Lezione 37

Saverio Salzo*

1 dicembre 2022

1 Approssimazioni polinomiali e Formula di Taylor

Proposizione 1.1. *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, con I intervallo non banale, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Allora esiste al più un polinomio p con* $\operatorname{grad} p \leq n$ *tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Dimostrazione. Siano p e q due polinomi di grado al più n tali che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - q(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Allora $p - q$ è un polinomio di grado al più n e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(p-q)_{|I}(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{p_{|I}(x) - q_{|I}(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x) - f(x)}{(x - x_0)^n} + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - q(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

e quindi, per una proposizione vista nella lezione 36, risulta $p - q = 0$. □

Ricordiamo che una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte in un punto $x_0 \in I$, se essa è derivabile $n-1$ nell'intervallo I e se la sua derivata $n-1$-esima $f^{(n-1)}\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0.

*DIAG, Sapienza Università di Roma (saverio.salzo@uniroma1.it).

Definizione 1.2. Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, I intervallo non banale, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0. Si chiama *polinomio di Taylor di ordine n della funzione f, centrato in x_0*, il polinomio (di grado al più n)

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

e si denota anche, più esplicitamente, con $P_n[f, x_0]$. La differenza tra la funzione f e il polinomio di Taylor P_n si indica con R_n e si chiama *resto di ordine n in x_0*, cioè

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Se $x_0 = 0$, P_n si chiama anche *polinomio di MacLaurin* di ordine n della funzione f.

Proposizione 1.3 (caratterizzazione del polinomio di Taylor)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, I intervallo non banale, $x_0 \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo che f sia derivabile n volte in x_0. Il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0 è l'unico polinomio P_n di grado $\leq n$ tale che*

$$\forall\, k = 0, 1, \ldots, n\colon\ P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0). \tag{1}$$

Dimostrazione. Sia

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^k$$

un generico polinomio di grado $\leq n$. Calcoliamo le derivate di $p(x)$. Si ha

$$\begin{aligned} p'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-x_0)^{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} k a_k (x-x_0)^{k-1} \\ p''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{n} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} \\ p'''(x) &= \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2) a_k (x-x_0)^{k-3} = 3!a_3 + \sum_{k=4}^{n} k(k-1)(k-2) a_k (x-x_0)^{k-3} \\ p^{(4)}(x) &= 4!a_4 + \sum_{k=5}^{n} k(k-1)(k-2)(k-3) a_k (x-x_0)^{k-4} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p^{(n-1)}(x) &= (n-1)!a_{n-1} + n!a_n(x-x_0) \\ p^{(n)}(x) &= n!a_n. \end{aligned}$$

Da cui segue che

$$\forall\, k = 0, 1, \ldots, n\colon\ \ p^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

E allora la condizione (1) è equivalente a

$$\forall\, k = 0, 1, \ldots, n\colon\ \ f^{(k)}(x_0) = k! a_k,$$

che è equivalente a $p = P_n[f, x_0]$. □

Teorema 1.4 (Formula di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia I intervallo non banale di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile $n-1$ volte ($n \geq 1$) in I e n volte in x_0. Allora esiste uno ed un solo polinomio p di grado al più n, tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{2}$$

e questo polinomio è il polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0, cioè

$$p(x) = P_n[f, x_0](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Dimostrazione. L'unicità è già stata dimostrata nella Proposizione 1.1. Dimostriamo che il polinomio P_n di Taylor di ordine n della funzione f, centrato in x_0, verifica la (2). Poniamo

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Evidentemente R_n è $n-1$ volte derivabile in I e n volte derivabile in x_0 e dalla Proposizione 1.3 risulta

$$\forall\, k = 0, 1 \ldots, n\colon\ \ R_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0$$

e quindi anche, dato che $f^{(k)}$ e $P_n^{(k)}$ sono continue in x_0,

$$\forall\, k = 0, 1 \ldots, n\colon\ \ \lim_{x \to x_0} R_n^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(x_0) = 0. \tag{3}$$

Consideriamo il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}. \tag{4}$$

Evidentemente per quanto già osservato, il limite è della forma $0/0$ e il denominatore ha derivata diversa da zero per $x \in I_{x_0}$. Si può quindi applicare la regola de l'Hôpital e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}},$$

dove l'uguaglianza è vera a patto che il limite a destra esista. Controlliamo il limite a destra allora. Di nuovo è della forma $0/0$ con la derivata del denominatore che è sempre diversa da zero per $x \in I_{x_0}$. Perciò un'altra applicazione della regola di de l'Hôpital da'

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R_n''(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}}.$$

