Trigonometria
Megoldások

1) Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\cos^2 x + 4\cos x = 3\sin^2 x$$ **(12 pont)**

Megoldás:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (1 pont)

$\cos^2 x + 4\cos x = 3\left(1 - \cos^2 x\right)$

$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0$ (2 pont)

A másodfokú egyenlet megoldóképletével megoldva a fenti egyenletet, a gyökök:

$\cos x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4}$ (1 pont)

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ vagy $\cos x = -\dfrac{3}{2}$ (1 pont)

Ha $\cos x = \dfrac{1}{2}$, akkor $\boldsymbol{x_1 = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi}$, $\boldsymbol{x_2 = \dfrac{5\pi}{3} + k2\pi}$ (3 pont)

ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ha $\cos x = -\dfrac{3}{2}$, akkor nincs megoldás, hiszen $\cos x \geq -1$, minden x esetén. (2 pont)

Az egyenlet megoldása közben ekvivalens átalakításokat végeztünk, így mindkét gyöksorozat megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 12 pont

2) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{\log_3\left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 2}$**, ahol x valós szám és $x > -1$** **(6 pont)**

b) $\boldsymbol{2\cos^2 x = 4 - 5\sin x}$**, ahol x tetszőleges forgásszöget jelöl** **(11 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 1. feladat*

b) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ helyettesítéssel, (1 pont)

$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ (1 pont)

$\sin x = y$ új változóval $2y^2 - 5y + 2 = 0$. (1 pont)

$y_1 = 2;\ y_2 = \dfrac{1}{2}$ (2 pont)

y_1 nem megoldás, mert $|\sin x| \leq 1$ (1 pont)

$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{6}\pi + k2\pi}$ vagy $\boldsymbol{x = \dfrac{5}{6}\pi + k2\pi}$ (fokban is megadható) (3 pont)

$k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ellenőrzés, vagy le kell írni, hogy a gyökök igazzá teszik az eredeti egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk. (1 pont)

Összesen: 17 pont

3) Oldja meg a következő egyenleteket:

a) $\mathbf{9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0}$ **(6 pont)**

b) $\mathbf{\sin^2 x = 2\sin x + 3}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 3. feladat*

b) Legyen $\sin x = a$

Az $a^2 - 2a - 3 = 0$ másodfokú egyenletet kell megoldani.

Ennek az egyenletnek a gyökei: $a_1 = 3$ és $a_2 = -1$. (1 pont)

$a = \sin x = 3$ nem ad megoldást, (1 pont)

mert $\sin x \le 1$ (1 pont)

$a = \sin x = -1$ (1 pont)

A $\sin x = -1$ egyenlet gyökei: $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$ (1 pont)

Ezek az *x* értékek kielégítik az egyenletet. (1 pont)

Összesen: 12 pont

4) Mely valós számokra teljesül a $\mathbf{[0;2\pi]}$ intervallumon a $\mathbf{\sin x = \frac{1}{2}}$ egyenlőség? **(2 pont)**

Megoldás:

$\mathbf{x_1 = \frac{\pi}{6}}$ (1 pont)

$\mathbf{x_2 = \frac{5\pi}{6}}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

5) Adja meg az összes olyan forgásszöget fokokban mérve, amelyre a $\mathbf{k(x) = \frac{5}{\cos x}}$ kifejezés nem értelmezhető! Indokolja a válaszát! **(3 pont)**

Megoldás:

A kifejezés nem értelmezhető, ha

$\mathbf{x = 90^\circ + n\cdot 180^\circ,\ n \in \mathbb{Z}}$ (3 pont)

6) Határozza meg az alábbi egyenletek valós megoldásait!

a) $\mathbf{(\log_2 x - 3)\cdot(\log_2 x^2 + 6) = 0}$ **(7 pont)**

b) $\mathbf{\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}}$ **(10 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 10. feladat*

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ vagy $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ vagy $x - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$ (2 pont)

$\mathbf{x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ x_2 = 2l\pi;\ x_3 = \pi + 2m\pi;\ x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2n\pi,\ k, l, m, n \in \mathbb{Z}}$ (4 pont)

Összesen: 17 pont

7) Döntse el az alábbi két állítás mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis!(2 pont)

a) Az $x \mapsto \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.

b) Az $x \mapsto \sin(2x)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény periódusa 2π.

Megoldás:

a) **igaz** (1 pont)
b) **hamis** (1 pont)

Összesen: 2 pont

8) Oldja meg a valós számok halmazán a $\sin x = 0$ egyenletet, ha $-2\pi \le x \le 2\pi$ (3 pont)

Megoldás:

A megoldások: $-2\pi; \pi; 0; \pi; 2\pi$. (3 pont)

9) Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis!

