big)$.

Dimostrazione. Proviamo solo la (i). L'altra si prova allo stesso modo. Supponiamo f crescente e poniamo

$$l = \sup_{x \in A, x < x_0} f(x) \in \,]-\infty, +\infty] \quad \Big(\text{risp. } l = \inf_{x \in A, x < x_0} f(x) \in [-\infty, +\infty[\,\Big).$$

Si noti che che $x_0 > -\infty$, perché x_0 è di accumulazione a sinistra per A. Si deve provare che $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$. Sia V un intorno di l in $\overline{\mathbb{R}}$. Dato che $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$ (risp. $l = -\infty$), risulta che V è del tipo $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ oppure $]\beta, +\infty]$ (risp. $[-\infty, \beta[$). Quindi, esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha < l$ (risp. $\alpha > l$) tale che

$$]\alpha, l] \subset V \quad (\text{risp. } [l, \alpha[\subset V).$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

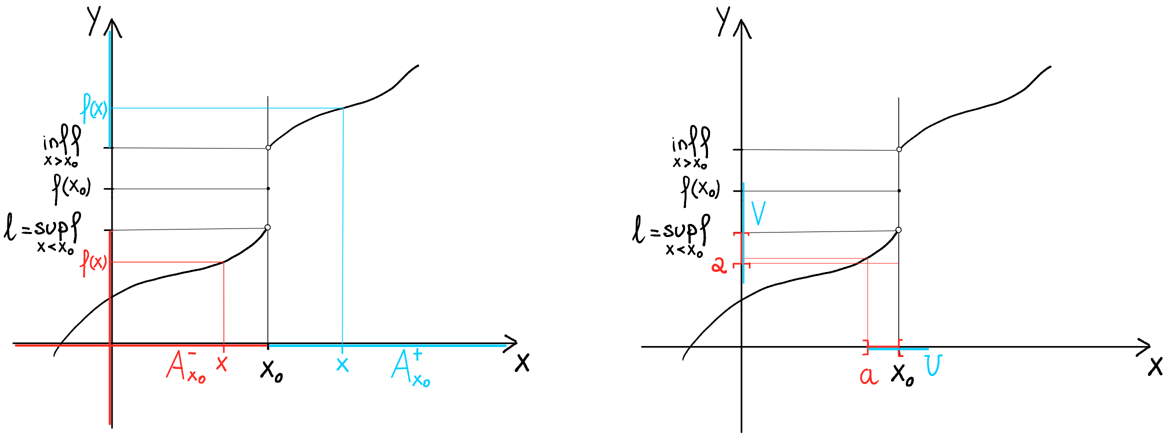

Figura 1: Illustrazione dell'enunciato e della dimostrazione del Teorema 1.1 sui limiti unilaterali di funzioni monotone.

Allora, per la seconda proprietà dell'estremo superiore (risp. inferiore) esiste $a \in A$, con $a < x_0$ tale che $f(a) > \alpha$ (risp. $f(a) < \alpha$). Adesso dato che f è crescente (risp. decrescente) si ha

$$x \in \,]a, x_0[\, \cap A \;\Rightarrow\; \alpha < f(a) \leq f(x) \leq l \;\Rightarrow\; f(x) \in V$$
$$(\text{risp. } x \in \,]a, x_0] \cap A \;\Rightarrow\; l \leq f(x) \leq f(a) < \alpha \;\Rightarrow\; f(x) \in V)$$

Ma chiaramente l'insieme $]a, x_0[\, \cap A$ si può scrivere come $U \cap A^-_{x_0}$ con U intorno di x_0.[1] Perciò si è provato che esiste un intorno U di x_0 per cui vale $x \in U \cap A^-_{x_0} \;\Rightarrow\; f(x) \in V$. $\square$

Osservazione 1.2. Il Teorema 1.1 stabilisce l'esistenza dei limiti unilaterali $f(x_0-)$ e $f(x_0+)$. Valgono hanno le seguenti affermazioni.

