

# المكاملة العددية

## Lab Work

السنة الأولى  
ماستر فيزياء  
2021-2022

Becer Zoubir

قسم الفيزياء  
كلية العلوم الدقيقة  
جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

تهدف هذه التطبيقات لتعلم برمجة طرق المكاملة العددية الشائعة في بعد واحد او ابعاد متعددة. بالتحديد هذه

الطرق هي: قاعدة المستطيلات الأمامية Forward Rectangles قاعدة المستطيلات الخلفية Backward Rectangles

قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule قاعدة النقطة الوسطية Midpoint Rule قاعدة سيمبسون Simpson Rule

قاعدة تربيعات غوص Gauss Quadrature

قاعدة تربيعات غوص Gauss Quadrature

### ملخص طرق المكاملة في بعد واحد

تعطي هذه الطرق حسابا تقريبا للتكاملات من الشكل:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

حيث  $f(x)$  دالة حقيقية للمتغير الحقيقي  $x$  معرفة على المجال المغلق  $[a, b]$  ومعطاة إما في شكلها الرياضي الصريح او في شكل قيم منفصلة  $[x_n, f(x_n)]$  مرصودة في جدول. يمكن كتابة هذا التكامل في شكل مجموع تكاملات جزئية بتقسيم المجال  $[a, b]$  الى مجالات جزئية عددها  $N$  وعليه نكتب:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx ; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_1 = a.$$

### قاعدة المستطيلات الأمامية Forward Rectangles

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = f(x_n) \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n ; \quad x_1 = a.$$

في حالة ما اذا كانت الخطوة  $\Delta x = \Delta x_n$  ثابتة تأخذ عبارة التكامل الصورة التالية:

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = f(x_n) \Delta x ; \quad \Delta x = \frac{b-a}{N} ; \quad x_n = a + (n-1) \Delta x.$$

### المستطيلات الخلفية Backward Rectangles

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = f(x_{n+1}) \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n ; \quad x_1 = a.$$

### قاعدة شبه المنحرف Trapezoidal Rule

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = \frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2} \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n ; \quad x_1 = a.$$

### قاعدة النقطة الوسطية Midpoint Rule

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = f(x_{n+\frac{1}{2}}) \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2} \Delta x_n ; \quad x_1 = a.$$

### قاعدة سيمبسون بخطوة واحدة One Step Simpson Rule

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = \frac{f(x_n) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}) + f(x_{n+1})}{6} \Delta x_n ; \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n ; \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n ; \quad x_1 = a.$$

### قاعدة سيمبسون بخطوتين Two Steps Simpson Rule

هذه القاعدة تستخدم خطوتين متتاليتين ولاشتقاق علاقة بسيطة لها يشترط ثبات الخطوة وان يكون عدد التقسيمات  $N$  زوجي.

$$S = \sum_{n=1}^{N/2} S_n ; \quad S_n = \frac{f(x_{2n-1}) + 4f(x_{2n}) + f(x_{2n+1})}{3} \Delta x ; \quad \Delta x = \frac{b-a}{N} ; \quad x_n = a + (n-1)\Delta x.$$

### قاعدة تربيعات غوس Gauss Quadrature

$$S = \sum_{n=1}^N S_n ; \quad S_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \sum_{m=1}^M \omega_m f(x_m) ;$$

هذه القاعدة تحسب التكامل باستخدام جمع موزون لنقاط معاينة ( $x_m$ ;  $m = 1, \dots, M$ ) محددة بعناية داخل كل مجال عنصري او على كامل المجال ولهذه النقاط كذلك اوزان مقابلة  $w_m$  محددة بذكاء تجعل من هذا الجمع يساوي القيمة الحقيقية لتكامل كثيرات الحدود من الدرجة  $2M - 1$ . اذا كان للدالة المكاملة شكل مقارب جدا لكثير حدود من الدرجة  $2M - 1$  فإن هذا الجمع يأخذ افضل قيمة له. عادة ما يفضل في هذه الطريقة التعبير عن التكامل على الحدود العامة  $a$  و  $b$  او  $x_n$  و  $x_{n+1}$  بدلالة تكامل على حدود ثابتة بين  $-1$  و  $+1$ . يتم تحقيق ذلك عن طريق إستخدام التحويل الخطي التالي:  $x = \alpha t + \beta$ . لاحظ ان اشتراط  $x = x_n$  عند  $t = -1$  و  $x = x_{n+1}$  عند  $t = +1$  بفضيا الى  $\beta = (x_{n+1} + x_n)/2$  و  $\alpha = (x_{n+1} - x_n)/2 = \Delta x_n/2$ . وعليه يأخذ التكامل العنصري  $S_n$  الشكل التالي

