

Caractérisation des Attracteurs Chaotiques

Étude du Chaos

Antoine de Lagrave

Méthodes numériques et simulations (PHQ-404)
Département de Physique
Université de Sherbrooke

Table des matières

- 1 Mise en contexte
- 2 Théorie
- 3 Méthodes numériques
 - Équations différentielles
 - Calculs matriciels & Convergence
- 4 Résultats
 - Trajectoires
 - Spectre de Lyapunov
- 5 Conclusion

Mise en contexte

Mise en contexte - Aperçu historique



”...it may happen that small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. Prediction becomes impossible. . .” - in a 1903 essay Science and Method.

Mise en contexte - Définitions

- ◊ Émergence des systèmes dynamiques (climat, biologie, etc.)
- ◊ Systèmes d'équations différentielles

Définition : Attracteur

L'attracteur est un sous-ensemble de l'espace des phases vers lequel les solutions convergent sous certaines conditions initiales.

Mise en contexte - Définitions

Condition de validité d'une condition initiale appartenant à l'attracteur

Définition : Bassin d'attraction

Soit un attracteur A , son bassin d'attraction W_A est donné par

$$W_A = \{r \in R \mid \lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) \in A\}, \quad (1)$$

où r est un point de l'espace des phases R et $f(r, t)$ une solution de l'attracteur A .

Théorie - Équations différentielles

Théorie - Équations différentielles

Attracteur de Lorenz

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Lorenz¹ :

$$L = \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}, \quad (2)$$

où σ , ρ et β sont respectivement le nombre de Prandtl, de Rayleigh et un coefficient géométrique.

1. Edward N. LORENZ. “Deterministic Nonperiodic Flow”. In : *Journal of Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), p. 130-141.

Théorie - Équations différentielles

Attracteur de Rössler

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Rössler² :

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{array} \right\}, \quad (3)$$

où a, b et c sont des coefficients géométriques quelconques.

2. Otto ROSSLER. “An Equation for Continuous Chaos”. In : *Physics Letters A* 57 (juill. 1976), p. 397-398.

Théorie - Équations différentielles

Attracteur de Bouali

Système d'équations différentielles pour l'attracteur de Bouali³ :

$$B = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha x(1 - y) - \beta z \\ \dot{y} = -\gamma y(1 - x^2) \\ \dot{z} = \mu x \end{array} \right\}, \quad (4)$$

où α, β, γ et μ sont des coefficients géométriques quelconques.

Note

Le système d'équation qui modélise l'attracteur de Bouali est de degré 3 contrairement aux autres de degré 2.

3. [Safieddine BOUALI. A 3D Strange Attractor with a Distinctive Silhouette. The Butterfly Effect Revisited. 2013.](#)

Méthodes numériques - Équations différentielles

Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

grille temporelle & r_0
1

Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

L'algorithme est divisé en 3 étapes :

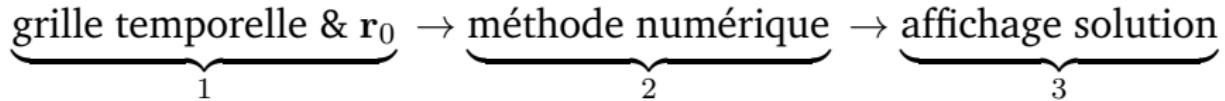
$\underbrace{\text{grille temporelle \& } r_0}_{1} \rightarrow \underbrace{\text{méthode numérique}}_{2}$

