CINEMATICA DEL PUNTO

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e la esprimecon leggi quantitative. Se il corpo è esteso, come lo sono molti tutti i corpi materiali, il moto può risultare notevolmente complicato. Per questa ragione, seguendo un processo molto comune in Fisica, iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo, quello puntiforme, detto **punto materiale** o spesso anche **particella**: si tratta di un corpo privo di dimensioni ovvero che presenti dimesioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversio degli altri corpi con cui può interagire. Per esempio, se siamo interessati a studiare il moto della luna intorno alla terra, possiamo considerare in prima approssimazione sia la terra che la luna come punti materiali, dato che le loro dimensioni sono trascurabili rispetto alla distanza.

MOTO RETTILINEO

Si tratta di un moto che si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso; il moto del punto è così definibile per mezzo di una sola coordinata $x(t)$ o $y(t)$.

VELOCITÀ NEL MOTO RETTILINEO

Se al tempo $t = t_1$, il punto di trova in $x = x_1$ e al tempo $t = t_2$ nella posizione $x = x_2$, allora $\Delta x = x_2 - x_1$ rappresenta lo spazio percorso nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Possiamo caratterizzare la rapidità con cui avviene lo spostamento tramite la **velocità media**.

VELOCITÀ MEDIA

Tale grandezza fornisce un'indicazione complessiva, ma non dà quasi nessuna informazione sulle caratteristiche effettive del moto.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA

Per quel che riguarda invece la *rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato*, abbiamo:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Possiamo anche risolvere così il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ avendo la $v(t)$:

$$dx = v(t)dt$$

sappiamo quindi che lo spostamento dx è uguale a questo prodotto qualunque sia la velocità al tempo t.

Per ricavare quindi $x(t)$ si procederà ad integrare tutti gli spostamenti dx:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME

Si tratta di un caso particolare di moto rettilineo, nel quale la velocità rimane costante, si può ricavare quindi $x(t)$ come:

$$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0) \quad , \qquad x(t) = x_0 + vt \quad se \;\; t_0 = 0.$$

ACCELERAZIONE NEL MOTO RETTILINEO

Come fatto per la velocità, possiamo definire l'**accelerazione media**.

ACCELERAZIONE MEDIA

Se la velocità varia di una quantità Δv in un certo intervallo Δt allora l'accelerazione media è definita come:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE ISTANTANEA

Viene definita come la *rapidità di variazione temporale della velocità*. Vale:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Per ricavare invece $v(t)$ si può procedere come:

$$dv = a(t)dt$$

Che integrando vale:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Si tratta di un caso particolare di moto rettilineo, nel quale l'accelerzione rimane costante, si può ricavare $v(t)$ come:

$$v(t) = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0) \quad , \qquad v(t) = v_0 + at \quad se \;\; t_0 = 0.$$

Per ricavare la posizione $x(t)$ invece si può nuovamente integrare la $v(t)$:

$$x(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad , \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad se \;\; t_0 = 0.$$

> Nota Se $a = costante$ allora:
>
> $$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

MOTO VERTICALE DI UN CORPO

Se trascuriamo l'attrito con l'aria con l'aria, *un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con una accelerazione costante che vale in modulo* $g = 9.8\ ms^{-2}$: per cui il moto osservato è **rettilineo uniformemente accelerato**.

Prendendo un sistema di riferimento con origine al suolo e asse x rivolto verso l'alto, abbiamo che $a = -g = -9.8\ ms^{-2}$.

Esaminiamo alcune delle possibili situazioni:

1. <u>caduta verso il basso</u>:
    1. da **altezza h** $\rightarrow x_0 = h$
    2. con **velocità iniziale nulla** nell'istante iniziale $\rightarrow v_0 = 0$ in $t = t_0 = 0$
        - *formule:*
            1. $v(t) = -gt$
            2. $v(x) = \sqrt{2g(h-x)}$
            3. x(t) = h-\frac{1}{2}gt^2$
            4. $t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$
            5. **tempo caduta** $\rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
            6. **velocità al suolo** $\rightarrow v_c = \sqrt{2gh}$
2. <u>caduta verso il basso</u>:
    1. da **altezza h** $\rightarrow x_0 = h$
    2. con **velocità iniziale** v_1 nell'istante iniziale $\rightarrow v_0 = -v_1$ in $t = t_0 = 0$
        - *formule:*
            1. $v(t) = -v_1 - gt$
            2. $v(x) = \sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)}$
            3. $x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2$
            4. $t(x) = \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}}$
            5. **tempo caduta** $\rightarrow t_c = \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$
            6. **velocità al suolo** $\rightarrow v_c = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$
3. <u>caduta verso il basso ma con lancio iniziale verso l'alto</u>:
    1. da **altezza nulla** $\rightarrow x_0 = h = 0$
    2. con **velocità iniziale** v_2 nell'istante iniziale $\rightarrow v_0 = v_2$ in $t = t_0 = 0$

        > NB: t_M è l'istante in cui la velocità è nulla e il corpo inizia a riscendere:
        >
        > 1. $t_M = \frac{v_2}{g}$
        > 2. $x_M = x(t_M) = \frac{v_2^2}{2g}$

        - *formule della seconda parte in cui il corpo riscende (t $\geq t_M$):*
            1. $t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} + \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}}$
            2. $v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2gx}$
            3. **tempo caduta** $\rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2x_M}{g}} = t_M$
            4. **tempo complessivo del moto** $\rightarrow 2t_M = 2\frac{v_2}{g}$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

Questo tipo di moto lungo un asse rettilineo è un moto vario, la cui *legge oraria* è definita come:

$$x(t) = Asin(\omega t + \phi)$$

> ***DOVE***:
>
> A $\rightarrow$ ampiezza del moto
>
> $\omega \rightarrow$ pulsazione
>
> $\phi \rightarrow$ fase iniziale
>
> $\omega t + \phi \rightarrow$ fase del moto

PERIODO E PULSAZIONE

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

FREQUENZA

Indica il numero di oscillazioni in un secondo.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

VELOCITÀ PUNTO (CHE SI MUOVE DI MOTO ARMONICO SEMPLICE)

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega Acos(\omega t + \phi)$$

ACCELERAZIONE PUNTO (CHE SI MUOVE DI MOTO ARMONICO SEMPLICE)

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$$

MOTO NEL PIANO

Nel caso in cui il moto sia vincolato a svolgersi su un piano, la *traiettoria* del punto, è in generale una *linea curva*.

POSIZIONE

Consideriamo r come la distanza di un punto dall'origine del nostro sistema di riferimento. La posizione di un punto nel piano può essere individuata per mezzo di due coordinate $x(t)$, $y(t)$:

$$x = rcos(\theta) \quad , \quad y = rsin(\theta) \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

La posizione di un punto P può essere altresì individuata per mezzo del **raggio vettore**:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{OP} = x(t)\mathbf{u}_x + y(t)\mathbf{u}_y$$

dove u_x e u_y rappresentano i versori degli assi cartesiani (fissi nel tempo).

VELOCITÀ

$$v = \frac{dr}{dt}$$

- componenti cartesiane:
  - Poiché $\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y = v_x u_x + v_y u_y$$

ACCELERAZIONE

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

ACCELERAZIONE TANGENZIALE

Considerando u_T il versore tangente alla traiettoria percorsa da un punto:

$$a_T = \frac{dv}{dt}u_T$$

ACCELERAZIONE CENTRIPETA

Considerando u_N il versore ortogonale alla traiettoria percorsa da un punto:

$$a_N = \frac{v^2}{R}u_N$$

con $R = CP$ *raggio di curvatura*.

MOTO CIRCOLARE

Il **moto circolare** è un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Visto che la velocità varia continuamente in direzione, l'accelerazione centripeta è sempre diversa da 0 (avremo quindi una forza detta **forza centripeta** diretta verso il centro della circonferenza). Nel ***moto circolare uniforme***, la velocità è costante in modulo e *l'accelerazione tangente* $\mathbf{a}_T$ è nulla, per cui:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N$$

Se invece il modulo della velocità varia nel tempo, abbiamo un ***moto circolare non uniforme*** e $\mathbf{a}_T$ è diversa da 0; avremo per cui:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_N + \mathbf{a}_T$$

Il moto circolare può essere descritto in 2 modi:

- facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza $\rightarrow s(t)$
- utilizzando l'angolo sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t)$

> NB:
>
> $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$

VELOCITÀ ANGOLARE

Siamo interessati comunque alla variazione dell'angolo $\theta(t)$ nel tempo, per cui definiamo una grandezza definita **velocità angolare** come la *derivata dell'angolo rispetto al tempo*:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

Se il moto è circolare uniforme, l'accelerazione si può calcolare dalla velocità angolare come:

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

> Il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria.

Nel caso del moto circolare non uniforme, oltre all'accelerazione centripeta, che è variabile perché la velocità varia anche in modulo, dobbiamo considerare anche l'accelerazione tangenziale $a_T = \frac{dv}{dt}$. Siccome è variabile anche ω, definiamo l'**accelerazione angolare**:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Si tratta di un caso particolare di moto circolare non uniforme ($\alpha = costante \ \rightarrow a_T = costante$):

$$posto\ t_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Alla luce di questo, possiamo definire l'**accelerazione centripeta** come:

$$a_N = \omega^2 R = (\omega_o + \alpha t)^2 R$$

MOTO PARABOLICO

Consideriamo un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale $v_=$ formante un angolo θ con l'asse delle ascisse. Vogliamo calcolare:

- traiettoria
- massima altezza raggiunta
- posizione G in cui il punto ricade sull'asse x ovvero la **gittata** OG.

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$ e le condizioni iniziali sono $\mathbf{r} = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ al tempo $t = 0$, istante di lancio. Partiamo da:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_0^t a(t)dt = \mathbf{v}_0 - gt\mathbf{u}_y$$

Facendo riferimento ad un piano x, y possiamo dire di avere 2 diverse componenti di $\mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_{0,x} = v_0 cos\theta \mathbf{u}_x \quad , \quad \mathbf{v}_{0,y} = (v_0 sin\theta - gt)\mathbf{u}_y$$

> Da ciò arriviamo a:
>
> $$\mathbf{v} = v_0 cos\theta \mathbf{u}_x + (v_0 sin\theta - gt)\mathbf{u}_y$$

Dalle due componenti della velocità possiamo arrivare alle leggi orarie dei moti proiettati, integrando:

$$x = v_0 cos\theta t \qquad , \qquad y = v_0 sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$$

> NB:
>
> - sull'asse x il moto è uniforme
> - sull'asse y il moto è uniformemente accelerato

TRAIETTORIA

Viene ricavata eliminando il tempo t tra $x(t)$ e $y(t)$, (considerando $t = x/v_0 cos\theta$) ottenendo così la funzione $y(x)$:

$$y(x) = x\ tan\theta - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta} x^2$$

che è l'equazione di una *parabola*.

GITTATA

Per calcolare la **gittata** poniamo $y(x) = 0$, ricaviamo quindi come soluzioni:

$$x = 0 \qquad , \qquad x = x_G = \frac{2v_0^2 cos^2\theta tan\theta}{g} = \frac{2v_0^2 cos\theta sin\theta}{g} = 2x_M$$

> con $x_M = \frac{v_0^2 cos\theta sin\theta}{g}$ → coordinata del punto di mezzo del segmento OG.

ALTEZZA MASSIMA

Per la simmetria della parabola, l'**altezza massima** si ha nel punto di mezzo X_M:

$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 sin^2\theta}{2g}$$

> NB:
>
> L'angolo di lancio per cui si ha la **gittata massima** è 45° e $(x_G)_{max} = \frac{x_0}{g}$

L'altezza massima può anche essere calcolata ponendo $v_{0,y} = 0$ in quanto nel punto più alto la componente verticale della velocità iniziale, si annulla. Ricordando:

$$\mathbf{v}_{0,y} = (v_0 sin\theta - gt)\mathbf{u}_y$$

Arriviamo così a calcolare:

$$t = t_M = \frac{v_0 sin\theta}{g}$$

A questo punto basta sostituire il t trovato sopra nelle due leggi orari presenti sopra, ricavando quindi:

$$x_M = v_0 cos\theta t_M \qquad , \qquad y_M = v_0 sin\theta t_M - \frac{1}{2} g t_M^2$$

TEMPO DI VOLO

Il tempo totale di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante $v_x = v_0 cos\theta$:

$$t_G = \frac{2x_M}{v_0 cos\theta} = \frac{2v_0 sin\theta}{g} = 2t_M$$

DINAMICA DEL PUNTO

I LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI INERZIA)

Un corpo non soggetto a forze, nono subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete ($v = 0$), oppure si muove di moto rettilineo uniforme (v costante non nulla).

