Lezione 26

Saverio Salzo*

10 novembre 2022

1 Esercizi svolti sulle serie

1. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n - n} =: a_n. \tag{1}$$
Si noti che per la disuguaglianza di Bernoulli $3^n = (1+2)^n \geq 1+n2 \geq n$, perciò $a_n \geq 0$ (la serie è a termini positivi). Verifichiamo la condizione necessaria
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n}\frac{1}{1-n/3^n} = 0 \cdot 1 = 0.$$
Inoltre si ha
$$a_n = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{1}{1-n/3^n} \sim \frac{1}{3^n}.$$
Quindi, per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum a_n$ ha la stesso carattere della serie $\sum (1/3)^n$ che è una serie geometrica di ragione < 1 e perciò convergente. In definitiva la serie (1) è convergente.

2. Consideriamo la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 3n}{5^n - 5n} =: a_n. \tag{2}$$
Si noti che se $x \in \mathbb{R}$ con $x \geq 2$, allora
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\colon\ x^n \geq nx.$$
Questo si può provare per induzione. E' chiaramente vero per $n = 1$. Supponiamo che sia vero per $n \in \mathbb{N}^*$ e proviamolo per $n + 1$. Si ha
$$x^{n+1} = x^n x \geq nxx \geq nx2 = nx + nx \geq nx + x = (n + 1)x.$$

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

Perciò i termini della serie sono positivi. Poi si ha

$$a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \frac{1 - 3n/3^n}{1 - 5n/5^n} \quad \text{e perciò} \quad a_n \sim \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Quindi la serie $\sum a_n$ ha lo stesso carattere della serie geometrica $\sum(3/5)^n$ che è convergente perché di ragione < 1. In definitiva allora la serie (2) è convergente.

3. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n} =: a_n. \tag{3}$$

Evidentemente

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \frac{1}{n^2}.$$

Adesso, ricordando il limite notevole $\lim_{x \to 0}(e^x - 1)/x = 1$, si ha

$$\frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \to 1 \text{ per } n \to +\infty,$$

e quindi

$$a_n \sim \frac{1}{n^2}$$

e la serie (3) è convergente.

4. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =: a_n. \tag{4}$$

La serie è a termini positivi e il termine generale si può scrivere come

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Perciò, ricordando il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$$

si riconosce che

$$a_n \sim \frac{1}{n+1}.$$

Quindi la serie (4) ha lo stesso carattere della serie armonica e quindi è divergente.

5. Studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(b+\frac{1}{n+3}\right)^n\frac{n+1}{n^2+1}=: a_n \qquad \text{al variare di } b>0.$$

Di nuovo cerchiamo di riscrivere a_n in modo da mettere in chiaro il comportamento asintotico. Si ha

$$a_n=b^n\left(1+\frac{1}{b(n+3)}\right)^n\frac{1}{n}\cdot\frac{1+1/n}{1+1/n^2}=\frac{b^n}{n}\left[\left(1+\frac{1}{b(n+3)}\right)^{b(n+3)}\right]^{\frac{n}{b(n+3)}}\cdot\frac{1+1/n}{1+1/n^2}$$

Ricordando il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

si riconosce che

$$\left[\left(1+\frac{1}{b(n+3)}\right)^{b(n+3)}\right]^{\frac{n}{b(n+3)}}\to e^{1/b}>0.$$

Perciò

$$a_n\asymp\frac{b^n}{n}.$$

Allora se $b=1$, la serie $\sum a_n$ è divergente. Supponiamo $b\neq 1$. Studiamo la serie $\sum b^n/n$ con il criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{b^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{b^n}=b\frac{n}{n+1}\to b.$$

Perciò $\sum b^n/n$ è convergente se $b<1$ e divergente se $b>1$.

6. Studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^n}{e^{n!}}=: a_n.$$

Usiamo il criterio della radice in modo da eliminare la potenza al numeratore. Si ha

$$\sqrt[n]{a_n}=\frac{n!}{(e^{n!})^{\frac{1}{n}}}=n\frac{(n-1)!}{e^{(n-1)!}}.$$

Ricordiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0.$$

Perciò, dato che per n abbastanza grande (basta $n\geq 4$)

$$n\leq(n-1)!,$$

allora si ha

$$\sqrt[n]{a_n}=n\frac{(n-1)!}{e^{(n-1)!}}\leq\frac{[(n-1)!]^2}{e^{(n-1)!}}\to 0.$$

Perciò la serie è convergente.

7. Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\log(1+x^2)\big)^n}{n^\alpha} =: a_n \qquad \text{al variare di } x \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha > 0.$$

Applichiamo il criterio della radice. Si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \frac{\log(1+x^2)}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} \to \log(1+x^2).$$

Perciò la serie è convergente se $\log(1+x^2) < 1$ che significa $1+x^2 < e \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e-1}$ e la serie è divergente se $|x| > \sqrt{e-1}$. Si noti che queste conclusioni sono valide per ogni $\alpha > 0$. Nel caso $|x| = \sqrt{e-1}$, allora $\log(1+x^2) = 1$ e quindi la serie diventa la serie armonica generalizzata con esponente α che è quindi convergente se e solo se $\alpha < 1$.

8. Proviamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(e^{3n}+5)}{n^{5/2}+n\log n+2} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2+1}{n+2}\right) =: a_n.$$

è assolutamente convergente. La serie non è a termini positivi e nemmeno a termini a segno alterno. Verifichiamo che sia assolutamente convergente. Evidentemente, dato che $|\operatorname{sen} x| \leq 1$, si ha

$$|a_n| \leq \frac{\log(e^{3n}+5)}{n^{5/2}+n\log n+2} =: b_n.$$

Quindi la serie $\sum |a_n|$ è maggiorata dalla serie a termini positivi $\sum b_n$. Se la serie $\sum b_n$ è convergente, per confronto, potremo dedurre che la serie $\sum a_n$ è assolutamente convergente. Valutiamo allora l'ordine di infinitesimo della successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$b_n = \frac{\log\big(e^{3n}(1+5e^{-3n})\big)}{n^{5/2}+n\log n+2} = \frac{\log e^{3n} + \log(1+5e^{-3n})}{n^{5/2}+n\log n+2} = \frac{3n + \log(1+5e^{-3n})}{n^{5/2}+n\log n+2}$$

$$= \frac{n}{n^{5/2}} \cdot \frac{3 + \dfrac{\log(1+5e^{-3n})}{n}}{1 + \dfrac{n\log n}{n^{5/2}} + \dfrac{2}{n^{5/2}}} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{3 + \dfrac{\log(1+5e^{-3n})}{n}}{1 + \dfrac{\log n}{n^{3/2}} + \dfrac{2}{n^{5/2}}}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+5e^{-3n})}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^{3/2}} = 0, \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^{5/2}} = 0,$$

allora

$$b_n \asymp \frac{1}{n^{3/2}}$$

e quindi $\sum b_n$ è convergente.

9. Studiare la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n!(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} =: a_n.$$
Notiamo prima che, razionalizzando il denominatore, risulta
$$a_n = \frac{e^n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n!}$$
Applichiamo ora il criterio del rapporto.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(n+1)!}\frac{n!}{e^n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{e}{n+1}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
Dato che
$$\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{1+1/n}+1} \to 1,$$
allora si riconosce che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$
e quindi la serie converge.