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{1}{2} (x_{n+1} - x_n) \int_{-1}^1 f \left[ \frac{x_{n+1} - x_n}{2} t + \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right] dt = \frac{\Delta x_n}{2} \int_{-1}^1 F(t) dt$$

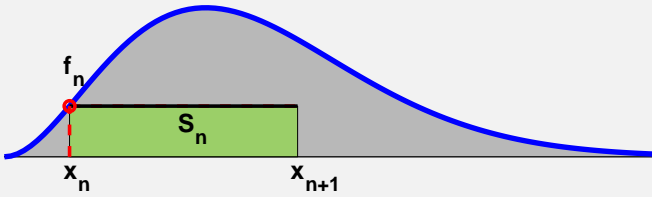
حيث  $F(t) = f[(x_{n+1} - x_n)t/2 + (x_n + x_{n+1})/2]$  ادى تطبيق هذه الطريقة على المجال  $[-1, 1]$  الى نقاط  $t_m$  واوزان على المجال رصدت في جداول حسب عدد النقاط المختار  $M$ . لتوضيف هذه النقاط على المجال المعطى نستخدم التحويل الخطي السابق والذي يفضي للنتائج النهائية التالية:

$$S = \sum_{n=1}^N S_n; \quad S_n = \frac{\Delta x_n}{2} \sum_{m=1}^M \omega_m f(x_m); \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n; x_{n+1} = x_n + \Delta x_n; x_1 = a;$$

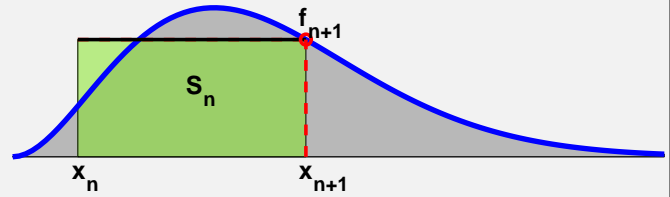
$$x_m = \frac{\Delta x_n}{2} t_m + x_{n+\frac{1}{2}}.$$

من أجل عدد نقاط  $M$  تقرأ القيم  $t_m$  وأوزانها الموافقة  $\omega_m$  من جداول معطاة وتوظف مباشرة في الجمع الموزون السابق.

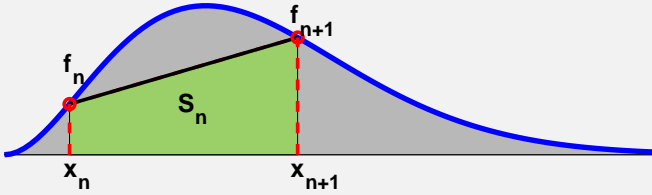
Left Rectangles Rule



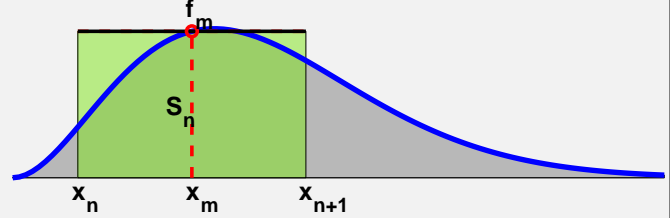
Right Rectangles Rule



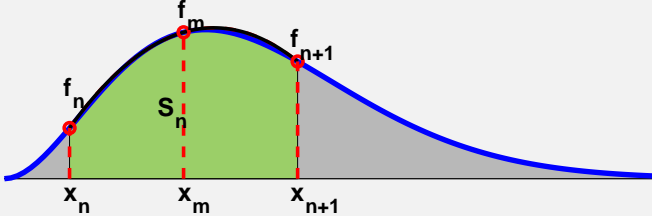
Trapezoidal Rule



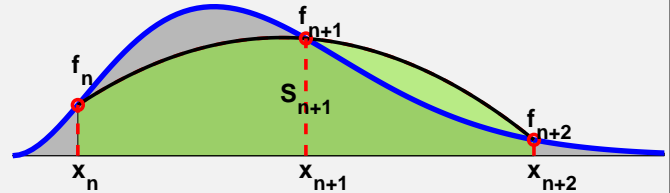
Mid-Point Rule



Simpson 1/6 Rule



Simpson 1/3 Rule



جدول ١ : وسائل طريقة مستطيلات غوص.

