24丨索引的原理：我们为什么用B+树来做索引?

上节课我讲到了索引的作用，是否需要建立索引，以及建立什么样的索引，需要我们根据实际情况进行选择。我之前说过，索引其实就是一种数据结构，那么今天我们就来看下，索引的数据结构究竟是怎样的？对索引底层的数据结构有了更深入的了解后，就会更了解索引的使用原则。

今天的文章内容主要包括下面几个部分：

1. 为什么索引要存放到硬盘上？如何评价索引的数据结构设计的好坏?
2. 使用平衡二叉树作为索引的数据结构有哪些不足?
3. B 树和 B+ 树的结构是怎样的？为什么我们常用 B+ 树作为索引的数据结构?

如何评价索引的数据结构设计好坏

数据库服务器有两种存储介质，分别为硬盘和内存。内存属于临时存储，容量有限，而且当发生意外时（比如断电或者发生故障重启）会造成数据丢失；硬盘相当于永久存储介质，这也是为什么我们需要把数据保存到硬盘上。

虽然内存的读取速度很快，但我们还是需要将索引存放到硬盘上，这样的话，当我们在硬盘上进行查询时，也就产生了硬盘的 I/O 操作。相比于内存的存取来说，硬盘的 I/O 存取消耗的时间要高很多。我们通过索引来查找某行数据的时候，需要计算产生的磁盘 I/O 次数，当磁盘 I/O 次数越多，所消耗的时间也就越大。如果我们能让索引的数据结构尽量减少硬盘的 I/O 操作，所消耗的时间也就越小。