2 La derivata

Il concetto di derivata trae la sua origine nel problema del calcolo delle tangenti a curve piane arbitrarie e nei problemi di massimo e di minimo di una funzione. Entrambi i problemi furono affrontati da Fermat (1638). Egli fu il primo a risolvere problemi di massimo-minimo analizzando in qualche modo il comportamento locale di una funzione vicino i punti di massimo-minimo. Per spiegare il suo metodo egli prende in considerazione il problema di calcolare il rettangolo di area massima con perimetro assegnato. Peraltro questo è un esempio di problema isoperimetrico che è tuttora un'area di ricerca molto feconda nell'analisi matematica. Descriviamo il problema e la soluzione di Fermat. Sia $p > 0$ il semiperimetro del rettangolo, che è fissato a priori. Se $x < p$ è la lunghezza di un lato, allora l'area corrispondente è evidentemente $A = x(p-x)$. Si tratta quindi di massimizzare la funzione $f(x) = px - x^2$. Fermat procedeva nel modo seguente. Considerava un incremento h della variabile x e, in corrispondenza, il valore della funzione $f(x+h) = p(x+h) - (x+h)^2 = px - x^2 + ph - 2xh - h^2$. Poi essenzialmente assumeva che se $f(x)$ è un massimo, allora il valore di f cambia molto lentamente vicino a x, quindi se h è molto piccolo allora $f(x)$ e $f(x+h)$ sono approssimativamente uguali. Quindi procedeva come segue
$$px - x^2 + ph - 2xh - h^2 \sim px - x^2 \;\Leftrightarrow\; ph \sim 2xh + h^2 \;\Leftrightarrow\; p \sim 2x + h \;\Leftrightarrow\; p \sim 2x.$$
In questo modo egli ottiene la soluzione $x = p/2$ che dimostra che il rettangolo di area massima è un quadrato.

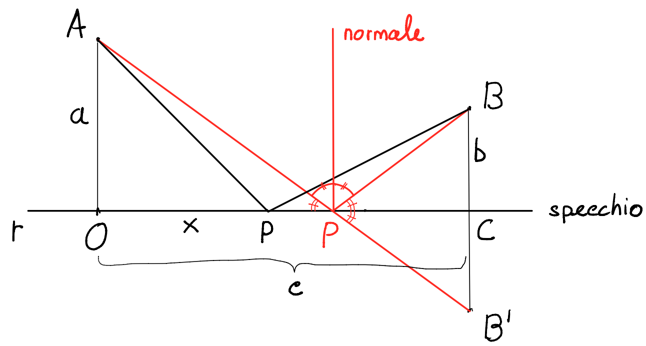

Figura 1: Derivazione della legge di riflessione della luce dal principio di Fermat.

Nelle scienze molti problemi si esprimono come problemi di massimo e di minimo. Un esempio è il famoso *principio di Fermat* di minor tempo secondo cui *tra tutti i cammini che un raggio di luce percorre per andare da un punto ad un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.* Da questo semplice principio si possono derivare la legge della riflessione della luce e la legge di Snell di rifrazione della luce. Li descriviamo di seguito.

Legge di riflessione (Erone di Alessandria, I sec. d.C.). Supponiamo di avere una situazione come in Figura 1 e che la luce debba andare dal punto A al punto B passando (toccando) lo specchio in un punto P. Si vuole determinare il cammino che rende minimo il tempo di percorrenza.[1]. Dato che la velocità della luce lungo qualunque possibile percorso è costante, il principio di Fermat si traduce in questo caso nel calcolo del percorso di minima lunghezza. E' quindi chiaro che per andare dal punto A a un punto dello specchio la luce seguirà un percorso rettilineo (perché il percorso di minima lunghezza tra due punti è un segmento di retta). Allo stesso modo sarà rettilineo il percorso tra il punto dello specchio e il punto B. Perciò il percorso totale sarà formato da due segmenti che in figura abbiamo indicato con AP e PB. Si tratta quindi di determinare il punto P sullo specchio in modo che la lunghezza $\overline{AP}+\overline{PB}$ sia minima. Si vede che questo problema ha una soluzione immediata non appena si traccia il punto B' simmetrico di B rispetto allo specchio e si riconosce che il problema è equivalente a quello di trovare il percorso minimo per andare da A a B'. La soluzione è il segmento AB'. Questo determina un punto P che risolve anche il problema originario. Si nota poi che tale punto P rende uguali gli angoli del raggio incidente e del raggio riflesso rispetto alla normale allo specchio. Questa è la leggi di riflessione della luce. Si può risolvere questo problema anche analiticamente introducendo una variabile x che misura la distanza (orientata) dal punto O piede del punto A sulla retta r. L'espressione analitica della distanza è allora

$$\ell(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

[1]Se la retta r fosse la riva di un fiume, e qualcuno dovesse andare da A a B nel minor tempo possibile, attingendo lungo il cammino un secchio d'acqua, si dovrebbe risolvere esattamente lo stesso problema.