A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik hegyesszög szinusza $\frac{1}{2}$ (1 pont)

B: Ha egy háromszög egyik hegyesszögének szinusza $\frac{1}{2}$, akkor a háromszög derékszögű. (1 pont)

C: A derékszögű háromszögnek van olyan szöge, amelynek nincs tangense. (1 pont)

D: A derékszögű háromszögek bármelyik szögének értelmezzük a koszinuszát. (1 pont)

Megoldás:

A: **igaz** (1 pont)
B: **hamis** (1 pont)
C: **igaz** (1 pont)
D: **igaz** (1 pont)

Összesen: 4 pont

10) Melyik szám nagyobb?

$$A = \lg \frac{1}{10} \text{ vagy } B = \cos 8\pi$$ **(2 pont)**

Megoldás:

A nagyobb szám betűjele: **B** $(= \cos 8\pi)$ (2 pont)

11) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a) $5 - x = \sqrt{2x^2 - 71}$ (6 pont)

b) $\sin^2 x = 1 + 2\cos x$ (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Abszolútértékes és gyökös kifejezések 6. feladat*

b) A baloldalon a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ helyettesítést elvégezve kapjuk:

$1 - \cos^2 x = 1 + 2\cos x$ (1 pont)

$\cos^2 x + 2\cos x = 0$ (1 pont)

$\cos x(\cos x + 2) = 0$ (1 pont)

Ha $\cos x = 0$, akkor $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$, ahol $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$. (2 pont)

A $\cos x + 2 = 0$ egyenletnek nincs megoldása (mert $\cos x = -2$ nem lehetséges). (1 pont)

Összesen: 12 pont

12) Határozza meg a radiánban megadott $\alpha = \frac{\pi}{4}$ szög nagyságát fokban! (2 pont)

***Megoldás*:**

$\alpha = \mathbf{45}^\circ$ (2 pont)

13)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$ egyenlőtlenséget! (7 pont)

b) Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét, ha $4 \cdot 3^x + 3^x = 20$. (4 pont)

c) Oldja meg a $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ egyenletet a $[-\pi; \pi]$ alaphalmazon. (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Egyenletek, egyenlőtlenségek 11. feladat*

b) *Lásd: Exponenciális és logaritmusos feladatok 19. feladat*

c) (A megadott egyenlet cos x-ben másodfokú,) így a megoldóképlet felhasználásával (1 pont)

$\cos x = 0,5$ vagy $\cos x = -2$. (2 pont)

Ez utóbbi nem lehetséges (mert a koszinuszfüggvény értékkészlete a $[-1;1]$ intervallum). (1 pont)

A megadott halmazban a megoldások: $-\frac{\pi}{3}$, illetve $\frac{\pi}{3}$. (2 pont)

Összesen: 17 pont

14) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség!

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ **(2 pont)**

Megoldás:

$\alpha_1 = \mathbf{60}^\circ$ (1 pont)

$\alpha_2 = \mathbf{300}^\circ$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

15) Adja meg azoknak a 0° és 360° közötti α szögeknek a nagyságát, amelyekre igaz az alábbi egyenlőség! (2 pont)

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Megoldás:

A számológépbe beírva 1 megoldást kapunk

$\alpha_1 = \mathbf{45}^\circ$ (1 pont)

Viszont van egy másik megoldás is

$\mathbf{180^{\circ}} - \alpha_1 = \alpha_2 \quad \alpha_2 = \mathbf{135^{\circ}}$

(1 pont)

Összesen: 2 pont

16) Oldja meg a $[-\pi;\pi]$ zárt intervallumon a $\cos x = \frac{1}{2}$ egyenletet! (2 pont)

***Megoldás*:**

$x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$ (2 pont)

17) a) Egy háromszög oldalainak hossza 5 cm, 7 cm és 8 cm. Mekkora a háromszög 7 cm-es oldalával szemközti szöge? (4 pont)

b) Oldja meg a $[0;2\pi]$ intervallumon a következő egyenletet!

$\cos^2 x = \frac{1}{4}$ $(x \in \mathbb{R})$. (6 pont)

c) Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! (2 pont)

I) Az $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ függvény páratlan függvény.

II) Az $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, g(x) = \cos 2x$ függvény értékkészlete a $[-2;2]$ zárt intervallum.

III) A $h: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton növekszik a $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ intervallumon.

Megoldás:

a) (A kérdezett szöget α-val jelölve) alkalmazzuk a koszinusztételt: (1 pont)

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$ (1 pont)

Ebből $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, (1 pont)

azaz (mivel egy háromszög egyik szögéről van szó) $\alpha = \mathbf{60^{\circ}}$ (1 pont)

b) Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{\pi}{3}$, vagy $x = \frac{5\pi}{3}$. (2 pont)

Ha $\cos x = -\frac{1}{2}$, (1 pont)

akkor a megadott intervallumon $x = \frac{2\pi}{3}$, vagy $x = \frac{4\pi}{3}$. (2 pont)

c)

I) **igaz**

II) **hamis**

III) **hamis**

(2 pont)

Összesen: 12 pont

18) Adja meg a következő egyenlet $[0;2\pi]$ intervallumba eső megoldásának pontos értékét!