II LEGGE DI NEWTON

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa tramite la forza F, determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo; m rappresenta la massa inerziale del punto.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

III LEGGE DI NEWTON

*Se un **corpo A** esercita una forza $F_{A,B}$ su un **corpo B**, il **corpo B** reagisce esercitando una forza $F_{B,A}$ sul **corpo A**. Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono eguali e contrarie.*

QUANTITÀ DI MOTO - IMPULSO

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale, il vettore:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Se la massa è costante, allora si può scrivere:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

> Quest'ultima è la forma più generale della II Legge di Newton, utilizzabile anche se la massa non è costante.

Vediamo che la formula precedente può essere scritta come:

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$$

ciò implica che *l'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infintesima della quantità di moto del punto.* In termini finiti abbiamo:

$$\mathbf{J} = \int_0^t \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}.$$

Il termine vettoriale $\mathbf{J}$, integrale della forza nel tempo, è chiamato **impulso della forza** e la formula superiore è definita *teorema dell'impulso: l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto; con m costante si ha:*

$$\mathbf{J} = m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = m\Delta\mathbf{v}$$

RISULTANTE DELLE FORZE

Quando su un punto materiale agiscono più forze, si può calcolare la risultante totale come:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_i \mathbf{F}_i$$

EQUILIBRIO

Nel momento in cui:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i = 0$$

si può affermare che il punto materiale si trovi in uno stato di **equilibrio statico**.

REAZIONI VINCOLARI

Se ad esempio poggiamo un corpo su un tavolo, ci accorgiamo che il corpo rimane fermo nonostante la forza di gravità attrattiva. Si suppone quindi che il tavolo eserciti una forza sul corpo, uguale a quella esercitata dal corpo, ma di verso opposto, al fine di mantenerlo nello stato di quiete. Questo tipo di forze vengono definite **reazioni vincolari** e (riferendoci ad esse con $\mathbf{N}$) possiamo scrivere:

$$\mathbf{R} + \mathbf{N} = 0$$

Cioè, *le reazioni vincolari bilanciano la risultante di tutte le forze che agiscono su un corpo*.

AZIONE DINAMICA DELLE FORZE

Se $\mathbf{F}$ è variabile, si ha un moto vario. Come visto precedentemente nel caso del moto piano curvilineo, l'accelerazione presenta due componenti $\mathbf{a}_T$ e $\mathbf{a}_N$. Pertanto:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_T + m\mathbf{a}_N = m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + m\frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N \ .$$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere quindi 2 componenti:

- $\mathbf{F}_N$ → ***FORZA CENTRIPETA*** → componente ortogonale (alla traiettoria) → provoca la variazione della direzione della velocità.
- $\mathbf{F}_T$ → ***FORZA CENTRIFUGA*** → componente tangenziale (alla traiettoria) → provoca la variazione del modulo della velocità.

FORZA PESO

Sono il tipo più comune di forze che incontreremo. ***Sperimentalmente si è visto che in uno stesso luogo, tutti i corpi che vengono lasciati cadere, a prescindere dalla loro massa, assumono la stessa accelerazione, detta "di gravità".*** Questa accelerazione sulla terra varia da posto a posto ma il suo valore medio può essere quantificato in:

$$g = 9.8\frac{m}{s^2}$$

Tale accelerazione è conseguenza della forza di attrazione della terra, cioè dell'interazione gravitazionale tra il corpo e la terra. Se su un corpo agisce solo la forza peso allora $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ e si può scrivere:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}$$

FORZA DI ATTRITO RADENTE

Applichiamo ad un corpo poggiato su un tavolo, con il piagno di appoggio orizzontale, una forza $\mathbf{F}$ tale da presentare una componente $\mathbf{F}_1$ normale al piano di appoggio ed una $\mathbf{F}_2$ parallela al piano stesso.

ATTRITO STATICO

Si osserva sperimentalmente che il corpo non entra in movimento, per effetto della componente $\mathbf{F}_2$ della forza applicata, fino a che il modulo di $\mathbf{F}_2$ non superi il valore $\mu_s N$ dove μ_s è il ***coefficiente di attrito statico*** ed N è il modulo della componente normale al piano di appoggio della reazione vincolare. La condizione per mettere in moto il corpo diventa quindi:

$$F_2 > \mu_s N \ .$$

La reazione $\mathbf{R}$ del piano, in condizioni di equilibrio statico è tale per cui:

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0$$

Chiamiamo le due componenti di $\mathbf{R}$:

- lungo y $\rightarrow N$
- lungo x $\rightarrow F_{as}$

Dividendo quindi la formula di prima sugli assi, abbiamo:

- lungo x $\rightarrow N - P + F_1 = 0 \implies N = P - F_1 = P - Fsin\theta$
- lungo y $\rightarrow F_{as} + F_2 = 0 \implies F_{as} = -F_2 = -Fcos\theta$

> con $\theta \rightarrow$ angolo della forza con il piano di appoggio.

La **condizione di quiete** si scrive adesso:

$$Fcos\theta \leq \mu_s(P - Fsin\theta) \implies F \leq \frac{\mu_s mg}{cos\theta + \mu_s sin\theta} \ .$$

> NB:
>
> se $\theta = 0 \rightarrow$
>
> $$\begin{cases} F_{as} = -Fcos\theta = -F & : \text{lungo } x \\ N = P - Fsin\theta = P = mg & : \text{lungo } y \end{cases}$$
>
> In questo caso, la **condizione di quiete** diventa:
>
> $$F \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

ATTRITO DINAMICO

Se la condizione sopracitata non viene rispettata (e quindi $F > \mu_s mg$), il corpo inizierà il suo moto lungo il piano. In questo caso, ci sarà una forza che continuerà ad opporsi al moto del corpo: la **forza di attrito dinamico**:

$$F_{ad} = \mu_d N$$

> con $\mu_d \rightarrow$ ***coefficiente di attrito dinamico***.
>
> NB:
>
> si verifica sempre $\mu_d < \mu_s$

In queste condizioni, l'equazione del moto diventa:

$$Fcos\theta - \mu_d N = ma$$

FORZE DI COESIONE

Tutte le **forze di attrito radente** hanno origine dalle **forze di coesione** tra due materiali. Il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superfici a contatto e dalla loro composizione chimica.

PIANO INCLINATO

Consideriamo adesso invece un punto materiale di massa m che si muove sotto l'azione del suo peso e di altre forze (compresa quella di attrito dinamico), su una **superficie inclinata** di un angolo θ rispetto al piano orizzontale. Se agisce solo la forza peso $\mathbf{P}$, in assenza di attrito tra corpo e piano inclinato, allora (per la II Legge di Newton):

$$\mathbf{P} + \mathbf{R} = m\mathbf{a}$$

> con $\mathbf{R} \rightarrow$ reazione vincolare del piano di appoggio che ha un'unica componente normale al piano stesso (*vincolo liscio*).

Scomponendo lungo le direzioni, perpendicolare e parallela al piano inclinato, abbiamo:

$$mgcos\theta - N = 0 \qquad , \qquad mgsin\theta = ma$$

- dalla prima equazione si calcola il valore della reazione vincolare N:

$$N = mgcos\theta$$

- dalla seconda, il valore dell'accelerazione:

$$a = gsin\theta < g$$

> il corpo scende con moto uniformemente accelerato con accelerazione a minore di quella di gravità g.

Se esiste un attrito radente lungo il piano, il moto non potrà iniziare se $mgsin\theta \leq \mu_s N = \mu_s mgcos\theta$. Da qui, la condizione di equilibrio statico diventa:

$$tan\theta = \mu_s$$

> Per avere moto, occorre quindi aumentare l'angolo di inclinazione θ.
>
> Vale quindi l'equazione:
>
> $$mgsin\theta - \mu_d cos\theta = ma \quad \rightarrow \quad a = (sin\theta - \mu_d cos\theta)g \ .$$

FORZA ELASTICA

Si definisce **forza elastica** una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre ad un punto O, chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O. Se assumiamo come asse x la direzione della forza, possiamo scrivere:

$$F = -kx\mathbf{u}_x$$

dove k è una costante positiva, detta *costante elastica*, e $\mathbf{u}_x$ è il versore dell'asse x.

Il moto risultante per effetto di una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come $\mathbf{u}_x$. L'accelerazione vale:

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = v - \omega^2 x$$

Per cui il moto generato da questa forza è **armonico semplice**, con:

- *pulsazione* $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- *periodo* $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Generalmente una forza elastica viene applicata da una **molla**; questa presenta in genere una *lunghezza a riposo*, cioè quando non si trova in condizioni di compressione o di estensione, di valore finito l_0:

- ***se la molla viene estesa*** assumendo una lunghezza $l > l_0$, essa sviluppa una forza $\mathbf{F}$ che tende a riportarla alla condizione di riposo:
$$F = -k(l - l_0) = -kx$$
dove $x > 0$ rappresente la deformazione.
- ***se la molla viene compressa*** alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione , con $x < 0$.

> NB:
>
> in entrambi i casi possiamo scrivere la forza come:
>
> $$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$$

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

La **forza di attrito viscoso** è una forza che si oppone al moto ed è proporzionale alla velocità del corpo soggetto a tale forza:

$$\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$$

L'accelerazione risulta $\mathbf{a} = -b\frac{\mathbf{v}}{m}$.

FORZE CENTRIPETE

Supponiamo che la risultante $\mathbf{R}$ delle forze agenti su un punto materiale presenti una componente F_N ortogonale alla traiettoria, che risulta però curvilinea. F_N determina l'accelerazione centripeta secondo la relazione $F_N = ma_N = m\frac{v^2}{r}$, con r *raggio di curvatura* della traiettoria. In generale $\mathbf{R}$ ha anche una componente tangente alla traiettoria ($\mathbf{F}_T$), responsabile della variazione del modulo della velocità. Se $\mathbf{F}_T = 0$ il moto lungo la traiettoria è uniforme e l'unica accelerazione è a_N.

EQUILIBRIO DINAMICO

Possiamo adesso definire caso si intende per **equilibrio dinamico**. A differenza dell'*equilibrio statico* descritto in precedenza, ora ci riferiamo a quei particolari casi in cui *in presenza di forze, il moto avviene con velocità costante in modulo*:

- se si tratta di moto rettilineo ciò è possibile solo se la risultante delle forze è nulla e abbiamo visto appunto i casi di moto uniforme in presenza di attrito radente o di attrito viscoso, che bilanciano l'effetto della forza peso
- se si tratta invece di moto curvilineo, basta che sia nulla la componente $\mathbf{F}_T$, per mantenere una velocità costante in modulo, avendo così la risultante delle forze agenti puramente centripeta.

  > Qualora anche $\mathbf{F}_N$ sia costante in modulo, il moto diventa *circolare uniforme*.

PENDOLO SEMPLICE

Il **pendolo semplice** è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa tracurabile.

La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (*tensione del filo*) vale in modulo $T_F = mg$. Se spostiamo il punto dalla verticale, esso inizia ad oscillare attorno a questa, lungo un arco di circonferenza di raggio L, pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale. Le forze agenti sul punto P sono il peso $m\mathbf{g}$ e la tensione del filo $\mathbf{T}_F$ per cui il moto è regolato da $m\mathbf{g} + \mathbf{T}_F = m\mathbf{a}$.

Le componenti lungo (R_T) e ortogonalmente (R_N) alla traiettoria sono:

$$R_T = -mgsin\theta = ma_T \qquad , \qquad R_N = T_F - mgcos\theta = ma_N$$

Sapendo poi dal moto circolare che:

$$a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad , \qquad a_N = \frac{v^2}{L}$$

arriviamo a dire che:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sin\theta \qquad , \qquad m\frac{v^2}{L} = T_F - mgcos\theta \ .$$

Per ***piccole oscillazioni***, $sin\theta \cong \theta$, quindi è approssimabile con un moto armonico semplice di legge oraria:

$$\theta = \theta_0 sin(\omega t + \phi)$$

con $\omega^2 = \frac{g}{L}$. Dal moto armonico, il periodo del moto diventa:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ed è indipendente dall'ampiezza (*isocronismo delle piccole oscillazioni*).

