

# Caractérisation des Attracteurs Chaotiques

## Étude du Chaos

Antoine de Lagrave

Méthodes numériques et simulations (PHQ-404)  
Département de Physique  
Université de Sherbrooke

# Table des matières

- 1 Mise en contexte
- 2 Théorie
- 3 Méthodes numériques
  - Équations différentielles
  - Calculs matriciels & Convergence
- 4 Résultats
  - Trajectoires
  - Spectre de Lyapunov
- 5 Conclusion

## Mise en contexte

# Mise en contexte - Aperçu historique



*”...it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible. . .”* - in a 1903 essay Science and Method.

# Mise en contexte - Définitions

- ◊ Émergence des systèmes dynamiques (climat, biologie, etc.)
- ◊ Systèmes d'équations différentielles

## Définition : Attracteur

L'attracteur est un sous-ensemble de l'espace des phases vers lequel les solutions convergent sous certaines conditions initiales.

# Mise en contexte - Définitions

Condition de validité d'une condition initiale appartenant à l'attracteur

## Définition : Bassin d'attraction

Soit un attracteur  $A$ , son bassin d'attraction  $W_A$  est donné par

$$W_A = \{r \in R \mid \lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) \in A\}, \quad (1)$$

où  $r$  est un point de l'espace des phases  $R$  et  $f(r, t)$  une solution de l'attracteur  $A$ .

## Théorie - Équations différentielles

# Théorie - Équations différentielles

## Attracteur de Lorenz

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Lorenz<sup>1</sup> :

$$L = \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}, \quad (2)$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont respectivement le nombre de Prandtl, de Rayleigh et un coefficient géométrique.

---

1. Edward N. LORENZ. “Deterministic Nonperiodic Flow”. In : *Journal of Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), p. 130-141.

# Théorie - Équations différentielles

## Attracteur de Rössler

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Rössler<sup>2</sup> :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{array} \right\}, \quad (3)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des coefficients géométriques quelconques.

---

2. Otto ROSSLER. “An Equation for Continuous Chaos”. In : *Physics Letters A* 57 (juill. 1976), p. 397-398.

# Théorie - Équations différentielles

Attracteur de Bouali

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Bouali<sup>3</sup> :

$$B = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha x(1 - y) - \beta z \\ \dot{y} = -\gamma y(1 - x^2) \\ \dot{z} = \mu x \end{array} \right\}, \quad (4)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\mu$  sont des coefficients géométriques quelconques.

## Note

Le système d'équation qui modélise l'attracteur de Bouali est de degré 3 contrairement aux autres de degré 2.

---

3. [Safieddine BOUALI](#). A 3D Strange Attractor with a Distinctive Silhouette. *The Butterfly Effect Revisited*. 2013.

## Méthodes numériques - Équations différentielles

# Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

# Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

# Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

grille temporelle &  $r_0$   
1

# Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

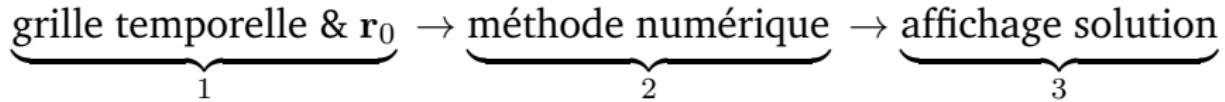
$\underbrace{\text{grille temporelle \& } r_0}_{1} \rightarrow \underbrace{\text{méthode numérique}}_{2}$

# Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

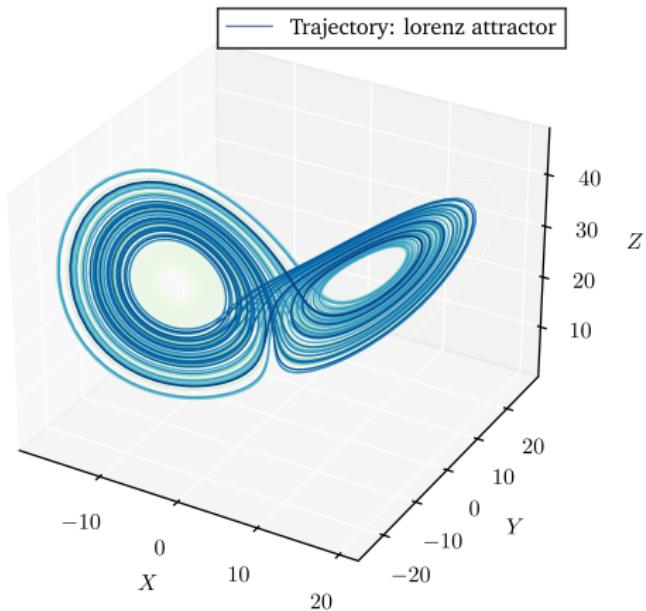
L'algorithme est divisé en 3 étapes :



## Résultats - Trajectoires

# Résultats - Trajectoires

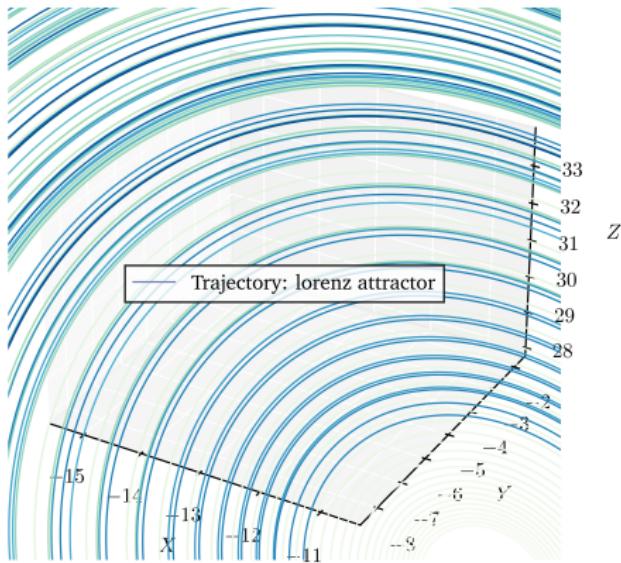
## Attracteur de Lorenz



- ◊ Conditions initiales  
 $\mathbf{r} = (1, 0, -1)$
- ◊ Temps de 100 secondes
- ◊ Pas de  $h = 0.01$

# Résultats - Trajectoires

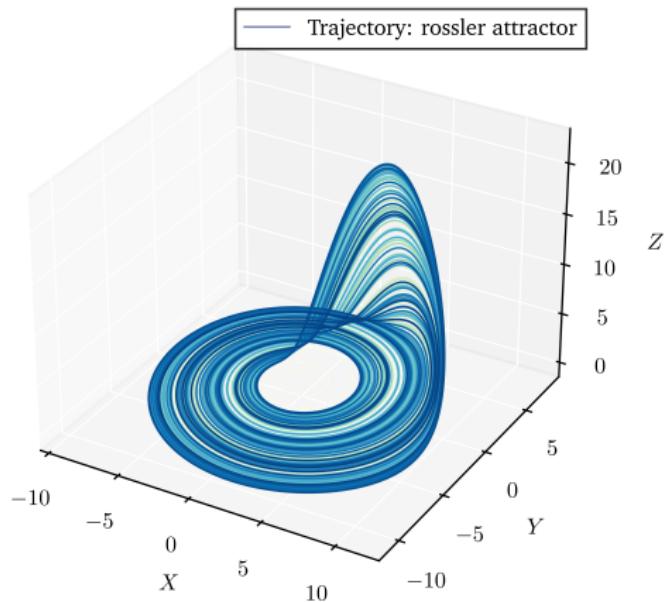
## Attracteur de Lorenz



Vérification qualitative du théorème d'unicité des solutions aux équations différentielles.

