Exponenciális és logaritmusos feladatok
Megoldások

1) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\log_3\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2$**, ahol x valós szám és $x>-1$** **(6 pont)**

b) $2\cos^2 x = 4-5\sin x$**, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus definíciója szerint $\sqrt{x+1}+1=3^2$ (2 pont)

$\sqrt{x+1}=8$ (1 pont)

$x+1=64$ (1 pont)

$\boldsymbol{x=63}$ (1 pont)

Ellenőrzés… (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 2. feladat*

Összesen: 17 pont

2) Mekkora x értéke, ha $\lg x=\lg 3+\lg 25$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\lg x=\lg(3\cdot 25)$ (1 pont)

Mivel a 10-es alapú logaritmusfüggvény szig. monoton nő,

$\boldsymbol{x=75}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ **(6 pont)**

b) $\sin^2 x=2\sin x+3$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Legyen $3^x=a$

Az $a^2-2a-3=0$ másodfokú egyenletet kell megoldani. (1 pont)

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1=3$ és $a_2=-1$ (1 pont)

$a=3^x=3$ esetén $x=1$ (1 pont)

$a=3^x=-1$ egyenlet nem ad megoldást, (1 pont)

mert 3 minden valós kitevőjű hatványa pozitív szám. (1 pont)

Az $x=1$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 3. feladat*

Összesen: 12 pont

4) Adott a következő egyenletrendszer:

(1) $2\lg(y+1)=\lg(x+11)$

(2) $y=2x$

a) Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azokat a $P(x;y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik a (2) egyenletet! **(2 pont)**

b) Milyen x, illetve y valós számokra értelmezhető mindkét egyenlet? **(2 pont)**

c) Oldja meg az egyenletrendszert a valós számpárok halmazán! **(11 pont)**

d) Jelölje meg az egyenletrendszer megoldáshalmazát az a) kérdéshez használt derékszögű koordináta-rendszerben! **(2 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Függvények 7. feladat*

b) Az (1) egyenlet miatt $\boldsymbol{y > -1}$ (1 pont)

és $\boldsymbol{x > -11}$ (1 pont)

c) *Lásd: Függvények 7. feladat*

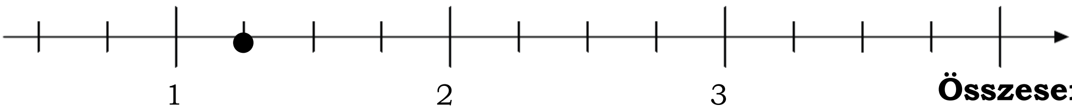
d) *Lásd: Függvények 7. feladat*

Összesen: 17 pont

5) Oldja meg a pozitív valós számok halmazán a $\log_{16} x = -\frac{1}{2}$ egyenletet! Jelölje a megadott számegyenesen az egyenlet megoldását! (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$ (2 pont)



(1 pont)

Összesen: 3 pont

6) Melyik a nagyobb: $A = \frac{\sin 7\pi}{2}$ vagy $B = \log_2 \frac{1}{4}$? (Írja a megfelelő relációs jelet a válaszmezőbe! Válaszát indokolja!) (2 pont)

Megoldás:

$A = 0$, $B = -2$ (1 pont)

$\boldsymbol{A > B}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

7) Adja meg a $\lg x^2 = 2\lg x$ egyenlet megoldáshalmazát! (2 pont)

Megoldás:

A pozitív valós számok halmaza. (2 pont)

Összesen: 2 pont

8) a) Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$\boldsymbol{5^{x-2} < 5^{13-2x}}$ **(4 pont)**

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget!