La **legge oraria dello spostamento** è invece:

$$s = L\theta = L\theta_0 sin(\omega t + \phi)$$

mentre la **velocità angolare** e la **velocità lineare** hanno espressioni:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 cos(\omega t + \phi) \quad , \quad v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0 cos(\omega t + \phi) \ .$$

Quando le oscillazioni non sono piccole, il moto **non è più armonico**, ma rimare **periodico**.

Avendo adesso $\theta(t)$ e $v(t)$, possiamo calcolare la **tensione del filo** che sostiene il punto:

$$T_F = m\left[cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}\right]$$

> NB:
>
> la tensione è massima nella posizione verticale (in quanto sia $cos\theta$ che $v(t)$ assumono i loro valori massimi) ed è minima nei punti di inversione.

LAVORO

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una generica traiettoria curvilinea e sia $\mathbf{F}$ la risultante delle forze agenti sul punto.1 Si definisce **lavoro della forza $\mathbf{F}$**, compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A alla posizione B, la quantità scalare:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F cos\theta \, ds = \int_A^B F_T \, ds \ .$$

*Il **lavoro** è l'integrale di linea della forza*, cioè è dato dalla somma di infiniti contributi infinitesimi $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_T \, ds$. Si osservi che in generale lungo la traiettoria sia $\mathbf{F}$ che θ sono variabili. Si possono presentare 3 casi:

- $\mathbf{F}$ forma con $d\mathbf{s}$ un angolo minore di $\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow a_T$ è concorde con la v e la fa aumentare $\rightarrow dW > 0$ (**lavoro motore**)
- $\mathbf{F}$ forma con $d\mathbf{s}$ un angolo maggiore di $\frac{\pi}{2} \rightarrow \theta > \frac{\pi}{2} \rightarrow a_T$ è discorde con la v e la fa diminuire $\rightarrow dW < 0$ (**lavoro resistente**)
- $\mathbf{F}$ è ortogonale alla traiettoria $\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow dW = 0$ (**lavoro nullo**)

POTENZA

*La **potenza** corrisponde al lavoro per unità di tempo*:

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_T v \ .$$

Questa è definita come **potenza istantanea**, in generale variabile durante il moto, e caratterizza la *rapidità di erogazione del lavoro*. La **potenza media** è il rapporto $\frac{W}{t}$, cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante il quale il lavoro è stato svolto.

> Quest'ultima grandezza è importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza quella macchina che lo eroga in minore tempo.

ENERGIA CINETICA

Sappiamo che:

$$dW = F_T \, ds = m a_T \, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv \, dv \ .$$

Da qui possiamo ricavare il lavoro effettuato su un percorso finito dalla posizione A alla posizione B:

$$W = \int_A^B mv \, dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \ . \tag{cinetica}$$

Il lavoro è uguale alla variazione della quantità $\frac{1}{2}mv^2$ che si chiama ***energia cinetica** del punto materiale*.

RAPPORTO CON QUANTITÀ DI MOTO

Riprendendo:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad , \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

vediamo che tra energia cinetica e quantità di moto sussistono le relazioni:

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \qquad , \qquad p = \sqrt{2mE_k}\ .$$

LAVORO DELLA FORZA PESO

Il lavoro della forza peso ($\mathbf{F} = m\mathbf{g}$) per uno spostamento generico da una posizione A ad una posizione B è dato da:

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{AB}$$

questo perché $\mathbf{F}$ è costante e l'integrale vale $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{AB}$. Da ciò, il lavoro della forza peso vale:

$$W = -(mg\, z_B - mg\, z_A) = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

> NB:
>
> il primo segno "$-$" è dovuto al fatto che la forza di gravità è diretta verso il basso e noi invece consideriamo un sistema di riferimento orientato con l'asse z verso l'alto.

La funzione $E_p = mgz$ si chiama ***energia potenziale*** *della forza peso*.

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

Il lavoro della forza elastica ($\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$) per uno spostamento lumgo l'asse x vale:

$$W = \int_A^B -kx\mathbf{u}_x \cdot dx\mathbf{u}_x = -k\int_A^B x dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p$$

dove $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, funzione solo della posizione, è l'**energia potenziale elastica**.

LAVORO DI UNA FORZA DI ATTRITO RADENTE

Ricordando che il vettore $\mathbf{u}_v$ è parallelo e concorde allo spostamento $d\mathbf{s}$, il lavoro corrispondente si scrive:

$$W = \int_A^B \mathbf{F}_{ad} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N\mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d N \int_A^B ds\ .$$

dove $\displaystyle\int_A^B d\mathbf{s}$ è la lunghezza del percorso da A a B, misurata lungo *la traiettoria effettiva del punto materiale*.

> NB:
>
> a parità dei fattori μ_d e N, abbiamo un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria: il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B, diversamente da quanto avviene per la forza peso e per la forza elastica.

Il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo , cioè è lavoro resistente (frenante). Affinché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certe energia cinetica $E_{k,A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è minore che in A. In particolare, data una certa $E_{k,A}$ e se N è costante, il punto si ferma dopo un percorso:

$$s_{AB} = \frac{E_{k,A}}{\mu_d N} \ .$$

FORZE CONSERVATIVE

Le forze per cui il lavoro non dipende dal percorso ma solo dalla posizione dei punti A e B vengono chiamate **forze conservative** (come *forza peso* e *forza elastica*). Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualunque percorso che colleghi A e B:

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{II} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percors II o lungo qualsiasi altro (e per eseguire il calcolo pratico possiamo quindi scegliere il percorso analiticamente più comodo). Ciò comporta che se si inverte il senso di percorrenza, cioé si va da B ad A, cambia solo il segno del lavoro:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Alla luce di questo, se si segue un percorso chiuso ABA lungo la traiettoria I e la traiettoria $-II$ (cioè la traiettoria II ma percorsa al contrario), si ha:

$$\int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I + \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{-II} = \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_I - \int_A^B (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s})_{-II} = 0$$

Di conseguenza **lungo un qualsiasi percorso chiuso, il lavoro è nullo**:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Questa proprietà si può assumere come definizione di **forza conservativa**.

ENERGIA POTENZIALE

Per qualsiasi forza conservativa, si può dire che il lavoro sia:

$$W = E_{p,A} - E_{p.B} = -\Delta E_p \qquad \text{(potenziale)}$$

cioè la variazione di energia potenziale $E_p = mgz$ tra i punti A e B.

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Se agiscono solo forze conservative valgono:

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \qquad , \qquad W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B} \ .$$

Equagliando le due relazioni, si arriva a:

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

cioè *la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un pnto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva*. Tale somma si chiama **energia meccanica** e vale pertanto, in presenza di forze conservative, il *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante} \quad .$$

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservativa che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e di quello delle forza non conservative W_{nc}, e secondo *(cinetica)*:

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \quad .$$

Esprimendo poi W_c utilizzando *(potenziale)* si ha:

$$E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} \implies W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A} \quad .$$

In presenza di forze non conservative, il lavoro non resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forza non conservative.

MOMENTO ANGOLARE

Si definisce come **momento angolare** il momento del vettore quantità di moto:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

Nel moto curvilineo piano si può esprimere la velocitò tramite le sue componenti radiale e trasversa, per cui:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times m(\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta) = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}_\theta$$

in quanto i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}_r$ sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo. Se il polo O sta nel piano del moto $\boldsymbol{L}$, risulta ortogonale a tale piano e vale in modulo:

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(momento angolare moto piano)}$$

MOMENTO DELLA FORZA

Il **momento della forza** è definito come:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Quando ad un punto sono applicate più forze con risultante $\boldsymbol{R} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ si ha:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \ldots + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F_1} + \ldots + \boldsymbol{F_n}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R}_i$$

cioè *il momento complessiva è uguale al momento della forza risultante*.

> NB:
>
> un sistema di forze applicate nello stesso punto può sempre essere ostituito, nel calcolo dell'accelerazione, del lavoro e del momento complessivi, dalla forza risultante $\boldsymbol{R}$. Tale proprietà non può essere utilizzata se le forze son applicate in punti diversi.

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

La seguente relazione rappresenta il **teorema del momento angolare**:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M} \qquad \text{(teorema momento angolare)}$$

ciò significa che *la derivata temporalale del momento angolare è eguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale*.

Il momento della forza può essere nullo se:

- la forza $\boldsymbol{F}$ è nulla
- $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{L}$ sono paralleli, in tal caso:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \quad \text{e quindi} \quad \boldsymbol{L} = \text{costante}$$

> *Il momento angolare di un punto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo*.

Da quanto detto in *(teorema del momento angolare)*, integrando rea l'istante iniziale e t, si arriva a:

$$\int_0^t \boldsymbol{M} dt = \Delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{fin} - \boldsymbol{L}_{in} \quad .$$

per produrre una variazione finita del momento angolare di un punto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza. Se la forza viene applicata al punto per un tempo molto breve, $\boldsymbol{r}$ è praticamente costante e la formula superiore diventa:

$$\int_0^t \boldsymbol{M} dt = \int_0^t \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{r} \times \int_0^t \boldsymbol{F} dt = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} = \Delta \boldsymbol{L} \quad .$$

Quest'ultimo è definito come **teorema del momento dell'impulso**: *la variazione del momento angolare è eguale al momento dell'impulso applicato al punto*.

FORZE CENTRALI

Si definisce **forza centrale** una froza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

- in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso, detto **centro della forza**
- il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso

Se $\boldsymbol{u}_r$ è il vettore della direzione $\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{u}_r$, allora:

- con $F(r) > 0 \rightarrow$ la forza è **repulsiva**
- con $F(r) < 0 \rightarrow$ la forza è **attrattiva**

La presenza di una forza funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un **campo di forza**. Questo campo agisce su ogni particella che si trovi in esso. *In un campo di forze centrali il momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo*, dato che i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$ sono paralleli. Pertanto:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{L} = costante$$

in direzione verso e modulo.

Per definizione $\boldsymbol{L}$ è sempre ortogonale al piano contenente $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$. Se $\boldsymbol{L}$ è costante in direzione, tale piano è fisso, cioè $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$ devono stare sempre nello stesso piano. Per questo il moto di P è un moto (generalmente curvilineo) che avviene in un piano fisso contenente O (centro) e determinato dai valori iniziali di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$.

> La costanza del verso di $\boldsymbol{L}$ fissa un verso di percorrenza sulla traiettoria.

Dato che il moto è piano, il modulo di $\boldsymbol{L}$ è dato da *(momento angolare moto piano)*: esso rimane costante nel tempo.

> NB:

> è costante il prodotto $r^2\frac{d\theta}{dt}$, ma non, in generale, r e $\frac{d\theta}{dt}$ separatamente.

In un tempo dt il raggio vettore congiungente O e P spazza un'area infinitesima, approssimabile ad un triangolo di base $rd\theta$ e altezza r e quindi di area $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. La quantità

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

è detta **velocità areale** ed esprime la rapidità con cio viene spazzata l'area del vettore $\boldsymbol{r}$. Da *(momento angolare moto piano)* risulta:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \quad :$$

la costanza del modulo di $\boldsymbol{L}$ comporta la costanza della velocità areale.R

Riassumendo:

la traiettoria di un punto che si muove in un campo di forza centrali giace inun piano fisso passante per il centro ed è percorsa in modo tale che la velocità areale rimagna costante.

> Keplero aveva già notato questo effetto, lo descrisse infatti nella **Seconda legge di Keplero**.

FORMULA DI BINET

Esprimiamo l'accelerazione del punto P tramite le componenti polari. In un campo di forze centrali,la componente trasversa deve essere nulla: e infatti

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

essendo $r^2\frac{d\theta}{dt}$ costante. L'accelerazione è puramente radiale e in modulo vale

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad .$$

Ricordando che $r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$ e calcolando dr/dt e d^2r/dt^2 :

- $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$
- $$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{d}{d\theta}\left[-\frac{L}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Sostituendo nell'espressione dell'accelerazione:

$$a = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2$$

e quindi, ritornando all'espressione vettoriale:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\boldsymbol{u}_r \quad .$$

Quest'ultima relazione si chiama **formula di Binet** ed è di particolare utilità nello studio del moto in un campo di forza gravitazionale.