(الرتبة) (Order)	$w_m$	$t_m$	$M$
3	1	$-1/\sqrt{3}$	2
	1	$1/\sqrt{3}$	
5	5/9	$-\sqrt{0.6}$	3
	8/9	0	
	5/9	$\sqrt{0.6}$	
7	0.3478548451	$-0.8611363116$	4
	0.6521451549	$-0.3399810436$	
	0.6521451549	$0.3399810436$	
	0.3478548451	$0.8611363116$	

$f(x)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$f_1$	0.864331647570159	1.910375697429960	2.995183148739897	4.124262867199374
$f_2$	1.064072410739394	2.134268270179443	3.259613531562442	4.451602992306452
$f_3$	0.941160951789604	2.018533384802922	3.163689318396373	4.394380597988114

### ملخص طرق المكاملة في ابعاد متعددة

يمكن تعميم طرق المكاملة العددية في بعد واحد الى بعدين او اكثر. للتسهيل نعرض في ما يلي طريقة النقطة الوسطية في بعدين لحساب التكاملات من الشكل:

$$S = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dx dy.$$

### قاعدة النقطة الوسطية في بعدين Midpoint Rule

في هذه الطريقة يقسم مجال التكامل الى خلايا مستطيلة عن طرق تقسيم كل اتجاه عددا من التقسيمات  $N_x$  و  $N_y$  مثلا قد تكون منتظمة او غير منتظمة. في الحالة المنتظمة تصبح مساحة كل خلية مساوية الى  $\frac{b_x - a_x}{N_x} \times \frac{b_y - a_y}{N_y}$ . بهذا يصبح التكامل عبارة عن مجموع تكاملات على الخلايا العنصرية:

$$S = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} S_{n,m}; \quad S_{n,m} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(x, y) dx dy$$

$$S = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} S_{n,m}; \quad S_{n,m} \approx f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}) \Delta x_n \Delta y_m$$

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n; \quad x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{1}{2} \Delta x_n; \quad x_1 = a_x.$$

$$\Delta y_m = y_{m+1} - y_m; \quad y_{m+\frac{1}{2}} = y_m + \frac{1}{2} \Delta y_m; \quad y_1 = a_y.$$

في حالة ما اذا كانت التقسيمات متساوية في كل اتجاه تأخذ عبارة التكامل الصورة التالية:

$$S = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} S_{n,m}; \quad S_{n,m} = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}) \Delta x \Delta y$$

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n; \quad x_{n+\frac{1}{2}} = a_x + (n - \frac{1}{2}) \Delta x.$$

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m; \quad y_{m+\frac{1}{2}} = a_y + (m - \frac{1}{2}) \Delta y.$$

بالتعميم الى  $d$  بعد وبخطوات  $\Delta$  متساوية في جميع الاتجاهات نجد

$$S = \Delta^d \sum_{n_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{n_d=1}^{N_d} S_{n_1, \dots, n_d}; \quad S_{n_1, \dots, n_d} = f(x_{n_1+\frac{1}{2}}, \dots, x_{n_d+\frac{1}{2}})$$

$$\Delta x = x_{n+1} - x_n; \quad x_{n+\frac{1}{2}} = a + (n - \frac{1}{2}) \Delta; \quad n = n_1 : n_d$$