$\boldsymbol{9^{\sqrt{x}} < 3^{x-3}}$ **(8 pont)**

Megoldás:

a) Az (5 alapú exponenciális) függvény szigorúan monoton növekedése miatt (1 pont)

$x - 2 < 13 - 2x$ (1 pont)

$x < 5$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása: $\{\mathbf{1};\mathbf{2};\mathbf{3};\mathbf{4}\}$ (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$3^{2\sqrt{x}} < 3^{x-3}$ (1 pont)

A (3 alapú exponenciális) függvény szigorú monotonitása miatt $2\sqrt{x} < x - 3$ (1 pont)

$4x < x^2 - 6x + 9$ (1 pont)

$x^2 - 10x + 9 > 0$ (1 pont)

$x < 1 \quad x > 9$ (1 pont)

Az egyenlőtlenség megoldása, a valós számok halmazán: $\boldsymbol{x \in [0;1[\cup]9;\infty[}$

(2 pont)

Összesen: 12 pont

9) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\lg(x+15)^2 - \lg(3x+5) = \lg 20$ **(6 pont)**

b) $25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) Értelmezési tartomány: $x > -\frac{5}{3}$ (1 pont)

A logaritmus azonosságának helyes alkalmazása. (1 pont)
(A lg függvény kölcsönösen egyértelmű.)

$(x+15)^2 = 20(3x+5)$ (1 pont)

$x^2 - 30x + 125 = 0$ (1 pont)

$\boldsymbol{x_1 = 25}$ és $\boldsymbol{x_2 = 5}$ (1 pont)

Mindkét megoldás megfelel. (1 pont)

b) $x \geq 0$ (1 pont)

$5^{2\sqrt{x}} = 5^{1+3\sqrt{x}}$ (2 pont)

$\sqrt{x} = -1$ (1 pont)

A négyzetgyök értéke nemnegatív szám, ezért (1 pont)

nincs valós megoldás. (1 pont)

Összesen: 12 pont

10) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$ **(7 pont)**

b) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalán szereplő szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. (1 pont)

Ha az első tényező 0, akkor $\log_2 x = 3$ (1 pont)

Innen $\boldsymbol{x_1 = 2^3 = 8}$ (1 pont)

Ha a második tényező 0, akkor $\log_2 x^2 = -6$ (1 pont)

Innen $x^2 = 2^{-6} = \frac{1}{64}$ (1 pont)

ahonnan a pozitív tartományba csak az $\boldsymbol{x_2 = \frac{1}{8}}$ (1 pont)

Mind a két gyök kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) *Lásd: Trigonometria 6. feladat*

Összesen: 17 pont

11) Adja meg a $\log_3 81$ kifejezés pontos értékét! **(2 pont)**

Megoldás:

A kifejezés értéke **4**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

12) Mennyi az $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ kifejezés értéke, ha $x=-1$? (2 pont)

Megoldás:

A kifejezés értéke: **25**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

13) Az *a*, *b* és *c* tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Tudjuk, hogy

$$\lg x = 3\lg a - \lg b + \frac{1}{2}\lg c$$

Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen *x* értékét! (3 pont)

A: $x=\frac{3a}{b}+\frac{1}{2}c$

B: $x=a^3-b+\sqrt{c}$

C: $x=\frac{a^3}{b\cdot\sqrt{c}}$

D: $x=\frac{a^3\cdot c^{-1}}{b}$

E: $x=a^3-b\sqrt{c}$

F: $x=\frac{a^3\cdot\sqrt{c}}{b}$

G: $x=\frac{a^3\cdot\frac{1}{c}}{b}$

Megoldás:

A helyes kifejezés: **F**. (3 pont)

14) A *b*, *c* és *d* pozitív számokat jelölnek. Tudjuk, hogy $\lg b=\frac{\lg c-\lg d}{3}$.

Fejezze ki az egyenlőségből *b*-t úgy, hogy abban *c* és *d* logaritmusa ne szerepeljen! (2 pont)

Megoldás:

$b=\sqrt[3]{\frac{c}{d}}$ vagy $b=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$ (2 pont)

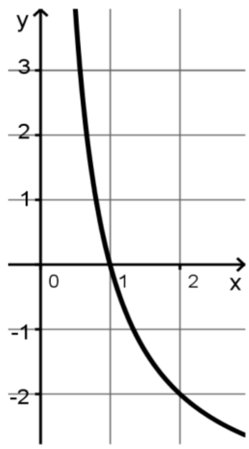
15) Melyik szám nagyobb?

