

Étude du Chaos, Caractérisation des Attracteurs Chaotiques

Antoine de Lagrave

Université de Sherbrooke, Département de physique, Sherbrooke, QC, Canada

13 AVRIL 2023

Dans ce travail, nous étudions la caractérisation des attracteurs chaotiques des systèmes dynamiques. Les attracteurs chaotiques présentent un comportement complexe, imprévisible et non périodique, et constituent une caractéristique fondamentale des systèmes non linéaires dissipatifs. Nous utilisons diverses méthodes pour identifier et analyser les attracteurs chaotiques, incluant le calcul de(s) exposant(s) de Lyapunov. L'utilisation de méthodes numériques comme des algorithmes de résolution d'équations différentielles sera impérative et précieuse dans l'analyse numérique de tels système, de même que l'utilisation d'algorithme de convergence pour obtenir une intuition de leur comportement après un temps qui tend vers l'infini. Nous présentons également des exemples de ce type d'attracteurs tels que : l'attracteur de Lorenz, l'attracteur de Rössler, l'attracteur de Bouali et etc. Notre étude révèle ainsi la structure riche et complexe des attracteurs chaotiques et fournit des aperçus sur la dynamique sous-jacente des systèmes qui sont à l'origine de leur apparition. Dans l'ensemble, cette étude contribue à une compréhension plus approfondie du chaos et fournit des aperçus pour l'analyse des systèmes chaotiques en utilisant les attracteurs comme entité principale.

I. INTRODUCTION

L'intérêt scientifique envers les systèmes chaotiques remonte au 19^{ème} siècle alors que Henri Poincaré étudiait le comportement des solutions du problème à trois corps [1]. Bien qu'il n'était pas évident que ce système était de nature chaotique, la forte sensibilité aux conditions initiales et la non périodicité des solutions étaient toutefois très présentes. Birkhoff, Kolmogorov et Lorenz sont également d'éminents mathématiciens et physiciens qui ont plus tard contribué considérablement dans le domaine de la théorie du chaos respectivement grâce à la théorie ergodique, l'étude des turbulences/algorithmes et l'étude de la météorologie. C'est d'ailleurs Edward Lorenz qui en 1963, arrive avec l'idée *l'effet papillon* selon lequel de légères variations peuvent avoir des conséquences monstrueuses [2]. Ce n'est cependant qu'au 20^{ème} siècle que ce sujet d'étude a connu ses plus grandes victoires et avancées. La raison principale de cette ascension est la croissance fulgurante de l'ère numérique. L'étude de tels systèmes est en effet particulièrement coûteuse en ce qui concerne la partie mathématique puisqu'elle demande une grande quantité d'itérations et c'est pourquoi les ordinateurs y sont d'une aide précieuse.

L'étude des systèmes dynamiques dissipatifs requiert régulièrement l'intervention d'outils mathématiques et topologiques complexes pour être en mesure d'isoler une tendance ou un comportement physique. On entend ici par *systèmes dynamiques dissipatifs* des systèmes thermodynamiques qui agissent hors équilibre et dans lesquels les échanges d'énergie et de matière avec l'environnement sont permis. Ces systèmes sont donc ouverts au sens thermodynamique et sont généralement à l'origine de l'apparition d'attracteurs. Plus précisément, les systèmes dynamiques dont la sensibilité aux conditions initiales est élevée sont aussi appelés systèmes chaotiques. Ceux-ci sont

à la fois déterministes et imprévisibles et c'est ce mélange particulier de simplicité et de hasard qui constitue le *chaos*. Il sera ici question d'étudier les différentes propriétés et limites de certains attracteurs fondamentaux qui émergent naturellement des systèmes dynamiques dissipatifs tels que l'attracteur de Lorenz, Rössler et Bouali. On déterminera leur sensibilité aux conditions initiales via l'exposant de Lyapunov et la divergence de différente solutions grâce aux diagrammes de bifurcation. Nous pourrons ainsi faire un lien entre ces attracteurs et de réels systèmes physiques dans lesquels ont retrouvé ces objets topologiques naturellement.

II. THÉORIE

Les attracteurs sont des structures fondamentales en théorie du chaos qui jouent un rôle clé dans la compréhension du comportement chaotique des systèmes. Dans cette section, nous allons explorer en détail le concept d'attracteur en théorie du chaos, en examinant les propriétés mathématiques qui les caractérisent.

