Lezione 41

Saverio Salzo*

13 dicembre 2022

Nella lezione precedente abbiamo visto che le funzioni monotone su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili. Notiamo che le funzioni monotone possono essere discontinue anche in un numero infinito di punti. Per esempio la funzione

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} & \text{se } x \in \left]0,1\right] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ha infiniti punti di discontinuità (di prima specie), ma, essendo monotona crescente, è integrabile su $[0,1]$. Si veda Figura 1, a sinistra.

In questa lezione presentiamo un'altra classe di funzioni integrabili: le funzioni continue (o con un numero finito di punti di discontinuità) su un intervallo compatto.

1 Classi di funzioni integrabili (parte II)

Dimostreremo che le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili secondo Riemann. Per questo abbiamo bisogno di introdurre una nuova nozione di continuità che si chiama uniforme continuità.

Abbiamo visto nella Lezione 14 che la funzione $x \mapsto x^2$ è continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, cioè che

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

In particolare si è trovato un δ corrispondente a ε della forma

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\right\}.$$

Notiamo come in questo caso il numero δ dipende da ε ma anche dal punto x_0 e in particolare tende a zero per $|x_0| \to +\infty$ (si veda anche Figura 1, a destra)[1]. Questo è quello che succede in generale per le funzioni continue. Ci sono però funzioni $f\colon A \to \mathbb{R}$ per cui è possibile

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

[1]Non è difficile vedere che per $x_0 > 0$ e $\varepsilon < x_0^2$ l'intorno di x_0 di ampiezza massima che verifica $|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ è quello corrispondente a $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$.

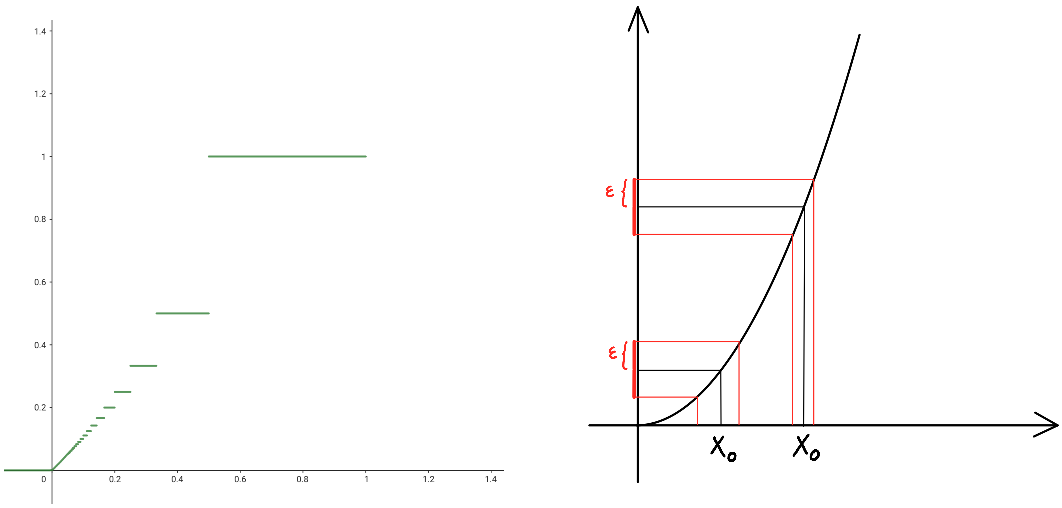

Figura 1: A sinistra: la funzione $f(x) = 1/\lfloor 1/x \rfloor$ (a sinistra). A destra: illustrazione della dipendenza di δ da x_0 per la funzione x^2.

scegliere δ in modo che non dipenda da x_0, ma soltanto da ε. In tal caso vale la seguente proprietà

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ tale che } \forall\, x_0 \in A\, \forall\, x \in A\ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ciò conduce alla seguente definizione.