(i) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ è punto di accumulazione sia a destra che e a sinistra per A, allora $f(x_0-)$ e $f(x_0+)$ sono entrambi finiti e vale

$$\begin{cases} f(x_0-) \leq f(x_0+) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ f(x_0-) \geq f(x_0+) & \text{se } f \text{ è decrescente,} \end{cases}$$

perché gli insiemi $f(A^-_{x_0})$ e $f(A^+_{x_0})$ sono separati. La quantità $f(x_0+) - f(x_0-)$ si chiama *salto della funzione f in x_0*.

[1]Infatti

$$U = \begin{cases}]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,, \;\; \delta = x_0 - a & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ ]a, +\infty] & \text{se } x_0 = +\infty. \end{cases}$$

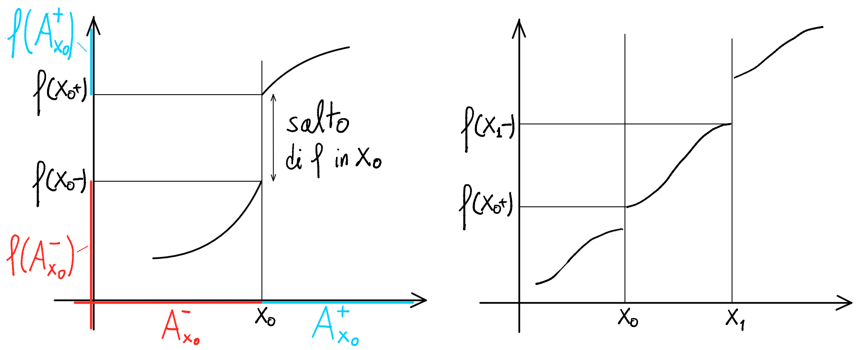

Figura 2: Illustrazione dei punti (i) e (ii) dell'Osservazione 1.2.

(ii) Se $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 < x_1$ con x_0 punto di accumulazione a destra per A e x_1 punto di accumulazione a sinistra per A, allora $f(x_0+)$ e $f(x_1-)$ sono entrambi finiti e vale

$$\begin{cases} f(x_0+) \leq f(x_1-) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ f(x_0+) \geq f(x_1-) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

(iii) Se $x_0 \in A$ è punto di accumulazione a sinistra per A, allora $f(x_0-) \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{cases} f(x_0-) \leq f(x_0) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ f(x_0-) \geq f(x_0) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

(iv) Se $x_0 \in A$ è punto di accumulazione a destra per A, allora

$$\begin{cases} f(x_0) \leq f(x_0+) & \text{se } f \text{ è crescente} \\ f(x_0) \geq f(x_0+) & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

(v) Se $x_0 \in A$ è di accumulazione a sinistra e a destra per A, allora $f(x_0)$ è compreso tra i valori $f(x_0-)$ e $f(x_0+)$.

Esempio 1.3.

(i) Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione potenza x_n. Abbiamo visto che, se n è pari

$$p_n(\mathbb{R}_+) = p_n(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$$
$$\text{e } p_n \text{ è strettamente crescente su } \mathbb{R}_+ \text{ e strettamente decrescente su } \mathbb{R}_-.$$

Perciò dal Teorema 1.1 segue che

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \lim_{x\to+\infty} (p_n)_{|\mathbb{R}_+}(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} p_n(x) = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \lim_{x\to-\infty} (p_n)_{|\mathbb{R}_-}(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}_-} p_n(x) = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty.$$

Poi se n è dispari, allora

$$p_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ è strettamente crescente.}$$

Perciò, ancora dal Teorema 1.1 segue che

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = \sup \mathbb{R} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \inf \mathbb{R} = -\infty.$$

(ii) Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

Infatti è noto che la radice n-esima

$$\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

è strettamente crescente e suriettiva (e quindi bigettiva). Allora per il Teorema 1.1, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty.$$

Inoltre, se n è dispari, $\sqrt[n]{\cdot}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente e bigettiva. Perciò

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sqrt[n]{x} = \inf \mathbb{R} = -\infty.$$

(iii) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{Q}$. Allora sappiamo che la funzione potenza $p_\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è bigettiva e strettamente crescente. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha = \inf \mathbb{R}_+ = 0.$$