LE FORZE CENTRALI SONO CONSERVATIVE

Abbiamo detto che il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza r dal centro, $\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{u}_r$. Il lavoro di questa forza si scrive:

$$W = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_A^B F(r)\boldsymbol{u}_r \cdot d\boldsymbol{s}$$

Il prodotto scalare $\boldsymbol{u}_r \cdot d\boldsymbol{s}$ vale $ds\ cos\theta$ che sappiamo essere pari a dr, cioè la variazione del modulo di $\boldsymbol{r}$ lo spostamento $d\boldsymbol{s}$. Quindi:

$$W = \int_A^B F(r)dr = f(r_B) - f(r_A) \quad .$$

Il lavoro è qundi dato dalla variazione di una funzione delle coordinate di A e B, condizione perché la forza sia **conservativa**.

MOTI RELATIVI

Sperimentalmente è provato che *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento*. Fissato un ssistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientamento degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con un'operazione combinata. La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sustemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.

TEOREMA DELLE VELOCITÀ RELATIVE - INTRO

Consideriamo un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che, per convenzione, chiamiamo **sistema fisso** e da una terna cartesiana con centro in O' che, sempre per convenzione, chiamiamo **sistema mobile**. La relazione tra le posizioni del punto P, misurate rispetto ai due sistemi di riferimento è la seguente:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{r'} \quad , \qquad \text{(relazione tra posizioni)}$$

con:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{u}_x + y\boldsymbol{u}_y + z\boldsymbol{u}_z \quad , \quad \boldsymbol{r'} = x'\boldsymbol{u}_x + y'\boldsymbol{u}_y + z'\boldsymbol{u}_z \quad , \quad \boldsymbol{OO'} = x_{O'}\boldsymbol{u}_x + y_{O'}\boldsymbol{u}_y + z_{O'}\boldsymbol{u}_z \quad .$$

Assumiamo quindi, in accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, che i versori $\boldsymbol{u}_x, \boldsymbol{u}_y, \boldsymbol{u}_z$ siano indipendenti dal tempo; tali non sono invece i versori degli assi del sistema mobile.

VELOCITÀ ASSOLUTA

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo **velocità assoluta**, è data da:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{u}_x + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{u}_y + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{u}_z$$

VELOCITÀ RELATIVA

La velocità del punto P invece, rispetto al sistema mobile, chiamata **velocità relativa**, è:

$$\boldsymbol{v'} = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{u}_{z'}$$

VELOCITÀ DELL'ORIGINE O'

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un osservatore nel sistema fisso, è data da:

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \frac{d\boldsymbol{OO'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\boldsymbol{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\boldsymbol{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\boldsymbol{u}_z$$

VELOCITÀ FINALE

La derivata rispetto al tempo di *(relazione tra posizioni)* diventa quindi:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}' + x'\frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt} \quad .$$

> NB:
>
> osserviamo che $\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ non coincide con $\boldsymbol{v}'$ in quanto nella variazioe di $\boldsymbol{r}'$ compaiono non solo le derivate delle coordinate, ma anche quelle dei versori degli assi del sistema mobile.

FORMULE DI POISSON

$$\frac{d\boldsymbol{u}_{x'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{x'} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{u}_{y'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{y'} \quad , \quad \frac{d\boldsymbol{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_{z'}$$

Alla luce di ciò, possiamo scrivere il **teorema delle velocità relative** come:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \qquad \text{(teorema velocità relative)}$$

TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE - INTRO

Consideriamo la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento.

ACCELERAZIONE ASSOLUTA

Rispetto al sistema di riferimento fisso, l'**accelerazione assoluta** è:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{u}_z$$

ACCELERAZIONE RELATIVA

Rispetto al sistema di riferimento mobile, invece, l'**accelerazione relativa** è:

$$\boldsymbol{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\boldsymbol{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\boldsymbol{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\boldsymbol{u}_{z'}$$

ACCELERAZIONE DELL'ORIGINE O'

L'acclerazione dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un osservatore nel sistema fisso, è data da $\boldsymbol{a}_{O'} = d\boldsymbol{v}_{O'}/dt$. Si ottiene così, derivando la *(teorema delle velocità relative)*:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

Dopo aver calcolato $d\boldsymbol{v}'/dt$, possiamo scrivere il **teorema delle accelerazioni relative** come:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \frac{d\boldsymbol{w}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \qquad \text{(teorema accelerazioni relative)}$$

ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

L'ultimo termine in *(teorema accelerazioni relative)*, viene chiamato **accelerazione di Coriolis** (o **accelerazione complementare**):

$$\boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Precedentemente abbiamo studiato la dinamica di un punto materiale, come conseguenza dell'interazione con il resto dell'universo. Consideriamo ora un sistema di n punti materiali, con $n > 1$, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

SISTEMI DI PUNTI - FORZE ESTERNE E INTERNE

La forza $\boldsymbol{F}_i$ agente sull'i-esimo punto si può pensare come risultante delle *forze esterne* agenti sul punto $\boldsymbol{F}_i^{(E)}$ e delle forze esercitate dagli altri $n-1$ punti, *forze interne* al sistema $\boldsymbol{F}_i^{(I)}$:

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(E)} + \boldsymbol{F}_i^{(I)} \qquad .$$

CENTRO DI MASSA DI UN SISTEMA DI PUNTI

Si definisce come **centro di massa di un sistema** di punti materiali il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} \quad ; \qquad \text{(raggio vettore centro di massa)}$$

le componenti di $\boldsymbol{r}_{CM}$, ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O, sono:

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \quad , \quad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \quad .$$

La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da *(raggio vettore centro di massa)*, mentre rispetto ad O' è:

$$\boldsymbol{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{O'O})}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} + \boldsymbol{O'O} = \boldsymbol{r}_{CM} + \boldsymbol{O'O} \quad .$$

VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la **velocità del centro di massa** come:

$$\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\boldsymbol{P}}{m} \qquad \text{(velocità centro di massa)}$$

con $\boldsymbol{P}$ **quantità di moto totale del sistema** e m **massa totale del sistema**.

ACCELERAZIONE DEL CENTRO DI MASSA

Analogamente si può trovare l'**accelerazione del centro di massa** come:

$$\boldsymbol{a}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{a}_i}{m} \quad . \qquad \text{(accelerazione centro di massa)}$$

Se il sistema di riferimento è inerziale:

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{(E)} + \boldsymbol{F}_i^{(I)}$$

Sostituendo poi in*(accelerazione centro di massa)* arriviamo a:

$$m\boldsymbol{a}_{CM} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_i (\boldsymbol{F}_i^{(E)} + \boldsymbol{F}_i^{(I)}) = \boldsymbol{R}^{(E)} + \boldsymbol{R}^{(I)} = \boldsymbol{R}^{(E)}$$

dato che la risultante di tutte le forze interne è nulla.

TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

La relazione, chiamata ora **teorema del moto del centro di massa**, diventa per cui:

$$\boldsymbol{R}^{(E)} = m\boldsymbol{a}_{CM}$$

cioè *il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne*.

In particolare, possiamo aggiungere che:

$$\boldsymbol{R}^{(E)} = m\boldsymbol{a}_{CM} = m\frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_{CM}) = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

cioè che *la risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema*.

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Se il sistema di punti considerato è isolato, cioè non soggetto a forze esterne, oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\boldsymbol{R}^{(E)}$ sia nulla, si arriva a:

$$\boldsymbol{a}_{CM} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v}_{CM} = costante \quad , \quad \boldsymbol{P} = costante$$

cioè *quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete*. Questo risultato esprime il **principio della conservazione della quantità di moto per un sistema di punti materiali**.

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

Consideriamo il **momento angolare totale** di un sistema di punti materiali rispetto ad un polo O ; detto $\boldsymbol{r}_i$ il raggio vettore $\boldsymbol{OP}_i$ si ha:

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

Attraverso una serie di calcoli, partendo dalla derivata di quanto scritto sopra, si arriva al **teorema del momento angolare**:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(E)} \quad .$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il **sistema di riferimento del centro di massa**. Esso ha le seguenti caratteristiche:

- l'origine è nel centro di massa
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli altri assi del sistema inerziale, in particolare, p ossono essere assunt iparalleli a questi
- si tratta in generale di un sistema non inerziale

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

Generalmente è dato da:

$$\boldsymbol{P}' = \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i$$

risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa.

MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

Ha lo stesso valore che ha nel sistema di riferimento inerziale, cioé:

$$\frac{d\boldsymbol{L}'}{dt} = \boldsymbol{M}'^{(E)} \quad .$$

TEOREMI DI KONIG

I **teoremi di Konig** stabiliscono le relazioni tra i momenti angolari e le energie cinetiche di un sistema di punti materiali, valutati in un sistema di riferimento inerziale ($\boldsymbol{L},\ E_k$) e nel sistema di riferimento del centro di massa ($\boldsymbol{L}',\ E'_k$).

PRIMO TEOREMA DI KONIG

Il momento angolare del sistema si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa, $\boldsymbol{L}_{CM}$, e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{L}_{CM} \quad .$$

SECONDO TEROEMA DI KONIG

L'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2}mv_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il **teorema dell'energia cinetica per i sistemi di punti materiali** è dato da:

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k \quad .$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Quando tutte le forze agenti, sia interne che esterne, sono conservative, abbiamo la **conservazione dell'energia meccanica del sistema**:

$$W = \Delta E_k = -\Delta P_p = E_{p,A} - E_{p,B} \implies (E_k + E_p)_A = (E_k + E_p)_B = costante \quad .$$

Se non tutte le forze sono conservative, abbiamo invece:

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{nc}$$

cioè il **lavoro delle forze non conservative**.

URTI TRA DUE PUNTI MATERIALI

Quando due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto al tempo di osservazione del sistema, si parla di **urto tra due punti**. Nell'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Quetse forze vengono definite **forze impulsive**. Le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. *In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale*.

Se indichiamo con $\boldsymbol{v}_{1,in}$ e $\boldsymbol{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2, e con $\boldsymbol{v}_{1,fin}$ e $\boldsymbol{v}_{2,fin}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di $\boldsymbol{P}$ si scrive:

$$\boldsymbol{P}_{in} = m_1\boldsymbol{v}_{1,in} + m_2\boldsymbol{v}_{2,in} = m_1\boldsymbol{v}_{1,fin} + m_2\boldsymbol{v}_{2,fin} = \boldsymbol{P}_{fin}$$

URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

L'urto si chiama **completamente anelastico** quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$. Se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e $\boldsymbol{v}'$ la velocità comune immediatamente dopo l'urto, si ha:

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}' = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{v}_{CM} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \quad .$$

> NB:
>
> l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale, in quanto una parte viene assorbita durante l'urto.

URTO ELASTICO

Si definisce come **urto elastico** un urto durante il quale *si conserva anche l'energia cinetica del sistema*. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto. Possiamo utilizzare quindi:

$$\boldsymbol{P}_{in} = \boldsymbol{P}_{fin} \quad , \quad E_{k,in} = E_{k,fin}$$

URTO ANELASTICO

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di E'_k, energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita. Si definisce **coefficiente di restituzione** il rapporto:

$$e = -\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = -\frac{v'_{1,fin}}{v'_{1,in}} = -\frac{p'_{2,fin}}{p'_{2,in}} = -\frac{v'_{2,fin}}{v'_{2,in}} \quad .$$

L'**energia cinetica** del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da:

$$E'_{k,fin} = e^2 E'_{k,in} \quad .$$

La variazione relativa di energia cinetica nell'urto è:

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1 \quad .$$

GRAVITAZIONE

L'interazione gravitazionale è la prima delle interazioni fondamentali di cui trattiamo alcune caratteristiche.

LA FORZA GRAVITAZIONALE

Una descrizione cinematica del moto dei pianeti ci viene fornita dalle Leggi di Keplero,

PRIMA LEGGE DI KEPLERO

I pianeti percorrono orbite ellittiche introno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse.

SECONDA LEGGE DI KEPLERO

La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante.

TERZA LEGGE DI KEPLERO

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = kr^3$ (i valori della costante k sono dati nella seguente tabella).