$A=\lg\frac{1}{10}$ **vagy** $B=\cos 8\pi$ **(2 pont)**

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: B $(=\cos 8\pi)$ (2 pont)

16) István az $x\mapsto \log_{\frac{1}{2}} x\,(x>0)$ függvény grafikonját akarta felvázolni, de ez nem sikerült neki, több hibát is elkövetett (a hibás vázlat látható a mellékelt ábrán).



Döntse el, hogy melyik igaz az alábbi állítások közül!

a) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény szigorúan monoton csökkenő.

b) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény 2-höz –2-t rendel.

c) István rajzában hiba az, hogy a vázolt függvény zérushelye 1. (2 pont)

Megoldás:

b). (2 pont)

Összesen: 2 pont

17) Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül: $\log_2 x^2 = 4$. Válaszát indokolja! **(3 pont)**

Megoldás:

A logaritmus definíciója alapján: $x^2 = 16$ (1 pont)

tehát $\boldsymbol{x_{1,2} = \pm 4}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

18) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\boldsymbol{5^{x+1} + 5^{x+2} = 30}$ **(5 pont)**

b) $\boldsymbol{\frac{3}{x} - \frac{2}{x+2} = 1}$**, ahol** $\boldsymbol{x \neq 0}$ **és** $\boldsymbol{x \neq -2}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) $5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$30 \cdot 5^x = 30$ (1 pont)

$5^x = 1$ (1 pont)

(Az 5 alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:

$\boldsymbol{x = 0}$ (1 pont)

Ellenőrzés (1 pont)

b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 10.feladat*

Összesen: 12 pont

19)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! **(7 pont)**

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. **(4 pont)**

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon. **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 11. feladat*

b) $5 \cdot 3^x = 20$ (1 pont)

$3^x = 4$ (1 pont)

$x = \log_3 4$ (1 pont)

$\boldsymbol{x \approx 1{,}2619}$ (1 pont)

c) *Lásd: Trigonometria 13. feladat*

Összesen: 17 pont

20) Melyik az az x természetes szám, amelyre $\log_3 81 = x$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{x = 4}$ (2 pont)

21) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{5}=4$ **(5 pont)**

b) $\lg(x-1)+\lg 4=2$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, Egyenlőtlenségek 15. feladat*

b) Értelmezési tartomány: $x>1$ (1 pont)

Logaritmus-azonosság alkalmazásával: $\lg 4(x-1)=2$ (2 pont)

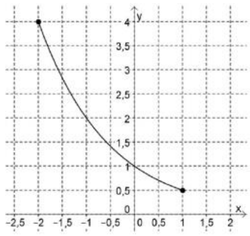
A logaritmus definíció alapján: $4(x-1)=1$ (2 pont)

$\boldsymbol{x=26}$ (1 pont)

Ellenőrzés, visszahelyettesítés (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Az ábrán az $f:[-2;1]\Rightarrow\mathbb{R};\ f(x)=a^x$ függvény grafikonja látható. (3 pont)



a) Adja meg az *f* függvény értékkészletét!

b) Határozza meg az *a* szám értékét!

Megoldás:

a) Az *f* értékkészlete $[\mathbf{0,5;4}]$. (1 pont)

b) $\boldsymbol{a=0,5}$. (2 pont)

Összesen: 3 pont

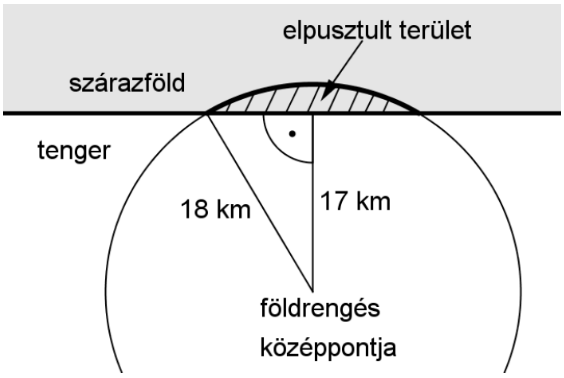
23) Adja meg az *x* értékét, ha $\log_2(x+1)=5$! (2 pont)