A. Attracteurs

Pour un système dynamique dissipatif donné, l'attracteur est défini par un sous-ensemble d'états dans l'espace des phases vers lesquels la solution au système converge si les conditions initiales de ladite solution sont comprises dans le bassin d'attraction de l'attracteur. Ici, le *bassin d'attraction* représente une zone de l'espace des phases dont les conditions initiales mènent à des trajectoires qui convergent vers un attracteur. Mathématiquement, on dit que le bassin d'attraction W d'un attracteur A est

$$W(A) = \{r \in R \mid \lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t) \in A\}, \quad (1)$$

où ici r représente un ensemble de condition initiales appartenant à l'espace des phases R et $f(r, t)$ la trajectoire de la solution. Autrement-dit, l'attracteur est un sous-ensemble de solutions qui permet d'identifier et de prédire une tendance globale dans la trajectoire d'une solution donnée d'un système chaotique, et ce, malgré sa nature imprévisible.

L'attracteur de Lorenz que l'on nommera ici L est l'un des exemples les plus célèbres d'un attracteur chaotique dans la théorie des systèmes dynamiques [3]. Cet attracteur est le fruit d'un système dynamique non linéaire à trois dimensions qui décrit le comportement d'un fluide en mouvement. Mathématiquement, l'attracteur de Lorenz est défini par un ensemble d'équations différentielles ordinaires, qui décrivent l'évolution de trois variables dynamiques (x, y, z) en fonction du temps et des paramètres σ, ρ et β qui régissent le comportement du système

$$L = \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (2)$$

où les paramètres σ, ρ et β sont respectivement le nombre de Prandtl, le nombre de Rayleigh et un coefficient géométrique quelconque. Un second attracteur initialement proposé par Otto Rössler en 1976 est l'attracteur de Rössler [4]. Celui-ci possède une forme particulière et n'a qu'une seule de ses trois équations qui possède un terme non linéaire

$$R = \begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (3)$$

avec a, b et c des paramètres numériques qui régissent le comportement du système. Le dernier attracteur que nous allons étudier est celui introduit par Bouali en 2013, qui est non seulement par définition très sensible aux conditions initiales, mais également à la source du phénomène unique de chevauchement d'attracteurs [5]. Les équations différentielles non-linéaires qui décrivent cet attracteur sont

$$B = \begin{cases} \dot{x} = \alpha x(1 - y) - \beta z \\ \dot{y} = -\gamma y(1 - x^2) \\ \dot{z} = \mu x, \end{cases} \quad (4)$$

où les paramètres α, β, γ et μ sont une fois de plus des coefficients numériques responsables du comportement de l'attracteur.

B. Exposants de Lyapunov

Nous avons défini que les systèmes dynamiques dissipatifs sensibles au changement infinitésimal des condi-

tions initiales sont chaotiques et donc que deux trajectoires peuvent se voir diverger rapidement. Soit deux positions initiales de l'espace des phases $x(t)$ et $x(t) + \delta_0$ tels que montrés sur la figure 1

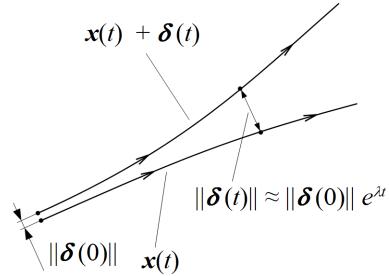


FIGURE 1 – Schéma qui exprime l'évolution de la distance entre deux trajectoires $|\delta(t)|$ initialement espacées d'un déplacement infinitésimal $|\delta_0|$ en fonction du temps [6].

on considère qu'au temps $t = 0$ ces trajectoires ont été éloignées du vecteur déplacement δ_0 tel que sa norme $|\delta_0|$ soit infinitésimale. Dans le contexte de systèmes chaotiques, on trouve qu'après un temps d'évolution t , la norme du déplacement entre les trajectoires est donné par

$$|\delta(t)| \simeq |\delta_0| e^{\lambda t}, \quad (5)$$

où l'on appelle la quantité λ l'*exposant de Lyapunov*. On accède à cette quantité avec quelques manipulations

$$\lambda \simeq \frac{1}{t} \ln \left[\frac{|\delta(t)|}{|\delta_0|} \right], \quad (6)$$

où pour un système avec pas temporels discrets tels que l'itération $x_{n+1} = f(x_n)$, se traduit par

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(f'(x_i)), \quad (7)$$

avec x_0 le point qui correspond à la condition initiale. On voit ici que pour des solutions calculées à l'aide d'algorithme, il est possible de remplacer la limite itérative infinie par un algorithme de convergence judicieusement choisi tel que l'*algorithme epsilon*. Il est cependant important de noter que jusqu'ici, nous n'avons introduit qu'un seul exposant λ (le plus élevé conventionnellement), mais un système de dimension N possède naturellement N exposants de Lyapunov. On appelle ces valeurs le *spectre de Lyapunov* d'un système. Ce spectre possède plusieurs propriétés intéressantes pour l'analyse des systèmes dynamiques [7] :

- ◊ Les composantes du spectres sont indépendantes du métrique utilisé pour leur calcul ainsi que du

choix des variables. Cela permet de conclure sur l'objectivité et la pertinence du spectre de Lyapunov.