Pianeta	$k = (T^2/r^3) \qquad [s^2/m^3]$
Mercurio	$2.98 \cdot 10^{-19}$
Venere	2.99
Terra	2.96
Marte	2.98
Giove	2.97
Saturno	2.99
Urano	2.97
Nettuno	2.99
Plutone	2.95
Luna	$9.84 \cdot 10^{-14}$
Sole	—

Successivamente, Newton fece un ragionamento inizialmente approssimato che può essere descritto come segue: *le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze; immaginiamo allora che siano circolari*. Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme: infatti, ricordando dal moto circolare che:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad ,$$

la costanza della velocità areale e di r dà $d\theta/dt = costante$. La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta (cioè senza componente tangenziale) e sis scrive:

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad .$$

Utilizzando la **Terza Legge di Keplero**, possiamo trasformare quanto sopra in:

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} \, .$$

Questo è il primo risultato fondamentale: *la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole*.

Consideriamo il sistema terra-sole:

- ***la forza esercitata dal sole sulla terra*** può quindi essere scritta:
$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$
- mentre **la forza esercitata dalla terra sul sole** ha l'espressione:
$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2}$$
eguale in modulo a $F_{S,T}$ per il *principio di azione e reazione*.

Dall'eguaglianza si ottiene poi:

$$m_T k_S = m_S k_T \quad .$$

Definiamo quindi una nuova costante:

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_s k_T} \qquad \text{(costante gamma)}$$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Utilizzando quindi *(costante gamma)*, facendo i calcoli, per il modulo della **forza terra-sole**, arriviamo a:

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2} \quad .$$

Quets formula è semplice e simmetrica nei due corpi; Newton ipotizzò che si trattasse di una formula universale ed enunciò la seguente **legge di gravitazione universale**:

date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.

In termini vettoriali, l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è:

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{u}_{1,2} \quad . \qquad \text{(forza gravitazionale)}$$

La forza $\boldsymbol{F}_{2,1}$ subita invece da m_1 ad opera di m_2 è uguale a $-\boldsymbol{F}_{1,2}$. Dalle determinazioni più recenti, abbiamo un valore numerico della Costante di Gravitazione Universale:

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$$

CAMPO GRAVITAZIONALE

Secondo la formula della *(forza gravitazionale)*, possiamo scrivere:

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = \Big(-\gamma\frac{m_1}{r^2}\boldsymbol{u}_{1,2}\Big)m_2 \quad , \quad \boldsymbol{F}_{1,2} = \Big(-\gamma\frac{m_2}{r^2}\boldsymbol{u}_{2,1}\Big)m_1 \quad ,$$

e dire che la forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_{1,2}$ esercitata dal corpo di massa m_1 sull'altro di massa m_2 è pari al prodotto di un vettore, che dipende solo da m_1 e dalla distanza da m_1 (e non da m_2), per la massa m_2 sottoposta all'azione di m_1; viceversa nel caso di $\boldsymbol{F}_{2,1}$.

Il vettore in questione, cioè quello tra parentesi, viene chiamato **campo gravitazionale $\boldsymbol{G}$** generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante r:

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_1 = \Big(-\gamma\frac{m_1}{r^2}\boldsymbol{u}_1\Big) \implies \boldsymbol{F}_{1,2} = m_2\boldsymbol{G}_1 \\ \boldsymbol{G}_2 = \Big(-\gamma\frac{m_2}{r^2}\boldsymbol{u}_2\Big) \implies \boldsymbol{F}_{2,1} = m_1\boldsymbol{G}_2 \end{cases}$$

> dove $\boldsymbol{u}_i$ è un versore uscente raadialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i.
> $\boldsymbol{G}_1$ è diverso da $\boldsymbol{G}_2$, anche in modulo, però $\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1}$.

Il campo gravitazionale $\boldsymbol{G}$ in un punto P dovuto ad una massa m continua contenuta in una regione limitata, si calcola dividendo la massa m iin parti infinitesime dm, ognuna delle quali genera in P un campo:

$$d\boldsymbol{G} = -\gamma\frac{dm}{r^2}\boldsymbol{u} \quad ,$$

e si integra vettorialmente su tutti i contributi:

$$\boldsymbol{G}(P) = \int_C -\gamma\frac{dm}{r^2}\boldsymbol{u} = \int_V -\gamma\rho\frac{dV}{r^2}\boldsymbol{u}$$

utilizzando $dm = \rho dV$ ovvero la definizione di *densità ρ*.

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Dimostriamo che la **forza gravitazionale** è *conservativa*:

$$dW = \boldsymbol{F}\cdot d s = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{u}_1 \cdot d\boldsymbol{s}$$

ora consideriamo che $\boldsymbol{u}_1 \cdot d\boldsymbol{s} = dr$. Quindi per calcolare il lavoro totale:

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -\gamma m_1 m_2\Big(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\Big) = \\ -\gamma\frac{m_1 m_2}{r_A} - \Big(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_B}\Big) = E_{p,A} - E_{p,B} \quad .$$

Verifichiamo così che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziale e finale, e che l'**energia potenziale** ha l'espressione:

$$E_p = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r} \quad . \qquad \text{(energia potenziale gravitazionale)}$$

> NB:
>
> il segno negativo indica che la forza gravitazionale è **attrattiva**.

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

In questa parte, studiamo i **corpi rigidi**, cioé i sistemi formati da un insieme di punti materiali sottoposti ad un'interazione mutua tale da mantenerli in posizione fissa l'uno rispetto all'altro. Più precisamente, un **corpo rigido** è definito come *un sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare*.

> NB:
>
> si tratta di un modello ideale, quello del corpo indeformabile, al quale si avvicinano i corpi solidi ordinari, nella pratica sempre deformabili, anche se magari in minima parte.

MOTO DI UN CORPO RIGIDO

Un corpo rigido può compiere basilarmente due tipi di moto:

- moto di traslazione
- moto di rotazione

MOTO DI TRASLAZIONE

Si tratta di un tipo di moto in cui tutti i punti descrivono traiettorie eguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità $\boldsymbol{v}$, che può variare nel tempo in modulo, direzione e verso: $\boldsymbol{v}$ coincide con $\boldsymbol{v}_{CM}$, velocità del centro di massa. Quindi nel moto di traslazione, che può essere uniforme o vario, se è noto il moto del centro di massa è noto quello di qualsiasi altro punto. Durante una generica traslazione, l'angolo tra gli assi del sistema del centro di massa e gli assi del sistema di riferimento solidale al corpo non varia durante il moto: qualsiasi segmento tracciato nel corpo rigido rimane paralleloa se stesso durante una traslazione.

La dinamica è quella di un punto materiale e non c'è movimento rispetto al centro di massa:

$$\boldsymbol{L}' = 0 \quad , \quad E_k' = 0 \quad .$$

Le grandezze significative in una traslazione sono:

- quantità di moto → $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_{CM}$
- energia cinetica → $E_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_{CM}^2$

L'equazione del moto del centro di massa è:

$$\boldsymbol{R} = M\boldsymbol{a}_{CM} \quad .$$

La conoscenza del momento angolare si ricava dalla conoscenza della quantità di moto e della posizione del centro di massa:

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_{CM} = \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM} = \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{P} \quad ;$$

da qui si nota quindi la dipendenza del momento angolare $\boldsymbol{L}$ da $\boldsymbol{P}$.

> NB:
>
> anche l'equazione $\boldsymbol{M} = d\boldsymbol{L}/dt$ non aggiunge alcuna informazione (si verifichi appunto che $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_{CM} \times \boldsymbol{R}$).

MOTO DI ROTAZIONE

Si tratta di un tipo di moto in cui tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro su uno stesso asse, l'asse di rotazione. La rigidità del corpo implica che tutti i punti abbiano in un dato istante la stessa velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, che è parallela all'asse di rotazione; le velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei singoli punti sono diverse a seconda della distanza R_i dall'asse di rotazione (in modulo $v_i = \omega R_i$). Se l'asse di rotazione rimane fisso nel tempo, $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare solo in modulo e verso e abbiamo un moto circolare vario,in particolare *uniforme* se $\boldsymbol{\omega}$ è costante; nel caso piuù generale, $\boldsymbol{\omega}$ può cambiare anche in direzione (asse di rotazione variabile).

L'equazione dinamica di base del moto di rotazione è:

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} \qquad \text{(equazione del moto di rotazione)}$$

MOTO DI ROTOTRASLAZIONE

I due moti appena considerati, posso anche essere effettuati contemporaneamente, dando origine quindi ad un **moto di rototraslazione**, cioè il *moto rigido più generale* (e comune). In questo particolare tipo di moto possiamo considerare *ogni spostamento infinitesimo come somma di una traslazione e di una rotazinoe infinitesime, individuate da* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{\omega}$*, variabili nel tempo*.

Per descrivere una rototraslazione, si utilizzano sia il teorema del moto del centro di massa che il teorema del momento angolare, avendo preso come polo un punto fisso nel sistema di riferimento inerziale o il centro di massa. È importante a questo punto dire che *la descrizione del moto di un corpo rigido non è univoca*.

DENSITÀ

$$\rho = \frac{dm}{dV} \implies m = \int dm = \int_V \rho dV \quad .$$

Un corpo nel quale la densità è costante si dice **omogeneo**, in questo caso abbiamo quindi:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad m = \rho V$$

In casi particolare, la massa può essere distribuita su una superficie S invece che in un volume V, come nel caso di membrane, bolle di sapone, oppure lungo una linea l come fili e bacchette sottili. Per questo motivo, si introducono i concetti di:

- **densità superficiale**

$$\rho_S = \frac{dm}{dS} \implies m = \int \rho_S dS \qquad \text{(densità superficiale)}$$

-
- **densità lineare**

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \implies m = \int \rho_l dl \qquad \text{(densità lineare)}$$

-

La grandezza ("nu") $\nu = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm}$ si chiama **volume specifico**; mentre la densità può essere pensata come la massa contenuta nell'unità di volume, il volume specifico rappresenta il volume occupato dall'unità di massa.

POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA

La posizione di ciascun punto di un corpo rigido, di massa $dm = \rho dV$, è individuata dal raggio vettore $\boldsymbol{r}$; sappiamo che la posizione del centro di massa è data dalla somma degli infiniti vettori $\boldsymbol{r}dm$ divisa per la massa totale:

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\int \boldsymbol{r}dm}{\int dm} = \frac{\int \boldsymbol{r}\rho dV}{m} \quad .$$

Se il corpo è omogeneo (ρ costante):

$$\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\rho}{m}\int \boldsymbol{r}dV = \frac{1}{V}\int \boldsymbol{r}dV \quad .$$

> NB:
>
> nel risolvere gli integrali si noti che $\boldsymbol{r}$ e ρ sono funzioni delle coordinate e che anche dV è esprimibile in termini di coordinate: per esempio, in coordinate cartesiane, $dV = dx\,dy\,dz$. Questo vuol dire che l'integrale è triplo.

ROTAZIONE RIGIDA ATTORNO AD UN ASSE FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

Si tratta di una situazione particolare che però si presenta in molti problemi pratici, come ad esempio la rotazione di parti di macchine o di motori. I punti dell'asse di rotazione sono punti fissi e quindi possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti.

> NB:
>
> l'asse di rotazione può essere esteno al corpo e il centro di massa non è detto sia un punto dell'asse stesso.

Assumiamo l'asse z come asse di rotazione; $\boldsymbol{\omega}$ è quindi parallelo all'asse z. Il polo dei momenti è il punto O sull'asse z. Il raggio vettore $\boldsymbol{r}_i$ del punto P_i forma un angolo θ_i con l'asse z e un angolo di $\pi/2$ con la velocità $\boldsymbol{v}_i$ del punto P_i. Il momento angolare del punto P_i rispetto al polo O è dato da:

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \quad .$$

$\boldsymbol{L}_i$ è ortogonale al piano individuato dai vettori $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ è forma un angolo $\pi/2 - \theta_i$ con l'asse z. Il modulo $\boldsymbol{L}_i$, è:

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega \quad .$$

Calcoliamo ora la proiezione del momento angolare $\boldsymbol{L}_i$ sull'asse di rotazione, ovvero il **momento angolare assiale**:

$$L_{iz} = L_i cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = L_i sen\theta_i = m_i r_i sen\theta_i R_i \omega = m_i R_i^2 \omega \quad .$$

Il momento angolare del corpo è $\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{L}_i$ e in generale non è parallelo all'asse di rotazione: ciò vuol dire che in generale non esiste una relazione di proporzionalità tra $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$. La proiezione di $\boldsymbol{L}$ sull'asse z è:

$$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum_i m_i R_i^2)\omega = I_z \omega \quad .$$

Il coefficiente I_z si chiama **momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse** z:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \quad .$$

> NB:
>
> il momento d'inerzia dipende quindi dalle masse e dalla loro posizione rispetto all'asse di rotazione: non è una caratteristica del corpo che si possa calcolare nota la sua struttura (come la posizione del centro di massa), ma per definirlo è necessario conoscere anche la posizione dell'asse di rotazione rispetto al corpo.