Si procede in questo modo fino alla derivata di ordine $n-1$ e si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\overset{H}{=}\cdots\overset{H}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)},\tag{5}$$

dove i limiti sono tutti della forma $0/0$, perché vale (5) e la derivata del denominatore è sempre diversa da zero per $x\in I_{x_0}$. Bisogna quindi controllare che il limite a destra esiste. A tal fine basta notare che, essendo $R^{(n-1)}(x_0)=0$, l'ultimo limite è un rapporto incrementale e quindi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}=0,$$

perché la funzione $R^{(n-1)}$ è derivabile in x_0 e $R^{(n)}(x_0)=0$. Allora, procedendo a ritroso nelle uguaglianze (5) si trova che il limite (4) vale zero e il teorema è dimostrato. $\square$

Osservazione 1.5. L'enunciato del Teorema 1.4 afferma che se P_n è il polinomio di Taylor della funzione f di ordine n centrato in x_0, allora si ha

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0\quad\text{oppure}\quad\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0\tag{6}$$

che si può scrivere in maniera più espressiva come

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)\quad\text{oppure}\quad R_n(x)=o((x-x_0)^n)\tag{7}$$

e P_n è l'unico polinomio di grado al più n che verifica la (6) o equivalentemente la (7).

Esempio 1.6.

(i) Consideriamo la funzione

$$f(x)=\frac{1}{1-x},\quad\text{definita in }\mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Dalla formula della somma parziale della serie di potenze, sappiamo che

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

e quindi

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}.\tag{8}$$

Dato che il termine $x^{n+1}/(1-x)=o(x^n)$ per $x\to 0$, dal Teorema 1.4 risulta che

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k$$

è il polinomio di MacLaurin di $1/(1-x)$ di ordine n e quindi

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)\quad\text{per }x\to 0.}$$

(ii) Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Evidentemente e^x è derivabile infinite volte, cioè n volte per qualunque n, e $f^{(n)}(x) = e^x$ e quindi

$$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ \ f^{(n)}(0) = e^0 = 1.$$

Allora, il polinomio di MacLaurin di ordine n è

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

e quindi si ha

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ per } x \to 0$$

e in maniera estesa

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \text{ per } x \to 0}$$

(iii) Sia $f(x) = \operatorname{sen} x$. Allora

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x && \Rightarrow\ \ f(0) = 0\\
f^{(1)}(x) &= \cos x && \Rightarrow\ \ f^{(1)}(0) = 1\\
f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen} x && \Rightarrow\ \ f^{(2)}(0) = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x && \Rightarrow\ \ f^{(3)}(0) = -1\\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x && \Rightarrow\ \ f^{(4)}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi le derivate si ripetono ogni 4 (cioè $f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}(x)$). Poi si riconosce che le derivate in 0 di ordine pari sono nulle, mentre quelle di ordine dispari si alternano tra 1 e -1, cioè

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}(x - x_0)^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x - x_0)^{2k+1}$$

Notiamo poi che $P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$, perché $f^{(2n+2)}(0) = 0$. Perciò si ha

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x - x_0)^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \ \text{ per } x \to 0.$$

e in maniera estesa

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \ \text{ per } x \to 0.}$$

(iv) Sia $f(x) = \cos x$. Allora

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & &\Rightarrow \quad f(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen} x & &\Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 0 \\
f^{(2)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = -1 \\
f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen} x & &\Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 1.
\end{aligned}$$

Quindi le derivate si ripetono ogni 4 (cioè $f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}(x)$). Poi si riconosce che le derivate in 0 di ordine dispari sono nulle, mentre quelle di ordine pari si alternano tra 1 e -1, cioè

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{e} \quad f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}(x - x_0)^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x - x_0)^{2k}$$

Notiamo poi che $P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x)$, perché $f^{(2n+1)}(0) = 0$. Perciò si ha

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x - x_0)^{2k} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0$$

e in maniera estesa

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Osservazione 1.7. I due esempi precedenti mostrano che per il seno, che è una funzione dispari, nel polinomio di MacLaurin ci sono soltanto termini con esponenti dispari e per la funzione coseno, che è una funzione pari, nel polinomio di MacLaurin ci sono soltanto termini con esponenti pari. Questo fatto non è un caso, ma vale in generale. Se una funzione è pari il suo polinomio di MacLaurin conterrà soltanto monomi con esponenti pari e se è una funzione dispari, il suo polinomio di MacLaurin conterrà soltanto termini dispari. Infatti se

$$f(x) = f(-x),$$

allora

$$f'(x) = Df(-x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$$

quindi la derivata prima è una funzione dispari. Viceversa se f è dispari, allora

$$f'(x) = D(-f(-x)) = -f'(-x)(-1) = f'(-x),$$

e quindi la derivata f' è una funzione pari. Questo mostra che se f è pari, allora le derivate di ordine dispari sono funzioni dispari e quindi

$$f^{(2k+1)}(x) = -f^{(2k+1)}(-x) \;\Rightarrow\; f^{(2k+1)}(0) = -f^{(2k+1)}(0) \;\Rightarrow\; f^{(2k+1)}(0) = 0.$$