Méthodes numériques - Équations différentielles

Les méthodes de résolutions numériques utilisées sont

- ◊ Runge-Kutta d'ordre 4
- ◊ Librairie Python `scipy.optimize.solve_ivp()`

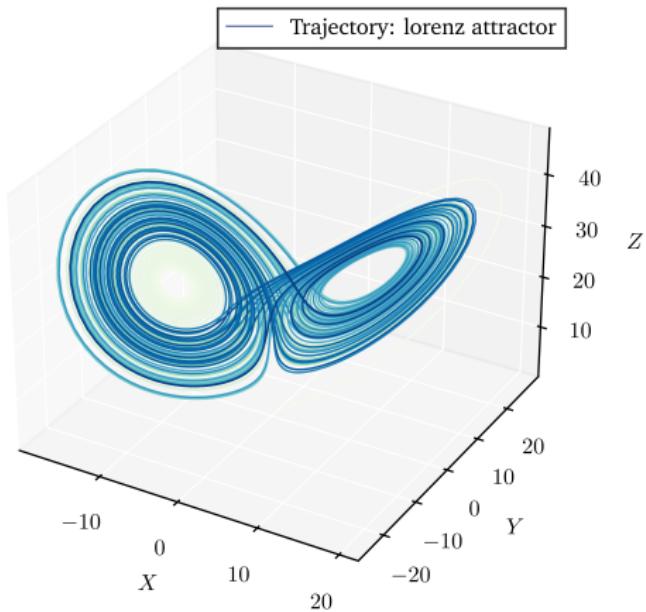
L'algorithme est divisé en 3 étapes :



Résultats - Trajectoires

Résultats - Trajectoires

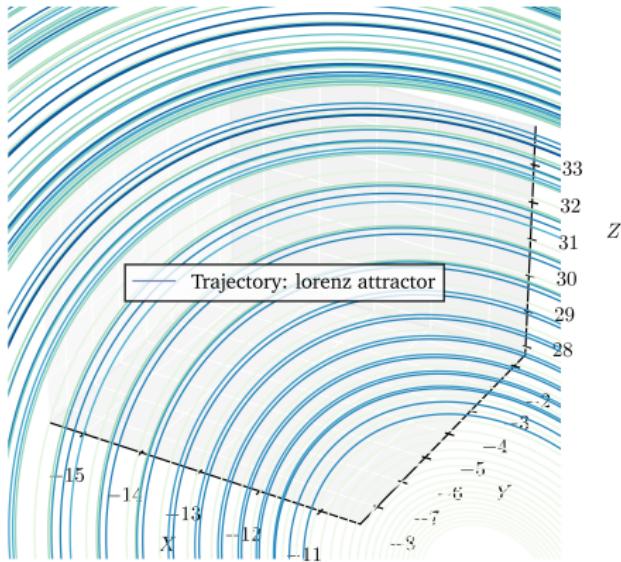
Attracteur de Lorenz



- ◊ Conditions initiales
 $\mathbf{r} = (1, 0, -1)$
- ◊ Temps de 100 secondes
- ◊ Pas de $h = 0.01$

Résultats - Trajectoires

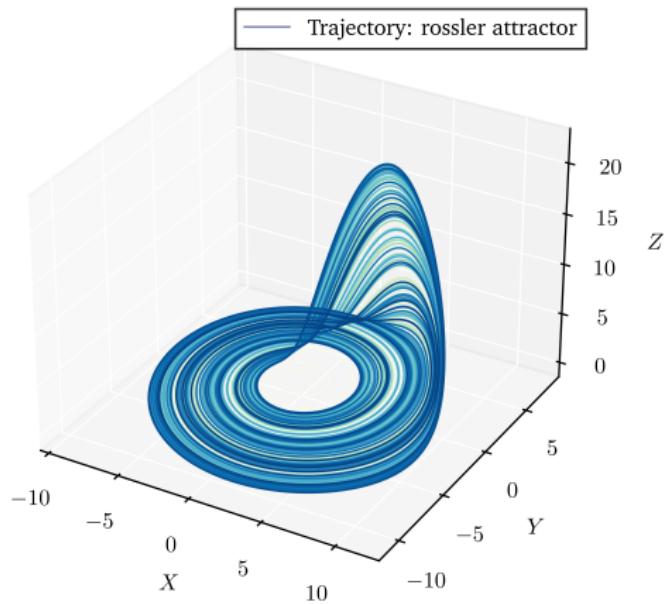
Attracteur de Lorenz



Vérification qualitative du théorème d'unicité des solutions aux équations différentielles.