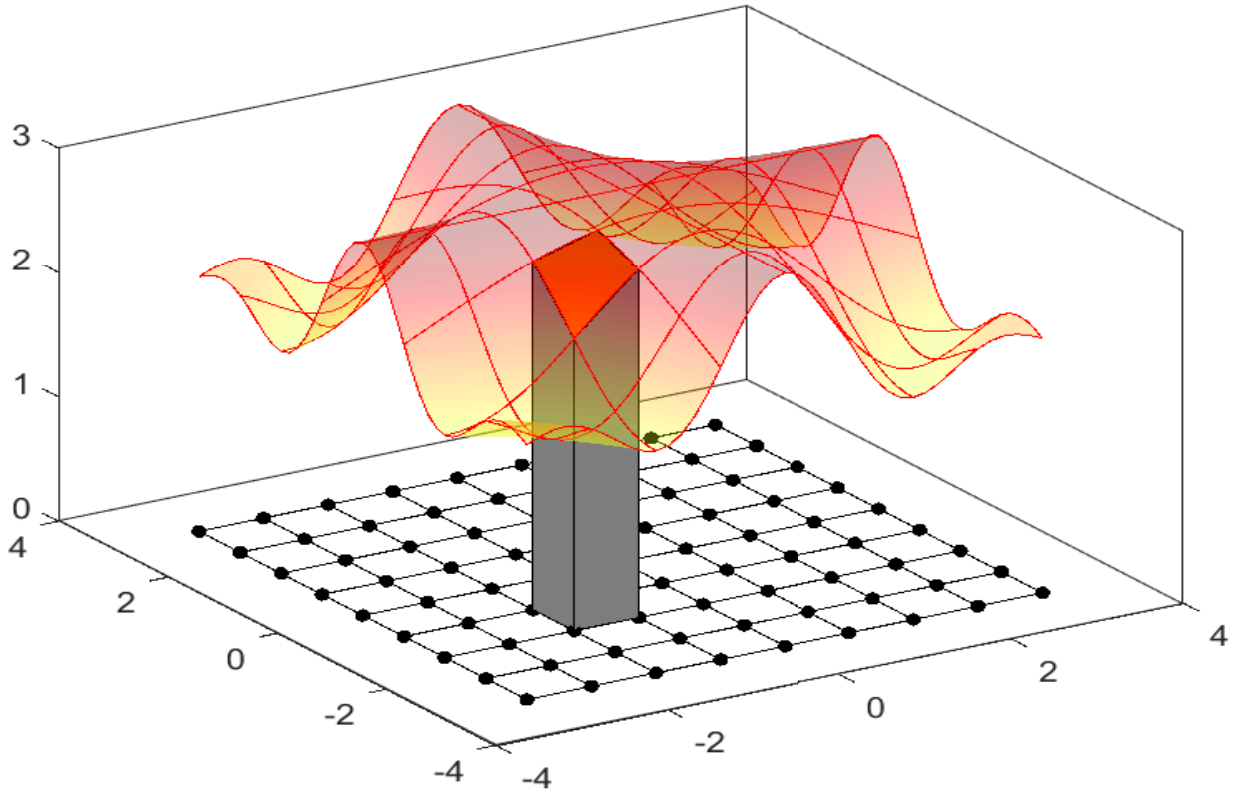
نحسب اولاً الخطأ المحلي ثم المطلق بالعلاقتين:

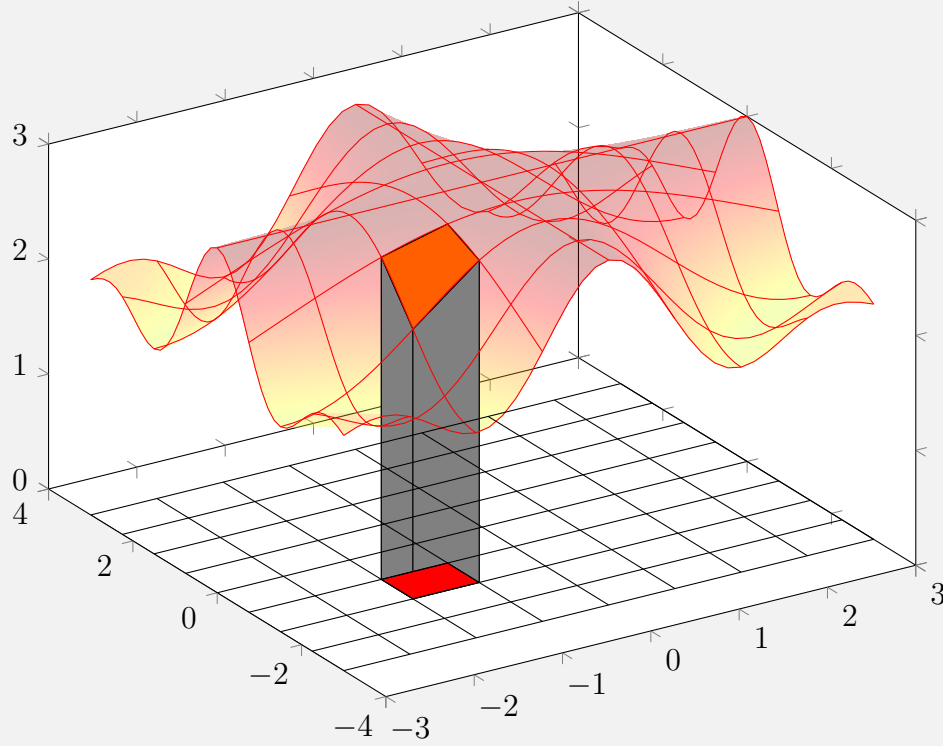
$$\epsilon = \sum_{n=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} \epsilon_{n,m}; \quad \epsilon_{n,m} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(x,y) dx dy - f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_{m+\frac{1}{2}}) \Delta x_n \Delta y_m$$

