

Nome

Cognome

Matricola

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare una definizione di limite per una successione di numeri reali;

(ii) Calcolare il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

a. $a_n = (-1)^n \frac{\cos n}{1 - \frac{n^2}{2}}$

b. $a_n = \binom{n}{n-2} / (n^2 + n)$

c. $a_n = \frac{2^{n+3} - n^2 + 5\sqrt{n}}{3n^n + 7n^2}$

Risposta

(i) _____

(ii) _____

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Enunciare il teorema del Valor Medio per gli integrali;

(ii) Calcolare il valore medio di $f(x) = x - 2x^2$ su $[0,3]$ e di $g(x) = (\cos x)^2$ su $[0, \pi]$

Risoluzione

(i) _____

(ii) _____

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione da $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, allora

- a. f ha massimo assoluto e minimo assoluto;
- b. f ha minimo assoluto ma non massimo assoluto;
- c. f ha massimo assoluto ma non minimo assoluto;
- d. i limiti $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ sono differenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[3 punti]

Si consideri la serie $\sum_{n=2}^{\infty} [\sin(\sin(\frac{1}{n^2})) - \sin(\sin(\sin(\frac{1}{n^2})))]$ allora:

- a. è divergente a $+\infty$;
- b. il termine generico non è infinitesimo;
- c. è a termini positivi;
- d. nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ allora $\log(1 + i)$

- a. è un insieme limitato del piano complesso;
- b. non esiste;
- c. è un insieme numerabile;
- d. ha parte reale pari a $\log 2$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[4 punti]

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabilità su \mathbb{R}^2 della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 - y^6}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$f(x, y) = \begin{cases} y''(x) + 4y = 8x + e^{\alpha x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Risoluzione

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D xy \, dx dy$$

$$\text{in } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \geq x + 1\}.$$

Risoluzione

This image shows a full page of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a template for writing or drawing. There are no margins, text, or other markings on the page.