# Résultats - Trajectoires

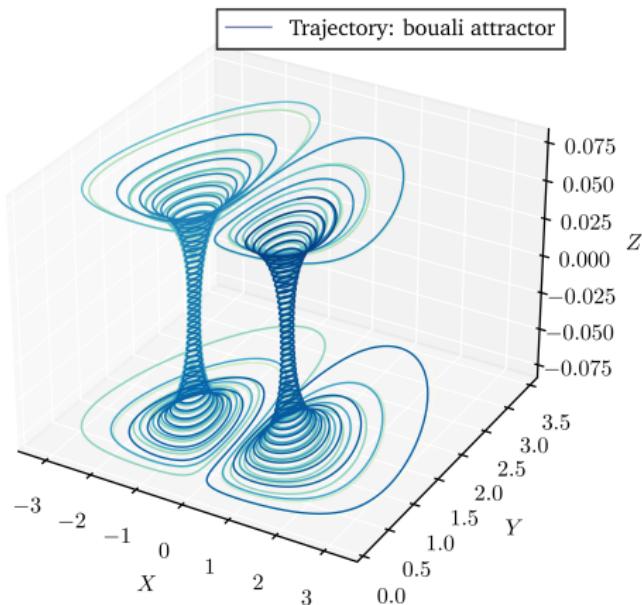
## Attracteur de Rössler



- ◊ Conditions initiales  
 $\mathbf{r} = (1, 1, -1)$
- ◊ Temps de 1000 secondes
- ◊ Pas de  $h = 0.001$

# Résultats - Trajectoires

## Attracteur de Bouali



- ◊ Conditions initiales  
 $\mathbf{r} = (0.2, 0.2, -0.08)$
- ◊ Temps de 1000 secondes
- ◊ Pas de  $h = 0.001$

## Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

# Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

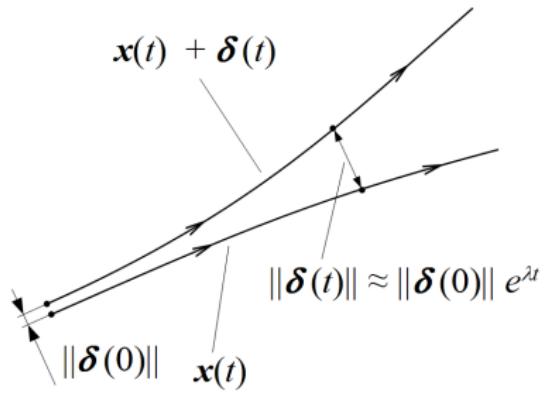


Figure – Exposant de Lyapunov<sup>a</sup>.

- ◊ Le spectre de Lyapunov est de nature vectorielle
- ◊ Système dynamique de dimension  $N$   
 $\implies \in \lambda_{i=1,2\dots N}$

---

a. [WIKIPEDIA CONTRIBUTORS](#). *Lyapunov exponent* — Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2023.

# Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

Trois situations existent pour les exposants de Lyapunov  $\lambda_j$  :

- ◊  $\lambda_j > 0 \implies$  signature chaotique
- ◊  $\lambda_j = 0 \implies$  *quasi-périodique*
- ◊  $\lambda_j < 0 \implies$  convergence

# Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

L'équation qui permet d'obtenir l'exposant de Lyapunov dans la direction  $j$  est

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(f^{(j)}(x_i)) \quad (5)$$

## Note

Il est difficile de sommer un nombre infini numériquement.  
Quelles sont les solutions ?

## Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Numériquement, on procède de façon matricielle  $\rightarrow J$

## Définition : Matrice Jacobienne

Les éléments de la matrice jacobienne sont donnés par

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (6)$$

où  $f_i$  est l'équation  $i$  et  $x_j$  la variable de dérivation.