$$x_{n+\frac{1}{2}} = \tilde{x}_n = x_n + \frac{1}{2} \Delta x_n.$$

$$y_{m+\frac{1}{2}} = \tilde{y}_m = y_m + \frac{1}{2} \Delta y_m.$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{n,m} &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(x,y) dx dy - f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \Delta x_n \Delta y_m \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \int_{y_m}^{y_{m+1}} dx dy \left\{ f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) + (x - \tilde{x}_n) f_x(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) + \frac{(x - \tilde{x}_n)^2}{2!} f_{xx}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \right. \\ &\quad \left. + (y - \tilde{y}_m) f_y(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) + \frac{(y - \tilde{y}_m)^2}{2!} f_{yy}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \right. \\ &\quad \left. + (x - \tilde{x}_n)(y - \tilde{y}_m) f_{xy}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) + \dots \right\} - f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \Delta x_n \Delta y_m. \end{aligned}$$





### العمل التطبيقي

ليكن التكامل التالي:

$$S = \int_0^1 x^2 dx.$$

1. احسب رياضيا القيمة الفعلية لهذا التكامل.
2. اكتب برنامج فورترن لحساب قيمة التكامل المعطى بطرق المكاملة السابقة باستخدام عدد تقسيمات  $N = 10$ .
3. اعد برمجة البرنامج باستخدام برامج جزئية من نوع **function**.
4. قارن بين دقة هذه الطرق من اجل نفس عدد التقسيمات  $N = 10$ .
5. عدل في البرنامج السابق ليحسب البرنامج الخطأ بدلالة عدد التقسيمات  $N = 2^k$  حيث يأخذ  $k$  القيم 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
6. بين ان الخطأ يتغير اما وفقا ل  $1/N$  او  $1/N^2$  او  $1/N^3$  حسب الطريقة المختارة وذلك عن طريق رسم الاخطاء بدلالة عدد التقسيمات باستخدام برنامج للرسم متوفر لك.

لنعتبر الان التكامل التالي:

$$S = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 xy \sin(xy) dx dy.$$

1. اعتمادا على البرنامج السابق اكتب برنامج فورترن لحساب قيمة التكامل المعطى بطريقة النقطة الوسطية باستخدام عدد تقسيمات  $N_x = N_y = N = 40$  لكل اتجاه.

2. عدل في البرنامج لحساب حجم كرة نصف قطرها  $R = 1$  في  $d = 10$  ابعاد باستخدام  $N = 300$  لكل اتجاه.

3. بين ان الخطأ يتغير وفقاً لـ  $1/N$  من اجل عدد تقسيمات  $N_x = N_y = N = 2^k$  و  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ . يعطي حجم كرة نصف قطرها  $R$  في  $d$  بعد بالعلاقة:

$$\begin{aligned} V_d &= \int_{x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_d \\ &= 2 \int dx_1 \dots dx_{d-1} \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{d-1}^2} \\ &= \int_{x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq R^2} r^{d-1} dr d\Omega_{d-1} \\ &= \frac{R^d}{d} \int d\Omega_{d-1} \\ &= \frac{R^d 2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

وسطحها بالعلاقة

$$\begin{aligned} S_{d-1} &= \int_{x_1^2 + \dots + x_d^2 = R^2} dx_1 \dots dx_d \\ &= R^{d-1} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \end{aligned}$$

4. ارسم لوغاريتم القيمة المطلقة للخطأ المطلق (الكلي) بدلالة لوغاريتم  $N$ .

5. اعد برمجة البرنامج باستخدام الميزة التراجعية للدالة المكاملة باستخدام التعليلة: **recursive** والشكل التراجعي لعبارة الحجم

$$\begin{aligned} V_d &= \int_{-R}^{+R} dx_d \int_{x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2 \leq R^2 - x_d^2} dx_1 \dots dx_{d-1} \\ &= \int_{-R}^{+R} dx_d \int_0^{\sqrt{R^2 - x_d^2}} r^{d-2} dr \int d\Omega_{d-2} \\ &= \frac{V_{d-1}}{R^{d-1}} \int_{-R}^{+R} dx_d (R^2 - x_d^2)^{\frac{d-1}{2}}. \end{aligned}$$

6. احسب حجوم الكرات في الابعاد  $d = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  وقارنها بالقيم الحقيقية الموافقة.

جدول 2: وسائط طريقة مستطيلات غور.

الرتبة (Order)	$w_m$	$t_m$	$n$
3	1	$-1/\sqrt{3}$	2
	1	$1/\sqrt{3}$	
5	5/9	$-\sqrt{0.6}$	3
	8/9	0	
	5/9	$\sqrt{0.6}$	
7	0.3478548451	-0.8611363116	4
	0.6521451549	-0.3399810436	
	0.6521451549	0.3399810436	
	0.3478548451	0.8611363116	