$\sin x = -1$ (2 pont)

Megoldás:

$x = \frac{3}{2}\pi$ (2 pont)

19) Határozza meg a valós számok halmazán értelmezett $x \to 1 + \cos x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

A függvény értékkészlete: $[0;2]$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

20) Adja meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 1 + \sin x$ függvény értékkészletét! (2 pont)

Megoldás:

Felírjuk a $\sin x$ függvény értékkészletét.

$-1 \le \sin x \le 1$

Ha az így kapott egyenlőtlenség minden oldalához hozzáadunk egyet, megkapjuk az $1 + \sin x$ függvény értékkészletét.

$0 \le 1 + \sin x \le 2$ (2 pont)

Tehát a megoldás $[0;2]$.

Összesen: 2 pont

21) Oldja meg a $\sin x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán! (2 pont)

Megoldás:

$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

22) Mely x-ekhez rendel a $[0;2\pi]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \cos x$ függvény $0,5$-öt? (2 pont)

Megoldás:

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ és $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

23) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0;2\pi]$ intervallumon! (2 pont)

$\cos x = 0,5$

Megoldás:

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

24) Adja meg azt a tompaszöget, amelynek a szinusza 0,5. (2 pont)

Megoldás:

A szinusz függvény a 0,5 értéket $30^\circ + k \cdot 360^\circ$-nál és $150^\circ + k \cdot 360^\circ$-nál veszi fel. Mivel tompaszöget keresünk, a megoldás a $\mathbf{150^\circ} \left(= \frac{5}{6}\pi\right)$. (2 pont)

Összesen: 2 pont

25) Egy középület akadálymentesítésekor a bejárathoz egyenletesen emelkedő rámpát építenek, hogy kerekesszékkel és babakocsival is be

lehessen jutni az épületbe. A rámpa hossza 3 méter, és a járda szintjétől 60 centiméter magasra visz.
Hány fokos a rámpa emelkedési szöge? Megoldását részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A szinusz definíciója szerint: $\sin\alpha = \frac{0,6}{3} = 0,2$. (2 pont)

Így a rámpa emelkedési szöge $\alpha \approx \mathbf{11,5°}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

26) Az *ABC* háromszög *AB* oldala 2 egység, *BC* oldala 3 egység hosszú. Ez a két oldal 120°-os szöget zár be egymással. Számítsa ki a háromszög *AC* oldalának hosszát! (2 pont)

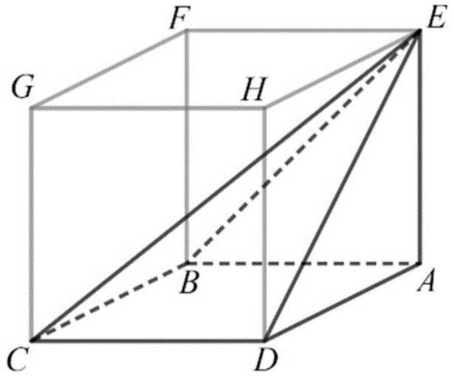
Megoldás:

A koszinusztétel alapján:

$AC = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos(120°)} = \sqrt{19} \approx \mathbf{4,36}$ egység. (2 pont)

Összesen: 2 pont

27) Az *ABCDEFGH* kocka élhosszúsága 6 cm.



a) Számítsa ki az ábrán látható *ABCDE* gúla felszínét! (6 pont)

b) Fejezze ki az $\overrightarrow{EC}$ vektort az $\overrightarrow{AB}$, az $\overrightarrow{AD}$ és az $\overrightarrow{AE}$ vektorok segítségével! (3 pont)

Egy 12 cm magas forgáskúp alapkörének sugara 6 cm.

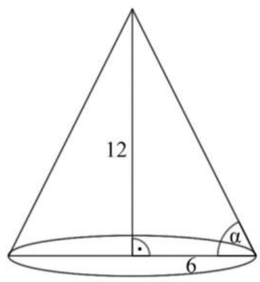
c) Mekkora szöget zár be a kúp alkotója az alaplappal? (3 pont)

A fenti forgáskúpot két részre vágjuk az alaplap síkjával párhuzamos síkkal. Az alaplap és a párhuzamos sík távolsága 3 cm.

d) Számítsa ki a keletkező csonkakúp térfogatát! (5 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Térgeometria 43. feladat*
b) *Lásd: Koordinátageometria 45. feladat*
c) Készítsünk ábrát, amelyen α jelöli a kérdéses szöget! (1 pont)



$\text{tg}\alpha = \frac{12}{6} = 2$ (1 pont)

$\alpha \approx \mathbf{63,4°}$ (1 pont)

d) *Lásd: Térgeometria 43. feladat*