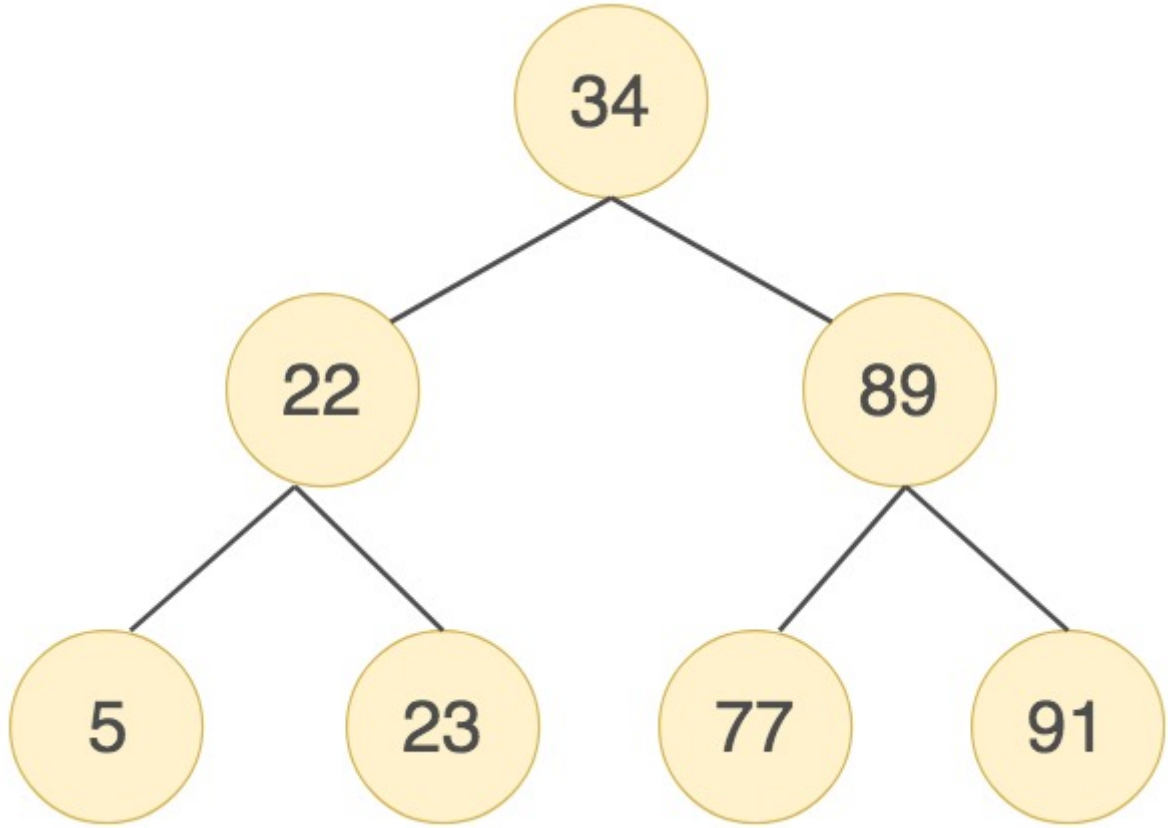
二叉树的局限性

二分查找法是一种高效的数据检索方式，时间复杂度为 O(log2n)，是不是采用二叉树就适合作为索引的数据结构呢?

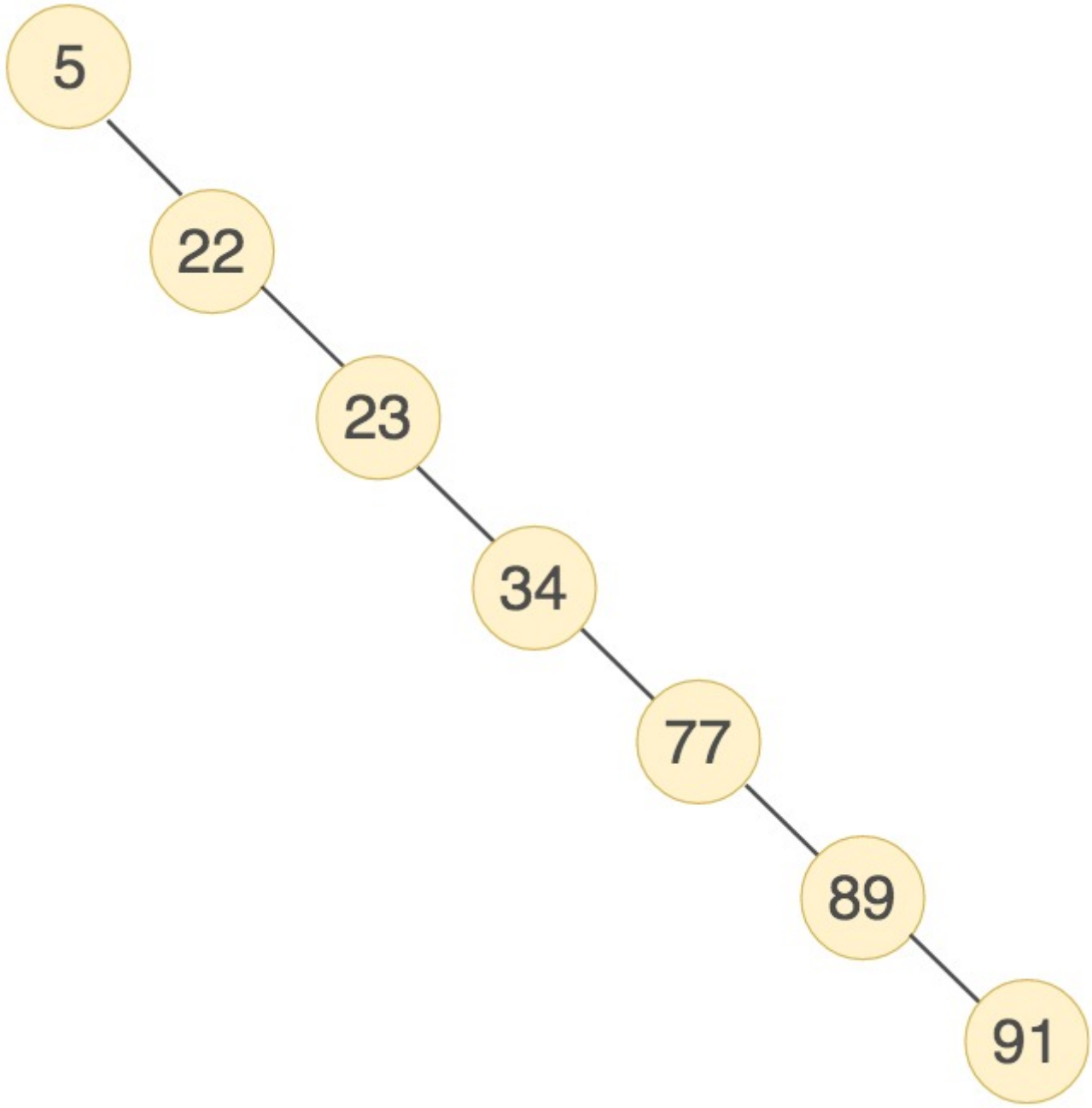
我们先来看下最基础的二叉搜索树（Binary Search Tree），搜索某个节点和插入节点的规则一样，我们假设搜索插入的数值为 key：