Megoldás:

$2^5=x+1$

$\boldsymbol{x=31}$ (2 pont)

24) Újsághír: *„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret.”*



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége” és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M=-4,42+\frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344\cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}\ (J)}$ (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42 + \frac{2}{3}\lg E_c = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E_k + 2$ (1 pont)

Rendezve: $\lg E_c - \lg E_k = 3$ (1 pont)

(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg\frac{E_c}{E_k} = 3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k} = 1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

d) *Lásd: Síkgeometria 39. feladat*

Összesen: 17 pont

25)

a) Mely valós számokra értelmezhető a $\log_2(3-x)$ kifejezés? (1 pont)

b) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$\log_2(3-x) = 0$ (2 pont)

Megoldás:

a) $\boldsymbol{x < 3}$ (1 pont)

b) $\boldsymbol{x = 2}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

26) Egy idén megjelent iparági előrejelzés szerint egy bizonyos alkatrész iránti kereslet az elkövetkező években emelkedni fog, minden évben az előző évi kereslet 6%-ával. (A kereslet az adott termékből várhatóan eladható mennyiséget jelenti.)

a) Várhatóan hány százalékkal lesz magasabb a kereslet 5 év múlva, mint idén? (3 pont)

Az előrejelzés szerint ugyanezen alkatrész ára az elkövetkező években csökkenni fog, minden évben az előző évi ár 6%-ával.

b) Várhatóan hány év múlva lesz az alkatrész ára az idei ár 65%-a?

(5 pont)

Egy cég az előrejelzésben szereplő alkatrész eladásából szerzi meg bevételeit. A cég vezetői az elkövetkező évek bevételeinek tervezésénél abból indulnak ki, hogy a fentiek szerint a kereslet évente 6%-kal növekszik, az ár pedig évente 6%-kal csökken.

c) Várhatóan hány százalékkal lesz alacsonyabb az éves bevétel 8 év múlva, mint idén? (5 pont)

A kérdéses alkatrész egy forgáskúp alakú tömör test. A test alapkörének sugara 3 cm, alkotója 6 cm hosszú.

d) Számítsa ki a test térfogatát! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 33. feladatok*

b) Az ár minden évben várhatóan az előző év ár $0,9$-szorosára változik, (1 pont)

így megoldandó a $0,94^n = 0,65$ egyenlet, (ahol n az eltelt évek számát jelenti.)

(1 pont)

Ebből $n = \frac{\lg 0,65}{\lg 0,94} (\approx 6,96)$. (2 pont)

Azaz várhatóan **7 év múlva** lesz az ár a jelenlegi ár 65%-a. (1 pont)

c) A bevételt a kereslet és az ár szorzatából kapjuk, (1 pont)

így 8 év múlva a jelenlegi bevétel $(1,06 \cdot 0,94)^8 \approx$ (1 pont)

$\approx 0,972$-szerese várható. (2 pont)

Azaz **8 év múlva** a bevétel az ideinél kb. $2,8$%-kal lesz alacsonyabb. (1 pont)

d) *Lásd: Térgeometria 31. feladat*

Összesen: 17 pont

27) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

A) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

B) Minden $x \in \mathbb{R}$ **esetén** $\sqrt{x^2} = x$.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32}$

***Megoldás*:**

A) $\sqrt{(-5)^2} = |(-5)| = 5$, tehát az állítás **igaz**.

B) $\sqrt{x^2} = |x|$, amely állítás negatív x-re nem igaz, tehát az állítás **hamis**.