Definizione 1.1. La funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua in* A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x, y \in A\colon \quad |x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Osservazione 1.2. Abbiamo già notato che per la funzione $x \mapsto x^2$ l'ampiezza δ dell'intorno di x_0 corrispondente a un intorno $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ di $f(x_0)$ dipende da x_0 oltre che da ε. Qui dimostriamo formalmente che in effetti la funzione $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $\mathbb{R}_+$. Da questo segue che ci sono funzioni continue che non sono uniformemente continue (e che quindi le due nozioni sono sono equivalenti). Infatti, supponiamo per assurdo che f sia uniformemente continua su $\mathbb{R}_+$. Allora in corrispondenza di $\varepsilon = 1$ esisterebbe $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ \text{ con } |x - y| < \delta\colon\ |x^2 - y^2| < 1.$$

Perciò per ogni $x \in \mathbb{R}_+$ se si prende $y = x + \delta/2$, deve risultare

$$|x^2 - (x + \delta/2)^2| < 1.$$

Ma

$$|x^2 - (x + \delta/2)^2| = |x^2 - x^2 - \delta^4/4 - \delta x| = \delta^2/4 + \delta x \geq \delta x.$$

Perciò si avrebbe che per ogni $x \in \mathbb{R}_+$, $\delta x < 1$, cioè $x < 1/\delta$, che è assurdo.

Osservazione 1.3. L'esempio considerato nell'osservazione precedente mette in risalto anche che il prodotto di due funzioni uniformemente continue non è in generale una funzione uniformemente continua (infatti la funzione $x \mapsto x^2$ si ottiene come prodotto delle funzioni $x \mapsto x$ per $x \mapsto x$ che sono uniformemente continue).

Esempio 1.4.

(i) Una funzione Lipschitziana è uniformemente continua. Infatti sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ Lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$. Sia $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\delta = \varepsilon/L$. Allora risulta

$$\forall\, x, y \in A\colon \quad |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \le L|x-y| < L\delta = \varepsilon.$$

Quindi f verifica la definizione di uniforme continuità.

(ii) La funzione $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$ è uniformemente continua, ma non e Lipschitziana. Infatti siano $x, y \in \mathbb{R}_+$. Allora, essendo $\sqrt{\cdot}$ crescente, risulta

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{\max\{x, y\}}. \tag{1}$$

Inoltre, razionalizzando, vale anche

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \le \frac{|x-y|}{\sqrt{\max\{x, y\}}}. \tag{2}$$

Adesso, utilizzando rispettivamente la (1) e (2), si ha

$$\begin{cases} \max\{x, y\} \le |x-y| \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|} \\ \max\{x, y\} \ge |x-y| \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \frac{|x-y|}{\sqrt{|x-y|}} = \sqrt{|x-y|}. \end{cases}$$

Perciò si è provato che

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+\colon \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}. \tag{3}$$

Allora dalla (3), se si impone the $\sqrt{|x-y|} < \varepsilon$ si ottiene $|x-y| < \varepsilon^2$ e quindi per ogni $\varepsilon > 0$, basta prendere $\delta = \varepsilon^2$ per soddisfare la relazione

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}_+\colon\; |x-y| < \delta \;\Rightarrow\; |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon.$$

Quindi $\sqrt{\cdot}$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}_+$, come si voleva dimostrare.[2] Infine proviamo che f non è Lipschitziana in $\mathbb{R}_+$. Infatti se lo fosse, si avrebbe

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+\colon \quad \sqrt{x} = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \le L|x - 0| = Lx,$$

per qualche $L > 0$, e quindi

$$\forall\, x \in \,]0, +\infty[\,\colon \quad 1 \le L\sqrt{x},$$

cioè $0 < 1/L^2 \le x$, per ogni $x \in \mathbb{R}_+$, che è assurdo.

[2] La (3) dice che la radice è una funzione *Hölderiana con esponente* $1/2$ *su* $\mathbb{R}_+$.

Teorema 1.5 (di Heine-Cantor sulla uniforme continuità). *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$. Allora*

$$A \text{ compatto e } f\colon A \to \mathbb{R} \text{ continua} \ \Rightarrow\ f \text{ è uniformemente continua.}$$

Dimostrazione. Sia A compatto e $f\colon A \to \mathbb{R}$ continua e supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Questo significa che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x, y \in A \text{ t.c. } |x-y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Allora, prendendo $\delta = 1/(n+1)$ con $n \in \mathbb{N}$, si ottengono due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di A tali che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{4}$$