Résultats - Trajectoires

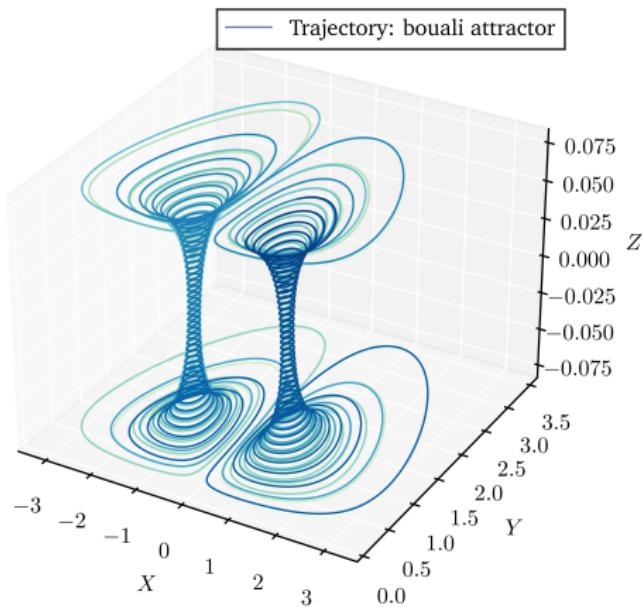
Attracteur de Rössler



- ◊ Conditions initiales
 $\mathbf{r} = (1, 1, -1)$
- ◊ Temps de 1000 secondes
- ◊ Pas de $h = 0.001$

Résultats - Trajectoires

Attracteur de Bouali



- ◊ Conditions initiales
 $\mathbf{r} = (0.2, 0.2, -0.08)$
- ◊ Temps de 1000 secondes
- ◊ Pas de $h = 0.001$

Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

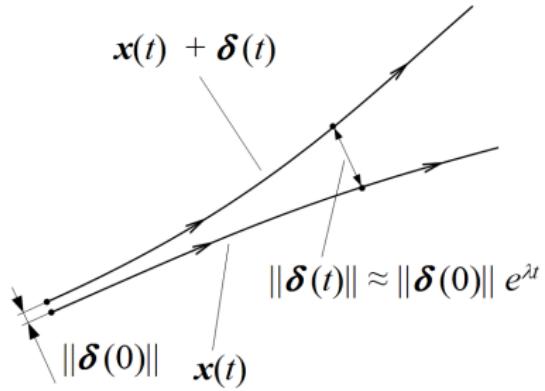


Figure – Exposant de Lyapunov^a.

- ◊ Le spectre de Lyapunov est de nature vectorielle
- ◊ Système dynamique de dimension N
 $\implies \in \lambda_{i=1,2\dots N}$

a. [WIKIPEDIA CONTRIBUTORS](#). *Lyapunov exponent* — Wikipedia, The Free Encyclopedia. 2023.

Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

Trois situations existent pour les exposants de Lyapunov λ_j :

- ◊ $\lambda_j > 0 \implies$ signature chaotique
- ◊ $\lambda_j = 0 \implies$ *quasi-périodique*
- ◊ $\lambda_j < 0 \implies$ convergence

Théorie - Spectre de Lyapunov & Convergence

L'équation qui permet d'obtenir l'exposant de Lyapunov dans la direction j est

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(f^{(j)}(x_i)) \quad (5)$$

Note

Il est difficile de sommer un nombre infini numériquement.
Quelles sont les solutions ?

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Numériquement, on procède de façon matricielle $\rightarrow J$

Définition : Matrice Jacobienne

Les éléments de la matrice jacobienne sont donnés par

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (6)$$

où f_i est l'équation i et x_j la variable de dérivation.