C) $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$, az állítás így **igaz**. (2 pont)

Összesen: 2 pont

28) Egy 2014 végén készült előrejelzés szerint az Indiában élő tigrisek t száma az elkövetkezendő években (az egyes évek végén) megközelítőleg a következő összefüggés szerint alakul: $t(x) = 3600 \cdot 0,854^x$, ahol x a 2014 óta eltelt évek számát jelöli.

a) Számítsa ki, hogy az előrejelzés alapján 2016 végére hány százalékkal csökken a tigrisek száma a 2014-es év végi adathoz képest! (4 pont)

b) Melyik évben várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökken? (5 pont)

Egy állatkert a tigrisek fennmaradása érdekében tenyésztő programba kezd. Beszereznek 4 hím és 5 nőstény kölyöktigrist, melyeket egy kisebb és egy nagyobb kifutóban kívánnak elhelyezni a következő szabályok mindegyikének betartásával:

I) háromnál kevesebb tigris egyik kifutóban sem lehet;
II) a nagyobb kifutóba több tigris kerül, mint a kisebbikbe;
III) mindkét kifutóban hím és nőstény tigrist is el kell helyezni;
IV) egyik kifutóban sem lehet több hím, mint nőstény tigris.

c) Hányféleképpen helyezhetik el a 9 tigrist a két kifutóban? (8 pont)
(A tigriseket megkülönböztetjük egymástól, és két elhelyezést eltérőnek tekintünk, ha van olyan tigris, amelyik az egyik elhelyezésben más kifutóban van, mint a másik helyezésben.)

***Megoldás*:**

a) A tigrisek száma minden évben az előző évinek $0,854$-szeresére csökken. (1 pont)

Így 2014 és 2016 között a tigrisek száma $0,854^2 \approx 0,73$-szorosára változik. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy a számuk **27%**-kal csökken. (1 pont)

b) A feladat szövege alapján az alábbi egyenletet írhatjuk fel:

$3600 \cdot 0,854^x = 900$. (1 pont)

Az egyenlet megoldása $x \approx 8,78$. (3 pont)

Így 9 év múlva, azaz **2023**-ban várható, hogy a tigrisek száma 900 alá csökkenni. (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 31. feladat*

Összesen: 17 pont

29) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg! (2 pont)

$$\mathbf{2^x = 10}$$

***Megoldás*:**

A kifejezést logaritmus alá visszük és alkalmazzuk a logaritmus azonosságát.

$$\lg 2^x = \lg 10$$

$$x \cdot \lg 2 = \lg 10$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 10} \approx \mathbf{3,322}$$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

30) A mobiltelefonok 1990 végén jelentek meg Magyarországon. Az előfizetések száma gyorsan nőtt: 2002 végén már kb. 7 millió, 2008 végén pedig kb. 12 millió előfizetés volt az országban.

a) Hány százalékkal nőtt a mobiltelefon előfizetések száma 2002 végétől 2008 végéig? (2 pont)

1993 és 2001 között az egyes évek végén nyilvántartott mobiltelefon-előfizetések számát – ezer darabban – jó közelítéssel a következő

függvény adja meg: $f(x)=51\cdot 1{,}667^{x}$, ahol x az 1992 vége óta eltelt évek számát jelöli.

b) A függvény alapján hány mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén? (3 pont)

A kezdeti időszakban a mobilhálózatból indított hívások száma is gyors növekedést mutatott. 1991 januárjában Magyarországon körülbelül 350 000 mobilhívást indítottak, majd ettől a hónaptól kezdve minden hónapban megközelítőleg 6,5%-kal nőtt a hívások száma az előző havi hívások számához viszonyítva (egészen 2002-ig).

c) Melyik évben volt az a hónap, amelyben az egy havi mobilhívások száma először elérte a 100 milliót? (6 pont)

A mobiltelefonok elterjedése egy idő után a vezetékestelefon-előfizetések és hívások számának csökkenését eredményezte. A vezetékestelefon-hálózatból indított hívások száma Magyarországon 2000-ben kb. 4200 millió volt, majd ez a szám évről évre kb 8%-kal csökkent.

d) Hány hívást indítottak vezetékes hálózaból 2009-ben, és összesen hány vezetékes hívás volt a 2000 elejétől 2009 végéig terjedő tízéves időszakban? (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Szöveges feladatok 41. feladat*

b) Az eltelt évek száma: $x=8$. (1 pont)

$51\cdot 1{,}667^{8}\approx 3041$ (1 pont)

3 millió 41 ezer mobiltelefon-előfizető lehetett 2000 végén. (1 pont)

c) A hívások száma egyik hónapról a másikra 1,065-szeresére nőtt. (1 pont)

1991 januárja óta eltelt hónapok számát jelölje n.