1. 如果 key 大于根节点，则在右子树中进行查找；
2. 如果 key 小于根节点，则在左子树中进行查找；
3. 如果 key 等于根节点，也就是找到了这个节点，返回根节点即可。

举个例子，我们对数列（34，22，89，5，23，77，91）创造出来的二分查找树如下图所示：



但是存在特殊的情况，就是有时候二叉树的深度非常大。比如我们给出的数据顺序是 (5, 22, 23, 34, 77, 89, 91)，创造出来的二分搜索树如下图所示：

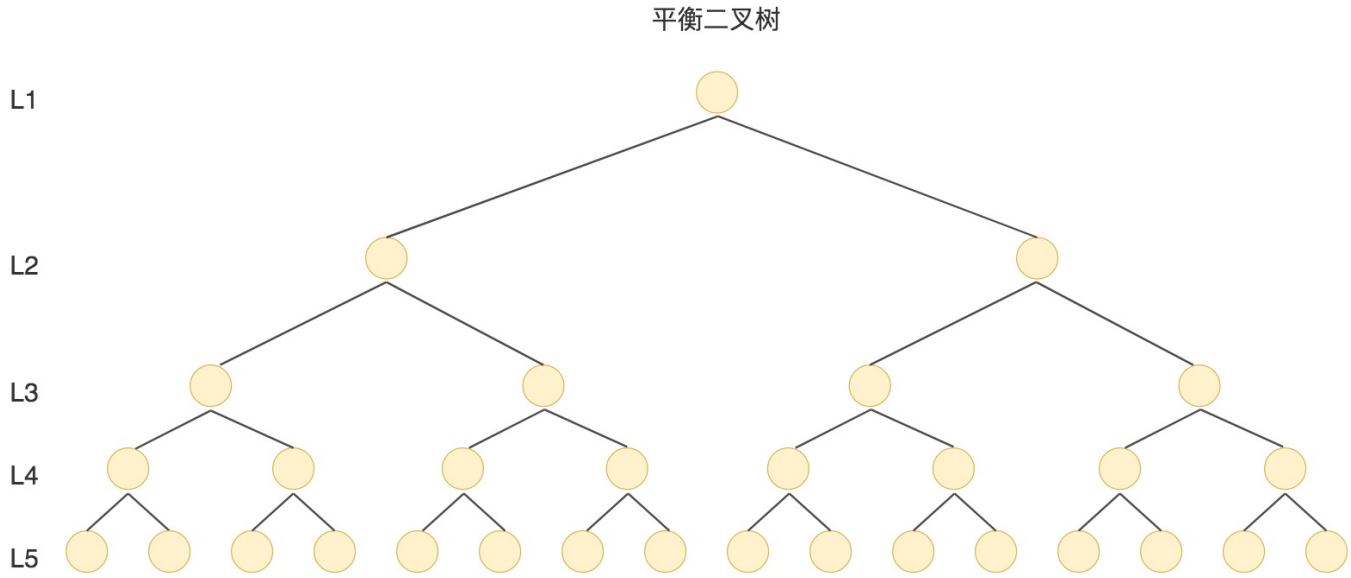


你能看出来第一个树的深度是 3，也就是说最多只需 3 次比较，就可以找到节点，而第二个树的深度是 7，最多需要 7 次比较才能找到节点。

第二棵树也属于二分查找树，但是性能上已经退化成了一条链表，查找数据的时间复杂度变成了 O(n)。为了解决这个问题，人们提出了平衡二叉搜索树（AVL 树），它在二分搜索树的基础上增加了约束，每个节点的左子树和右子树的高度差不能超过 1，也就是说节点的左子树和右子树仍然为平衡二叉树。