EQUAZIONE DEL MOTO

Nel caso più semplice in cui $\boldsymbol{L}$ è parallelo a $\boldsymbol{\omega}$, valgono:

$$\boldsymbol{L} = I_z \boldsymbol{\omega} \quad , \quad L = L_z \quad . \quad L_\perp = 0$$

per cui possiamo screivere:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \boldsymbol{\omega}) = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

da cui si ricava anche:

$$\boldsymbol{M} = I_z \boldsymbol{\alpha}$$

che non è altro che l'*(equazione del moto di rotazione)* riportata sopra.

ENERGIA CINETICA E LAVORO

L'energia cinetica del corpo rigido nel moto di rotazione p data da:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Quando un corpo rigido in quiete o in rotazione con velocità angolare ω_{in} viene portato a ruotare con velocità angolare ω_{fin} a seguito dell'applicazione di un momento esterno, l'energia cinetica subisce una variazione e quindi è stato compiuto un lavoro. Per cui, il lavoro prende formula:

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$$

La relazione tra momento e lavoro è data da:

$$W = \int_0^\theta M_z \, d\theta \quad .$$

La **potenza istantanea** invece è data da:

$$\frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega \quad .$$

MOMENTO D'INERZIA

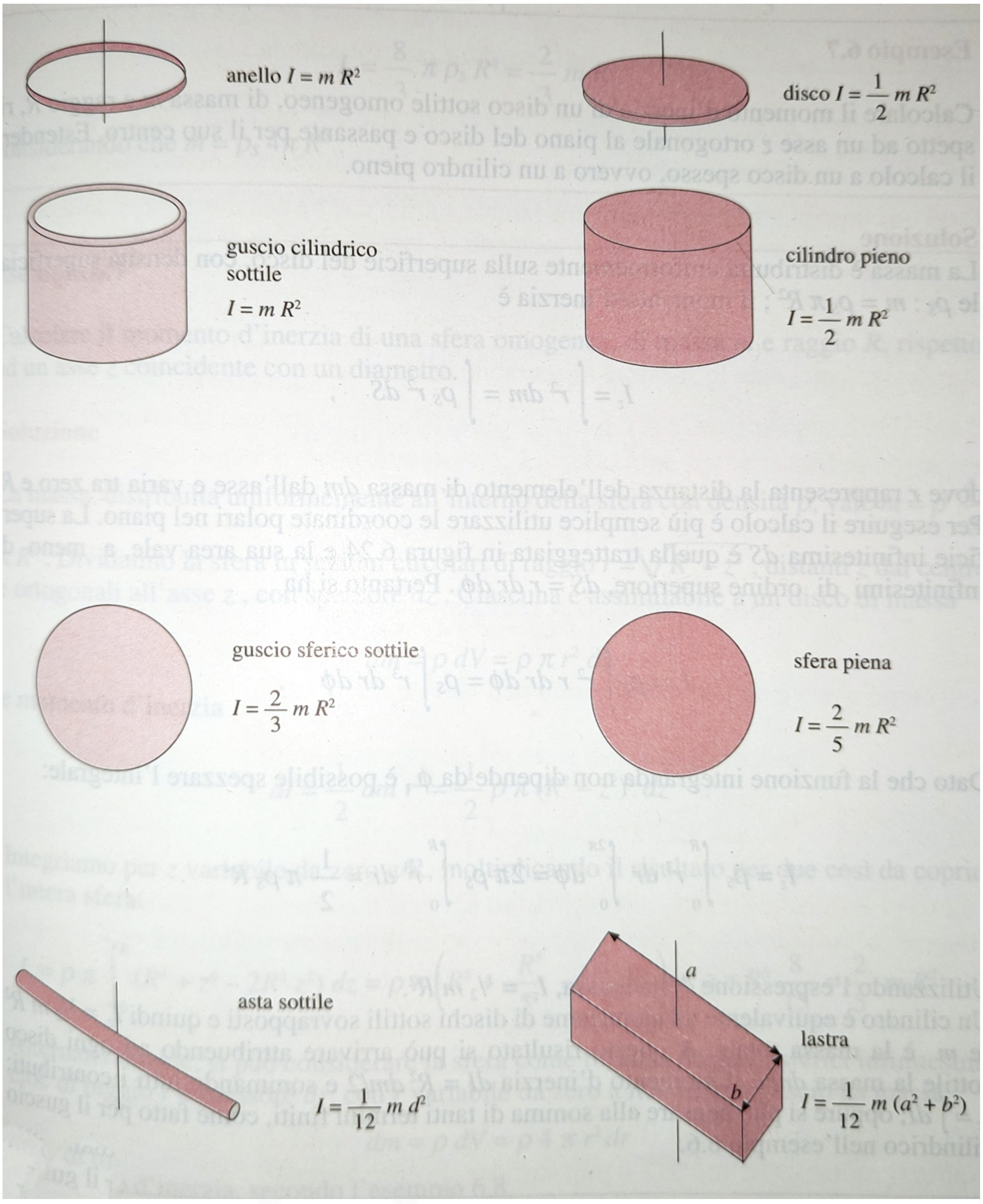
Il **momento d'inerzia per un corpo continuo** è:

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

dove R è la distanza dell'elemento di massa dm dall'asse z assunto come asse di rotazione.

MOMENTI D'INERZIA NOTEVOLI

In questa tabella troviamo i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi omogenei:



[Source: Mazzoldi ©]

TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

Il **teorema di Huygens-Steiner (H.S.)** stabilisce che *il momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse che si trova a una distanza a dal centro di massa del corpo è dato da:

$$I = I_c + ma^2 \qquad \text{(teorema di Huygens-Steiner)}$$

dove I_c è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad una asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Consideriamo ora una situazione fisica in cui l'asse di rotazione non è un asse materiale, con supporti e cuscinetti, bensì un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. Questo, di forma cilindrica o sferica, si trova sopra un piano e si muove rispetto ad esso. Se le velocità di tutti i punti sono eguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione e il corpo striscia sul piano. In generale però il corpo in questione rotola sul piano e il punto di contatto ha velocità non nulla rispetto al piano: si dice allora che *il corpo rotola e striscia*. Se invece la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un *moto di puro rotolamento*.

Possiamo prendere come esempio il moto di una ruota: in ogni intervallo dt il corpo che rotola senza strisciare può venire considerato come se ruotasse rispetto ad un asse, fisso durante dt, passante per il punto di contatto C e ortogonale al piano, con velocità angolare ω. La condizione di puro rotolamento è $\boldsymbol{v}_C = 0$ e considerando:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

si arriva a dire che:

$$\boldsymbol{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

In modulo avremo:

$$v_{CM} = \omega\, r \quad \Longrightarrow \quad a_{CM} = \alpha\, r$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica. Infatti la forza d'attrito, che normalmente è diversa da 0, agisce su un punto fermo per cui lo spostamento è nullo ed è quindi nullo il lavoro. Come avviene sempre in meccanica però, la conservazione dell'energia è un caso limite. Notiamo infatti sperimentalmente che un corpo che rotola senza striscsiare sopra un piano orizzontale, in assenza di forze e momenti applicati, si arresta comunque dopo un certo tempo. Deve esistere per cui una qualsiasi altra forma di attrito (**attrito volvente** o **attrito di rotolamento**) che viene attribuito alla derformazione locale del piano ed è schematizzato con l'azione di un momento $M = hmg$, che si oppone al moto, con:

- $h \rightarrow$ **coefficiente di attrito volvente**
- $m \rightarrow$ massa del corpo
- $g \rightarrow$ accelerazione di gravità

Per vincere il momento dovuto all'attrito volvente, si deve applicare al corpo di foma circolare, di massa m e raggio r, una **forza di trazione** $F_2 \geq hmg/r$.

> NB:
>
> a causa della piccolezza dell'effetto, spesso (o sempre) viene trascurato l'effetto dell'attrito volvente, quindi non viene considerato il suo momento.

EQUILIBRIO STATICO DI UN CORPO RIGIDO

La condizione di **equilibrio statico** per un punto materiale è che la risultante delle forze applicate al punto sia nulla, $\boldsymbol{R} = 0$. Per un corpo rigido inizialmente in quiete si ha l'**equilibrio statico** se:

$$\boldsymbol{R} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{M} = 0 \quad .$$

Con $\boldsymbol{R} = 0$ si realizza l'equilibrio statico del centro di massa, $\boldsymbol{v}_{CM} = 0$, mentre con $\boldsymbol{M} = 0$ non si ha moto rotatorio, $\omega = 0$.

PROPRIETÀ MECCANICHE DEI FLUIDI

Una delle caratteristiche di un corpo solido è avere una forma propria; invece una sostanza liquida o gassosa non ha questa proprietà, essa assume la forma del recipiente che la contiene. A una tale sostanza ci si riferisce in generale col nome di **fluido**.

PRESSIONE

Con **pressione** *in un punto* si intende il rapporto tra la forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto e l'area della superficie stessa, cioè:

$$p = \frac{dF}{dS} \quad , \quad p = \frac{F}{S} \quad ,$$

dove la seconda espressione vale per una superficie finita se nei punti di questa la pressione è costante.

LAVORO DELLE PRESSIONI

In equilibrio statico non ci sono spostamenti, anche se ci sono forze, e il lavoro è nullo. È però possibile in condizioni diverse che sotto l'azione delle forze di pressione ci sia uno spostamento e quindi un lavoro associato. Consideriamo la situazione più semplice: una forza $F = pdS$ agisce ortogonalmente ad una superficie dS che a seguito di ciò si sposta concordemente alla forza di una quantità dh. Il lavoro infinitesimo vale:

$$dW = dF\, dh = p\, dS\, dh = p\, dV$$

dove dV è il volume infinitesimo coperto dalla superficie dS nello spostamento dh. Integrando sulla variazione complessiva di volume si ottiene:

$$W = \int p\, dV$$

> NB:
>
> questa formula è valida in generale per forme qualsiasi.

EQUILIBRIO STATICO DI UN FLUIDO

In un fluido in quiete tutti gli elementi hanno accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale. Siccome sull'elemento di fluido dm agiscono forze di pressione $\boldsymbol{F}_P$ e forze di volume $\boldsymbol{F}_V$ deve risultare $\boldsymbol{F}_P + \boldsymbol{F}_V = 0$ e ovvimanete è nulla la somma delle componenti lungo qualsiasi asse.

LEGGE DI STEVINO

La **Legge di Stevino** mostra che *in un liquido con $\rho = costante$ la pressione cresce linearmente con la profondità*. Si riassume in:

$$p(h) = p_0 + \rho\, g\, h \qquad \text{(legge di Stevino)}$$

dove p_0 rappresenta la pressione atmosferica ($p_0 \equiv 1bar = 10^5\,Pa$).

PRINCIPIO DI PASCAL

La struttura della legge di variazione della pressione nel fluido è $p = p_0 + \Delta p$ con p_0 pressione esterna. Ne segue che ogni cambiamento della pressione esterna dà luogo a un'eguale variazione di p. Questa proprietà è nota come **principio di Pascal**.