Se invece f è dispari, allora le derivata di ordine pari sono funzioni dispari e quindi

$$f^{(2k)}(x) = -f^{(2k)}(-x) \;\Rightarrow\; f^{(2k)}(0) = -f^{(2k)}(0) \;\Rightarrow\; f^{(2k)}(0) = 0.$$

Esempio 1.8.

(i) Siano $f(x) = \operatorname{senh} x = (1/2)(e^x - e^{-x})$ e $g(x) = \cosh x = (1/2)(e^x + e^{-x})$. Evidentemente

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$$

e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0 \qquad\qquad & g^{(2k)}(0) &= 1 \\ f^{(2k+1)}(0) &= 1 & g^{(2k+1)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Allora per il seno iperbolico si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0 \end{aligned}$$

e in maniera estesa

$$\boxed{\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0.}$$

Mentre per il coseno iperbolico si ha

$$\begin{aligned} \cosh x &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

e in maniera estesa

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0}$$

(ii) Consideriamo la funzione $f(x) = \log(1+x)$, definita nell'insieme $]-1,+\infty[$. Calcoliamo le derivata nel punto 0. Si ha

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}\\
&f^{(2)}(x) = (-1)(1+x)^{-2}\\
&f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}\\
&f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Si riconosce allora che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*:\ \ f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}.$$

e quindi che

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*:\ \ f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Inoltre $f(0) = 0$. Perciò

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.$$

e in maniera estesa

$$\boxed{\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.}$$

(iii) Consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. La funzione f è infinitamente derivabile in $]-1,+\infty[$ e, per ogni $x \in]-1,+\infty[$ risulta

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}\\
&f^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\\
&f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(k)}(x) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}_{k \text{ termini}}(1+x)^{\alpha-k}
\end{aligned}
$$

e quindi

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Allora, posto

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

risulta che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \text{ per } x \to 0 \tag{9}$$

e in maniera estesa

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \text{ per } x \to 0} \tag{10}$$

Si noti l'analogia con la formula del binomio di Newton

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin di $(1+x)^{1/2}$. Dobbiamo quindi calcolare i coefficienti binomiali per $\alpha = 1/2$. Evidentemente

$$\binom{1/2}{0} = 1,$$

$$\binom{1/2}{1} = 1/2,$$

$$\binom{1/2}{2} = \frac{1/2(1/2-1)}{2} = -1/8,$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{3!} = 1/16,$$

da cui si ottiene

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Consideriamo adesso una prima applicazione del teorema di Taylor per l'individuazione della natura dei punti critici di una funzione, cioè di un criterio per stabilire se essi sono punti estremali locali.

Teorema 1.9 (test per punti critici estremali)**.** *Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte (con $n \geq 2$) in I e n volte in un punto x_0 interno ad I. Supponiamo che per ogni $k = 1, \dots, n-1$, $f'(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora se n è pari risulta*

$$\begin{cases} f^{(n)}(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ è punto di minimo locale proprio per } f \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ è punto di massimo locale proprio per } f. \end{cases}$$

Mentre se n è dispari, allora x_0 non è punto di estremo locale per f.

Dimostrazione. Dato che per ogni $k = 1, \dots, n-1$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, allora per il polinomio di Taylor di ordine n si ha

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Quindi risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0,$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Allora se n è pari, per il teorema della permanenza del segno risulta

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) > 0 \;&\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \text{ in un intorno di } x_0 \\ f^{(n)}(x_0) < 0 \;&\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \text{ in un intorno di } x_0. \end{aligned}$$

Mentre se n è dispari, per il teorema della permanenza del segno risulta

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(x) - f(x_0) > 0 \text{ in un intorno destro di } x_0 \\ f(x) - f(x_0) < 0 \text{ in un intorno sinistro di } x_0 \end{cases}$$

e

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(x) - f(x_0) < 0 \text{ in un intorno destro di } x_0 \\ f(x) - f(x_0) > 0 \text{ in un intorno sinistro di } x_0 \end{cases}$$

e quindi in ogni caso x_0 non è punto di estremo locale per f. □