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire  $\mathbf{r}(t_n)$

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire  $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de  $J$  en ce point

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire  $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de  $J$  en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ( $J \cdot U$ )

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

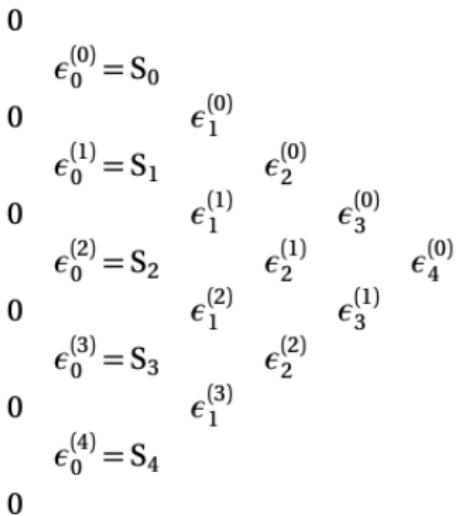
- ◊ Position sur la trajectoire  $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de  $J$  en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ( $J \cdot U$ )
- ◊ Extraction du spectre de Lyapunov ( $Q \cdot R$ )

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire  $U_{3x3} \rightarrow$  taux de variation donnés par  $J$ . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire  $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de  $J$  en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ( $J \cdot U$ )
- ◊ Extraction du spectre de Lyapunov ( $Q \cdot R$ )
- ◊ Mise à jours des perturbations de l'espace des phases au temps  $t_n$

# Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence



Convergence du spectre de Lyapunov dans la limite  $t \rightarrow \infty$  grâce à l'algorithme *epsilon*

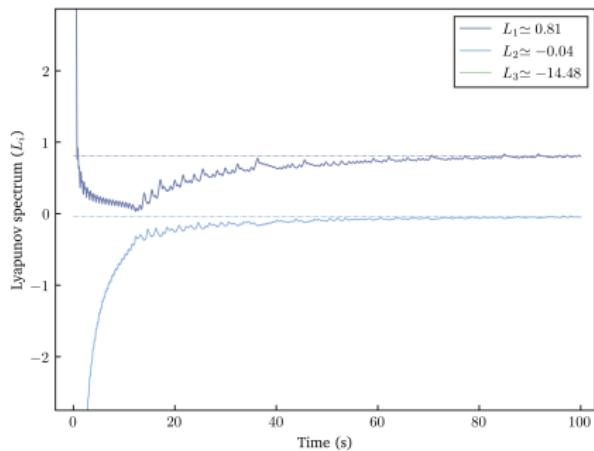
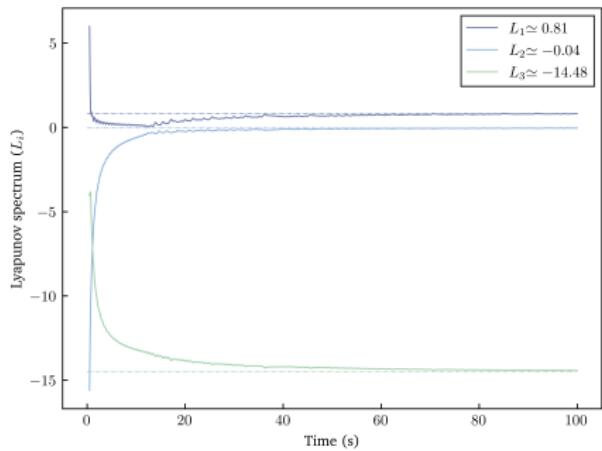
Figure – (SÉNÉCHAL, *Méthodes numériques et simulations*).

