نسخة اولية

التفـــاضل والاشتقـــاق العـــــددي
Numerical Differentiation

كثيرا ما تصادفنا في عمليات التحليل العددي حساب مشتق دالة $f(x)$ مثلا عند قيمة x_0 ، وبصفة خاصة مشتقها من الدرجة الأولى $f^{(1)}(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$ و الثانية $f^{(2)}(x_0)=\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}$. نريد في هذا الدرس ان نشرح كيفية تقريب المشتق الاول والثاني بصيغ عددية. تستنتج جميع هذه الصيغ من نشر تايلر للدالة بجوار النقطة المراد حساب المشتق عندها.

1- المشتق الاول:

- **الصيغة الامامية للاشتقاق Forward Difference:**

يربط نشر تايلر قيمة الدالة عند x_0 بقيمتها عند نقطة بجوارها $x=x_0+h$ بالعلاقة:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \qquad (1)$$

يفضي ترتيب هذه العلاقة بالشكل:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f^{(1)}(x_0)+\frac{h}{2!}f^{(2)}(x_0)+\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \qquad (2)$$

ثم اهمال الحدود من الرتب الاكبرمن 2 إلى تعريف الصيغة الأمامية للاشتقاق:

$$\boxed{f^{(1)}(x_0)\simeq\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \qquad (3)$$

من الواضح ان هذا مجرد تقريب تزداد دقته كلما صغرت قيمة h. عند النهاية لما $h\to 0$ يؤول التقريب الى القيمة الحقيقية. لمعرفة مدى دقة هذه الصيغة نقدر الخطا $\in_F$ فيها بالعبارة:

$$\begin{aligned}\in_F&=f^{(1)}(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\&=-\frac{h}{2!}f^{(2)}(x_0)-\cdots\end{aligned} \qquad (4)$$

نلاحظ ان الخطا في هذه الصيغة من رتبة h ويرمز له بالرمز $\mathrm{O}(h)$. ويعني هذا ان الخطا متناسب خطيا مع h.
بعبارة أخرى كلما قل h انخفض الخطا خطيا بدلالة h.

- **الصيغة الخلفية للاشتقاق Backward Difference:**

تستنتج هذه الصيغة بنشر الدالة بجوار x_0 من الخلف أي عند $x=x_0-h$:

$$f(x_0-h)=f(x_0)-hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \qquad (5)$$

بعد الترتيب بالشكل التالي:

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f^{(1)}(x_0)+\frac{h}{2!}f^{(2)}(x_0)-\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \qquad (6)$$

نجد الصيغة الخلفية للاشتقاق:

$$\boxed{f^{(1)}(x_0)\simeq\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}} \qquad (7)$$

بنفس الطريقة نجد ان التقريب في هذه الصيغة من الرتبة الأولى $O(h)$:

$$\begin{aligned}\in_B &= f^{(1)}(x_0)-\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}\\ &=\frac{h}{2!}f^{(2)}(x_0)+\cdots\end{aligned} \qquad (8)$$

- **الصيغة الوسطية للاشتقاق Central Difference:**

يمكن استنتاج صيغة ادق للاشتقاق باستخدام الصيغتين السابقتين، تُعرف بالصيغة الوسطية. بطرح النشر (5) من النشر (1) نجد:

$$\begin{aligned}f(x_0+h)-f(x_0-h)&=\left(f(x_0)+hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots\right)-\\ &=\left(f(x_0)-hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots\right)\\ &=2\left(hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots\right)\end{aligned} \qquad (9)$$

بالقسمة على $2h$ نجد:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \qquad (10)$$

باهمال الحدود ذات الرتب العليا نجد الصيغة الوسطية للمشتق الاول:

$$\boxed{f^{(1)}(x_0)\simeq\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}} \qquad (11)$$

يقدر الخطا في هذه العبارة بالعلاقة:

$$\begin{aligned}\in_C &= f^{(1)}(x_0)-\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\\ &=\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots\end{aligned} \qquad (12)$$

اذن واضح ان الخطا في هذه العبارة من الرتبة الثانية $O(h^2)$. من اجل نفس القيمة لـ h تكون هذه الصيغة الوسطية أدق من السابقتين.