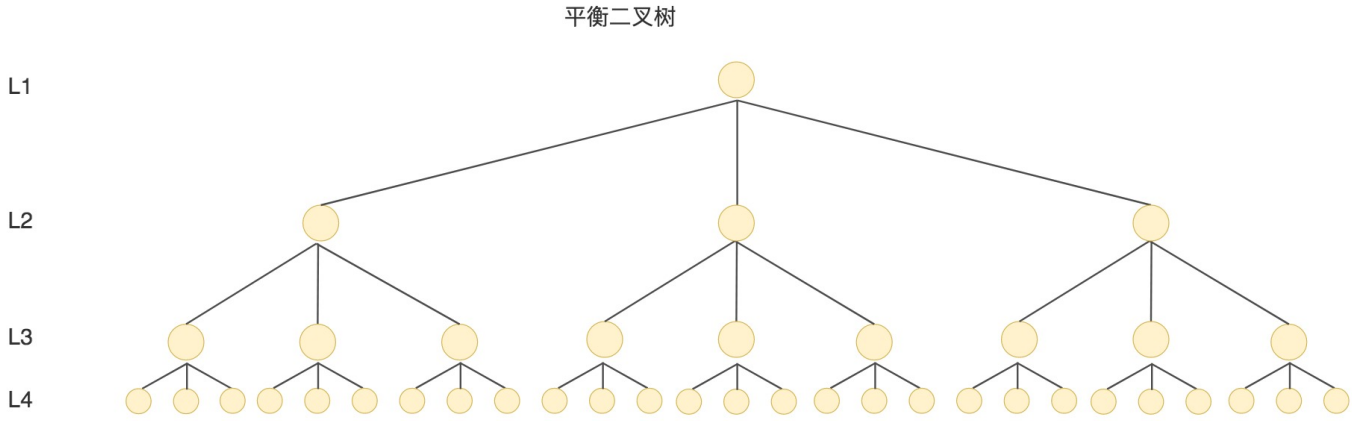
这里说一下，常见的平衡二叉树有很多种，包括了平衡二叉搜索树、红黑树、数堆、伸展树。平衡二叉搜索树是最早提出来的自平衡二叉搜索树，当我们提到平衡二叉树时一般指的就是平衡二叉搜索树。事实上，第一棵树就属于平衡二叉搜索树，搜索时间复杂度就是 O(log2n)。

我刚才提到过，数据查询的时间主要依赖于磁盘 I/O 的次数，如果我们采用二叉树的形式，即使通过平衡二叉搜索树进行了改进，树的深度也是 O(log2n)，当 n 比较大时，深度也是比较高的，比如下图的情况：



每访问一次节点就需要进行一次磁盘 I/O 操作，对于上面的树来说，我们需要进行 5 次 I/O 操作。虽然平衡二叉树比较的效率高，但是树的深度也同样高，这就意味着磁盘 I/O 操作次数多，会影响整体数据查询的效率。

