Síkgeometria
Megoldások

1) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
a) A háromszög köré írható kör középpontja mindig valamelyik súlyvonalra esik. (1 pont)
b) Egy négyszögnek lehet 180°-nál nagyobb belső szöge is. (1 pont)
c) Minden trapéz paralelogramma. (1 pont)

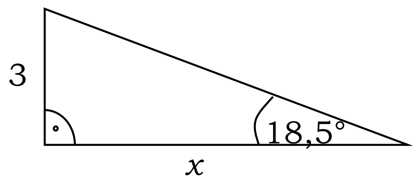
Megoldás:

a) **Hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

2) Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza 3 cm, a vele szemközti szög 18,5°. Mekkora a másik befogó? Készítsen vázlatot, és válaszát számítással indokolja! (3 pont)

Megoldás:

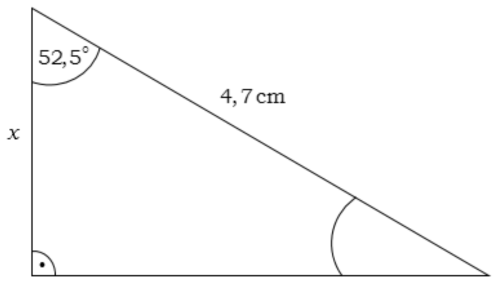


Helyes ábra: (1 pont)

$\mathrm{tg}18,5^\circ = \frac{3}{x}$ (1 pont)

A másik befogó $x \approx 8,966 \approx \mathbf{9}$ (1 pont)

3) Egy derékszögű háromszög átfogója 4,7 cm hosszú, az egyik hegyesszöge 52,5°. Hány cm hosszú a szög melletti befogó? Készítsen vázlatot az adatok feltüntetésével! Válaszát számítással indokolja, és egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (3 pont)



Megoldás:

Helyes ábra. (1 pont)

$x = 4,7\ \cos 52,5^\circ = 2,861$ (1 pont)

A befogó hossza kerekítve: $\mathbf{2,9}$ cm (1 pont)

4) Döntse el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis!
a) A szabályos ötszög középpontosan szimmetrikus. (1 pont)
b) Van olyan háromszög, amelynek a súlypontja és a magasságpontja egybeesik. (1 pont)
c) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus. (1 pont)

Megoldás:

a) **hamis** (1 pont)
b) **igaz** (1 pont)
c) **hamis** (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Egy háromszög belső szögeinek aránya 2:5:11. Hány fokos a legkisebb szög? (2 pont)

Megoldás:

A legkisebb szög $\mathbf{20}^\circ$. (2 pont)

6) Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140°-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

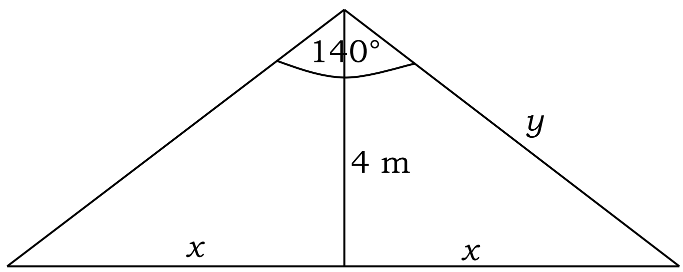
a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével! (2 pont)

b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont? (4 pont)

c) Megvilágítja-e az érzékelő lámpája azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van? (4 pont)

d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa 100 m2-nél nagyobb területet? (7 pont)

<u>Megoldás</u>:



a) Ábra (2 pont)

b) $y = \dfrac{4}{\cos 70^\circ}$ (3 pont)

$\approx \mathbf{11{,}7\ (m)}$ (1 pont)

c) A legtávolabbi megvilágított pont a talajon a rúd aljától $x = 4 \cdot \text{tg}70^\circ$ távolságra van, (2 pont)

$x \approx 11\ (\text{m})$ (1 pont)

így a 15 méterre levő pont már nincs megvilágítva. (1 pont)

d) $r^2\pi \le 100$ (1 pont)

$r \le \sqrt{\dfrac{100}{\pi}} \approx 5{,}64\ (\text{m})$ (2 pont)

$h \le \dfrac{5{,}65}{\text{tg}70^\circ} \approx 2{,}05\ (\text{m})$ (2 pont)

Tehát az első vagy a második kampóra kell akasztani az érzékelőt. (2 pont)

Összesen: 17 pont

7) Mekkora az egységsugarú kör 270°-os középponti szögéhez tartozó ívének hossza? (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

A középponti szögekre és az ívhosszakra vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{\frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

Innen $\boldsymbol{x = \dfrac{3\pi}{2}}$ (2 pont)

8) Döntse el, hogy az alábbi *B* állítás igaz vagy hamis!
***B*: Ha egy négyszög két szemközti szöge derékszög, akkor az téglalap.**
Írja le az állítás megfordítását (*C*).
Igaz vagy hamis a *C* állítás? (3 pont)

Megoldás:

B logikai értéke: **HAMIS** (1 pont)

C állítás: **Ha egy négyszög téglalap, akkor két szemközti szöge derékszög.** (1 pont)

C logikai értéke: **IGAZ** (1 pont)

Összesen: 3 pont

9) Egy háromszög egyik oldalának hossza 6 cm. Az ezeken nyugvó két szög 50° és 60°. A háromszög beírt körének középpontját tükröztük a háromszög oldalaira. E három pont a háromszög csúcsaival együtt egy konvex hatszöget alkot.

a) Mekkorák a hatszög szögei? (6 pont)

b) Számítsa ki a hatszög azon két oldalának hosszát, amely a háromszög 60°-os szögének csúcsából indul! (5 pont)

c) Hány négyzetcentiméter a hatszög területe? (6 pont)

A b) és a c) kérdésekben a választ egy tizedes pontossággal adja meg!

Megoldás:

a) A háromszög harmadik szöge $BAC\measuredangle = 70^\circ$ (1 pont)

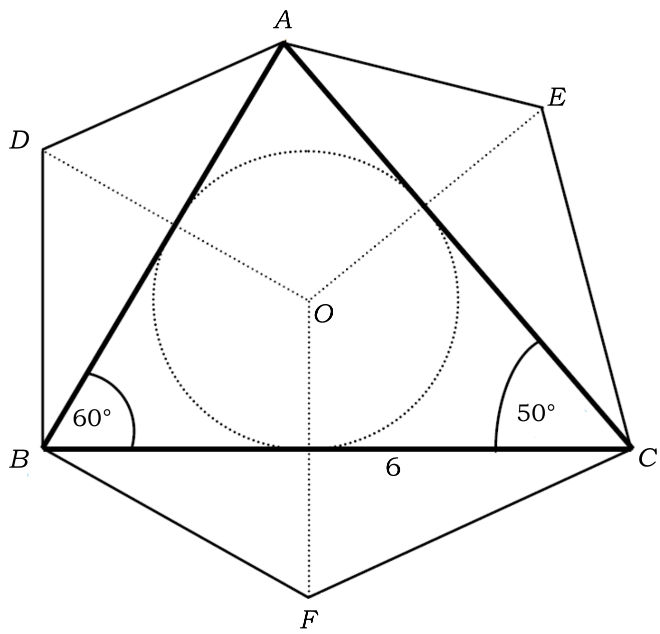
A beírt kör O középpontja a belső szögfelezők metszéspontja. (1 pont)

A tükrözésnél ezért az eredeti háromszög csúcsainál a belső szögek felének kétszerese adódik hozzá az eredeti szöghöz, (1 pont) vagyis a keletkezett hatszög szögei:

$DAE\measuredangle = 140^\circ$ $ECF\measuredangle = 100^\circ$

$FBD\measuredangle = 120^\circ$ (1 pont)

Az ABC háromszög szögfelezői által (az O középpontnál) bezárt szögek a tükrözés miatt rendre megegyeznek a hatszög D, E és F csúcsú szögeivel: (1 pont)



$BDA\measuredangle = 115^\circ$ $AEC\measuredangle = 120^\circ$ $CFB\measuredangle = 125^\circ$

$\boldsymbol{BDA\measuredangle = 115^\circ}$, $\boldsymbol{AEC\measuredangle = 120^\circ}$, $\boldsymbol{CFB\measuredangle = 125^\circ}$, (1 pont)

b) A tükrözés miatt $BO = BD = BF$

Elegendő tehát az $x = BO$ belső szögfelező szakasz hosszát kiszámítani. (2 pont)

A BOC háromszögben a szinusztétel alapján:

A tükrözés miatt $\dfrac{x}{6} = \dfrac{\sin 25^\circ}{\sin 125^\circ}$ (2 pont)

amiből $\boldsymbol{x \approx 3{,}1}$ **(cm)**

a hatszög keresett két oldalának hossza egyaránt **3,1 cm.** (1 pont)

c) A tükrözés miatt a hatszög területe a háromszög területének kétszerese. (1 pont)

A háromszög $AB = c$ oldalára:

$$\frac{c}{6} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 70^\circ}$$ (1 pont)

amiből $c = 4{,}9 \ (\text{cm})$ (1 pont)

A háromszög területe $\frac{6c \sin 60^\circ}{2} \approx 12{,}7 \ (\text{cm}^2)$ (2 pont)

A hatszög területe $\mathbf{2 \cdot 12{,}7 = 25{,}4 \ (cm^2)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

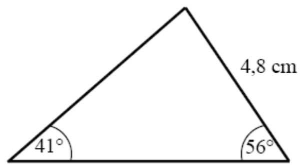
10) Egy háromszög oldalhosszúságai egész számok. Két oldala 3 cm és 7 cm. Döntse el a következő állításokról, hogy igaz vagy hamis! (2 pont)
1. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 9 cm.
2. állítás: A háromszög harmadik oldala lehet 10 cm.

