

Abszolútértékes és gyökös kifejezések Megoldások

1) Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0 \quad (2 \text{ pont})$$

Megoldás:

A $10 - x > 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. (1 pont)

$x < 10$ (1 pont)

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3(\sqrt{x+1} + 1) = 2$, ahol x valós szám és $x > -1$ (6 pont)

b) $2\cos^2 x = 4 - 5\sin x$, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl (11 pont)

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1} + 1 = 3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1} = 8$ (1 pont)

$x+1 = 64$ (1 pont)

$x = 63$ (1 pont)

Ellenőrzés... (1 pont)

b) Lásd: Trigonometria 2. feladat

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ (6 pont)

b) $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{\sqrt[3]{x}}$ (6 pont)

Megoldás:

a) Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 9. feladat

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Válassza ki az A halmaz elemei közül azokat a számokat, amelyek megoldásai a $\sqrt{x^2} = -x$ egyenletnek! $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$ (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai az A halmaz elemei közül: -1 és 0 . (2 pont)

5) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$|x-2| = 7$ (2 pont)

Megoldás:

Az egyenlet megoldása a 9 (1 pont)

és a -5 . (1 pont)

Összesen: 2 pont

6) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 1 + 2 \cos x$ (6 pont)

Megoldás:

a) A négyzetgyök értéke csak nemnegatív lehet: $x \leq 5$, (1 pont)

és csak nemnegatív számnak van négyzetgyöke: $|x| \leq \sqrt{35,5}$. (1 pont)

Négyzetre emelve: $x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 71$. (1 pont)

Rendezve: $x^2 + 10x - 96 = 0$ (1 pont)

amelynek valós gyökei a -16 és a 6 . (1 pont)

Az utóbbi nem felel meg az első feltételnek, ezért nem megoldása az egyenletnek. Az egyenlet egyetlen megoldása a **-16** , hiszen ez mindkét feltételnek megfelel, s az adott feltételek mellett csak ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

b) Lásd: Trigonometria 11. feladat

Összesen: 12 pont

7) Adja meg azt az x valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{x} = 2 \quad (2 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$x = 16 \quad (2 \text{ pont})$$

8)

a) Melyik $(x; y)$ valós számpár megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 6y = 4 \\ 3x + 5y = 20 \end{array} \right\} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = x \quad (6 \text{ pont})$$

Megoldás:

a) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 14. feladat

b) $\sqrt{x+2} = x$

$$x+2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_1 = 2 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = -1 \quad (1 \text{ pont})$$

Ellenőrzés: $x_2 = -1$ hamis gyök. (1 pont)

$x_1 = 2$ megoldása az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

9) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x| = 7$? (2 pont)

Megoldás:

$$x_1 = -7 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = 7 \quad (1 \text{ pont})$$

10) Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = |x - 4|$ függvény.

Mely x értékek esetén lesz $f(x) = 6$? (2 pont)

Megoldás:

$$x_1 = -2, x_2 = 10 \quad (2 \text{ pont})$$

11) a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + 4 = \sqrt{4x + 21} \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y valós számot jelöl!

$$\begin{cases} 3x + y = 16 \\ 5x - 2y = 45 \end{cases} \quad (6 \text{ pont})$$

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $4x + 21 \geq 0$ és $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$.

Négyzetre emelve mindkét oldalt (a belső kikötés elvégzése miatt lehetséges):

$$x^2 + 8x + 16 = 4x + 21. \quad (2 \text{ pont})$$

$$\text{Rendezve: } x^2 + 4x - 5 = 0. \quad (1 \text{ pont})$$

$$\text{Az egyenlet gyökei: } x_1 = -5, x_2 = 1 \quad (1 \text{ pont})$$

A -5 nem része az értelmezési tartománynak, így nem valódi gyök. (1 pont)

Az 1 ennek megfelelő gyök. (1 pont)

b) Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 16. feladat

Összesen: 12 pont

12) Adja meg az alábbi egyenlet megoldásait a valós számok halmazán!

$$|x^2 - 8| = 8 \quad (3 \text{ pont})$$

Megoldás:

$$x_1 = 0 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_2 = 4 \quad (1 \text{ pont})$$

$$x_3 = -4 \quad (1 \text{ pont})$$

Összesen: 3 pont

13) Az ábrán a $[-1; 5]$ intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható.