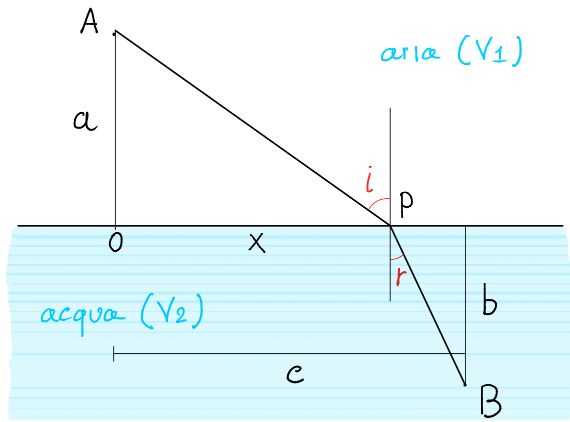

Figura 2: Derivazione della legge di rifrazione della luce di Snell dal principio di Fermat.

Anticipiamo il calcolo della derivata e la regola di Fermat per determinare il minimo di ℓ

$$0 = \ell'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+b^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(x-c)^2+b^2}}.$$

Evidentemente x e $c-x$ devono avere lo stesso segno e questo comporta che $x \in [0, c]$ (questo si può giustificare anche geometricamente) e allora si può elevare al quadrato la relazione precedente e ottenere

$$\frac{x^2}{x^2+a^2} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2+b^2} \Leftrightarrow x^2[(c-x)^2+b^2] = (c-x)^2(x^2+a^2) \Leftrightarrow \frac{b}{c-x} = \frac{a}{x},$$

che dimostra la similitudine tra i triangoli AOP e BCP e quindi l'uguaglianza degli angoli in P corrispondenti.

Legge di rifrazione (di Snell, 1621). Supponiamo di avere un raggio di luce che parte da un punto A in un certo mezzo materiale, per esempio aria, e arriva in un punto B che è posto in un'altro mezzo, supponiamo acqua, come nella Figura 2. Supponiamo che le velocità della luce nel primo e secondo mezzo siano rispettivamente v_1 e v_2, con $v_1 > v_2$. Indichiamo con P un punto generico sull'interfaccia tra i due mezzi materiali, avente coordinate $(x, 0)$. Allora, come prima, risulta

$$\overline{AP} = \sqrt{x^2+a^2} \quad \text{e} \quad \overline{PB} = \sqrt{(c-x)^2+b^2}. \tag{5}$$

Adesso però, in accordo al principio di Fermat di minor tempo, il raggio di luce percorrerà il cammino $\overline{AP} \cup \overline{PB}$ in modo da minimizzare il tempo di percorrenza. Indichiamo quindi con t_1 e t_2 i tempi di percorrenza del raggio di luce rispettivamente lungo il segmento $\overline{AP}$ e il segmento $\overline{PB}$. Si tratta quindi di trovare il punto P ottimale lungo la retta di separazione tra i due mezzi, cioè che minimizza il tempo totale di percorrenza $t_1 + t_2$. Evidentemente si ha

$$t_1 = \frac{\overline{AP}}{v_1} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{\overline{PB}}{v_2}$$

e quindi, tenendo conto di (5), il tempo totale si esprime come

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Di nuovo, utilizziamo la regola di Fermat (che vedremo più avanti) per il calcolo dei punti di massimo e minimo, calcolando la derivata di $T(x)$ e imponendo che sia zero

$$0 = T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x-c}{v_2\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

Da questa equazione si ricava che

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}. \tag{6}$$

Adesso notiamo che, se si indicano con i e r gli angoli che il raggio incidente e il raggio rifratto formano con la normale alla retta di separazione tra i mezzi (si veda ancora la Figura 2), si ha

$$\operatorname{sen} i = \frac{x}{\overline{AP}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} r = \frac{x}{\overline{PB}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

