TP 7 : Résolution d'équations

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, et qui change de signe entre a et b (c'est-à-dire telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet alors au moins une solution sur $[a, b]$, et celle-ci est même unique lorsque f est strictement monotone.
L'objectif de ce TP est de déterminer une valeur approchée de cette solution à une précision arbitraire ε près.

1 Méthode de dichotomie

Cette méthode a été vue dans le cours, lors de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires.

1. Écrire une fonction `dichotomie` qui prend en argument une fonction `f`, deux réels `a` et `b` avec $a < b$ et un réel strictement positif `epsilon` et qui renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a, b]$.
2. On admet que l'équation $x^5 + 3x^2 - 10 = 0$ possède une solution unique dans $[0; 2]$. En utilisant la fonction `dichotomie`, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de cette équation dans $[0; 2]$.

1.1 Méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution c telle que $f'(c) \neq 0$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$, on considère la suite (x_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On admet que si x_0 est assez proche de c, alors $x_n \longrightarrow c$.
On adopte comme critère d'arrêt le fait que l'écart entre deux termes consécutifs est inférieur à une précision ε choisie.

1. Écrire une fonction `newton` qui prend en argument deux fonctions `f` et sa dérivée `fprime`, un réel `x0` et un réel strictement positif `epsilon` et qui renvoie une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.
2. On admet que l'équation $x^5 + 3x^2 - 10 = 0$ possède une solution unique dans $[0; 2]$. En utilisant la fonction `newton`, trouver une valeur approchée à 10^{-5} près de la solution de cette équation dans $[0; 2]$.

2 Une application physique

On considère un corps en chute libre dans le référentiel terrestre. Dans ce cas, l'altitude z du corps en fonction du temps t est donnée par

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{\omega^2 g \cos^2 \lambda}{6}t^4 + H$$

où g est l'accélération de la pesanteur terrestre, λ est la latitude de l'objet, ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et H est la hauteur initiale du corps (par rapport au sol qui sert d'altitude nulle).
On cherche à calculer la durée de la chute du corps. Il s'agit donc de trouver t tel que $z(t) = 0$, autrement dit de résoudre l'équation

$$-\frac{g}{2}t^2 + \frac{\omega^2 g \cos^2 \lambda}{6}t^4 + H = 0.$$

Comparer (la réponse et surtout le nombre d'itérations nécessaires pour la trouver) la méthode de dichotomie et la méthode de Newton pour trouver une valeur approchée de t à 10^{-5} près lorsque l'objet tombe de la pointe de la flèche de la cathédrale de Strasbourg.