L'enunciato più comprensibile è: *Una variazione di pressione esercitata su un fluido viene trasmessa inalterata a ogni punto del fluido e sulle pareti del suo contenitore*.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V_0, di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è eguale ad opposta alla forza peso della stessa. Infatti per la condizione di equilibrio del volume V_0 di fluido:

$$\boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_V = \boldsymbol{F}_p + m\boldsymbol{g} = 0 \implies \boldsymbol{F}_p = -m\boldsymbol{g} \quad ,$$

essendo m la massa di fluido contenuta nel volume V_0, $m = \rho V_0$. Se ora sotituiamo al volume V_0 di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostamza, con massa $m' = \rho' V_0$, la risultante $\boldsymbol{F}_p$ delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante rimane la stessa, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione. Pertanto non sussiste più una condizione di equilibrio e la forza risultante agente su V_0 vale $\boldsymbol{F}'_V + \boldsymbol{F}_p$, cioè:

$$(m' - m)\boldsymbol{g} = (\rho' - \rho)V_0\boldsymbol{g} \quad .$$

Se:

- $\rho' > \rho \rightarrow$ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di $\boldsymbol{g}$ e quindi il corpo, introdotto al posto del volume V_0 di fluido, scende nel fluido
- $\rho' < \rho \rightarrow$ invece il corpo sale.

In ambedue i casi *il corpo riceve una spinta verso l'alto, $\boldsymbol{F}_A = -\rho V_0 \boldsymbol{g}$, pari al peso del volume di fluido spostato.* Questo risultato esprime il **principio di Archimede**.

ATTRITO INTERNO

Quando si verifica una condizione di scorrimento relativo tra due elementi di fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito, detta **forza di attrito interno**, con verso sempre contrario a quello della velocità relativa. L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa. Si trova sperimentalmente che il modulo della forza di attrito interno si può esprimere come:

$$dF = \eta DS \frac{dv}{dn}$$

dove:

- $dS \rightarrow$ area di contatto
- $\frac{dv}{dn} \rightarrow$ variazione del modulo della velocità in direzione ortogonale a dS
- $\eta \rightarrow$ **viscosità del fluido** (dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura)

> η (viscosità):

> - nei liquidi → decresce all'aumentare della temperatura
> - nei gas → cresce all'aumentare della temperatura

> NB:
>
> l'unità di misura della viscosità è genericamente il **poise**, con il suo sottomultiplo **centipoise**:
>
> $$1\,\text{poise} = 10^{-1}\,\text{kg/ms} \quad , \quad 1\,\text{centipoise} = 10^{-2}\,\text{poise} = 10^{-3}\,\text{kg/ms} \quad .$$

MOTO DI UN FLUIDO

Per parlare del moto di un fluido, ci sono state nel tempo diverse descrizioni, dalla meno alla più recente:

- *lagrangiana* → prende in esame un elemento di fluido e ne segue il moto dovuto alle varie forze agenti (di volume, di superficie, inclusa la forza di attrito interno se la viscosità non è trascurabile)
- *euleriana* → viene fissata l'attenzione su un determinato punto della massa fluida $P(x, y, z)$ e si considera la velocità $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ di un elemento fluido che passa nel punto P all'istante t .

REGIME STAZIONARIO

Prendendo in considerazione la descrizione euleriana e facendo la considerazione che la velocità, pur cambiando da punto a punto, sia in ciascun punto indipendente dal tempo $\boldsymbol{v}(x, y, z)$. Questa situazione fisica è detta **regime stazionario**: tutti lgi elementi di fluido che passano in istanti diversi in P hanno in quella posizione sempre la stessa velocità. In caso contrario si parla di **regime variabile**.

LINEE DI CORRENTE

Tracciamo le linee che in ogni punto hanno direzione e verso della velocità cioè sono tangenti al vettore velocità: tali linee sono dette **linee di corrente**; in regime stazionario esse hanno una configurazione costante nel tempo e coincidono con le traiettorie degli elementi fluidi.

> NB:
>
> in regime variabile invece le linee di corrente cambiano nel trempo e la traiettoria di un elemento fluido è costituita da una successione di tratti, ciascuno appartenente a una diversa configurazione di linee di corrente.

TUBO DI FLUSSO

Tutte le linee di corrente che passano attraverso una generica sezione S individuano un **tubo di flusso** (possiamo descriverlo banalmente come un "condotto") . Consideriamo un tubo di flusso di sezione infinitesima dS, ortogonale alle linee di corrente: il prodotto $dq = vdS$, detto **portata del tubo di flusso**, rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso dS in un secondo. Tale volume, infatti, ha la base pari a dS e l'altezza v, modulo della velocità, che corrisponde allo spazio percorso da un elemento di fluido in un secondo. **Come si desume, la portata si misuraa in m^3/s.**

> NB:
>
> il tubo di flusso può cambiare di sezione, ma se il fluido è incomprimibile, cioè la densità è costante, e si è in condizioni di regime stazionario, cioè la configurazione delle linee di corrente è immutabilem la portata deve essere la stessa attraverso qualsiasi sezione.

PORTATA

Per un tubo di flusso di sezione finita, la portata è data da:

$$q = \int_S dq = \int_S v\, dS = v_m S \quad ,$$

con v_m *media delle velocità* nei vari punti della sezione (media spaziale e non temporale). Per un fluido incomprimibile, in regime stazionario:

$$v_m S = costante \quad .$$

TEOREMA DI BERNOULLI

Abbiamo un fluido ideale, $\eta = 0 \quad \text{e} \quad \rho = costante$, che scorre in condizioni di regime stazionio dentro un condotto a sezione variabile. Un volume di fluido, compreso tra le sezioni S_1 e S_2 si sposta tra le sezioni S_1' e S_2': sia $d\boldsymbol{s_1}$ lo spostamento tra S_1 e e S_1' e ds_2 quello tra S_2 e S_2'. Se il fluido è incomprimibile, il volume $dV_1 = S_1\, ds_1$ che attraversa la sezione S_1 nel tempo dt è eguale a quello $dV_2 = S_2\, ds_2$ che attraversa nello stesso intervallo di tempo la sezione S_2: $dV_1 = dV_2$.

Dopo svariati calcoli si arriva a descrivere il **teorema di Bernoulli** come:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = costante \qquad \text{(teorema di Bernoulli)}$$

Se il condotto è orizzontale $\rho g z$ è costante, quindi il *(teorema di Bernoulli)* si riduce a:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = costante$$

Se invece $v = 0$ si arriva alla *(legge di Stevino)*:

$$p + \rho g z = costante$$

TERMODINAMICA

È la branca della fisica che si occupa dello studio del bilancio energetico complessivo di un processo fisico, estendendo l'indagine a scambi di energia che non sono meccanici nel senso macroscopico finora discusso.

SISTEMA

Si parlerà di **sistema termodinamico** per descrivere *una porzione del mondo che può essere costituita da una o più parti*, per esempio un volume di gas, un liquido in equilibrio con il suo vapore, un insieme di blocchi di solidi diversi; tale sistema è oggeto di osservazioni per quanto riguara le proprietà fisiche macroscopiche che lo caratterizzano e le loro eventuali variazioni.

AMBIENTE

Con **ambiente** indichiamo quell'insieme che può essere costituito da una o più parti, con cui il sistema può interagire: l'ambiente pertanto contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.

UNIVERSO

L'insieme *sistema + ambiente* si chiama **universo**, in senso locale.

TIPI DI SISTEMA

In base a determinate caratteristiche, possiamo descrivere diversi tipi di sistemi termodinamici

SISTEMA APERTO

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono scambi di energia e di materia, il sistema è detto **aperto**.

> Esempio:
>
> il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente (aperto) che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore; nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente. Inoltre vi è certamente passaggio di energia dall'ambiente al sistema tramite la sorgente di calore.

SISTEMA CHIUSO

Il sistema si dice **chiuso** se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente scambi di energia.

> Tornando allo stesso esempio fatto prima, se il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore, il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

SISTEMA ISOLATO

Il sistema viene definito **isolato** se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'universo termodinamico formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi come un sistema isolato.

VARIABILI TERMODINAMICHE

Un sistema termodinamico viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche direttamente misurabili, dette ***coordinate*** o ***variabili termodinamiche***, come *volume, pressione, temperatura, massa, concentrazione, densità, ecc*. Le variabili termodinamiche si dividono in 2 tipologie:

- estensive → esprimono una proprietà globale del sistema, che dipende in particolare dalle dimensioni o dall'estensione del sistema.

  > Esempio: massa, volume.

- intensive → esprimono una proprietà locale, che può variare da punto a punto del sistema.

  > Esempio: pressione, temperatura, densità.

EQUILIBRIO TERMODINAMICO

Lo stato termodinamico di un sistema è detto **di equilibrio** quando le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo. In un sistema termodinamico all'equilibrio le variabili termodinamiche sono dette **variabili di stato**. L'equilibrio termodinamico è il risultato di 3 diversi tipi di equilibrio, che devono essere realizzati contemporaneamente:

1. **equilibrio meccanico** → equilibrio tra forze e momenti, secono quanto studiato in meccanica

2. **equilibrio chimico** → non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema stesso
3. **equilibrio termico** → la temperatura è la stessa ovunque

> NB:
>
> solitamente il sistema negli esercizi viene considerato sempre in equilibrio chimico.

ESPERIMENTI DI JOULE - CALORE

Dopo una serie di esperimenti condotti verso la metà del 1800, Joule arrivò ad alcune conclusione sugli effetti termici del lavoro meccanico. Il suo risultato fondamentale viene espresso dalla formula:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$$

dove U è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema, cioè dalle sue coordinate termodinamiche.

Successivamente possiamo dire che per quanto riguarda il calore, scriviamo anche:

$$Q = \Delta U$$

Dalle due formule scritte, possiamo ricavare la relazione:

$$Q = -W \quad , \qquad \text{(equivalenza tra calore e lavoro)}$$

dove, per chiarezza, Q *rappresenta il calore scambiato, senza lavoro esterno, per far variare di* ΔT *la temperatura della massa d'acqua e* W *il lavoro che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura*.

> NB:
>
> il segno negativo dipende dalla convenzione adottata per i segni degli scambi di energia.

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Sperimentalmente si verifica sempre che: *se il sistema compie una trasformazione dallo stato* A *allo stato* B*, scambiando calore e lavoro con l'ambiente,* Q *e* W *dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza* $Q - W$ *risulta indipendente dalla trasformazione*. Si può pertanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U_A$:

$$Q - W = \Delta U \quad , \quad Q = \Delta U + W \quad . \qquad \text{(primo principio della termodinamica)}$$

TRASFORMAZIONE CICLICA

Se un sistema termodinamica effettua una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, ovvero una **trasformazione ciclica o chiusa**, si ha per definizione:

$$\Delta U = 0 \implies Q = W$$

CONVENZIONE SUI SEGNI DI CALORE E LAVORO

Descrizione	Segno
calore che entra in un sistema dall'esterno	segno positivo
lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno	segno positivo
calore che esce da un sistema verso l'esterno	segno negativo
lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema	segno negativo

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

TRASFORMAZIONI ADIABATICHE

Si chiama **trasformazione adiabatica** una qualsiasi trasformazione in cui $Q = 0$, in cui cioè il *sistema non scambia calore con l'esterno*, ossia è isolato termicamente dall'esterno. Un sistema adiabatico è un sistema che compie solo trasformazioni adiabatiche e per il quale quindi il primo principio si scrive $W = -\Delta U$. Gli scambi con l'ambiente possono avvenire solo sotto forma di lavoro meccanico. Sperimentalmente questa situazione si realizza chiudendo il sistema in un contenitore con pareti adiabatiche.

TRASFORMAZIONI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

Considerando una trasformazione qualsiasi, gli **stati intermedi** attraverso i quali passa il sistema *possono essere in equilibrio e di non equilibrio*. Possiamo distinguere due tipi di trasformazioni:

- **trasformazioni reversibili** → se avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa
- **trasformazioni irreversibili** → se passa attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure se si verificano, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni

> NB:
>
> le trasformazioni reversibili sono un caso limite, ideale, che nella realtà difficilmente possono essere realizzate. Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualunque stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già attraversati; in tal caso cambia il segno degli scambi di energia e della variazione di energia interna.