Megoldás:

1. állítás: **Igaz** (1 pont)
2. állítás: **Hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

11) Az ábrán látható háromszögben hány cm hosszú az 56°-os szöggel szemközti oldal? (Az eredményt egy tizedes jegy pontossággal adja meg!) Írja le a számítás menetét! (3 pont)



Megoldás:

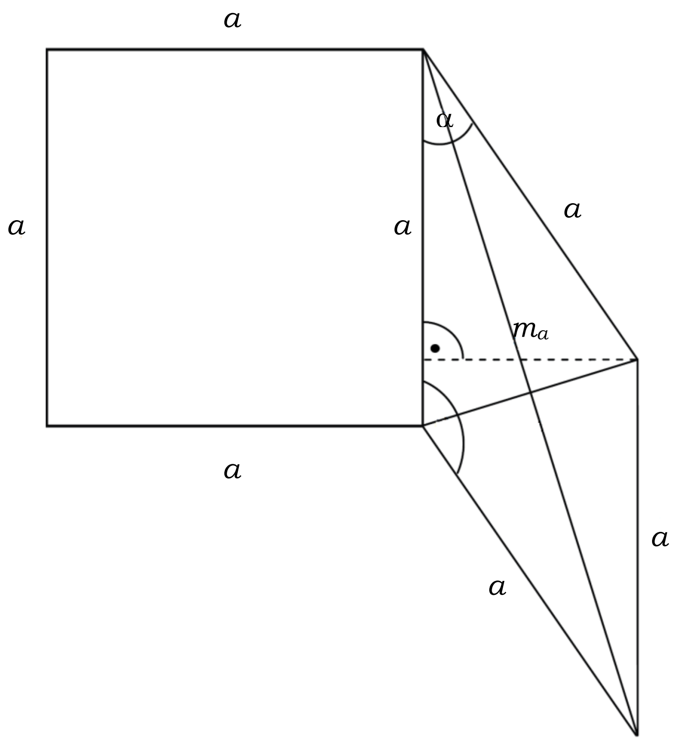
$$\frac{x}{4{,}8} = \frac{\sin 56^\circ}{\sin 41^\circ}$$ (1 pont)

$\boldsymbol{x \approx 6{,}1}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

12) Egy négyzet és egy rombusz egyik oldala közös, a közös oldal 13 cm hosszú. A négyzet és a rombusz területének az aránya 2:1.
a) Mekkora a rombusz magassága? (5 pont)
b) Mekkorák a rombusz szögei? (3 pont)
c) Milyen hosszú a rombusz hosszabbik átlója? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:



a) Helyes ábra (1 pont)

$\left(T_{\text{négyzet}} = a^2 \text{ és } T_{\text{rombusz}} = am_a\right)$

$\frac{a^2}{am_a} = \frac{2}{1}$ (3 pont)

A rombusz magassága $\boldsymbol{m_a = 6{,}5}$ (cm) (1 pont)

$\sin\alpha = \frac{m_a}{a}$ (ahol α hegyesszög) (1 pont)

$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$ (1 pont)

$\boldsymbol{\beta = 150^\circ}$ (1 pont)

b) Bármelyik lehetséges derékszögű háromszögből jó összefüggést felír a hosszabbik átló segítségével, például

$\cos 15^\circ = \frac{\frac{e}{2}}{13}$ (2 pont)

$e = 2 \cdot 13 \cdot \cos 15^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{e = 25{,}11}$ **(cm)** (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) Adja meg az alábbi állítások igazságértékét (igaz vagy hamis), majd döntse el, hogy a b) és a c) jelű állítások közül melyik az a) jelű állítás megfordítása! (4 pont)

a) Ha az ABCD négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást.

b) Ha az ABCD négyszög átlói felezik egymást, akkor ez a négyszög téglalap.

c) Ha az ABCD négyszög nem téglalap, akkor átlói nem felezik egymást.

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)

b) **hamis** (1 pont)

c) **hamis** (1 pont)

Az a) megfordítása a b). (1 pont)

Összesen: 4 pont

14) Hányszorosára nő egy 2 cm sugarú kör területe, ha a sugarát háromszorosára növeljük? (2 pont)

Megoldás:

$\left(3^2 =\right)$ **9**-szeresére nő a terület. (2 pont)

15) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, az átfogója 13 cm hosszú. Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (Válaszát egész fokra kerekítve adja meg!) (2 pont)

Megoldás:

A hegyesszögek: $\mathbf{23}^\circ$ és $\mathbf{67}^\circ$ (2 pont)

16) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét! A táblázatban karikázza be a helyes választ! (4 pont)
***A* állítás: Minden rombusznak pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**
***B* állítás: Minden rombusznak van két szimmetriatengelye. (1 pont)**
***C* állítás: Van olyan rombusz, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van. (1 pont)**
***D* állítás: Nincs olyan rombusz, amelynek négy szimmetriatengelye van. (1 pont)**

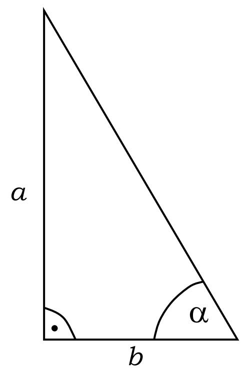
Megoldás:

A állítás: **hamis** (1 pont)
B állítás: **igaz** (1 pont)
C állítás: **igaz** (1 pont)
D állítás: **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

17) Valamely derékszögű háromszög területe 12 cm², az α hegyesszögéről pedig tudjuk, hogy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.
a) Mekkorák a háromszög befogói? (8 pont)
b) Mekkorák a háromszög szögei, és mekkora a köré írt kör sugara? (A szögeket fokokban egy tizedesjegyre, a kör sugarát cm-ben szintén egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (4 pont)

Megoldás:



a) A befogók aránya $3:2$. (2 pont)
Az egyik befogó $3x$, a másik $2x$. (1 pont)
A háromszög területe: $\frac{a \cdot b}{2}$. (1 pont)
$12 = \frac{3x \cdot 2x}{2}$. (1 pont)
$x^2 = 4$. (1 pont)
A (pozitív) megoldás: $x = 2$. (1 pont)
A befogók hossza **6 cm** és **4 cm**. (1 pont)

b) Az α hegyesszög 56,3° (1 pont)
a másik hegyesszög 33,7°-os. (1 pont)
A derékszögű háromszög átfogója (Pitagorasz tétele szerint) $\sqrt{\mathbf{52}} \approx \mathbf{7{,}2}\ (\mathbf{cm})$, (1 pont)
a kör sugara (az átfogó fele): $\sqrt{\mathbf{13}} \approx \mathbf{3{,}6}\ (\mathbf{cm})$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) A következő kérdések ugyanarra a 20 oldalú szabályos sokszögre vonatkoznak.
a) Mekkorák a sokszög belső szögei? Mekkorák a külső szögek? (3 pont)
b) Hány átlója illetve hány szimmetriatengelye van a sokszögnek? Hány különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból? (6 pont)

c) Milyen hosszú a legrövidebb átló, ha a szabályos sokszög beírt körének sugara 15 cm? A választ két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (8 pont)

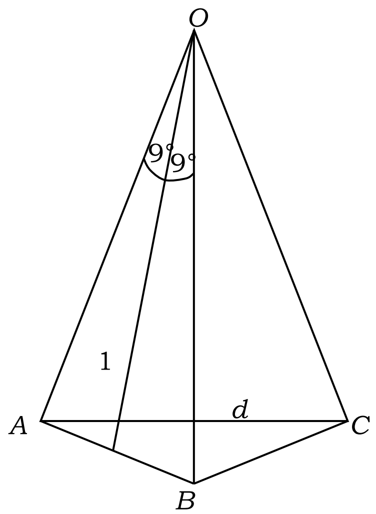
Megoldás:

a) A belső szögek **162**°-osak, (2 pont)
a külső szögek **18**°-osak. (1 pont)

b) Az összes átlók száma $\frac{20\cdot 17}{2}=170$ (2 pont)

Szemközti csúcsokat összekötő átlóból 10 van, (ezek egyenese 1–1 szimmetriatengely) szemközti oldalak felezőpontját összekötő szimmetriatengelyből szintén 10, (1 pont)
tehát összesen 20 szimmetriatengelye van a sokszögnek. (1 pont)
Egy csúcsból 17 átló húzható, ezek között 8–8 páronként egyenlő hosszú, (1 pont)
tehát **9** különböző hosszúságú átló húzható egy csúcsból. (1 pont)

c) A szabályos 20-szög egy oldalához tartozó (konvex) középponti szög 18°-os. (1 pont)



$\text{tg}9^\circ=\frac{a}{2\cdot 15}$ (1 pont)

$a=30\cdot \text{tg}9^\circ$ (1 pont)

$a\approx 4{,}75\ (\text{cm})$ (1 pont)

A legrövidebb átló egy 162°szárszögű egyenlő szárú háromszögből számolható ki, amelynek szárai ≈ 4,75 cm hosszúak. (1 pont)

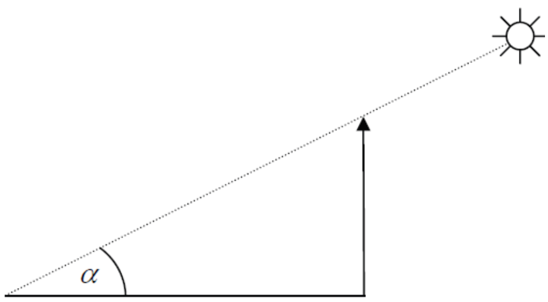
$\sin 81^\circ\approx\frac{d}{2\cdot 4{,}75}$ (1 pont)

$d\approx 9{,}5\cdot\sin 81^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{d\approx 2\cdot 4{,}75\cdot\sin 81^\circ\approx 9{,}38\ (\text{cm})}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

19) Egy torony árnyéka a vízszintes talajon kétszer olyan hosszú, mint a torony magassága. Hány fokos szöget zár be ekkor a Nap sugara a vízszintes talajjal? A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg! (2 pont)



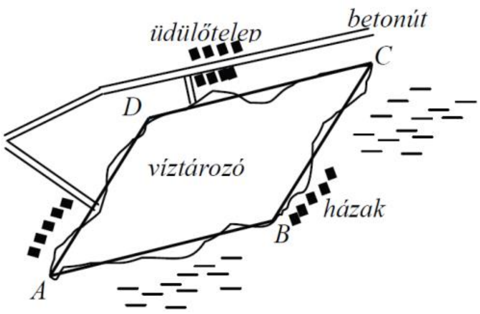
Megoldás:

$\alpha=\mathbf{27}^\circ$

(2 pont)

Összesen: 2 pont

20) **Egy víztározó víztükrének alakját az ábrán látható módon az *ABCD* paralelogrammával közelítjük. A paralelogrammának az 1:30000 méretarányú térképen mért adatai: $AB = 4,70$ cm, $AD = 3,80$ cm és $BD = 3,30$ cm.**



a) **A helyi önkormányzat olyan kerékpárút építését tervezi, amelyen az egész víztározót körbe lehet kerekezni. Hány km hosszúságú lesz ez az út, ha hossza kb. 25%-kal több a paralelogramma kerületénél? Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!** **(4 pont)**

b) **Mekkora az a legnagyobb távolság, amelyet motorcsónakkal, irányváltoztatás nélkül megtehetünk a víztározó víztükrén? Válaszát km-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!** **(7 pont)**

c) **Körülbelül hány m^3-rel lesz több víz a víztározóban, ha a vízszintet 15 cm-rel megemelik? Válaszát ezer m^3-re kerekítve adja meg!** **(6 pont)**

Megoldás:

a) A térképen a paralelogramma kerülete 17,0 cm, a kerékpárút pedig $17,0 \cdot 1,25 = 21,25$ cm hosszú. (1 pont)

A valóságban a kerékpárút hossza $21,25 \cdot 3 \cdot 10^4$ cm, (1 pont)

azaz 6,375 km. (1 pont)

Egy tizedes jegyre kerekítve tehát a kerékpárút hossza **6,4 km**. (1 pont)

A számításokat kezdhetjük a térkép adatainak valós méretre váltásával is.

b) Az *AC* szakasz a leghosszabb. (1 pont)

Az *ABD* háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$3,3^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos BAD\measuredangle$ (1 pont)

Ebből: $\cos BAD\measuredangle = \dfrac{4,7^2 + 3,8^2 - 3,3^2}{2 \cdot 4,7 \cdot 3,8} \approx$ (1 pont)