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire $\mathbf{r}(t_n)$

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de J en ce point

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de J en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ($J \cdot U$)

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

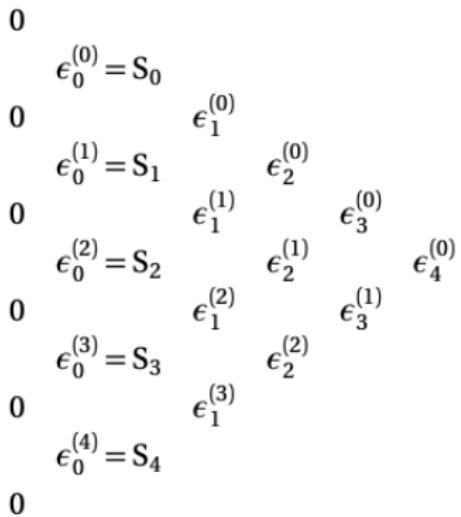
- ◊ Position sur la trajectoire $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de J en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ($J \cdot U$)
- ◊ Extraction du spectre de Lyapunov ($Q \cdot R$)

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence

Évolution volumique d'une sphère unitaire $U_{3x3} \rightarrow$ taux de variation donnés par J . L'algorithme est qualitativement

- ◊ Position sur la trajectoire $\mathbf{r}(t_n)$
- ◊ Évaluation de J en ce point
- ◊ Taux de contraction/expansion ($J \cdot U$)
- ◊ Extraction du spectre de Lyapunov ($Q \cdot R$)
- ◊ Mise à jours des perturbations de l'espace des phases au temps t_n

Méthodes numériques - Calculs matriciels & Convergence



Convergence du spectre de Lyapunov dans la limite $t \rightarrow \infty$ grâce à l'algorithme *epsilon*

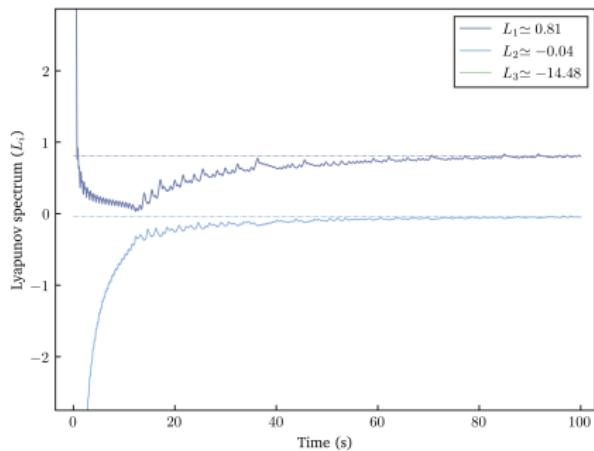
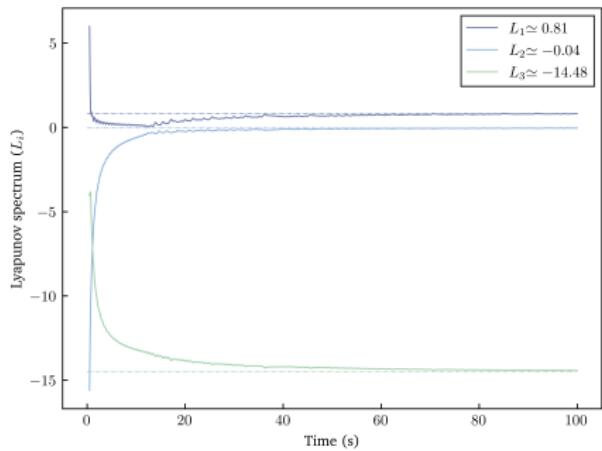
Figure – (SÉNÉCHAL, *Méthodes numériques et simulations*).