Dato che A è compatto, esiste una successione estratta $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente ad un punto $\bar{x} \in A$. Inoltre, dalla prima delle (4) segue che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\colon \quad x_{n_k} - \frac{1}{n_k+1} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k+1}$$

e per il teorema dei carabinieri si ha $y_{n_k} \to \bar{x}$ per $k \to +\infty$. Allora, usando la continuità di f, si ottiene che

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0.$$

Questo risultato contrasta con la seconda di (4) e quindi si otterrebbe una contraddizione. Perciò f deve essere uniformemente continua. $\square$

Definizione 1.6. Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione reale limitata e $B \subset A$. Chiamiamo *oscillazione di f in B* la quantità

$$\omega_f(B) = \sup_B f - \inf_B f$$

(notiamo che, essendo f limitata, $\sup_B f, \inf_B f \in \mathbb{R}$ e quindi $\omega_f(B) \in \mathbb{R}$).

Proposizione 1.7. *Sia $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione reale limitata. Allora valgono le seguenti proprietà*

(i) *se $B_1 \subset B_2 \subset A$, allora $\omega_f(B_1) \leq \omega_f(B_2)$.*

(ii) *se $B \subset A$, allora $\omega_f(B) = \sup_{x,y\in B} |f(x) - f(y)|$.*

Dimostrazione. Il primo punto è immediato, perché $\inf_{B_2} f \leq \inf_{B_1} f \leq \sup_{B_1} \leq \sup_{B_2} f$. Proviamo il secondo punto. Dato che per ogni $x, y \in B$, $\inf_B f \leq f(x), f(y) \leq \sup_B f$, allora

$$\forall\, x, y \in B\colon \ |f(x) - f(y)| \leq \sup_B f - \inf_B f = \omega_f(B).$$

Quindi $\omega_f(B)$ è un maggiorante dell'insieme numerico $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in B\}$, e quindi vale la prima proprietà dell'estremo superiore. Per quanto riguarda la seconda proprietà dell'estremo superiore, si tratta di dimostrare che

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x, y \in B \text{ tale che } |f(x) - f(y)| > \sup_B f - \inf_B f - \varepsilon.$$

Sia quindi $\varepsilon > 0$. Allora esistono $x, y \in B$ tali che (si veda Figura 2 a destra)

$$f(x) > \sup_B f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad f(y) < \inf_B f + \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi $|f(x) - f(y)| \geq f(x) - f(y) > \sup_B f - \inf_B f - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \sup_B f - \inf_B f - \varepsilon$. $\square$

Osservazione 1.8.

(i) Se $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ e $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ è una suddivisione di $[a, b]$, allora ricordando che $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ e

$$m_k = \inf_{I_k} f \quad \text{e} \quad M_k = \inf_{I_k} f,$$

si ha

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^{m} |I_k| \cdot (M_k - m_k) = \sum_{k=1}^{m} |I_k| \cdot \omega_f(I_k). \tag{5}$$

Perciò il criterio di integrabilità (ii) del Teorema 1.5 visto nella Lezione 40 si può riformulare in termini di oscillazioni sui sottointervalli della suddivisione come segue

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{D}([a, b]) \text{ tale che } \sum_{k=1}^{m} |I_k| \cdot \omega_f(I_k) < \varepsilon. \tag{6}$$

(ii) Supponiamo che $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sia uniformemente continua. Allora se $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, x, y \in [a, b]\colon |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Perciò se si prende un sottointervallo $I \subset [a, b]$ tale che $|I| < \delta$, risulta che

$$\forall\, x, y \in I\colon\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

e quindi $\omega_f(I) \leq \varepsilon$. In definitiva l'uniforme continuità di f in $[a, b]$ si può riformulare nel modo seguente

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ tale che, per ogni sottointervallo } I \subset [a, b]\colon\ |I| < \delta \;\Rightarrow\; \omega_f(I) \leq \varepsilon,$$

e in parole dicendo che l'oscillazione della funzione su un qualunque sottointervallo di $[a, b]$ si può rendere piccola a piacere a patto di prendere l'ampiezza dell'intervallo abbastanza piccola.