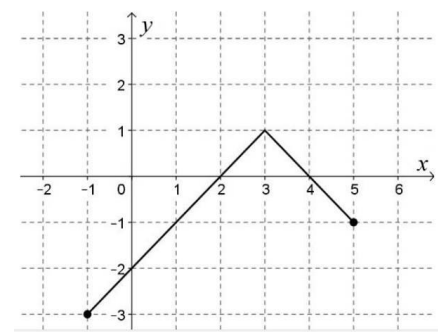
Válassza ki a felsoroltakból a függvény hozzárendelési szabályát! (2 pont)

A: $x \mapsto |x - 3| + 1$

B: $x \mapsto -|x + 3| + 1$

C: $x \mapsto -|x - 3| + 1$

D: $x \mapsto -|x + 3| - 1$



Megoldás:

A hozzárendelési szabály betűjele: **C** (2 pont)

14) a) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$|x - 3| = 3x - 1.$$

(7 pont)

Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; f(x) = a \cdot x + b$ lineáris függvény zérushelye -4 . Tudjuk továbbá, hogy az $x = 4$ helyen a függvényérték 6.

b) Adja meg a és b értékét!

(6 pont)

Megoldás:

- a) Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x - 3 = 3x - 1$, (1 pont)
 amiből $x = -1$, (1 pont)
 ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)
 Az egyenlet alakja $x < 3$ esetén: $-(x - 3) = 3x - 1$, (1 pont)
 amiből $x = 1$. (2 pont)
 Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

b) Lásd: Függvények 48. feladat

Összesen: 13 pont

15) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

Megoldás:

- A) $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$, tehát az állítás **igaz**.
 B) $\sqrt{x^2} = |x|$, amely állítás negatív x -re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.
 C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

16) Az x -nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

Megoldás:

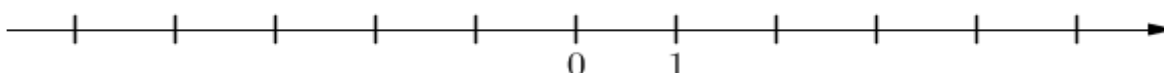
A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x + 2| = 6$.

Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

- I. $x + 2 = 6 \Rightarrow x_1 = 4$ (1 pont)
 II. $x + 2 = -6 \Rightarrow x_2 = -8$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

17) Ábrázolja az alábbi számegyenesen az $|x| < 3$ egyenlőtlenség valós megoldásait! (2 pont)



Megoldás:



Összesen: 2 pont

18) Péter és Pál szendvicset és ásványvizet vásárolt a büfében. Péter két szendvicset és két ásványvizet vett 740 Ft-ért, Pál pedig három szendvicset és egy ásványvizet 890 Ft-ért.

a) Mennyibe kerül egy szendvics, és mennyibe kerül egy ásványvíz?

(6 pont)

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$1 - x = \sqrt{x + 5}$$

(5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 45. feladat*

b) Kikötés: $x \geq -5$ és $x \leq 1$

(1 pont)

Mindkét oldalt négyzetre emeljük: $1 - 2x + x^2 = x + 5$

(1 pont)

Az egyenletet 0-ra rendezzük: $x^2 - 3x - 4 = 0$

(1 pont)

A másodfokú egyenlet gyökei: $x_1 = 4$ és $x_2 = -1$

(1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel:

$x_1 = 4 \Rightarrow 1 - 4 \neq \sqrt{4 + 5}$, tehát az $x_1 = 4$ nem megoldása az egyenletnek.

$x_2 = -1 \Rightarrow 1 - (-1) = \sqrt{-1 + 5}$, tehát az egyenlet megoldása **-1**.

(1 pont)

Összesen: 11 pont

19) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$|x - 4| = 1$$

(2 pont)

Megoldás:

Ha $x \geq 4$, akkor $x - 4 = 1$, tehát $x_1 = 5$.

(1 pont)

Ha $x < 4$, akkor $-x + 4 = 1$, tehát $x_2 = 3$.

(1 pont)

Összesen: 2 pont