$\approx 0,7178$

(tehát $BAD\measuredangle \approx 44,1^\circ$ és így $ABC\measuredangle \approx 135,9^\circ$) (1 pont)

Az *ABC* háromszögből koszinusztétellel:

$AC^2 = 4,7^2 + 3,8^2 - 2 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \cos ABC\measuredangle$ (1 pont)

amiből $AC \approx 7,9$ (cm) (1 pont)

Ez a valóságban (egy tizedes jegyre kerekítve) **2,4 km**. (1 pont)

c) A vízfelszín területe a valóságban:

$9 \cdot 10^8 \cdot 4,7 \cdot 3,8 \cdot \sin 44,1^\circ \approx 1,119 \cdot 10^{10}\ \left(\mathrm{cm}^2\right)$

(Heron-képlet is használható.), (2 pont)

ami $1,119 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2$. (1 pont)

Tehát kb. $1,119 \cdot 10^6 \cdot 0,15 \approx$ $\mathbf{1,679 \cdot 10^5}$ $\mathbf{m^3}$ **-rel lesz több víz a tárolóban,**

(2 pont)

ami ezer köbméterre kerekítve **168 ezer m^3** vízmennyiséget jelent. (1 pont)

Összesen: 17 pont

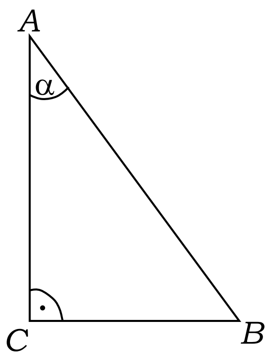
21) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 5 cm, a szára 6 cm hosszú. Hány fokosak a háromszög alapon fekvő szögei? A szögek nagyságát egész fokra kerekítve adja meg! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot. (1 pont)
A keletkező derékszögű háromszögben a keresett α szögre (1 pont)
Az alapon fekvő szögek $\approx \mathbf{65^\circ}$ -osak. (1 pont)

Összesen: 3 pont

22) Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelyben az átfogó hossza 1, az α hegyesszög melletti befogó hossza pedig $\sin\alpha$. Mekkora az α szög? Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

(A szögfüggvények definíciója miatt) $BC = \sin\alpha$, (1 pont)
$\boldsymbol{AC = BC}$ (1 pont)
tehát $\boldsymbol{\alpha = 45^\circ}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

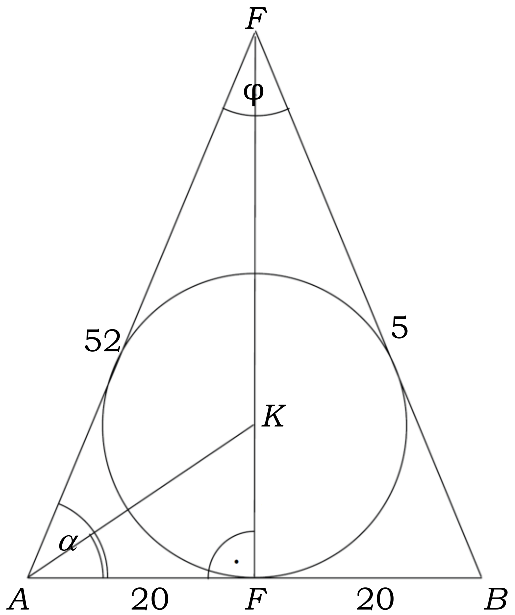
23) Egyenlő szárú háromszög alapja 40 cm, szárainak hossza 52 cm. A háromszöget megforgatjuk a szimmetriatengelye körül.
(A válaszait két tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével, és számítsa ki, hogy mekkora a keletkező forgáskúp nyílásszöge? (4 pont)
b) Számítsa ki a keletkező forgáskúp térfogatát! (3 pont)
c) Mekkora a felszíne annak a gömbnek, amelyik érinti a kúp alapkörét és a palástját? (6 pont)
d) Mekkora a kúp kiterített palástjának területe? (4 pont)

Megoldás:

a) Jó vázlatrajz az adatok feltüntetésével. (2 pont)
Ha a kúp nyílásszöge φ, akkor
$\sin\varphi = \dfrac{20}{52} = 0{,}3846$ (1 pont)
Ebből $\boldsymbol{\varphi = 45{,}24^\circ}$ (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 44. feladat*
c) *Lásd: Térgeometria 44. feladat*
d) *Lásd: Térgeometria 44. feladat*



24) Az *ABC* hegyesszögű háromszögben $BC = 14$ cm, $AC = 12$ cm, a *BCA* szög nagysága pedig 40°.

a) Számítsa ki a *BC* oldalhoz tartozó magasság hosszát! (2 pont)
b) Számítsa ki az *AB* oldal hosszát! (3 pont)

Válaszait cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!
Az *AB* oldal felezőpontja legyen *E*, a *BC* oldal felezőpontja pedig legyen *D*. Határozza meg az *AEDC* négyszög területét!

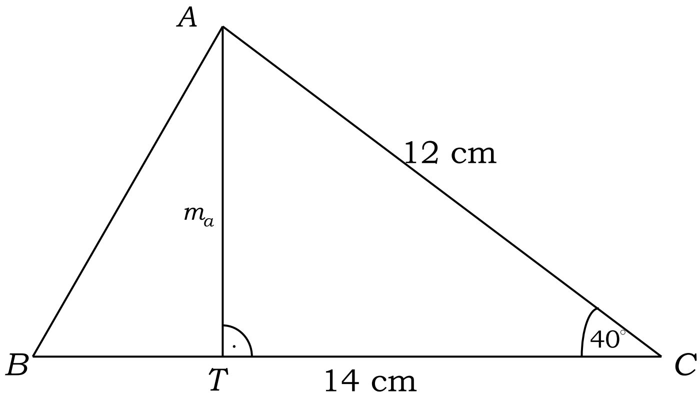
c) Válaszát cm^2-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Az *ATC* derékszögű háromszögben

$m_a = 12 \sin 40^\circ \approx \mathbf{7{,}7\ cm}$ (2 pont)

A magasság kifejezhető a trigonometrikus területképletből is.



b) A háromszög kérdéses oldalára a koszinusztételt felírva: (1 pont)

$AB^2 = 14^2 + 12^2 - 2 \cdot 14 \cdot 12 \cdot \cos 40^\circ$ (1 pont)

$\boldsymbol{AB \approx 9{,}1}$ **cm** (1 pont)

c) Az *AEDC* négyszög trapéz, mert az *ED* szakasz az *ABC* háromszögben középvonal, így párhuzamos az *AC* oldallal. (1 pont)

$ED = 6\,\text{cm}$ (1 pont)

A trapéz magassága az *ABC* háromszög *AC* oldalhoz tartozó magasságának a fele. (1 pont)

Az *ABC* háromszög területe: $T = \dfrac{12 \cdot 14 \cdot \sin 40^\circ}{2} \left(\approx 54\ \text{cm}^2\right)$ (1 pont)

Ebből az *AC* oldalhoz tartozó m_b magasság:

$m_b = \dfrac{T \cdot 2}{12} \approx 9\ (\text{cm})$ (1 pont)

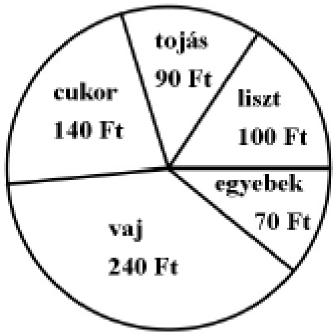
Az *AEDC* trapéz területe: $T = \dfrac{12+6}{2} \cdot \dfrac{m_b}{2}$ (1 pont)

$\approx \mathbf{40{,}5\ cm^2}$ (1 pont)

A feladat megoldható hasonló háromszögek területarányának felhasználásával is.

Összesen: 12 pont

25) Az ábra egy sütemény alapanyagköltségeinek megoszlását mutatja. Számítsa ki a „vaj” feliratú körcikk középponti szögének nagyságát fokban! Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

A sütemény összköltsége 640 Ft. (1 pont)

A vaj költsége ennek $\dfrac{3}{8}$ része. (1 pont)

A kérdéses körcikk középponti szöge **135°**. (1 pont)

26) A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja.
Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az adatokat feltüntető helyes ábra, az út hossza *x*. (1 pont)

$x = \dfrac{124}{\sin 6{,}5^\circ} \approx 1095$ (1 pont)

1095 méter hosszú az út. (1 pont)

Összesen: 3 pont

27) Két gömb sugarának aránya $2:1$. A nagyobb gömb térfogata *k*-szorosa a kisebb gömb térfogatának.
Adja meg *k* értékét! (2 pont)

Megoldás:

(Mivel két hasonló test térfogatának aránya, a hasonlósági arány köbével egyenlő, ezért $k = 2^3$.)

$\boldsymbol{k = 8}$ (2 pont)

28) Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok 120°-os szöget zárnak be egymással, mindkét vektor hossza 4 cm. Határozza meg az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hosszát! (2 pont)

Megoldás:

Az $\vec{a}+\vec{b}$ vektor hossza **4 cm**. (2 pont)

29) Számítsa ki a szabályos tizenkétszög egy belső szögének nagyságát! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A (szabályos) tizenkétszög belső szögeinek összege: $(12-2)\cdot 180° = 1800°$,

(2 pont)

így egy belső szöge **150°**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

30) Döntse el, melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 4$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes. (1 pont)

b) Nincs két olyan prímszám, amelyek különbsége prímszám. (1 pont)

c) Az 1 cm sugarú kör kerületének cm-ben mért számértéke kétszer akkora, mint területének cm²-ben mért számértéke. (1 pont)

d) Ha egy adathalmaz átlaga 0, akkor a szórása is 0. (1 pont)

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)
c) **igaz** (1 pont)
d) **hamis** (1 pont)

Összesen: 4 pont

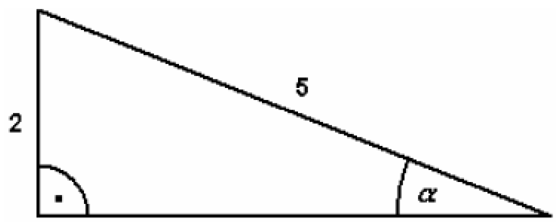
31) Egy háromszög egyik oldalának hossza 10 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 6 cm. Számítsa ki a háromszög területét! (2 pont)

Megoldás:

A háromszög területe **30 cm²**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

32) Számítsa ki az α szög nagyságát az alábbi derékszögű háromszögben! (2 pont)



Megoldás:

$\sin\alpha = \frac{2}{5}$

$\alpha \approx \mathbf{23{,}58°}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Egy kör sugara 6 cm. Számítsa ki ebben a körben a 120°-os középponti szöghöz tartozó körcikk területét! **(2 pont)**

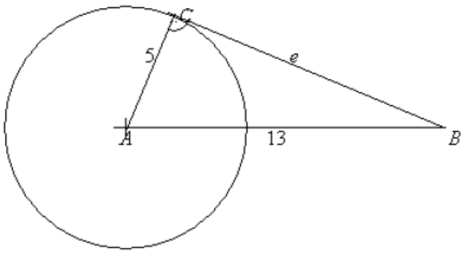
Megoldás:

$$t=\frac{\alpha\cdot r^2\pi}{360^\circ}=12\pi\,\mathrm{cm}^2\approx \mathbf{37{,}7\,cm^2}$$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

34) Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. Mekkora az érintőszakasz hossza? Írja le a számítás menetét! **(3 pont)**

Megoldás:



Ábra felrajzolása: (1 pont)

Az ABC háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz tételét: $e^2=13^2-5^2$ (1 pont)

$\boldsymbol{e=12\,\mathrm{cm}}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

35) Adja meg, hogy az alábbi geometriai transzformációk közül melyek viszik át önmagába az ábrán látható, háromszög alakú (sugárveszélyt jelző) táblát! **(2 pont)**

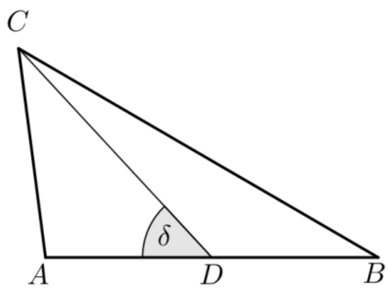
a) 60°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
b) 120°-os elforgatás a tábla középpontja körül.
c) Középpontos tükrözés a tábla középpontjára.
d) Tengelyes tükrözés a tábla középpontján és a tábla egyik csúcsán átmenő tengelyre.