针对同样的数据，如果我们把二叉树改成 M 叉树（M>2）呢？当 M=3 时，同样的 31 个节点可以由下面的三叉树来进行存储：



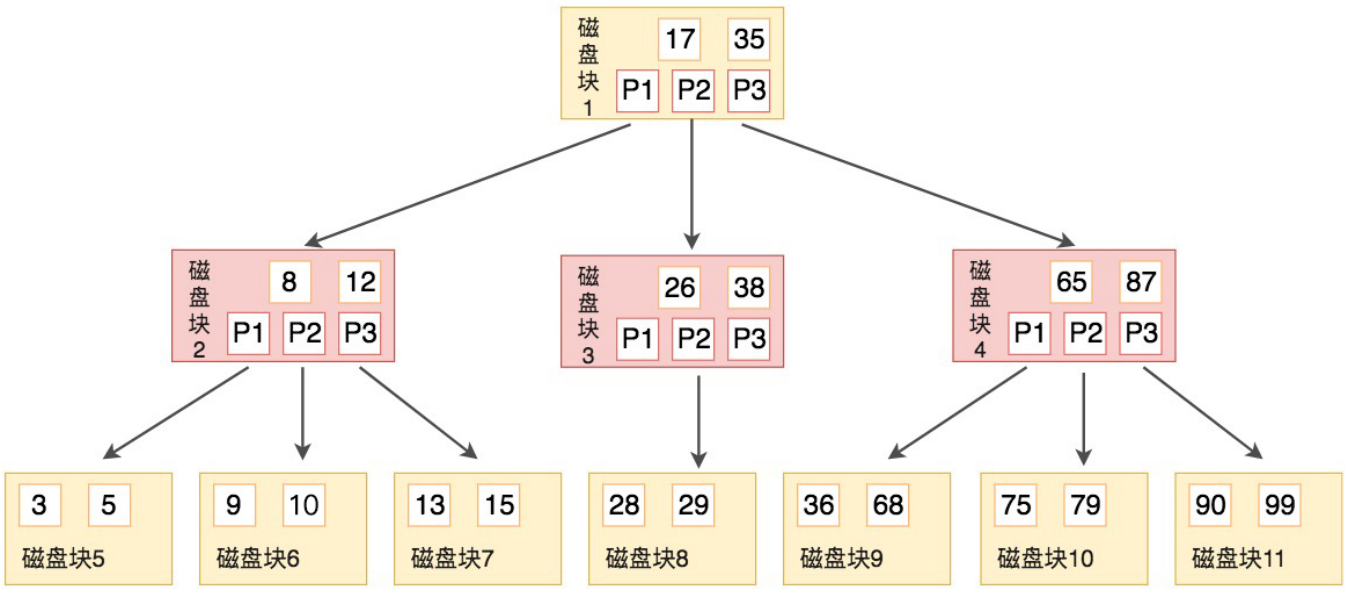
你能看到此时树的高度降低了，当数据量 N 大的时候，以及树的分叉数 M 大的时候，M 叉树的高度会远小于二叉树的高度。

什么是 B 树

如果用二叉树作为索引的实现结构，会让树变得很高，增加硬盘的 I/O 次数，影响数据查询的时间。因此一个节点就不能只有 2 个子节点，而应该允许有 M 个子节点 (M>2)。

B 树的出现就是为了解决这个问题，B 树的英文是 Balance Tree，也就是平衡的多路搜索树，它的高度远小于平衡二叉树的高度。在文件系统和数据库系统中的索引结构经常采用 B 树来实现。

B 树的结构如下图所示：



B 树作为平衡的多路搜索树，它的每一个节点最多可以包括 M 个子节点，M 称为 B 树的阶。同时你能看到，每个磁盘块中包括了关键字和子节点的指针。如果一个磁盘块中包括了 x 个关键字，那么指针数就是 x+1。对于一个 100 阶的 B 树来说，如果有 3 层的话最多可以存储约 100 万的索引数据。对于大量的索引数据来说，采用 B 树的结构是非常适合的，因为树的高度要远小于二叉树的高度。

一个 M 阶的 B 树（M>2）有以下的特性：

1. 根节点的儿子数的范围是 [2,M]。
2. 每个中间节点包含 k-1 个关键字和 k 个孩子，孩子的数量 = 关键字的数量 +1，k 的取值范围为 [ceil(M/2), M]。
3. 叶子节点包括 k-1 个关键字（叶子节点没有孩子），k 的取值范围为 [ceil(M/2), M]。
4. 假设中间节点节点的关键字为：Key[1], Key[2], …, Key[k-1]，且关键字按照升序排序，即 Key[i]<Key[i+1]。此时 k-1 个关键字相当于划分了 k 个范围，也就是对应着 k

个指针，即为：P[1], P[2], …, P[k]，其中 P[1] 指向关键字小于 Key[1] 的子树，P[i] 指向关键字属于 (Key[i-1], Key[i]) 的子树，P[k] 指向关键字大于 Key[k-1] 的子树。
5. 所有叶子节点位于同一层。

上面那张图所表示的 B 树就是一棵 3 阶的 B 树。我们可以看下磁盘块 2，里面的关键字为（8，12），它有 3 个孩子 (3，5)，(9，10) 和 (13，15)，你能看到 (3，5) 小于 8，(9，10) 在 8 和 12 之间，而 (13，15) 大于 12，刚好符合刚才我们给出的特征。