2- المشتق الثاني:

بنهج مشابه للسابق يمكن اشتقاق صيغ تقريبية للمشتقات ذات الرتب العالية. مثلا في حالة المشتق الثاني يفضي جمع النشر (5) مع النشر (1) الى:

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h)-f(x_0-h) &= \left(f(x_0)+hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \right)+ \\
&= \left(f(x_0)-hf^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots \right) \qquad (13) \\
&= 2\left(f(x_0)+\frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x_0)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_0)+\cdots \right)
\end{aligned}
$$

بالقسمة على h^2 نجد:

$$
\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=f^{(2)}(x_0)+\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_0)+\cdots \qquad (14)
$$

باهمال الحدود ذات الرتب العليا نجد الصيغة الوسطية للمشتق الثاني:

$$
\boxed{f^{(2)}(x_0)\simeq\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}} \qquad (15)
$$

الخطا في هذا التقريب من رتبة $O(h^2)$ ويقدر بالعبارة:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_C &= f^{(2)}(x_0)-\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2} \\
&= -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(x_0)-\cdots
\end{aligned} \qquad (16)
$$

3- طريقة الاستقراء لـ ريتشاردسن Extrapolation Richardson's:

نلاحظ من جميع التقريبات السابقة ان دقة التقريب تزداد بزيادة عدد نقاط المعاينة وكذالك بنقصان قيمة الخطوة h. الا انه لا يمكن الاستمرار في تخفيض قيمة h بسبب الدقة المحدودة للحاسوب. أضف إلى ذلك أن زيادة عدد نقاط المعاينة يزيد من عدد البيانات الواجب معالجتها بالحاسوب فينتج عنه زمن تنفيذ اكبر. السؤال الذي يطرح نفسه، هل توجد صيغ تقريبية ينخفض فيها الارتياب بشكل اكبر بدون تخفيض قيمة h. تجيب على هذا التسائل طريقة ريتشاردسن. مثلا لتقدير المشتق الاول بارتياب من رتبة $O(h^4)$ نستخدم العبارة (10) :

$$
\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f^{(1)}(x_0)+\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x_0)+\cdots \qquad (17)
$$

وعبارة اخرى مشابهة لها عند $x=x_0+2h$ و $x=x_0-2h$:

$$
\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-2h)}{4h}=f^{(1)}(x_0)+\frac{4h^2}{3!}f^{(3)}(x_0)+\frac{16h^4}{5!}f^{(5)}(x_0)+\cdots \qquad (18)
$$

نضرب المعادلة (17) في 4 ثم نطرح منها (18) نجد:

$$\frac{f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{4h}=3f^{(1)}(x_0)-12\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x_0)+\cdots \quad (19)$$

ومنه نجد صيغة بارتياب صغير في تقريب المشتق الأول:

$$\boxed{f^{(1)}(x_0)\simeq\frac{f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{12h}} \quad (20)$$

الارتياب في هذه الطريقة من رتبة $\mathrm{O}(h^4)$ ويقدر بالعبارة:

$$\in_R=4\frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x_0)+\cdots \quad (21)$$

يمكن كذلك ايجدا صيغة تقريبية ادق للمشتق الثاني بارتياب من الرتبة $\mathrm{O}(h^4)$ بدل $\mathrm{O}(h^2)$:

$$\boxed{f^{(2)}(x_0)\simeq\frac{-f(x_0-2h)+16f(x_0-h)-30f(x_0)+16f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{12h^2}+O(h^4)} \quad (22)$$

4- امثلـــــة:

مثال1: لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة بقيمها في الجدول التالي. قدر المشتق $f^{(1)}(x_0)$ للدالة عند $x_0=0.8$ بارتياب من رتبة $\mathrm{O}(h)$ و $\mathrm{O}(h^2)$ و $\mathrm{O}(h^4)$ على الترتيب. قدر كذلك المشتق $f^{(2)}(x_0)$ بارتياب من رتبة $\mathrm{O}(h^2)$ و $\mathrm{O}(h^4)$ على الترتيب.

x	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	5.9072	6.0092	6.3552	6.9992	8.0000