Megoldás:

b) és **d)** (2 pont)

36) Az ábrán látható *ABC* háromszögben a *D* pont felezi az *AB* oldalt. A háromszögben ismert: $AB=48$ mm, $CD=41$ mm, $\delta=47^\circ$.

a) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! **(5 pont)**
b) Számítással igazolja, hogy (egész milliméterre kerekítve) a háromszög *BC* oldalának hossza 60 mm! **(4 pont)**
c) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsánál lévő belső szög nagyságát! **(3 pont)**



Megoldás:

a) Az *ADC* háromszög *C* csúcsához tartozó magasság hossza:

$41\cdot\sin 47^\circ\approx$ (1 pont)

$\approx 30\,(\mathrm{mm})$. (1 pont)

Ez ugyanakkora, mint az *ABC* háromszög *C* csúcsához tartozó magassága, (1 pont)

így a kérdezett terület $T=\frac{48\cdot 30}{2}=$ (1 pont)

$=\mathbf{720\ mm^2}$. (1 pont)

b) A *CDB* szög 133°. (1 pont)

$BC = \sqrt{24^2 + 41^2 - 2 \cdot 24 \cdot 41 \cdot \cos 133^\circ}$ (2 pont)

Így a BC oldal hossza a kért kerekítéssel **valóban 60 mm**. (1 pont)

c) Az ABC szög legyen β, ekkor a szinusztételt felírva a BCD háromszögben:

$\frac{\sin\beta}{\sin 133^\circ} = \frac{41}{60}$. (1 pont)

$\sin\beta \approx 0,4998$ (1 pont)

Mivel a BCD háromszög D csúcsánál lévő belső szöge tompaszög:

$\boldsymbol{\beta \approx 30^\circ}$. (1 pont)

A feladat koszinusz-tétel megoldásával is helyes!

Összesen: 12 pont

37) Egy téglalap szomszédos oldalainak hossza 4,2 cm és 5,6 cm. Mekkora a téglalap körülírt körének sugara? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A téglalap körülírt körének átmérője a téglalap átlója. (1 pont)

A téglalap átlójának hossza: $\sqrt{4,2^2 + 5,6^2}\ (=7)(\text{cm})$ (1 pont)

A kör sugara $\mathbf{3,5\ (cm)}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

38)

a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}\ (x \in \mathbb{R}).$$ **(6 pont)**

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

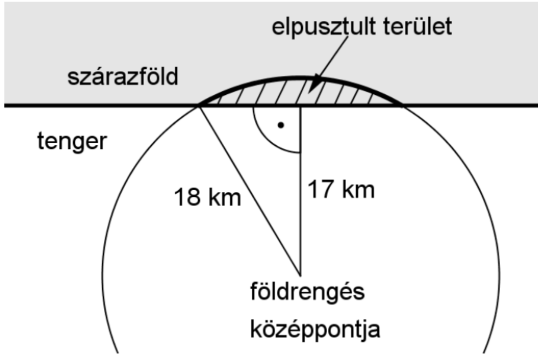
azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\boldsymbol{\alpha = 60^\circ}$ (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 17. feladat*

c) *Lásd: Trigonometria 17. feladat*

Összesen: 12 pont

39) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

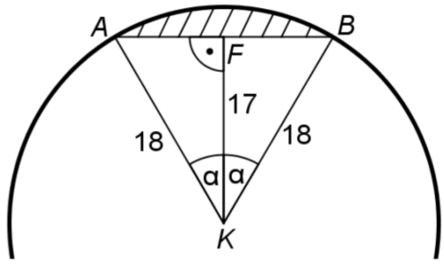
a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos egyenletek 24. feladat*

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos egyenletek 24. feladat*

c) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos egyenletek 24. feladat*

d) Az ábra jelöléseit használjuk.

Az *AKF* derékszögű háromszögből:



$\cos\alpha = \frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha \approx 19,2^\circ. \left(2\alpha \approx 38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta} \approx \frac{18^2 \cdot \sin 38,4^\circ}{2} \left(\approx 100,6\ \text{km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körcikk} \approx 18^2 \pi \frac{38,4^\circ}{360^\circ} \left(\approx 108,6\ \text{km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet} \approx 108,6 - 100,6 = 8\ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül $\mathbf{8\ km^2}$. (1 pont)

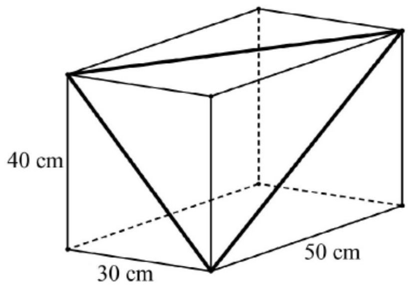
Összesen: 17 pont

40) Egy téglatest alakú akvárium egy csúcsból kiinduló élei 30 cm, 40 cm, illetve 50 cm hosszúak.

a) Hány literes ez az akvárium? (A számolás során tekintsen el az oldallapok vastagságától!) (3 pont)

Tekintsük azt a háromszöget, amelynek oldalait az ábrán látható téglatest három különböző hosszúságú lapátlója alkotja.

b) Mekkora ennek a háromszögnek a legkisebb szöge? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! (8 pont)



Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 28. feladat*

b) Az egyes lapátlók hossza:

$\sqrt{50^2+40^2}=\sqrt{4100}\,(\approx 64{,}03)\,(\text{cm}),\sqrt{50^2+30^2}=\sqrt{3400}\,(\approx 58{,}31)\,(\text{cm}),$

$\sqrt{30^2+40^2}=50\,(\text{cm}).$ (2 pont)

A legkisebb szög a legrövidebb oldallal van szemben. (1 pont)

A legrövidebb oldallal szemközti szöget α-val jelölve, koszinusztétellel:

$2500=4100+3400-2\times\sqrt{4100}\times\sqrt{3400}\cdot\cos\alpha$. (2 pont)

Ebből $\cos\alpha\ \cos\alpha\approx 0{,}6696$. (2 pont)

A háromszög legkisebb szöge: $\boldsymbol{\alpha = 48°}$. (1 pont)

Összesen: 11 pont

41) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

a) Minden paralelogramma tengelyesen szimmetrikus négyszög.

b) A kocka testátlója 45°-os szöget zár be az alaplappal.

c) A szabályos tizenhétszögben az egyik csúcsból kiinduló összes átló a tizenhétszöget 15 háromszögre bontja. (2 pont)

Megoldás:

a) **Hamis**

b) **Hamis**

c) **Igaz** (2 pont)

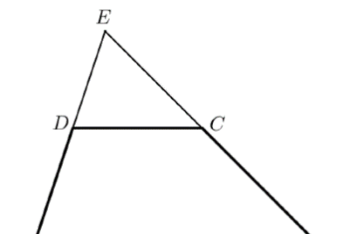
42) Az $ABCD$ trapéz oldalainak hossza: $AB=10\,\text{cm}$; $CD=6\,\text{cm}$; $AD=7\,\text{cm}$. Az A csúcsnál fekvő belső szög nagysága 70°.

a) Mekkora távolságra van a D pont az AB oldaltól? (3 pont)

b) Számítsa ki a négyszög AC átlójának hosszát! (4 pont)

Az E pont az AD és BC szárak egyenesének metszéspontja.

c) Számítsa ki az ED szakasz hosszát! (4 pont)



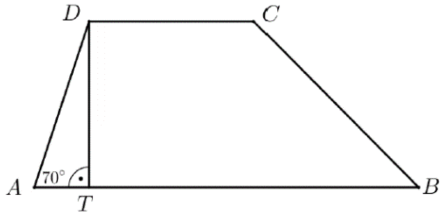
Megoldás:

a) A D pont merőleges vetületét az AB oldalon jelölje T.

Meghatározandó a DT szakasz. (1 pont)

Az ATD derékszögű háromszögben:

$\sin 70° = \frac{DT}{7}$. (1 pont)



$DT = 7 \cdot \sin 70° \approx \mathbf{6{,}58\,cm}$. (1 pont)

b) A trapéz D csúcsnál lévő belső szöge 110°. (1 pont)
Írjuk fel az ACD háromszögben a koszinusztételt: (1 pont)
$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos 110°$. (1 pont)
Kb. **10,66 cm** az AC átló hossza. (1 pont)

c) Az AB szakasz párhuzamos a CD szakasszal, így az EDC és EAB háromszögek hasonlósága miatt: (1 pont)
$\frac{x}{6} = \frac{x+7}{10}$ (1 pont)
Ebből $10x = 6x + 42$, (1 pont)
azaz $\boldsymbol{x = 10{,}5}$ **cm.** (1 pont)

Összesen: 11 pont

43) Egy *ABC* háromszög *A* csúcsánál lévő külső szöge 104°-os, *B* csúcsnál lévő belső szöge 74°-os. Hány fokos a háromszög *C* csúcsnál lévő külső szöge? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Az A csúcshoz tartozó α belső szög 76°-os. (1 pont)
Felhasználva azt az összefüggést, hogy a háromszög bármely külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével, adódik, hogy: (1 pont)
$\gamma' = 76^\circ + 74^\circ = \mathbf{150^\circ}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

44) Az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogója 6 cm, *BC* befogója 8 cm hosszú.
a) Számítsa ki az *ABC* háromszög hegyesszögeinek nagyságát! (3 pont)
A *DEF* derékszögű háromszög *DE* befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a *DF* befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a *DF* befogó.
b) Számítsa ki a *DEF* háromszög oldalainak hosszát! (8 pont)