然后我们来看下如何用 B 树进行查找。假设我们想要查找的关键字是 9，那么步骤可以分为以下几步：

1. 我们与根节点的关键字 (17，35）进行比较，9 小于 17 那么得到指针 P1；
2. 按照指针 P1 找到磁盘块 2，关键字为（8，12），因为 9 在 8 和 12 之间，所以我们得到指针 P2；
3. 按照指针 P2 找到磁盘块 6，关键字为（9，10），然后我们找到了关键字 9。

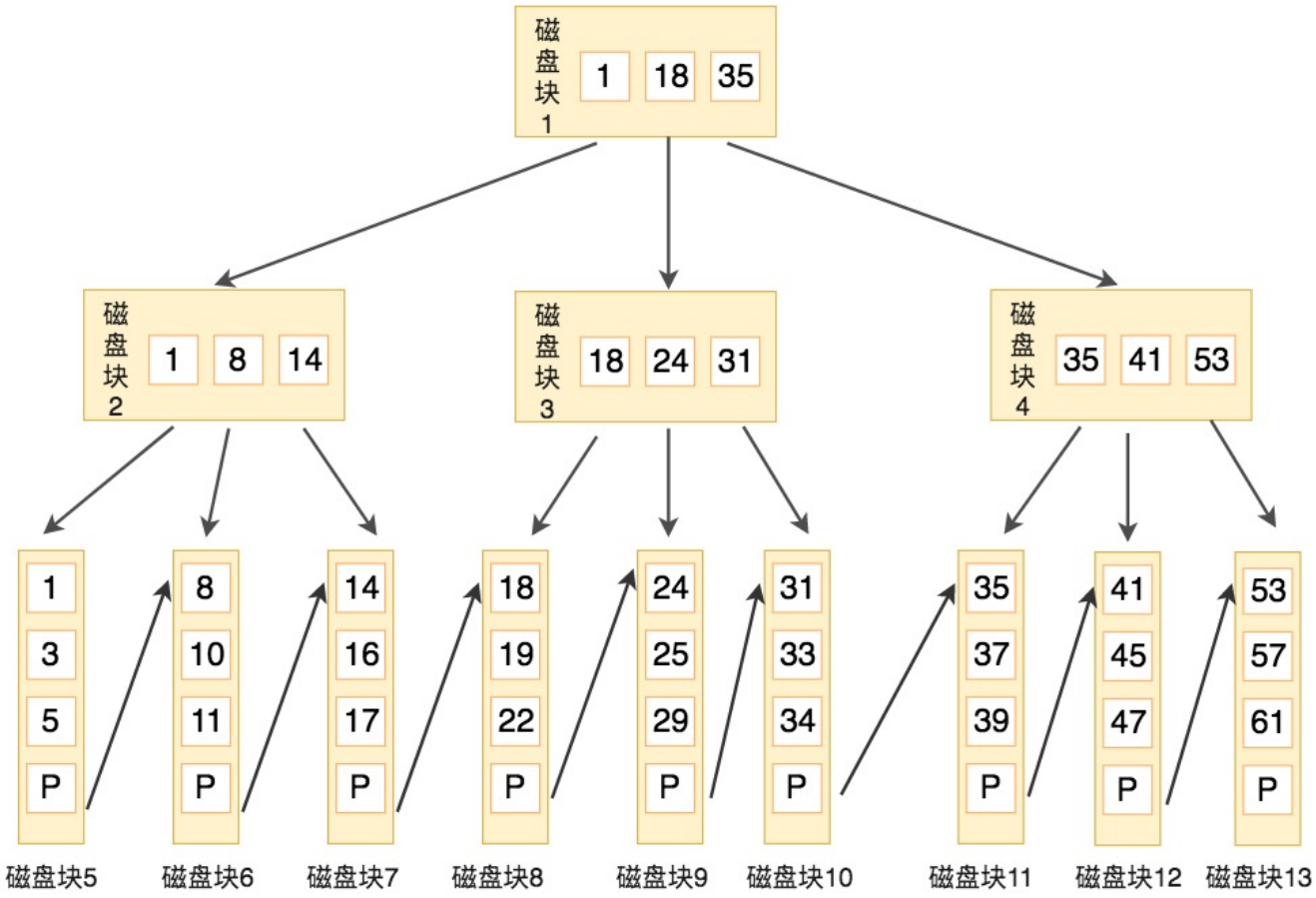
你能看出来在 B 树的搜索过程中，我们比较的次数并不少，但如果把数据读取出来然后在内存中进行比较，这个时间就是可以忽略不计的。而读取磁盘块本身需要进行 I/O 操作，消耗的时间比在内存中进行比较所需要的时间要多，是数据查找用时的重要因素，B 树相比于平衡二叉树来说磁盘 I/O 操作要少，在数据查询中比平衡二叉树效率要高。

