Soluzioni Esercizi
Fondamenti di Matematica - I Canale

Prof. Salzo Saverio
Tutor: Halitchi Andrei, Christian Piermarini

8 ottobre 2022

Indice

1 Soluzioni Esercizi pdf n.1

1.a)

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$A \cap\ B = \{a, b, c, d\},\ A \setminus B = \{d, e\},\ B \setminus A = \{g, h\}$$

1.b)

$$A \cup B = \mathbb{R},\ A \cap B =]-\infty, -1] \cup \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

$$A \setminus B = [-1, 1]\,, B \setminus A = \left]\frac{3}{2}, \infty\right[$$

1.c)

$$\bigcap_{x \in F} = \{2\},\ \bigcup_{x \in F} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$$

1.d)

$$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

2.a)

$$f(A) = \{4, 12, 52\},\ f^{-1}(B) = \{0, 1, 2, 3\}$$

2.b) La funzione è ingettiva ma non surgettiva.

2.c.1)

$$f \circ g(x) = 2(x^3) - 7 = 2x^3 - 7,\ g \circ f(x) = (2x - 7)^3$$

2.c.2)

$$f \circ g(n) = |(n^2 + 1) - 3|,\ g \circ f(n) = (|n - 3|)^2 + 1 = (n - 3)^2 + 1$$

2.c.3)

$$f \circ g(x) = \pi,\ g \circ f(x) = \pi^2$$

2.d.1)

$$y = 3x - 5 \to x = f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{3}$$

2.d.2)

$$y = \frac{3}{x^3 - 2} \to x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{3+2y}{y}}$$

3.a.1)

$$Impossibile\ (\nexists x \in \mathbb{R})$$

3.a.2)

$$]-20, \infty[$$

3.a.3)

$$]-\infty, -4[\cup]0, 1[$$

3.a.4)

$$], -\infty, -2] \cup [2, \infty[$$

3.a.5) Bisogna imporre due sistemi, il primo

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1} & \geq 0 \\ x+2 & \geq 0 \\ \frac{x^2-4}{x+1} & > (x+2)^2 \end{cases}$$

unito al secondo

$$\begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1} & \geq 0 \\ x+2 & < 0 \end{cases}$$

Risolvendo il primo sistema vediamo che la prima disequazione ha soluzione per

$$-2 \leq x < -1 \cup x \geq 2$$

la seconda disequazione ha soluzione per

$$x \geq -2$$

e la terza

$$\frac{x^2-4}{x+1} - (x+2)^2 > 0 \iff \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} - (x+2)^2 > 0 \iff (x+2)\frac{-x^2-2x-4}{x+1} > 0$$

notiamo che l'equazione di secondo grado al numeratore non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, avendo il coefficiente a negativo capiamo che è rivolta verso il basso e

non avendo soluzioni che è sempre negativa. Lo studio del segno si riduce allo studio del segno delle altre due equazioni di primo grado ($(x+2)$ al numeratore e $(x+1)$ al denominatore).
Mettendo insieme queste soluzioni abbiamo che il primo sistema vale per $-2 < x < 1$.
Il secondo sistema se proviamo a risolverlo non ammette soluzione, la soluzione dell'esercizio è data dalla soluzione del primo sistema.

3.b.1) $\mathbb{R}$, è sempre positiva in $\mathbb{R}$

3.b.2) Sempre negativa in $\mathbb{R}$, quindi l'insieme di validità è l'insieme vuoto

3.b.3) $\mathbb{R}$, è sempre positiva in $\mathbb{R}$

4.a.1) Trovando le soluzioni in $\mathbb{R}$, facendo poi l'intersezione con $\mathbb{N}$ si trova $\{n \in \mathbb{N} | n \geq 2\}$, quindi inf=min=2 e sup $= +\infty$.

4.a.2) Stesso procedimento dell'esercizio precedente, stessa soluzione.

4.b.1) Per verificare che $sup(A) = 1$ bisogna che sussitano contemporaneamente:

- $$\frac{n^2-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

  questo è sempre vero perché stiamo sottraendo a 1 quantità sempre positive, in particolare quantità positive minori di uno, il risultato sarà sempre un numero compreso tra 0 e 1 (in particolare non è mai uguale a 1, questo rende 1 solo un sup).

- $$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \mid 1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon,$$

  cioè verificare che dato un epsilon arbitrario e positivo la disequazione ammette soluzione:

  $$1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon \iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

4.b.2) Per verificare che $inf(B) = 0$ bisogna che susstinato contemporaneamente:

- $$\frac{2}{(7n+1)^2} \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N},$$

  disequazione sempre vera, in particolare assume valori da 2 in su, quindi anche in questo caso 0 non è incluso, questo fa di lui, verificando il passo successivo, solo un estremo inferiore.

- $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \mid \frac{2}{(7n+1)^2} < \varepsilon,$$

  cioè verificare che dato un epsilon arbitrario e positivo la disequazione ammette soluzione:

$$\frac{2}{(7n+1)^2} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < (7n{+}1)^2 \iff 7n{+}1 > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \iff n > \frac{\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} - 1}{7}$$