***Megoldás*:**

a) Az ABC derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szögére felírjuk a tangens szögfüggvényt: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{6}$ (1 pont)
$\alpha \approx \mathbf{53{,}13^\circ}$ és $\beta = \mathbf{36{,}87^\circ}$. (2 pont)

b) Vezessünk be ismeretlent DE oldalra!
Ekkor $DE = x$, $DF = x + 7$ és $EF = x + 7 + 2 = x + 9$. (1 pont)
Ezután Pitagorasz-tételt írunk fel a derékszögű háromszögre.
$x^2 + (x+7)^2 = (x+9)^2$ (1 pont)
Az egyenlet rendezésével egy másodfokú egyenletet kapunk, ez az $x^2 - 4x - 32 = 0$, melynek gyökei $x_1 = 8$ és $x_2 = -4$ lesznek. (2 pont)
Mivel x oldalhosszúságot jelöl, az x csak 8 cm lehet. (1 pont)
Visszahelyettesítve a háromszög oldalai tehát $\boldsymbol{DE = 8}$ **cm**, $\boldsymbol{DF = 15}$ **cm** és $\boldsymbol{EF = 17}$ **cm**. (2 pont)

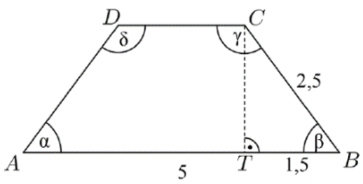
Összesen: 11 pont

45) Az *ABCD* húrtrapéz oldalainak hossza:
$AB = 5$ cm; $BC = 2{,}5$ cm, $CD = 2$ cm és $DA = 2{,}5$ cm.
a) Számítsa ki a trapéz szögeit! (5 pont)
b) Határozza meg az *ABC* és *ACD* háromszögek területének arányát! (5 pont)

c) A trapéz belső szögeit egy-egy $5\,\mathrm{mm}$ sugarú körívvel jelöltük. Számítsa ki a négy körív hosszának összegét! (3 pont)

***Megoldás*:**

a) Berajzoljuk a húrtrapéz C csúcsból kiinduló magasságát, majd az így keletkezett BCT derékszögű háromszögre felírunk egy koszinusz-szögfüggvényt.

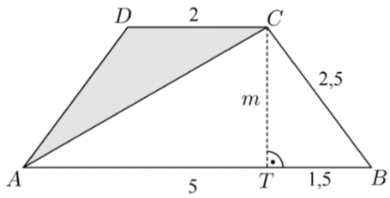


$\cos\beta = \dfrac{1,5}{2,5} = 0,6$, amelyből $\beta \approx 53,13^\circ$ (2 pont)

A húrtrapéz alapon fekvő szögei egyenlők, ezért $\boldsymbol{\alpha = \beta = 53,13^\circ}$. (1 pont)

Továbbá a húrtrapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°, így $\gamma = \delta = 180^\circ - 53,13^\circ = \mathbf{126,87^\circ}$. (2 pont)

b) A BCT háromszögre Pitagorasz-tételt írunk fel:



$m = \sqrt{2,5^2 - 1,5^2} = 2\,\mathrm{cm}$ (1 pont)

Így az ABC háromszög területe $T_{ABC} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5\,\mathrm{cm}^2$. (1 pont)

Az ACD háromszög területét az $ABCD$ trapéz és az ABC háromszög területének különbségeként számítjuk ki.

$T_{ABCD} = \dfrac{(5+2)}{2} \cdot 2 = 7\,\mathrm{cm}^2$ (1 pont)

$T_{ACD} = T_{ABCD} - T_{ABC} = 2\,\mathrm{cm}^2$ (1 pont)

Így a háromszögek területének aránya $\dfrac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$. (1 pont)

c) Mivel a trapéz belső szögeinek összege 360°, így a négy szöghöz tartozó körívek hossza összesen egy $5\,\mathrm{mm}$ sugarú kör kerületével egyenlő. (1 pont)
A kérdezett ívhossz ezért $K = 2 \cdot 5 \cdot \pi = 10\pi \approx \mathbf{31,42\,mm}$. (2 pont)

Összesen: 13 pont

46) Egy háromszög 3 cm és 5 cm hosszú oldalai 60°-os szöget zárnak be egymással. Hány centiméter hosszú a háromszög harmadik oldala? Megoldását részletezze! (3 pont)

***Megoldás*:**

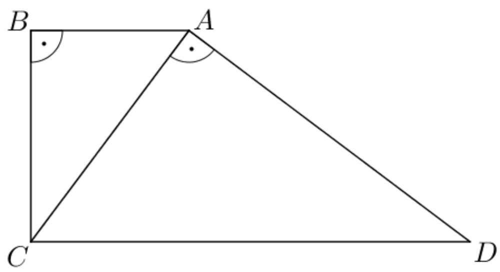
$c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ$ (1 pont)

$c^2 = 19$ (1 pont)

$\boldsymbol{c \approx 4,36}$ **cm** (1 pont)

Összesen: 3 pont

47) Két derékszögű háromszöget egy-egy oldalukkal egymáshoz illesztettünk az ábrának megfelelően. Így az *ABCD* derékszögű trapézt kaptuk.



a) Igazolja, hogy az *ABC* és a *CAD* háromszög hasonló! (3 pont)

Legyen $AB = 9\,\mathrm{cm}$, $AC = 15\,\mathrm{cm}$.

b) Számítsa ki a trapéz *AD* oldalán fekvő szögeinek nagyságát! (4 pont)

c) Számítsa ki a trapéz területét! (7 pont)

Megoldás:

a) Legyen $BAC\angle = \alpha$, ekkor $ACB\angle = 90^\circ - \alpha$. (1 pont)
Mivel $BCD\angle = 90^\circ$, ezért $ACD\angle = \alpha$. (1 pont)
A két háromszög szögei páronként egyenlők, így a két háromszög valóban hasonló. (1 pont)

b) $BAC\angle = \alpha$, ekkor $\cos\alpha = \frac{9}{15}$, (1 pont)
amiből $\alpha \approx 53{,}1^\circ$, (1 pont)
így a trapéz A csúcsnál lévő szöge $\alpha + 90^\circ \approx 143{,}1^\circ$. (1 pont)
a D csúcsnál lévő szög pedig kb. $180^\circ - 143{,}1^\circ = \mathbf{36{,}9^\circ}$ (1 pont)

c) A trapéz területének meghatározásához kiszámítjuk a CD alap és a BC oldal (a trapéz magassága) hosszát. (1 pont)
Az ABC és CAD háromszögek hasonlósága miatt $\frac{CD}{15} = \frac{15}{9}$, (1 pont)
amiből $CD = 25\,\text{cm}$. (1 pont)
Az ABC derékszögű háromszögből: $BC = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12\,\text{cm}$. (2 pont)
Az $ABCD$ trapéz területe $\frac{25+9}{2} \cdot 12 = \mathbf{204\,cm^2}$. (2 pont)

Összesen: 14 pont

48) Az *ABC* derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm, átfogója 17 cm hosszú.

a) Számítsa ki a háromszög 17 cm-es oldalához tartozó magasságának hosszát! (5 pont)

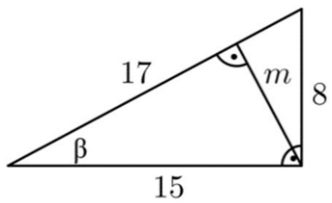
b) Hány $\mathbf{cm^2}$ a háromszög körülírt körének területe? (3 pont)

A *DEF* háromszög hasonló az *ABC* háromszöghöz, és az átfogója 13,6 cm hosszú.

c) Hány százalék a *DEF* háromszög területe az *ABC* háromszög területének? (4pont)

Megoldás:

a) A másik befogó hossza Pitagorasz-tétellel: $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (1 pont)
Mivel a háromszög derékszögű így:



$\sin\beta = \frac{8}{17}$ vagyis $\beta \approx 28{,}1^\circ$ (2 pont)

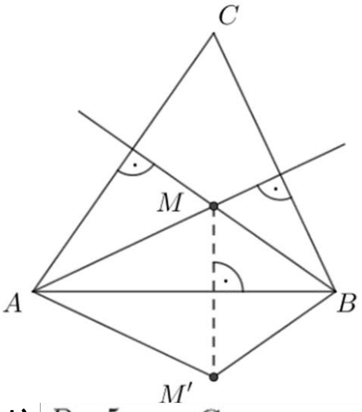
$\sin 28{,}1^\circ \approx \frac{m}{15}$ (1 pont)

***m* ≈ 7,1 cm** (1 pont)

b) Mivel az ABC háromszög derékszögű, így a Thálész-tétel megfordítása miatt a körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, (1 pont)
ezért a kör sugara $8{,}5$ cm (1 pont)
A köt területe $8{,}5^2 \cdot \pi \approx$ **227 cm²** (1 pont)

c) A két átfogó hosszának aránya $\frac{13{,}6}{17} = 0{,}8$. (1 pont)
A DEF háromszög két befogója 6,4 és 12 cm hosszú. (1 pont)
A DEF háromszög területe $38{,}4\ \text{cm}^2$, míg az ABC háromszög területe $60\ \text{cm}^2$ (1 pont)

A DEF háromszög területe $\frac{38,4}{60}\cdot 100 = \mathbf{64\%}$-a az ABC háromszög területének.

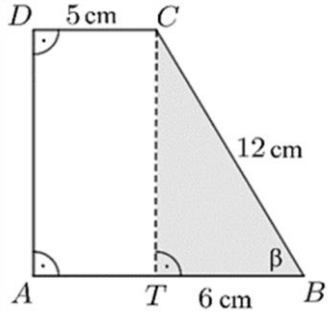


49) Az *ABCD* derékszögű trapézban az *A* és a *D* csúcsnál van derékszög. Az *AB* alap 11 cm, a *BC* szár 12 cm, a *CD* alap 5 cm hosszú.

a) Igazolja, hogy a trapéz *B* csúcsánál lévő szög nagysága 60°, és számítsa ki a trapéz területét!

(7 pont)

b) Számítsa ki az *ABC* háromszög *C* csúcsánál lévő szögét! **(4 pont)**

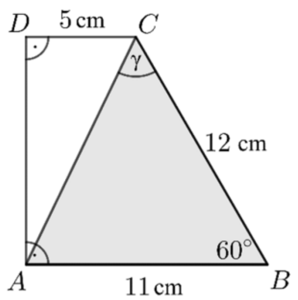


Megoldás:

a) Ha behúzzuk a trapéz CT magasságát (Lásd: az ábrán), derékszögű háromszöget kapunk, melyből $\cos\beta = \frac{6}{12}$, tehát $\beta = 60^\circ$ (3 pont)

A terület kiszámításához szükségünk van a CT magasságra, mely a BCT háromszögből kiszámolható Pitagorasz-tétellel: $CT = \sqrt{144-36} = \sqrt{108}\,(\approx 10,39\,\text{cm})$. (2 pont)

A trapéz területe: $T = \frac{(11+5)\cdot\sqrt{108}}{2} \approx \mathbf{83,1\,cm^2}$ (2 pont)



b) Az ABC háromszögből koszinusztétellel kiszámolhatjuk az AC oldalt: $AC^2 = 11^2 + 12^2 - 2\cdot 11\cdot 12\cdot\cos 60^\circ = 133$.

