4 Soluzioni esercizi pdf n.4

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+5}{n^4+3n^3-6n+2} := a_n \tag{23}$$

$$a_n = \frac{n^2}{n^4} \frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^3}+\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \frac{1+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^3}+\frac{2}{n^4}} \sim \frac{1}{n^2},\ per\ n \to +\infty$$

quindi la serie è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} := a_n \tag{24}$$

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \sim \frac{1}{n},\ per\ n \to +\infty$$

quindi la serie diverge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) := a_n \tag{25}$$

$$a_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n},\ per\ n \to +\infty$$

quindi la serie diverge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) := a_n \tag{26}$$

Seguendo un ragionamento analogo, $a_n \sim \frac{1}{n^\alpha}$, infatti:

$$a_n = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^\alpha}\ per\ n \to +\infty.$$

La serie quindi converge se e solo se $\alpha > 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log n} := a_n \tag{27}$$

Considerato che la serie soddisfa le ipotesi del crierio di condensazione di Cauchy sappiamo che la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$, cioè:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Questa serie ha lo stesso carattere della serie armonica (perché è moltiplicata per una costante maggiore di 0), quindi diverge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} := a_n \tag{28}$$

Utilizzando il criterio del rapporto abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

quindi la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha} := a_n \tag{29}$$

Per il criterio del confronto asintotico abbiamo:

$$a_n := \sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} \frac{1}{n^{3\alpha}} n^{\frac{3}{2}-2\alpha} \sim \frac{1}{n^{3\alpha}} n^{\frac{3}{2}-2\alpha} = \frac{1}{n^{5\alpha-\frac{3}{2}}} \ per\ n \to +\infty$$

La serie quindi converge se e solo se $5\alpha > \frac{3}{2} + 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^3 (7^{\alpha+2})^n} := a_n, \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{30}$$

Si vede subito che se $\alpha + 2 \leq 0$ il termine generale tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, quindi la serie diverge. Utlizzando il criterio della radice abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{7^{\alpha+2}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{4}{7^{\alpha+2}}$$

la serie quindi è convergente se $\frac{4}{7^{\alpha+2}} < 1$ e divergente se $\frac{4}{7^{\alpha+2}} > 1$. Cioè:

- Convergente se:

$$\frac{4}{7^{\alpha+2}} < 1 \iff 4 < 7^{\alpha+2} \iff \log_7 4 < \alpha + 2 \iff \alpha > \log_7 4 - 2$$

- Se invece $\frac{4}{7^{\alpha+2}} = 1$, direttamente da (30), $a_n = \frac{1}{n^3}$ e quindi la serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n^\alpha}-1\right)n^{1-\alpha} := a_n \tag{31}$$

In questo caso abbiamo:

$$a_n := -\frac{1-\cos\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}\frac{1}{n^{2\alpha}}n^{1-\alpha} = -\frac{1-\cos\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}\frac{1}{n^{3\alpha-1}} \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3\alpha-1}}\ \textit{per}\ n \to +\infty$$

La serie converge se e solo se $3\alpha - 1 > 1$, cioè $\alpha > \frac{2}{3}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}\right)n^\alpha := a_n \tag{32}$$

In questo caso:

$$a_n := n^2\frac{1}{n}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^{1-\alpha}}\left(1+\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) \sim \frac{2}{n^{1-\alpha}}\ \textit{per}\ n \to +\infty$$

E la serie avente come termine generale $\frac{2}{n^{1-\alpha}}$ converge se e solo se $1-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{b}{n}}{\sin\frac{1}{n^\alpha}} := a_n, \quad \alpha > 0,\ b \in \mathbb{R} \tag{33}$$

In quest'utimo caso, utilizzando sempre il criterio del confronto asintotico:

$$a_n := \frac{\frac{1-\cos\frac{b}{n}}{\frac{b^2}{n^2}}\frac{b^2}{n^2}}{\frac{\sin\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}\frac{1}{n^\alpha}} \sim \frac{1}{2}\frac{b^2}{n^2}n^\alpha = \frac{1}{2}\frac{b^2}{n^{2-\alpha}}\ \textit{per}\ n \to +\infty$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{b^2}{n^{2-\alpha}}$ è una serie a termini positivi, per qualunque $b \neq 0$. Per $b = 0$ è banalmente nulla. La serie converge se e solo se $2-\alpha > 1$, cioè $\alpha < 1$