Résultats - Spectre de Lyapunov

Résultats - Spectre de Lyapunov

Attracteur de Lorenz

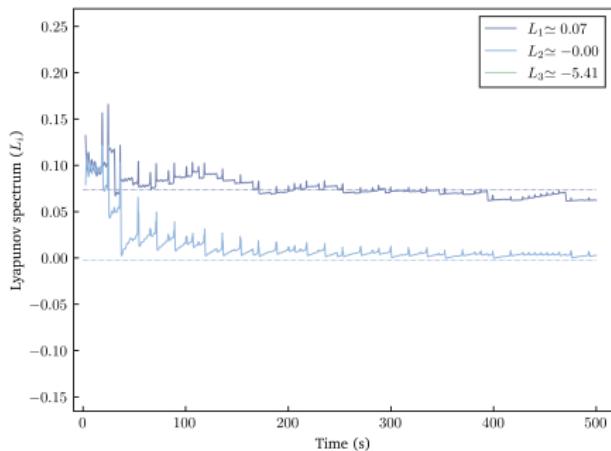
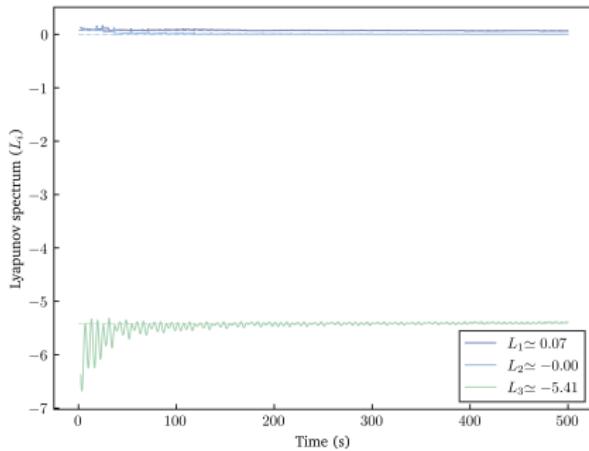
Simulation pour 100 secondes avec 10^4 points et $\mathbf{r}_0 = (1, 0, -1)$



Résultats - Spectre de Lyapunov

Attracteur de Rössler

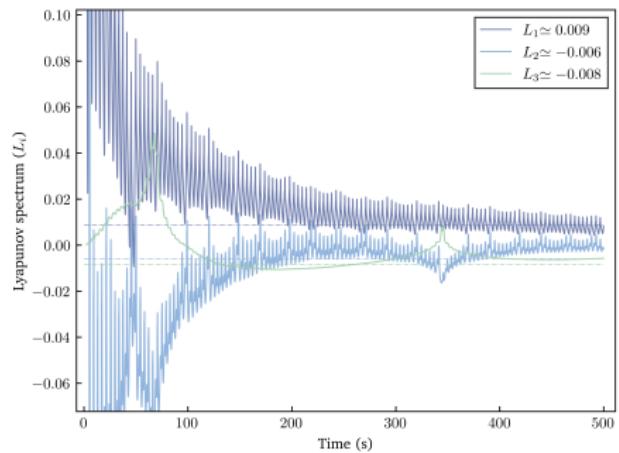
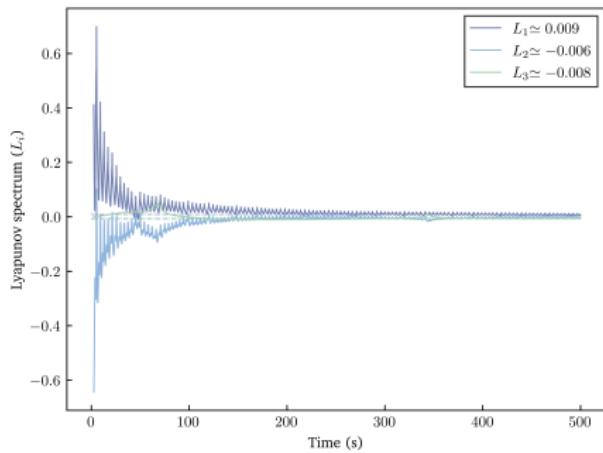
Simulation pour 500 secondes avec 10^5 points et $\mathbf{r}_0 = (1, 1, -1)$



Résultats - Spectre de Lyapunov

Attracteur de Bouali

Simulation pour 500 secondes avec 10^5 points et $\mathbf{r}_0 = (0.2, 0.2, -0.08)$



Conclusion

Conclusion

- ◊ Trajectoires des attracteurs (Lorenz, Rössler, Bouali) & unicité
- ◊ Spectre de Lyapunov dans le contexte chaotique
- ◊ Convergence de séries et limites du spectre

Pistes

Réduction du bruit, diagrammes de bifurcation, points critiques, applications physiques.

Merci