Szinusztétellel megkaphatjuk a keresett szöget: $\frac{\sin\gamma}{\sin 60^\circ} = \frac{11}{\sqrt{133}} \Rightarrow \sin\gamma \approx 0,8260 \Rightarrow \boldsymbol{\gamma \approx 55,7^\circ}$

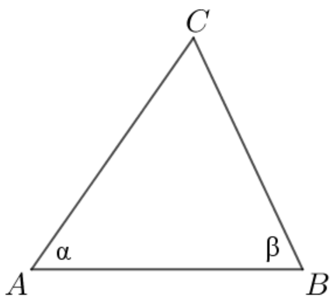
(3 pont)

Összesen: 11 pont

50) Adott a derékszögű koordináta-rendszerben a $P(-2;3)$ és a $K(3;15)$ pont.

a) Tükrözzük a *P* pontot a *K* pontra. Számítsa ki az így kapott *P'* pont koordinátáit! (4 pont)

Az *ABC* háromszög szögeinek nagysága: $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 65^\circ$. A háromszög *A*, illetve *B* csúcsához tartozó magasságvonalainak metszéspontját jelölje *M*. Az *M* pontot az *AB* oldal egyenesére tükrözve az *M'* pontot kapjuk.



b) Határozza meg az *AM'BC* négyszög belső szögeinek nagyságát! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 41. feladat*

b) A szöveg alapján ábrát készítünk: (1 pont)

A háromszög belső szögeinek összege 180°, így $ACB\sphericalangle = \mathbf{60^\circ}$. (1 pont)

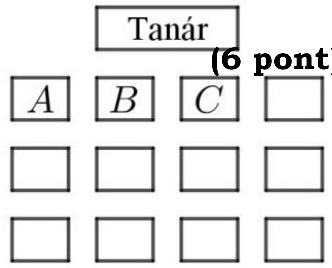
A derékszögű háromszögek miatt $MAB\sphericalangle = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ és $MBA\sphericalangle = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$, így a tükrözés miatt $CBM'\sphericalangle = \left(55^\circ + 25^\circ\right) = \mathbf{80^\circ}$ és $CAM'\sphericalangle = 65^\circ + 35^\circ = \mathbf{100^\circ}$. (4 pont)

$AM'B\sphericalangle = 360^\circ - \left(60^\circ + 80^\circ + 100^\circ\right) = \mathbf{120^\circ}$. (2 pont)

Összesen: 12 pont

51) Barnabás telefonján a képernyő átlója 5,4 col (1 col ≈ 25,4 mm), a képernyő oldalainak aránya 16:9. A telefon téglalap alakú előlapján a képernyő alatt és felett 12-12 mm, két oldalán 3-3 mm szélességű szegély van.

a) Mekkorák a telefon előlapjának oldalai? Válaszát egész mm-re kerekítve adja meg! (6 pont)



Az írásbeli érettségi vizsga megkezdése előtt a felügyelő tanár megkéri a vizsgázókat, hogy telefonjaikat kikapcsolt állapotban tegyék ki a tanári asztalra. Általános tapasztalat, hogy egy-egy diák a „vizsgaláz” miatt 0,02 valószínűséggel bekapcsolva felejti a telefonját.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a teremben lévő 12 vizsgázó közül legalább egy bekapcsolva felejti a telefonját? (3 pont)

A vizsgateremben lévő 12 egyszemélyes pad négy egymás melletti oszlopba van rendezve. Mindegyik oszlopban három egymás mögötti pad áll. Julcsi és Tercsi jó barátnők, elhatározzák, hogy a vizsgán két egymás melletti padba ülnek. (Például ha Julcsi a B-vel jelölt padban ül, akkor Tercsi az A vagy C jelű padot foglalja el.)

c) Hányféleképpen ülhet le a 12 vizsgázó a teremben úgy, hogy Julcsi és Tercsi valóban két egymás melletti padban üljön? (5 pont)

Az iskolában érettségiző 100 tanuló matematika írásbeli érettségi vizsgájának pontszámairól készült összesítést mutatja a táblázat.

Pontszám	Tanulók száma
0-20	0
21-30	8
31-40	12
41-50	8
51-60	18
61-70	20
71-80	12
81-90	16
91-100	6

d) A táblázat alapján mennyi a 100 tanuló pontszámának lehetséges legmagasabb átlaga? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel 1 col $= 25{,}4\,\text{mm}$, és a képernyő átlója 5,4 col, a kijelző átlója $5{,}4 \cdot 25{,}4 \approx 137{,}2\,\text{mm}$. (1 pont)

A kijelző oldalait milliméterben jelölje $16x$ és $9x$. A Pitagorasz-tételt felírva: $(16x)^2 + (9x)^2 = 137{,}2^2$, amiből $x \approx 7{,}47$. (3 pont)

A kijelző két oldala kb. 120 (mm) és 67 (mm). (1 pont)

Hozzáadva a szegélyeket, a telefon előlapjának oldalai **144 mm** és **73 mm** hosszúak**.** (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 64. feladat*

c) *Lásd: Kombinatorika 37. feladat*

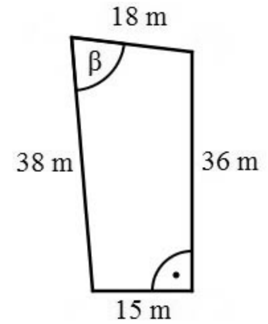
d) *Lásd: Statisztika 50. feladat*

Összesen: 17 pont

52) A Molnár házaspár építési telket vásárolt. Öt évvel korábban egy bankban 7 millió Ft-ot helyeztek el kamatos kamatra. Az 5 év elteltével Molnárék 8 115 000 Ft-ot vehettek fel a bankból.

a) Hány százalékos kamatot fizetett évente a bank, ha a kamatláb az 5 év során nem változott? (4 pont)

Az építési telket egy olyan övezetben vásárolták, ahol a telkek területének a 20 százaléka építhető be. A megvásárolt telek méretei az ábrán láthatók. A telek 15 méteres és 36 méteres oldala merőleges egymásra.



b) Határozza meg a 18 méter és a 38 méter hosszú oldalak által bezárt szög (β) nagyságát, és számítsa ki a telken beépíthető rész területét! (9 pont)

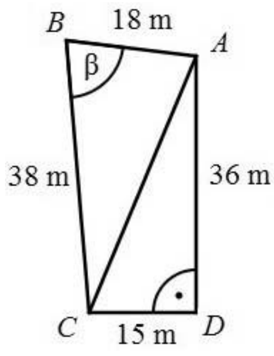
Molnár úr kulcscsomóján négy ugyanolyan kinézetű kulcs van, amelyek közül az egyik az új telek kapuját nyitja. Molnár úr általában nem találja el elsőre, hogy melyik kulcs való ebbe a zárba.

c) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a kapuhoz érve Molnár úr először nem a megfelelő kulccsal próbálja kinyitni a kaput, de a második próbálkozása már sikeres lesz! (Molnár úr két különböző kulcsot próbál a zárba.) (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 51. feladat*

b) Az *ACD* háromszögben Pitagorasz-tétellel: $AC=\sqrt{36^2+15^2}=39\text{ m}$ (1 pont)



Az *ABC* háromszögben felírva a koszinusztételt: $39^2=18^2+38^2-2\cdot 18\cdot 38\cdot\cos\beta$. (1 pont)

Innen $\cos\beta=\dfrac{13}{72}\approx 0{,}1806\Rightarrow\beta=79{,}6^\circ$ (2 pont)

Az *ACD* háromszög területe: $\dfrac{36\cdot 15}{2}=270\,\text{m}^2$. (1 pont)

Az *ABC* háromszög területe: $\dfrac{18\cdot 38\cdot\sin 79{,}6^\circ}{2}=336{,}4\text{m}^2$. (1 pont)

A vásárolt telek területe tehát $270+336{,}4=606{,}4\text{m}^2$, a beépíthető terület pedig $606{,}4\cdot 0{,}2\approx$ $\mathbf{121m^2}$. (3 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 65. feladat*

Összesen: 17 pont

53) Egy háromszög belső szögeinek aránya 2:3:7. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge? (2 pont)

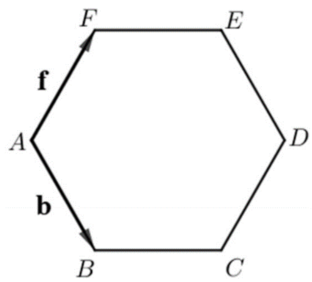
Megoldás:

Egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így legkisebb szöge

$\frac{180}{2+3+7} \cdot 2 = \mathbf{30°}$-os lesz. (2 pont)

Összesen: 2 pont

54) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB}$ és $\boldsymbol{f} = \overrightarrow{AF}$. Fejezze ki a *b* és *f* vektorok segítségével az $\overrightarrow{AD}$ vektort!



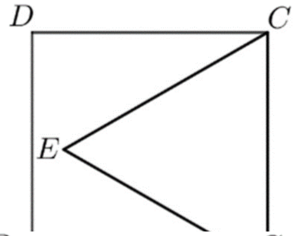
Megoldás:

A paralelogramma módszert alkalmazva a vektorok összeadására belátható, hogy $\overrightarrow{AD} = \mathbf{2b + 2f}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

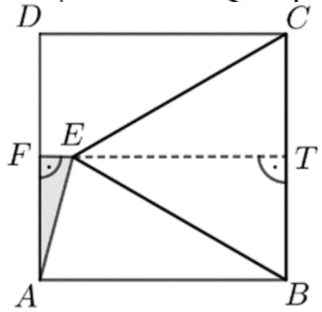
55) Az *ABCD* négyzet oldalának hossza 12 egység. A négyzet belsejében kijelöltük az *E* pontot úgy, hogy $BC = BE = 12$ egység legyen (lásd az ábrát).

a) Számítsa ki az *A* és *E* pontok távolságát! (5 pont)



Egy bronzból készült, szabályos négyoldalú gúla alakú tömörtest (piramis) minden éle 10 cm hosszúságú.

b) Számítsa ki a gúla tömegét, ha 1 dm³ bronz tömege 8 kg!



Megoldás:

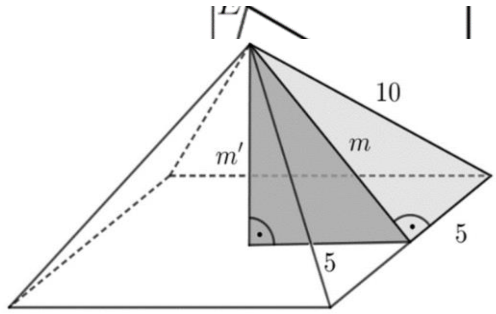
a) A *BCE* háromszög szabályos, ezért $CBE\sphericalangle = 60°$ (1 pont)

Az *ABE* (egyenlő szárú) háromszögben tehát $ABE\sphericalangle = 90° - 60° = 30°$.

Az *AE* szakasz hosszát koszinusztétellel számolva:

$AE^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot \cos 30° \approx 38{,}58$.

Így $\mathbf{AE \approx 6{,}21}$ egység.