Perciò l'equazione (6) si può riscrivere come

$$\frac{\operatorname{sen} i}{v_1} = \frac{\operatorname{sen} r}{v_2} \iff \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{7}$$

Questa equazione si chiama *legge di rifrazione di Snell* e regola il comportamento dei raggi luminosi attraversano mezzi con indice di rifrazione diverso (in cui la velocità della luce cambia). Notiamo ora che $\operatorname{sen} i$ e $\operatorname{sen} r$ si possono riscrivere come di seguito

$$\operatorname{sen} i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{a}{x}\right)^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{b}{c-x}\right)^2}}$$

e quindi

$$f(x) := \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2/x^2}} \cdot \sqrt{1 + b^2/(c-x)^2},$$

che si riconosce essere il prodotto di due funzioni positive e strettamente crescenti[2] e perciò è strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} f(x) = +\infty.$$

Allora la legge di Snell (7) si scrive come l'equazione

$$f(x) = \frac{v_1}{v_2}$$

e possiamo affermare che questa equazione ha un'unica soluzione x nell'intervallo $]0, c[$. In Figura 3 si mostra il grafico della funzione f nell'intervallo $[0, c]$ con $a = b = c = 20$.

[2] Chiaramente $x \mapsto \sqrt{1 + (a/x)^2}$ è strettamente decrescente e quindi $x \mapsto 1/\sqrt{1 + (a/x)^2}$ è strettamente crescente. Poi essendo $x \mapsto c - x$ decrescente, risulta $x \mapsto \sqrt{1 + b^2/(c-x)^2}$ strettamente crescente.

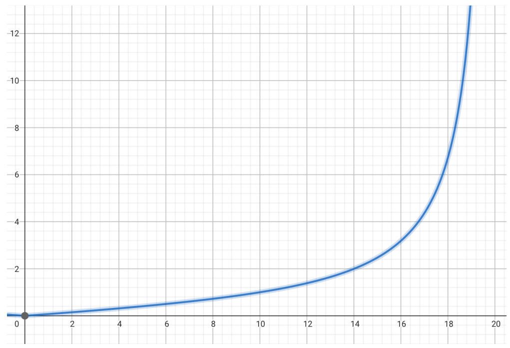

Figura 3: Grafico della funzione $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r}$ in funzione di x con $a = b = c = 20$.

3 Definizione di derivata

Nel seguito se $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ poniamo

$$A_{x_0} = A \backslash \{x_0\}.$$

Definizione 3.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in A$ punto di accumulazione di A. La funzione

$$A_{x_0} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si chiama *rapporto incrementale di f relativo al punto x_0*.
La funzione f si dice *derivabile in x_0* se esiste $l \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l. \tag{8}$$

Il tal caso il limite l si chiama *derivata di f in x_0* e si indica con uno di questi simboli

$$f'(x_0) \text{ (Lagrange)}, \quad Df(x_0) \text{ (Eulero)}, \quad \frac{df}{dx}(x_0) \text{ (Leibniz)}, \quad \dot{f}(x_0) \text{ (Newton)}. \tag{9}$$

Se $A' = \big\{x \in A \,|\, x$ punto di accumulazione per A e f è derivabile in $x\big\}$ (supposto non vuoto), allora la funzione

$$x \in A' \to f'(x)$$

si chiama *derivata di f* e si indica con uno dei simboli

$$f', \quad Df, \quad \frac{df}{dx}, \quad \dot{f}.$$

Osservazione 3.2.

(i) Il limite (8) nella definizione di derivata si può scrivere equivalentemente come segue

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l, \tag{10}$$

dove h denota l'incremento $x - x_0$ (positivo o negativo). In effetti si tratta semplicemente di un cambio di variabili nel limite (teorema sui limiti delle funzioni composte). Nel seguito useremo indifferentemente la forma (8) o (10).

(ii) Se f non è derivabile in x_0, ma esiste il limite (8), tale limite si chiama ancora *derivata di f in x_0* e, con un po' di abuso di notazione, si denota con uno dei simboli (9). Pertanto, si dice che f *è dotata di derivata nel punto x_0* se esiste (finito o no) il limite (8).