## Résultats - Spectre de Lyapunov

# Résultats - Spectre de Lyapunov

## Attracteur de Lorenz

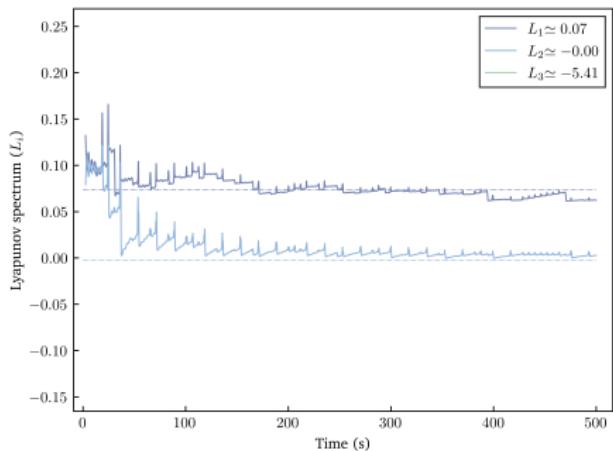
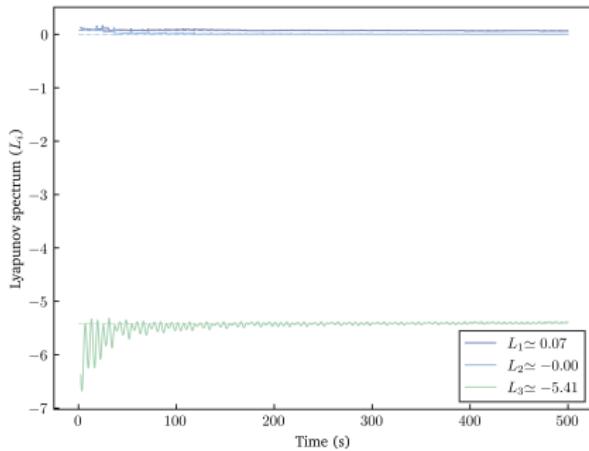
Simulation pour 100 secondes avec  $10^4$  points et  $\mathbf{r}_0 = (1, 0, -1)$



# Résultats - Spectre de Lyapunov

Attracteur de Rössler

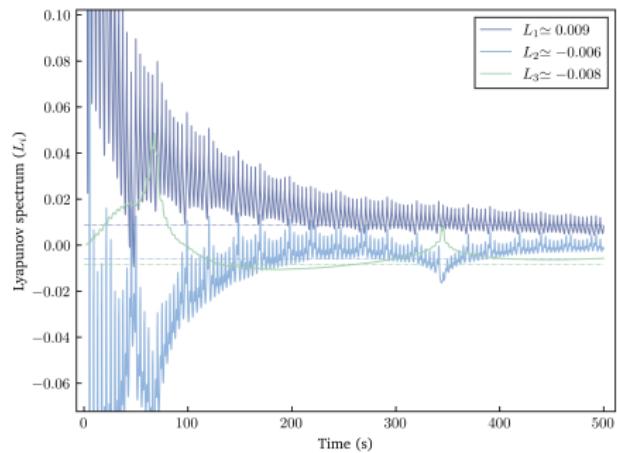
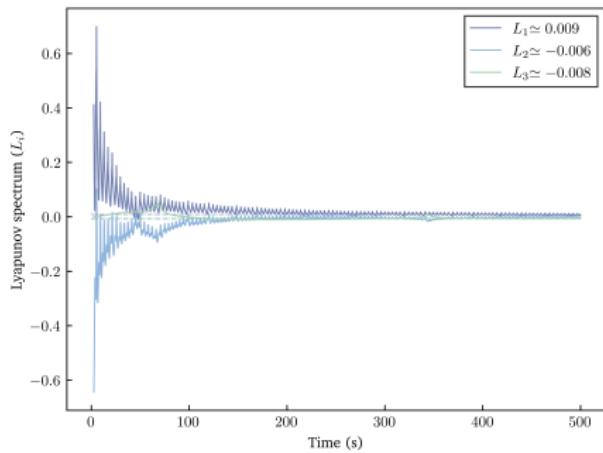
Simulation pour 500 secondes avec  $10^5$  points et  $\mathbf{r}_0 = (1, 1, -1)$



# Résultats - Spectre de Lyapunov

## Attracteur de Bouali

Simulation pour 500 secondes avec  $10^5$  points et  $\mathbf{r}_0 = (0.2, 0.2, -0.08)$



## Conclusion

# Conclusion

- ◊ Trajectoires des attracteurs (Lorenz, Rössler, Bouali) & unicité
- ◊ Spectre de Lyapunov dans le contexte chaotique
- ◊ Convergence de séries et limites du spectre

## Pistes

Réduction du bruit, diagrammes de bifurcation, points critiques, applications physiques.

Merci