Alternatív megoldás:

A *BCE* szabályos háromszögben az *ET* magasság hossza Pitagorasz-tétellel: $ET = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108}$. (2 pont)

ET egyenese az *AD* oldalt az *F* felezőpontban metszi, így $EF = 12 - \sqrt{108} \approx 1{,}61$. (1 pont)

Az *AEF* derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

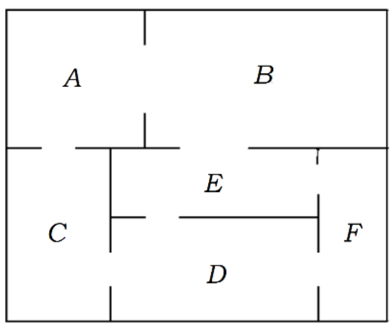
$AE = \sqrt{6^2 + 1{,}61^2} \approx \mathbf{6{,}21}$. (2 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 40. feladat*

Összesen: 12 pont

56) Az ábrán egy kis múzeum alaprajzát látjuk. A múzeum termei közötti kapcsolatot gráffal is szemléltethetjük. A gráf pontjai a termek, élei pedig az átjárók a termek között. (Egy él egy átjárót szemléltet két terem között.)

a) Rajzolja fel a múzeum termeit és átjáróit szemléltető gráfot! (2 pont)



A múzeumba háromféle belépőjegyet lehet váltani:

Teljes árú jegy	**400 Ft**
Kedvezményes jegy (gyerek, diák, pedagógus, nyugdíjas)	**250 Ft**
Fotójegy (belépőjegy és fényképezőgép-használat)	**500 Ft**

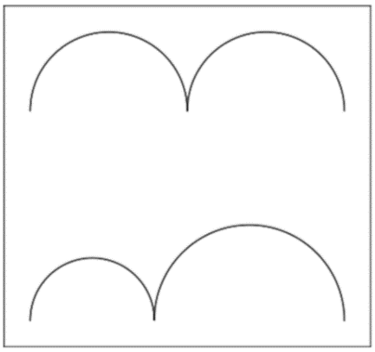
Januárban négyszer annyi kedvezményes belépőjegyet adtak el, mint teljes árú jegyet, továbbá az eladott fotójegyek száma az eladott teljes árú jegyek számának 12,5%-a volt. A múzeum belépőjegy-eladásból származó bevétele januárban 912 600 Ft volt.

b) Hány belépőjegyet adtak el januárban összesen? (4 pont)

Csilla, Dezső, Emese, Feri és Gyöngyi délelőtt 10-re beszéltek meg találkozót a múzeum előtt. Sorban egymás után érkeznek (különböző időpontokban), véletlenszerűen.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egy lánynak kell várakoznia fiúra? (6 pont)

A kiállításon több gondolkodtató, minimalista kép is szerepel. Dezső szerint az ábrán látható, csatlakozó félköröket ábrázoló kép címe azért „Egyenlőség”, mert a felső és az alsó görbe vonal hossza egyenlő. A felső görbét alkotó két egyforma félkör átmérőjének összege 48 cm. Az alsó görbét alkotó két félkör átmérőjének összege szintén 48 cm.



d) Igaz-e Dezső sejtése, hogy a két görbe vonal hossza egyenlő? (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Logika, gráfok 36. feladat*
b) *Lásd: Térgeometria 49. feladat*
c) *Lásd: Valószínűségszámítás 67. feladat*
d) A felső görbe két félkörívének sugara 12 cm, így hossza összesen: $2 \cdot 0{,}5 \cdot 12 \cdot 2 \cdot \pi = 24\pi$. (1 pont)

Ha az alsó görbénél az egyik félkör sugara *r*, akkor a másik félkör sugara $24-r$. (1 pont)

Az alsó görbe két félkörívének hossza összesen: $r\pi + (24-r)\pi = 24\pi$. (2 pont)

Tehát **Dezsőnek igaza van**. (1 pont)

Összesen: 17 pont

57)

a) Egy számtani sorozat első és harmadik tagjának összege 8. A sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 9. Adja meg a sorozat első tíz tagjának összegét! (7 pont)

b) Egy derékszögű háromszög egyik befogója 8 cm-rel, a másik 9 cm-rel rövidebb, mint az átfogó. Mekkorák a háromszög oldalai? (7 pont)

Megoldás:

a) Felírható a következő egyenletrendszer: $\left.\begin{matrix} 2a_1 + 2d = 8 \\ 3a_1 + 9d = 9 \end{matrix}\right\}$ (2 pont)

Az első egyenletből a_1-et kifejezve: $a_1 = \frac{8-2d}{2} = 4 - d$. (1 pont)

Ezt a másik egyenletbe helyettesítve: $12 - 3d + 9d = 9$, azaz $6d = -3$. (1 pont)

Az egyenletrendszer megoldása $a_1 = 4{,}5$ és $d = -0{,}5$. (1 pont)

Az első tíz tag összege: $S_{10} = \frac{2 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 10 = \mathbf{22{,}5}$. (2 pont)

Alternatív megoldás:

A számtani sorozat tulajdonságai alapján $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = 4$ és $a_4 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = 3$ (3 pont)

A differencia: $d = \frac{a_4 - a_2}{2} = -0{,}5$. (1 pont)

Az első tag: $a_1 = a_2 - d = 4{,}5$ (1 pont)

Az első tíz tag összege: $S_{10} = \frac{2 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot (-0{,}5)}{2} \cdot 10 = \mathbf{22{,}5}$. (2 pont)

b) A háromszög átfogójának hosszát jelölje *c*, ekkor a két befogó hossza $a = c - 8$, illetve $b = c - 9$. (1 pont)

A Pitagorasz-tétel alapján: $(c-8)^2 + (c-9)^2 = c^2$. (1 pont)

A zárójeleket felbontva: $c^2 - 16c + 64 + c^2 - 18c + 81 = c^2$, (1 pont)

innen $c^2 - 34c + 145 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet megoldásai $c_1 = 5$ és $c_2 = 29$. (1 pont)

Ha $c = 5$ lenne, akkor a befogók hosszára negatív értéket kapnánk, így ez nem megoldás. (1 pont)

Így a háromszög oldalai: $a = $ **21 cm**, $b = $ **20 cm** és $c = $ **29 cm**. (1 pont)

Összesen: 14 pont

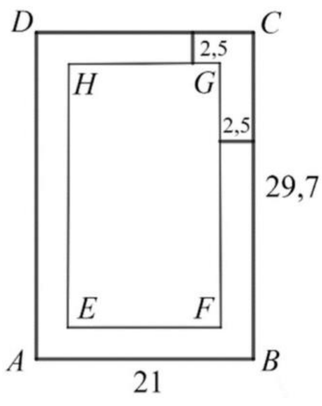
58) Egy A4-es papírlapot négy egyforma kisebb lapra vágtunk. Ezekre a kisebb lapokra felírtuk az 1, 2, 3, 4 számokat, mindegyik lapra egy számot. A négy lapot véletlenszerűen sorba rakjuk.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy így sem két páros, sem két páratlan szám nem kerül egymás mellé? (4 pont)

Egy A4-es papírlap vastagsága 0,1 mm. Egy ilyen papírlapot kettévágunk, majd a keletkező két fél lapot egymásra tesszük. Az így kapott „kupacot” ismét kettévágjuk, és a keletkező négy negyedlapot egymásra tesszük (a kupac magassága ekkor 0,4 mm). Ezt a műveletet tovább folytatjuk, tehát először egy vágással a kupacot kettévágjuk, majd a keletkező lapokat egymásra tesszük. Azt tervezzük, hogy ezt a műveletet összesen 20-szor hajtjuk végre. Luca szerint, ha ezt meg tudnánk tenni, akkor a 20 vágás és egymásra rakás után keletkező kupac magasabb lenne, mint 100 méter.

b) Igaza van-e Lucának? Válaszát számítással igazolja! (4 pont)

Egy A4-es papírlap méretei: 21 cm × 29,7 cm. A szövegszerkesztő programok általában 2,5 cm-es margóval dolgoznak, vagyis a papírlap minden oldalától számítva egy-egy 2,5 cm-es sáv üresen marad (lásd az ábrát). A lap közepén a szövegnek fennmaradó rész szintén téglalap alakú. Zsófi szerint az *ABCD* és az *EFGH* téglalapok hasonlók.



c) Igaza van-e Zsófinak? Válaszát indokolja! (5 pont)

Tekintsük a következő állítást:
Ha két négyszög hasonló, akkor megfelelő szögeik páronként egyenlők.

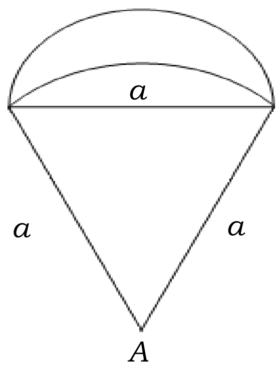
d) Adja meg az állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Írja fel az állítás megfordítását, és adja meg a megfordítás logikai értékét is! Ez utóbbi válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 69. feladat*
b) *Lásd: Szöveges feladatok 52. feladat*
c) Ha két téglalap hasonló, akkor megfelelő oldalaik aránya egyenlő. (1 pont)
Az *EFGH* téglalap egyik oldala $21-5=16$ cm, a másik oldala $29{,}7-5=24{,}7$ cm hosszú. (1 pont)
Az *EF* és *AB* szakaszok aránya $\frac{16}{21} \approx 0{,}76$. (1 pont)
Az *FG* és *BC* szakaszok aránya $\frac{24{,}7}{29{,}7} \approx 0{,}83$. (1 pont)
A két arány nem egyenlő, így a két téglalap nem hasonló, Zsófinak tehát **nincs igaza**. (1 pont)
c) *Lásd: Logika, gráfok 38. feladat*

Összesen 17 pont

59) Az ábrán egy ejtőernyős klub kitűzője látható. (Az egyik körív középpontja a szabályos háromszög *A* csúcsa, a másik körív középpontja az *A* csúccsal szemközti oldal felezőpontja.)
Ezt a lapot fogják tartományonként színesre festeni.



a) Számítsa ki egyenként mindhárom tartomány területét, ha $a=2{,}5$ cm! Számításait legalább két tizedesjegy pontossággal végezze, és az így kapott eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)

b) Hányféle módon festhető színesre a kitűző, ha minden tartományt a piros, sárga, zöld és kék színek valamelyikére festenek a következő két feltétel együttes figyelembe vételével:
(1) szomszédos tartományok nem lehetnek azonos színűek;
(2) piros és sárga színű tartomány nem lehet egymás mellett.
(Szomszédos tartományoknak van közös határvonala.) (11 pont)

Megoldás:

a) Az a oldalú szabályos háromszög területe:

$t_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \approx 2,7\left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A szabályos háromszög feletti tartomány egy a sugarú kör 60°-os középponti szögéhez tartozó körszelet, (1 pont)

amelynek területe:

$t_2 = \frac{a^2\pi}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,6\left(\text{cm}^2\right)$ (1 pont)

A legfelső „holdacska" területét úgy kapjuk, hogy az $\frac{a}{2}$ sugarú félkör területéből kivonjuk a körszelet területét. (1 pont)

$t_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi - t_2 = \frac{a^2\pi}{8} - \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$ (1 pont)

$= \frac{a^2}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx \mathbf{1,9\left(cm^2\right)}$. (1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 16. feladat*

Összesen: 17 pont

60) Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x = 1$, valamint az $y = 1$ egyenletű egyenesek.

a) Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit! (2 pont)

b) Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét! (5 pont)

c) Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének? (2 pont)

d) Az $y = -4x + 2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Koordinátageometria 6. feladat*

b) *Lásd: Koordinátageometria 6. feladat*

c) $K_{\text{négyzet}} = 4$; $K_{\text{négyzet}} = 2r\pi = \sqrt{2}\pi \approx 4,44$ (1 pont)

$\frac{4}{4,44} \approx 0,90$ vagyis **90%-a**. (1 pont)

d) *Lásd: Koordinátageometria 6. feladat*

Összesen: 17 pont

61) Egy háromszög 11 cm hosszú oldalával szemközti szöge $45°$-os. Ennek a háromszögnek van egy $122°$-os szöge is.