Poi se $\alpha \in \mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Q}$, allora $p_\alpha\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ è bigettiva e strettamente derescente. Perciò

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \inf \mathbb{R}_+^* = 0. \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^\alpha = \sup \mathbb{R}_+^* = +\infty.$$

(iv) Sia $a > 0$ e consideriamo la funzione esponenziale $\exp_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e la funzione logaritmo $\log_a\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Esse sono bigettive e strettamente crescenti se $a > 1$ e strettamente decrescenti se $a < 1$. Allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} \sup_{x\in\mathbb{R}} \exp_a(x) = \sup \mathbb{R}_+^* = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \inf_{x\in\mathbb{R}} \exp_a(x) = \inf \mathbb{R}_+^* = 0 & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} \inf_{x\in\mathbb{R}} \exp_a(x) = \inf \mathbb{R}_+^* = 0 & \text{se } a > 1 \\ \inf_{x\in\mathbb{R}} \exp_a(x) = \sup \mathbb{R}_+^* = +\infty & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

(v) Consideriamo le funzioni iperboliche. Abbiamo visto che

$$\operatorname{senh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \to \left]-1,1\right[$$

sono bigettive e strettamente crescenti. Perciò

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{senh} x = \sup \mathbb{R} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x = \inf \mathbb{R} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tgh} x = \sup \left]-1,1\right[= 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{tgh} x = \inf \left]-1,1\right[= -1.$$

Invece per il coseno iperbolico $\cosh\colon \mathbb{R} \to [1,+\infty[$ si ha che

$$\cosh(\mathbb{R}_+) = \cosh(\mathbb{R}_-) = [1,+\infty[$$
$$\text{e} \quad \cosh \text{ è strettamente crescente su } \mathbb{R}_+ \text{ e strettamente decrescente su } \mathbb{R}_-.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \cosh_{|\mathbb{R}_+}(x) = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = \lim_{x\to-\infty} \cosh_{|\mathbb{R}_-}(x) = \sup \mathbb{R}_+ = +\infty.$$

(vi) La restrizione della funzione tangente e la sua inversa

$$\operatorname{tg}_{|]-\pi/2,\pi/2[}\colon \left]-\pi/2,\pi/2\right[\to \mathbb{R} \qquad \operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left]-\pi/2,\pi/2\right[$$

sono strettamente crescenti e bigettive. Perciò

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = \inf \mathbb{R} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \sup \mathbb{R} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \inf \left]-\pi/2,\pi/2\right[= -\pi/2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \sup \left]-\pi/2,\pi/2\right[= \pi/2.$$

(vii) Consideriamo la funzione parte intera $\lfloor\cdot\rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Evidentemente la funzione è surgettiva e crescente. Allora, per il Teorema 1.1, risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor = \sup \mathbb{Z} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \lfloor x\rfloor = \inf \mathbb{Z} = -\infty.$$

2 Limiti di successioni monotone

Una conseguenza immediata del Teorema 1.1 è il seguente

Corollario 2.1. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale monotona. Allora*

(i) *se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, risulta* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \left]-\infty,+\infty\right]$

(ii) *se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, risulta* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \left]-\infty,+\infty\right]$.

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 1.1 con $A = \mathbb{N}$ e $x_0 = +\infty$. $\square$

Esempio 2.2 (Problema dell'interesse composto continuo)**.** Questo problema è stato considerato da Jacob Bernoulli nel 1683. Supponiamo di avere un capitale investito in banca di 1 milione di euro e supponiamo che la banca offra un interesse annuo del 100% (che banca!). Questo significa che dopo un anno il capitale è diventato 2 milioni di euro. Supponiamo ora che la banca offra un interesse del 50% ogni sei mesi. E' una offerta più conveniente? Vediamo. Dopo sei mesi il capitale è $1 \times (1 + 0.5) = 1.5$ milioni di euro. Nei successivi sei mesi l'interesse del 50% è applicato al nuovo capitale (perché l'interesse è composto), perciò alla fine dei secondi sei mesi, il capitale diventa $1.5 \times (1 + 0.5) = 1.5^2 = 2.25$ milioni di euro. Perciò questa opzione fornisce un capitale finale maggiore della prima soluzione. Ora immaginiamo che la banca dia un interesse mensile di $\frac{100}{12}\%$. Allora si ha che

- dopo il primo mese il capitale è: $1 \times (1 + 1/12) = 1 + 1/12$
- dopo il secondo mese il capitale è: $(1 + 1/12) \times (1 + 1/12) = (1 + 1/12)^2$
- dopo il terzo mese il capitale è: $(1 + 1/12)^2 \times (1 + 1/12) = (1 + 1/12)^3$

  ....