$350000\cdot 1{,}065^{n}=100\,000\,000$ (1 pont)

$n=\log_{1{,}065}\frac{100000000}{350000}$, (1 pont)

amiből $n\approx 90$. (1 pont)

Az eltelt évek száma: $\frac{90}{12}=7{,}5$. (1 pont)

Tehát **1998-ban** lehetett az a hónap, amikor a mobilhívások száma először elérte a 100 milliót. (1 pont)

d) *Lásd: Sorozatok 43. feladat*

Összesen: 17 pont

31) Adja meg azt az x valós számot, amelyre $\log_2 x=-3$. (2 pont)

Megoldás:

$\log_2 x=\log_2\frac{1}{8}\Rightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{8}}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

32) Adja meg x értékét, ha $5^{x}=\left(5^{2}\cdot 5\cdot 5^{4}\right)^{3}$ (2 pont)

Megoldás:

$\left(5^{2}\cdot 5\cdot 5^{4}\right)^{3}=5^{7^{3}}=5^{21}\Rightarrow \boldsymbol{x=21}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

33) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát tizedes tört alakban adja meg!

$4^x = 8$ **(2 pont)**

Megoldás:

Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát: $\lg 4^x = \lg 8$

A hatvány logaritmusára vonatkozó azonosságot kihasználva: $x \cdot \lg 4 = \lg 8$

Az egyenletet x-re rendezve az eredmény: $x = \frac{\lg 8}{\lg 4} = \mathbf{1{,}5}$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

34)

a) Hány olyan háromjegyű egész szám van, amelyre igaz az alábbi egyenlőtlenség?

$\frac{x}{3} + \frac{x}{6} \geq \frac{x}{4} + 230$ **(4 pont)**

b) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$3 \cdot 4^x + 4^{x+1} = 896$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek 40. feladat*

b) $3 \cdot 4^x + 4 \cdot 4^x = 896$ (1 pont)

$7 \cdot 4^x = 896$ (1 pont)

$4^x = 128$ (1 pont)

$2^{2x} = 2^7$ (1 pont)

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért

$\boldsymbol{x = 3{,}5}$. (1 pont)

Ellenőrzés behelyettesítéssel: $3 \cdot 4^{3,5} + 4^{4,5} = 384 + 512 = 896$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

35) Péter elhatározza, hogy összegyűjt 3,5 millió Ft-ot egy használt elektromos autó vásárlására, mégpedig úgy, hogy havonta egyre több pénzt tesz félre a takarékszámláján. Az első hónapban 50 000 Ft-ot tesz félre, majd minden hónapban 1000 Ft-tal többet, mint az azt megelőző hónapban. (A számlán gyűjtött összeg kamatozásával Péter nem számol.)

a) Össze tud-e így gyűjteni Péter 4 év alatt 3,5 millió forintot? (5 pont)

A világon gyártott elektromos autók számának 2012 és 2017 közötti alakulását az alábbi táblázat mutatja.

év	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
elektromos autók száma (ezerre kerekítve)	**110 000**	**221 000**	**409 000**	**727 000**	**1 186 000**	**1 928 000**

b) Szemléltesse a táblázat adatait oszlopdiagramon! (3 pont)

Péter az előző táblázat adatai alapján olyan matematikai modellt alkotott, amely az elektromos autók számát exponenciálisan növekedőnek tekinti. E szerint, ha a 2012 óta eltelt évek száma *x*, akkor az elektromos autók számát (millió darabra) megközelítőleg az $f(x) = 0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x}$ összefüggés adja meg.