什么是 B+ 树

B+ 树基于 B 树做出了改进，主流的 DBMS 都支持 B+ 树的索引方式，比如 MySQL。B+ 树和 B 树的差异在于以下几点：

1. 有 k 个孩子的节点就有 k 个关键字。也就是孩子数量 = 关键字数，而 B 树中，孩子数量 = 关键字数 +1。
2. 非叶子节点的关键字也会同时存在在子节点中，并且是在子节点中所有关键字的最大（或最小）。
3. 非叶子节点仅用于索引，不保存数据记录，跟记录有关的信息都放在叶子节点中。而 B 树中，非叶子节点既保存索引，也保存数据记录。
4. 所有关键字都在叶子节点出现，叶子节点构成一个有序链表，而且叶子节点本身按照关键字的大小从小到大顺序链接。

下图就是一棵 B+ 树，阶数为 3，根节点中的关键字 1、18、35 分别是子节点（1，8，14），（18，24，31）和（35，41，53）中的最小值。每一层父节点的关键字都会出现在下一层的子节点的关键字中，因此在叶子节点中包括了所有的关键字信息，并且每一个叶子节点都有一个指向下一个节点的指针，这样就形成了一个链表。



比如，我们想要查找关键字 16，B+ 树会自顶向下逐层进行查找：

1. 与根节点的关键字 (1，18，35) 进行比较，16 在 1 和 18 之间，得到指针 P1（指向磁盘块 2）
2. 找到磁盘块 2，关键字为（1，8，14），因为 16 大于 14，所以得到指针 P3（指向磁盘块 7）
3. 找到磁盘块 7，关键字为（14，16，17），然后我们找到了关键字 16，所以可以找到关键字 16 所对应的数据。

整个过程一共进行了 3 次 I/O 操作，看起来 B+ 树和 B 树的查询过程差不多，但是 B+ 树和 B 树有个根本的差异在于，B+ 树的中间节点并不直接存储数据。这样的好处都有什么呢?

首先，B+ 树查询效率更稳定。因为 B+ 树每次只有访问到叶子节点才能找到对应的数据，而在 B 树中，非叶子节点也会存储数据，这样就会造成查询效率不稳定的情况，有时候访问到了非叶子节点就可以找到关键字，而有时需要访问到叶子节点才能找到关键字。