- dopo il dodicesimo mese il capitale è: $(1 + 1/12)^{12}$

Quindi alla fine dell'anno il capitale è $(1 + 1/12)^{12} \simeq 2.61$ milioni di euro, che risulta essere maggiore del capitale ottenuto con interesse semestrale. Continuando in questo modo supponiamo che la banca dia un interesse settimanale. Le settimane in un anno sono 52. Allora alla fine dell'anno il capitale è $(1 + 1/52)^{52} \simeq 2.69$. Se supponiamo che l'interesse sia giornaliero, allora il capitale finale dopo un anno è $(1 + 1/365)^{365} \simeq 2.71$.

Bernoulli, allora si pose il problema di capire cosa succede se l'interesse viene calcolato ad ogni istante in modo continuo. Si tratta quindi di considerare il comportamento della successione

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

per n che cresce indefinitamente. Bernoulli provò, mediante lo sviluppo del binomio di Newton, che la successione è crescente e limitata e che l'estremo superiore è compreso tra 2 e 3. Di seguito forniamo la dimostrazione dettagliata. Bernoulli non calcolo precisamente questo numero. Successivamente fu Eulero a fornire altre formule per questo numero e a calcolarlo con una precisione di 18 cifre decimali. Fu anche Eulero a scegliere la lettera e per denotare questo numero.

Proposizione 2.3 (Numero di Nepero)**.** *La successione*

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

è strettamente crescente e limitata. Inoltre risulta

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$.

- $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \,]2,3]$.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Dalla formula del binomio segue che

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Scrivendo la relazione di sopra per $n+1$ e osservando che, per ogni intero k, con $2 \leq k \leq n$ risulta

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

si deduce che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

La relazione di sopra è poi chiaramente vera per $n = 1$. Questo prova la prima parte dell'enunciato. Osserviamo ora che per ogni intero $n \geq 2$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1$$

e quindi dalla (1), si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Poi, nel caso $n = 1$, si ha chiaramente $(1+1/n)^n = 2 = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$. Si ha poi che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)\cdots 2} \\
&< 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\underbrace{22\cdots 2}_{k-1 \text{ volte}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k}} \\
&= 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \\
&= 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3.
\end{aligned}
$$

Infine dalla (1) è chiaro che, per $n \geq 2$, $(1+1/n)^n > 2$ e quindi $\sup_{n\in\mathbb{N}^*}(1+1/n)^n > 2$. $\square$

Definizione 2.4. Si pone

$$
e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n
$$

e si chiama *numero di Nepero* (nella paesi anglosassoni è conosciuto come il *numero di Eulero*). Dimostreremo più avanti che e è irrazionale e le prime cifre decimali sono

$$
e = 2.7182818284...
$$

Proposizione 2.5. *Si ha*

$$
e = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.
$$

Dimostrazione. Dalla (1) segue che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}
$$

Proviamo ora che

$$
\forall\, m \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \leq e. \tag{2}
$$

In tal modo la tesi seguirà dal teorema dei carabinieri. Fissiamo $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$ e sia $n \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Allora sempre dalla (1) si ottiene

$$
\begin{aligned}
e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Quindi se si chiama con $(b_n^{(m)})$ il termine a destra nell'equazione (3), risulta che

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, n > m\colon\;\; b_n^{(m)} \leq e.$$

Ma evidentemente

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} b_n^{(m)} &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\cdots \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right]\\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Quindi per il teorema di prolungamento delle disuguaglianze risulta

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq e.$$

Questa disuguaglianza è stata provata per ogni $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$. ma è chiaramente vera anche per $m = 0$ e $m = 1$. $\square$