CALORIMETRIA

Il primo principio della termodinamica introduce e definisce la grandezza fisica *calore*, mettendo in evidenza che, generalmente, lo scambio di calore comporta per un sistema una variazione di energia interna e uno scambio di lavoro; la relazione del *(primo principio della termodinamica)* offre un possibile modo per calcolare esplicitamente il calore in una generica trasformazione. È corretto però precisare che esistono alcuni processi particolari, e molto comuni, in cui è possibile ricavare un'espressione analitica del calore scambiato direttamente in funzione della variazione delle coordinate termodinamiche nella trasformazione. Sperimentalmente si è verificato che sussite la seguente relazione, che esprime la quantità di calore scambiato da un corpo conoscendone la massa e la variazione della sua temperatura:

$$Q = m\,c\,(T_{fin} - T_{in})$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, chiamata **calore specifico** Il prodotto $C = m\,c$ è detto **capacità termica** del corpo e rappresenta *il calore necessario per far variare la temperatura del corpo di* $1\,K$ *(ovvero di* $1\,^{\circ}C$).

GAS IDEALI E REALI

Un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio quello del recipiente che lo contiene
- è comprimibile facilmente, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione

Considerata una certa quantità di gas, le *variabili termodinamiche* più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono:

- la pressione p
- il volume V
- la temperatura T

LEGGE ISOTERMA DI BOYLE

Consideriamo di avere un gas in equilibrio termodinamico ad una certa pressione entro un dato volume e a temperatura T: se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti ipossibili stati di equilibrio isotermi il prodotto della pressione per il volume ha sempre lo stesso valore. Vale cioè la **legge di Boyle**:

$$pV = costante \quad ;$$

a tempertaura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume. Più chiaramente, se il gas passa da uno stato di equilibrio a pressione p_1 e volume V_1 ad uno stato di equilibrio a pressione p_2 e volume V_2, allora vale:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad .$$

LEGGE ISOBARA DI VOLTA-GAY LUSSAC

Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di **trasformazione isobara**; si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0(1+\alpha t) \quad , \quad V = V_0\,\alpha\,T \quad \text{con} \quad T = (273.15 + t)K$$

> NB:
>
> t è la temperatura in gradi Celsius $^{\circ}C$.
>
> α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta **coefficiente di dilatazione termica**.

LEGGE ISOCORA DI VOLTA-GAY LUSSAC

Se invece si mantiene costante il volume di un gas, la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0(1+\beta t) \quad , \quad p = p_0\,\beta\,T \quad \text{con} \quad T = (273.15 + t)K$$

> NB:
>
> t è la temperatura in gradi Celsius ($^{\circ}C$), T invece è in Kelvin (K).
>
> β è una costante esattamente come α, indipendente dal tipo di gas.

CONSIDERAZIONI SULLE COSTANTI α E β

Quanto più ci si avvicina alle condizione di gas ideale (bassa pressione e alta temperatura), tanto più ci si avvicina a dire che:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15}\,^{\circ}C^{-1}$$

LEGGE DI AVOGADRO

La quarta legge dei gas è la **legge di Avogadro**, di carattere completamente diverso dalle precedenti leggi elementari, in quanto direttamente collegata alla struttura microscopica dei gas. Essa stabilisce che *volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole*.

EQUAZIONE DI STATO

L'equazione generale di stato di un gas ideale è data da:

$$pV = nRT$$

dove:

- p → pressione
- V → volume
- n → numero moli
- R → costante del gas ideale
- T → temperatura del gas in Kelvin (K)

ENERGIA INTERNA

Consideriamo due generici stati di equilibrio U_A e U_B:

$$\Delta U = U_B - U_A = n\,c_V\,(T_B - T_A) = n\,c_V\,\Delta T$$

dove c_V è il *calore specifico molare a volume costante*. La formula sopra può essere scritta come:

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V\,dT$$

nel caso in cui il calore specifico a volume costante sia dipendente dalla temperatura.

TEORIA CINETICA DEI GAS

Leipotesi di partenza del modello cinetico, enunciate in termini moderni, sono le seguenti:

1. un gas è costituito da molecole eguali, in moto continuo e disordinato (**caos molecolare**)
2. gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici
3. non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti (gli urti sono dovuti cioè a forze repulsive a corto raggio di azione, mentre si assumono trascurabili le forze attrattive agenti

tra le molecole)
4. le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse

In base ad ognuna di queste ipotesi, si arriva a diverse conclusioni:

1. considerata una qualsiasi direzione orientata $\boldsymbol{u}$, ci sono tante molecole che hanno velocità concorde a $\boldsymbol{u}$ e altrettante discorde; da qui la velocità media $\boldsymbol{v}_m$ è nulla. In questo modo possiamo dire che un gas chiuso in un recipiente, al livello macroscopico è in quiete: $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_{CM} = 0$. Inoltre il numero di molecole per unità di volume deve essere lo stesso in ogni parte del recipiente occupato dal gas (densità costante).
2. questa ipotesi implica che negli urti tra le molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia (forze esterne impulsive).
3. da qui deriva che l'energia potenziale interna è nulla e quindi la sola forma di energia è quella cinetica.
4. la quarta ipotesi indica invece che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

TRASFORMAZIONI CICLICHE

Si tratta come già detto di trasformazioni in cui lo stato finale e quello iniziale coincidono. Abbiamo da qui due diversi tipi di macchina:

- **macchina termica**
- **macchina frigorifera**

MACCHINA TERMICA

Se durante il ciclo viene **prodotto lavoro** ($W > 0$), assorbendo calore da un opportuno numero di sorgenti, tale ciclo è detto *termico*. Il dispositivo che opera è indicato come **macchina termica**.

MACCHINA FRIGORIFERA

Se invece il ciclo è tale da dover richiedere un **lavoro esterno** ($W < 0$), estraendo calore da una o più sorgenti fredde per cederlo a sorgenti calde si parla di *ciclo frigorifero*. Il dispositivo corrispondente è detto **macchina frigorifera**.

RENDIMENTO DI UN CICLO TERMICO

Per un ciclo termico si definisce **rendimento**, la quantitò adimensionale

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 01 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \quad .$$

> $Q_A \rightarrow$ calore assorbito
>
> $Q_C \rightarrow$ calore ceduto

Il **rendimento** è quindi *la percentuale di calore assorbito che viene trasformato in lavoro*.

> NB:
>
> nell'ultimo passaggio della formula, si sfrutta il fatto che il calore ceduto Q_C è una quantità negativa.

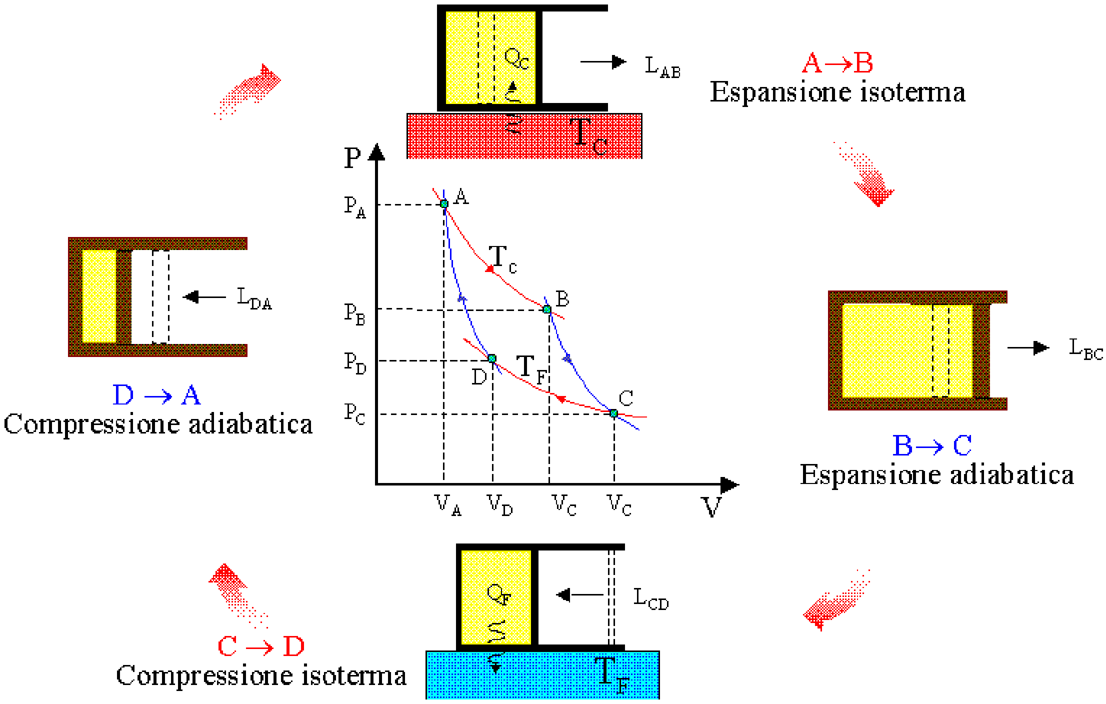
Sperimentalmente si osserva sempre che:

$$0 \leq \eta < 1$$

CICLO DI CARNOT

Il **ciclo di Carnot** è costituito da 4 trasformazioni reversibili:

1. trasformazione $AB \rightarrow$ espansione isoterma reversibile
2. trasformazione $BC \rightarrow$ espansione adiabatica reversibile
3. trasformazione $CD \rightarrow$ compressione isoterma reversibile
4. trasformazione $DA \rightarrow$ compressione adiabatica reversibile



> NB:
>
> nella figura sopra: $L = W \quad \text{(lavoro)}$

RENDIMENTO DEL CICLO DI CARNOT

Il rendimento del ciclo di Carnot descritto da un gas ideale con calore specifico costante, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore. Esso vale:

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad .$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Mentre con il primo principio si verifica che è possibile trasformare integralmente lavoro in calore, si nota che non è possibile effettuare il processo inverso(almeno non per intero): il calore non può essere trasformato completamente in lavoro. Nel **secondo principio della termodinamica** si prende atto di questa cosa e si presentano dei postulati:

- *enunciato di Kelvin-Planck*
- *enunciato di Clausius*

ENUNCIATO DI KELVIN-PLANCK

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme.

ENUNCIATO DI CLAUSIUS

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

TEOREMA DI CARNOT

Il **teorema di Carnot** rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck, in quanto fissa la massima percentuale i calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro. Esso afferma che *tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale; qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore. Il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo*.

Nel caso di due sorgenti si ha che per qualsiasi macchina reversibile, la relazione tra calori scambiati e temperature a cui avviene lo scambio è:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \qquad \text{(relazione calori scambiati Carnot)}$$

TEOREMA DI CLAUSIUS

Da *(relazione calori scambiati Carnot)* si arriva a generalizzare la formula in:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad .$$

Se lo scambio di calore M avviene con una serie infinita di sorgenti, detto dQ il calore scambiato con la sorgente a temperatura T, la formula precedente diventa:

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

dove il simbolo di circuitazione indica che l'integrale è esteso a tutto il ciclo descritto dalla macchina M.

TEOREMA DI CLAUSIS PER MACCHINE REVERSIBILI

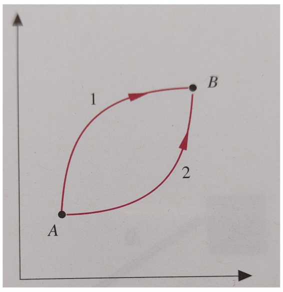
$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = 0 \quad , \quad \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

TEOREMA DI CLAUSIUS PER MACCHINE IRREVERSIBILI

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} < 0 \quad , \quad \oint \frac{dQ}{T} < 0$$

FUNZIONE DI STATO ENTROPIA

Siano A e B due stati qualunque di un sustema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili, rappresentate dalle linee 1 e 2 della figura, rappresentate in un diagramma bidimensionale:



Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2 (chiamandola -2), abbiamo composto un ciclo reversibile, che si svolge da A a B lungo la prima trasformazione e da B ad A lungo la seconda invertita. Si arriva quindi a:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T}\right)_{-2} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2$$

> NB:
>
> l'ultimo passaggio è possibile perché nelle trasformazioni reversibili il cambio di verso nella trasformazione comporta soltanto il cambio di segno degli scambi energetici.

Si ottiene così:

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_2 = \quad \cdots\cdots \quad = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_i$$

lungo qualsiasi trasformazione reversibile che colleghi gli stati A e B. Si può dire quindi che *il valore dell'integrale* $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$ *, esteso a qualunque trasformazione reversibile che congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso*, cioè non dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo.

Si può quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema nei due stati di equilibrio A eB:

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} = S_B - S_A = \Delta S \quad .$$

La *funzione di stato* così introdotta è detta **entropia** (il nome significa in greco *"trasformazione"*).