Hány cm hosszú a háromszög $122°$-os szögével szemközti oldala? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

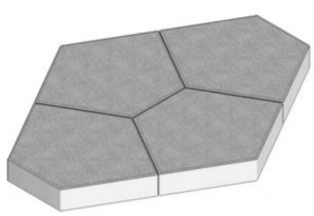
A kérdezett oldal hosszát α-val jelölve, a szinusztétel alapján:

$\frac{\alpha}{11} = \frac{\sin 122°}{\sin 45°}$ (2 pont)

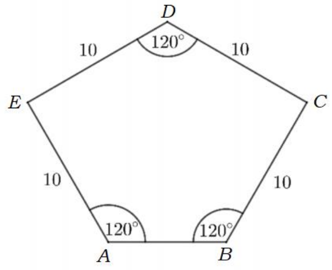
Ebből $\alpha = \left(\frac{\sin 122°}{\sin 45°}\cdot 11 \approx\right)$ **13,2 cm**. (1 pont)

Összesen: 3 pont

62) **Egy sétálóutca díszburkolatát ötszög alapú egyenes hasáb alakú kövekkel készítik el. (Az ábrán négy ilyen követ lehet látni a burkolaton megfigyelhető elrendezésben.)**



A kő alapját képző *ABCDE* ötszög tengelyesen szimmetrikus (egy, a *D* csúcson átmenő egyenesre), négy oldala 10 cm hosszú, három szöge $120°$-os, az ábrának megfelelően.



a) Számítással igazolja, hogy az *AED* és *BCD* háromszög derékszögű! (2 pont)

b) Számítsa ki az *ABCDE* ötszög területét! (6 pont)

Róbert egy járdaszakaszt egyedül 20 óra alatt burkolna le ezzel a kővel, Sándor ugyanazt a munkát egyedül 30 óra alatt végezné el.

c) Mennyi idő alatt végeznek, ha együtt dolgoznak? (4 pont)

Ezt a követ szürke és sárga színben árulják a kereskedésben. A dobozokon matrica jelzi a dobozban lévő kövek színét. Állítólagosan minden századik dobozon rossz a matrica: szürke helyett sárga vagy fordítva. (Ezt tekinthetjük úgy, hogy 0,01 annak a valószínűsége, hogy rossz matrica kerül a dobozra.)

Péter kiválaszt 21 szürke jelzésű dobozt, és ellenőrzi a dobozokban lévő kövek színét.

d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 21 kiválasztott doboz közül legalább 20 dobozban valóban szürke kő van? (5 pont)

Megoldás:

a) Az ötszög belső szögeinek összege $3 \cdot 180° = 540°$ (1 pont)

A hiányzó szögek nagysága

$\mathbf{(540° - 3 \cdot 120°) : 2 = 90°}$. (1 pont)

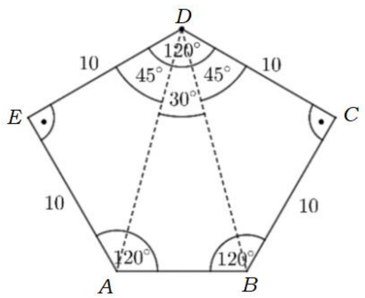
b) Az *AD* és *BD* átlók az ötszöget két egyenlőszárú derékszögű háromszögre és egy harmadik (egyenlőszárú) háromszögre bontják. (1 pont)

$T_{AED} = T_{BCD} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50\ (\text{cm}^2)$ (1 pont)

Az *AD* és *BD* szakasz hossza Pitagorasz-tétellel:

$\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14,14\ (\text{cm})$. (1 pont)

Az *ADB* háromszögben a szárak által bezárt szög $30°$-os, így a háromszög



területe: $T_{ADB} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \sin 30°}{2} = 50\ (\text{cm}^2)$. (2 pont)

Tehát az ötszög terület: $\mathbf{T_{ABCDE} = 2 \cdot 50 + 50 = 150\ cm^2}$ (1 pont)

c) *Lásd: Szöveges feladatok 55. feladat* *d) Lásd: Valószínűségszámítás 74. feladat*

Összesen: 17 pont

63) Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 40 cm, *AB* átfogójának hossza 41 cm.

a) Mekkora a háromszög területe? Válaszát dm^2-ben adja meg! (5 pont)

b) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)

c) Mekkora a háromszög köré írt kör kerülete? Válaszát egész centiméterre kerekítve adja meg! (4 pont)

Megoldás:

a) A Pitagorasz-tétel alapján: $AC^2+40^2=41^2$, (1 pont)
amiből $AC=9$ cm. (1 pont)
A háromszög területe $T=\dfrac{9\cdot 40}{2}$ (1 pont)
A háromszög területe: 180 cm^2 (1 pont)
A kért kerekítéssel: $\mathbf{1{,}8\ dm^2}$. (1 pont)

b) A háromszög A csúcsánál lévő szögét α-val jelölve $\sin\alpha=\dfrac{40}{41}$ (1 pont)
amiből $\boldsymbol{\alpha\approx 77{,}32°}$ (1 pont)
A B csúcsánál lévő szög $\boldsymbol{\beta=90°-\alpha=12{,}68°}$. (1 pont)

c) A Thalész-tétel megfordítása miatt a derékszögű háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja. (1 pont)
A háromszög köré írt kör átmérője tehát $d=41$ cm. (1 pont)
A kör kerülete $K=d\cdot\pi=41\pi$ (1 pont)
A kért kerekítéssel $\boldsymbol{K=129}$ **cm**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

64) Egy négyszög belső szögeinek aránya $1:2:3:4$. Hány fokos a négyszög legnagyobb szöge? Válaszát indokolja! (4 pont)

Megoldás:

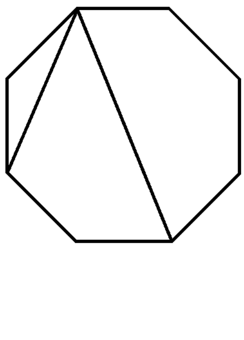
Mivel egy négyszög belső szögeinek összege 360°, a legkisebb szöget α-val jelölve:
$\alpha+2\alpha+3\alpha+4\alpha=360°$. (2 pont)
Ebből $\alpha=36°$. (1 pont)
A legnagyobb szög: $4\cdot 36°=$ **144°**. (1 pont)

Összesen: 4 pont

65) Egy szabályos sokszög egyik csúcsából behúztunk két átlót, így a sokszöget egy háromszögre, egy négyszögre és egy ötszögre bontottuk. Hány oldalú a szabályos sokszög? (2 pont)

Megoldás:

Egy lehetséges megoldás grafikus ábrázolása:



(1 pont)

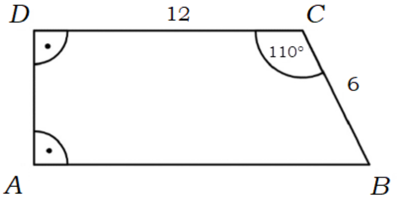
Tehát a sokszög **8** oldalú. (1 pont)

Összesen: 2 pont

66) Az *ABCD* derékszögű trapéz 6 cm-es *BC* szára $110°$-os szöget zár be a 12 cm-es *CD* alappal.

a) Számítsa ki a trapéz másik két oldalának a hosszát!

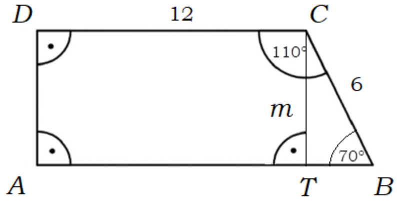
b) Számítsa ki a *BCD* háromszög *BD* oldalának hosszát és ismeretlen szögeinek nagyságát!



Megoldás:

a) Mivel a négyszög belső szögeinek összege $360°$, az $ABC\measuredangle = 360° - (2 \cdot 90° + 110°) = 70°$.

A magasságvonalat behúzva a *BCT* háromszögben felírhatjuk a $\sin 70° = \frac{m}{6}$ egyenlőséget. (1 pont)



Innen megkapjuk a trapéz magasságát, ami egyenlő az *AD* oldal hosszával: $m = AD \approx$ **5,64 cm**. (1 pont)

A Pitagorasz-tételt felírva: $TB^2 + m^2 = 36$. (1 pont)

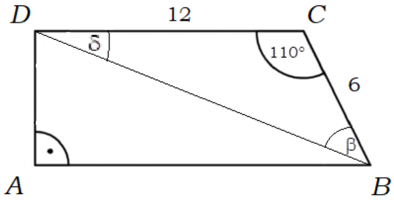
Innen: $TB \approx 2{,}05$ cm. (1 pont)

Így a másik ismeretlen oldal hossza: $AB \approx 12 + 2{,}05 \approx$ **14,05 cm**. (1 pont)

b) A *BCD* háromszögben a koszinusztételt felírva: $BD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos 110°$.

Innen: $BD \approx$ **15,14 cm**.

Ugyanebben a háromszögben a szinusztételt felírva: $\frac{6}{15{,}14} = \frac{\sin\delta}{\sin 110°}$



Innen: $\sin\delta \approx 0{,}3724$. (1 pont)

Mivel $\delta < 90°$, ezért $\delta \approx$ **21,9°**. (1 pont)

A másik ismeretlen szög pedig: $\beta = 180° - 110° - 21{,}9° =$ **48,1°**. (1 pont)

Összesen: 12 pont

67) A háromszög alábbi nevezetes vonalai közül melyek azok, amelyek mindig illeszkednek a háromszög valamelyik oldalfelező pontjára? (Adja meg a megfelelő betűjeleket!)

A) magasságvonal

B) középvonal

C) súlyvonal

D) szögfelező

E) oldalfelező merőleges **(3 pont)**

Megoldás:

A középvonal a háromszög két oldalfelező pontját köti össze, a súlyvonal egy oldalfelező pontot a szemközti csúccsal köt össze, az oldalfelező merőleges pedig az oldal felezőpontjára bocsátott merőleges egyenes, ezek minden esetben illeszkednek a háromszög valamelyik oldalfelező pontjára. Így a helyes válaszok: **B, C és E**. (3 pont)