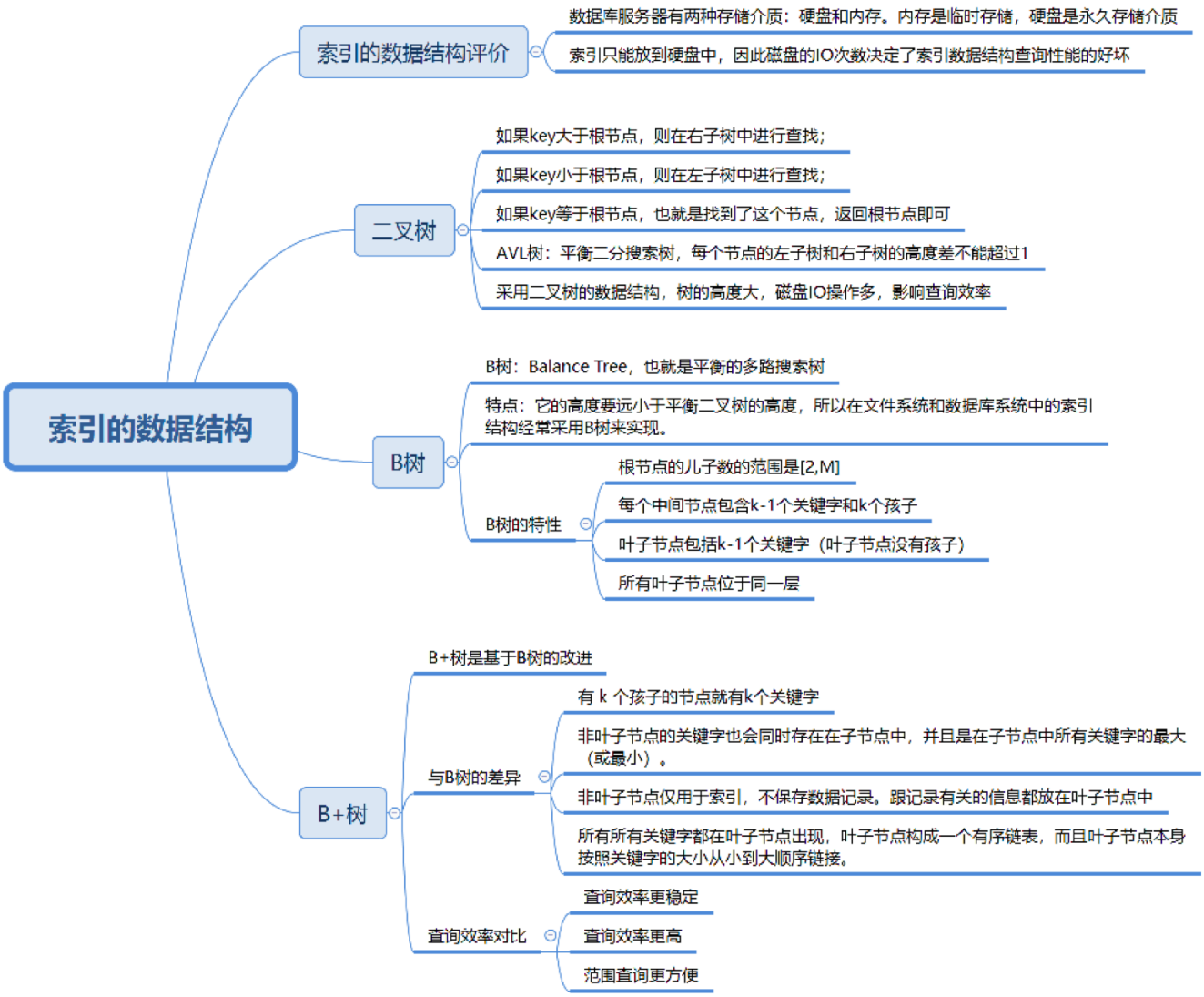
其次，B+ 树的查询效率更高，这是因为通常 B+ 树比 B 树更矮胖（阶数更大，深度更低），查询所需要的磁盘 I/O 也会更少。同样的磁盘页大小，B+ 树可以存储更多的节点关键字。

不仅是对单个关键字的查询上，在查询范围上，B+ 树的效率也比 B 树高。这是因为所有关键字都出现在 B+ 树的叶子节点中，并通过有序链表进行了链接。而在 B 树中则需要通过中序遍历才能完成查询范围的查找，效率要低很多。

总结

磁盘的 I/O 操作次数对索引的使用效率至关重要。虽然传统的二叉树数据结构查找数据的效率高，但很容易增加磁盘 I/O 操作的次数，影响索引使用的效率。因此在构造索引的时候，我们更倾向于采用“矮胖”的数据结构。

B 树和 B+ 树都可以作为索引的数据结构，在 MySQL 中采用的是 B+ 树，B+ 树在查询性能上更稳定，在磁盘页大小相同的情况下，树的构造更加矮胖，所需要进行的磁盘 I/O 次数更少，更适合进行关键字的范围查询。



今天我们对索引的底层数据结构进行了学习，你能说下为什么数据库索引采用 B+ 树，而不是平衡二叉搜索树吗？另外，B+ 树和 B 树在构造和查询性能上有什么差异呢？