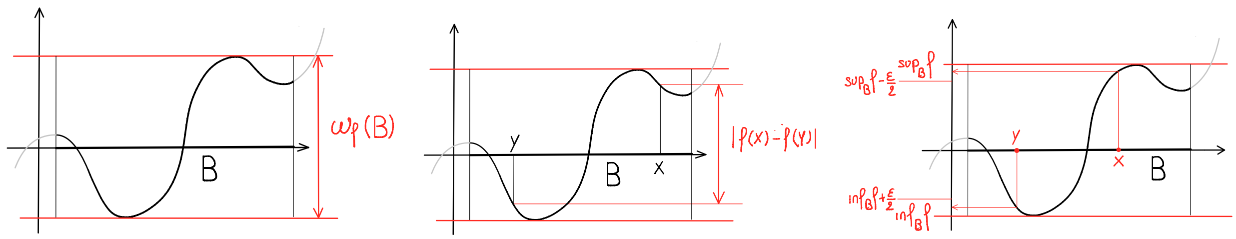

Figura 2: Oscillazione di f in B.

Teorema 1.9. *Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Proveremo che f è limitata e che vale il criterio (6). Per prima cosa osserviamo che f è limitata per il teorema di Weierstrass (una funzione definita in un compatto ammette massimo e minimo e quindi è limitata). Inoltre è uniformemente continua per il teorema di Heine-Cantor e perciò, come abbiamo notato nell'Osservazione 1.8(ii), l'oscillazione della funzione sui sottintervalli di $[a, b]$ si può rendere piccola a piacere a patto di prendere la loro ampiezza abbastanza piccola. Perciò, fissato $\varepsilon > 0$, in corrispondenza di $\varepsilon/(b - a + 1) > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\text{per ogni sottointervallo compatto } I \subset [a, b]\colon \ |I| < \delta \ \Rightarrow \ \omega_f(I) \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 1}.$$

Poi scegliamo una suddivisione $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ di $[a, b]$ in modo che

$$\max_{1 \leq k \leq n} |I_k| < \delta, \quad \text{dove } I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

(si può per esempio prendere una suddivisione equispaziata con $x_k = a + kh$, $h = (b - a)/n$ e $n \in \mathbb{N}^*$ grande abbastanza in modo che $h < \delta$). Allora, per la suddivisione P, risulta

$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| \omega_f(I_k) \leq \frac{\varepsilon}{b - a + 1} \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \frac{\varepsilon}{b - a + 1}(b - a) < \varepsilon.$$

In definitiva si è provato il criterio (6) e perciò la funzione f è integrabile su $[a, b]$. $\square$

Esempio 1.10. Tutte le funzioni elementari sono continue e perciò esse sono integrabili secondo Riemann su intervalli compatti.

In effetti, l'integrabilità si mantiene anche in presenza di punti di discontinuità, a patto che questi punti siano in numero finito. Si ha infatti il seguente risultato che dimostriamo nei complementi.

Teorema 1.11. *Una funzione limitata su $[a, b]$ e con un numero finito di punti di discontinuità in $[a, b]$ è integrabile secondo Riemann su $[a, b]$.*

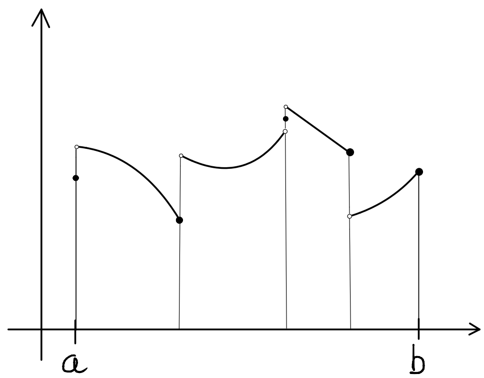

Figura 3: Esempio di funzione continua a tratti: ci sono un numero finito di punti di discontinuità che sono eliminabili o di prima specie.

Esempio 1.12.

(i) Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è limitata su $[0,1]$ ed è continua su $]0,1]$ e presenta una discontinuità di seconda specie in 0. Perciò per il Teorema 1.11, f è integrabile su $[0,1]$.

(ii) Un caso particolare di funzioni discontinue ammesse dal Teorema 1.11 sono quelle cosiddette *continue a tratti* in un intervallo compatto $[a,b]$. Sono funzioni che hanno un numero finito di punti di discontinuità di tipo eliminabile o di prima specie. Un esempio è rappresentato in Figura 3.