c) A modell alapján számolva melyik évben érheti el az elektromos autók száma a 25 millió darabot? (5 pont)

Egy elektromos autókat gyártó cég öt különböző típusú autót gyárt. A készülő reklámfüzet fedőlapjára az ötféle típus közül egy vagy több (akár mind az öt) autótípus képét szeretné elhelyezni a grafikus.

d) Hány lehetőség közül választhat a tervezés során? (Két lehetőség különböző, ha az egyikben szerepel olyan autótípus, amely a másikban nem.) (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 53. feladat*

b) *Lásd: Statisztika 52. feladat*

c) A modell alapján: $0{,}122 \cdot 2^{0{,}822x} = 25$ (1 pont)

$2^{0{,}822x} = \dfrac{25}{0{,}122} \approx 204{,}9$ (1 pont)

$0{,}822x \cdot \lg 2 = \lg 204{,}9$ (1 pont)

$x \approx 9{,}34$ (1 pont)

A modell szerint az elektromos autók száma 2012+9=**2021-ben** éri el a 25 milliót. (1 pont)

d) *Lásd: Kombinatorika 39. feladat*

Alternatív megoldás:

Mind az öt típus esetén két választási lehetőség van (szerepel vagy nem szerepel a fedőlapon). Ez összesen $2^5 = 32$ lehetőséget jelent. (2 pont)

Az a kiválasztás, amelyben egy elem sincs kiválasztva nem megfelelő. (1 pont)

Így $32 - 1 = \mathbf{31}$-féleképpen alakulhat a reklámfüzet fedőlapja a megjelenített típusok szempontjából. (1 pont)

Összesen: 17 pont

36) Hányadik hatványra kell emelni a 2-t, hogy 512-t kapjunk? (2 pont)

Megoldás:

A feladat szövege alapján: $2^x = 512$. (1 pont)

A logaritmus definícióját alkalmazva $\log_2 512 = x$, így $\boldsymbol{x = 9}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont

37) Amerikai kutatók 104 labrador genetikai elemzése alapján felállítottak egy egyenletet, amellyel (a kutya 3 hónapos korától) megmondható, milyen korú az adott kutya emberévekben. A kutya valódi életkorát években mérve jelölje *K*, ekkor az emberévekben kifejezett életkort (*E*) az alábbi képlettel kapjuk: $E = 37 \cdot \lg K + 31$ (ahol $K > 0{,}25$).

a) Egy kutya emberévekbe átszámított életkora $E = 70$ év. Hány év, hány hónap ennek a kutyának a valódi életkora? Válaszát egész hónapra kerekítve adja meg! (6 pont)

Egy másik átszámítás szerint – a kutya 3 éves korától kezdve – az emberévekben kifejezett életkor az $e = 5,5 \cdot K + 12$ képlettel kapható meg (ahol $K > 3$).

b) Számítsa ki egy $K = 8$ éves labrador esetén az emberévekben kifejezett életkort mindkét képlettel! Az amerikai kutatók képletéből kiszámított érték hány százalékkal nagyobb, mint a másik képletből kiszámított érték? (6 pont)

<u>Megoldás</u>:

a) A feladat szövege szerint: $70 = 37 \cdot \lg K + 31$. (1 pont)

Az egyenletet rendezve: $\frac{39}{37} = \lg K$. (1 pont)

A logaritmus definícióját alkalmazva: $K = 10^{\frac{39}{37}} \approx 11,325$. (2 pont)

0,325 év $0,325 \cdot 12 = 3,9$ hónapnak felel meg. (1 pont)

Tehát kerekítve **11 éves és 4 hónapos** az a kutya, amely emberévekben mérve 70 éves. (1 pont)

b) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 47. feladat*

Összesen: 12 pont

38) Adja meg x értékét, ha $2^{x-1} = 16$. (2 pont)

<u>Megoldás</u>:

$2^{x-1} = 2^4$.

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt: $x - 1 = 4$. (1 pont)

Így $\boldsymbol{x = 5}$. (1 pont)

Összesen: 2 pont