- ◊ Si l'exposant le plus élevé du spectre est positif témoigne généralement d'instabilités exponentiellement importantes et constitue une définition de ce que l'on pourrait appeler chaos.
- ◊ La somme du spectre de Lyapunov permet de mesurer le taux contraction des volumes de l'espace des phases. Pour des systèmes dissipatifs, une somme $\sum_i \lambda_i < 0$ signifie que les volumes décroissent exponentiellement à 0 alors qu'une somme nulle implique la conservation des volumes de l'espace des phases.

III. MÉTHODE

L'étude et la caractérisation numérique des attracteurs chaotiques requiert la connaissance de plusieurs méthodes/algorithmes. L'utilisation du langage de *haut niveau* Python est donc agréable grâce à la manipulation intuitive des objets mathématiques multidimensionnels et dans l'implémentation de diverses méthodes numériques. On explicitera ici la façon dont les attracteurs présentés dans la section *II A. Attracteurs* ont été simulés, comment le spectre de Lyapunov a été calculé et finalement l'algorithme avec lequel ce spectre a pu être estimé pour un temps de simulation $t \rightarrow \infty$.

A. Équations différentielles

Les systèmes d'équations différentielles (2), (3) et (4) qui décrivent les attracteurs étudiés dans ce travail ont tous pu être simulé pour des configurations données de l'espace des phases (ex : conditions initiales, coefficients, etc.). Les simulations peuvent être faites selon 4 méthodes de résolution soit : Euler, Prédicteur-Correcteur, Runge-Kutta (ordre 2 et 4) et l'utilisation de la librairie *scipy* en Python [8]. Dans le cadre de ce travail, ces algorithmes possèdent tous la même forme et possèdent tous les mêmes paramètres obligatoires, c.-à.-d. une position initiale dans l'espace (y_0) et une grille temporelle qui permet d'identifier chaque incrément de temps pour lesquels redéfinir une nouvelle position.

1. Méthode d'Euler

La méthode la plus simple est la méthode d'Euler. Il s'agit d'une méthode récursive qui manque de précision de par sa simplicité puisqu'elle ne permet qu'une précision à l'ordre 1 en h . Soit une grille temporelle t_n dont

chaque élément est espacé d'un pas h et une fonction vectorielle $x(t)$, on définit la fonction x_{n+1} en utilisant une approximation de la dérivée

$$x_{n+1} \approx x_n + h f(x_n, t_n),$$

où f est une fonction qui évalue le système d'équations différentielles pour un point de l'espace-temps donné (x_n, t_n) . Cette relation permet donc à partir d'un point initial x_0 , d'obtenir la trajectoire complète.

2. Prédicteur-correcteur

Une amélioration de la méthode *III A 1. Méthode d'Euler* est la méthode Prédicteur-Correcteur. Celle-ci requiert le double du nombre d'itérations par rapport à Euler, mais est cependant précise à l'ordre 2 en h . On procède d'abord à une prédiction sur la valeur au temps t_{n+1} de la fonction $x(t)$

$$x_{pred.} = x_n + h f(x_n, t_n),$$

et on corrige cette prédiction en prenant la moyenne de l'évaluation de la dérivée en x_n et $x_{pred.}$, c.-à.-d.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} h (f(x_n, t_n) + f(x_{pred.}, t_{n+1})).$$

3. Runge-Kutta (ordre 2 et 4)

La méthode de Runge-Kutta se présente comme une forme généralisée de la méthode *III A 2. Prédicteur-correcteur*. On procède à 2 et 4 prédictions du même type que Prédicteur-Correcteur pour les méthodes d'ordre 2 et 4 respectivement. Le calcul de points médians permet de rendre la méthode de plus en plus précise, mais cela a effectivement un coût algorithmique non-négligeable ce qui fait de la méthode d'ordre 4 un bon compromis. On détaille cette méthode en 5 étapes

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x_n, t_n) \\ k_2 &= h f(x_n + k_1/2, t_n + h/2) \\ k_3 &= h f(x_n + k_2/2, t_n + h/2) \\ k_4 &= h f(x_n + k_3, t_n + h) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{3} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \end{aligned}$$

4. Librairie *scipy*

On prend ici le temps de noter que pour la majorité des calculs/résultats qui seront présentés dans la prochaine section, la méthode de calcul la plus exacte et rapide

s'est avérée être l'utilisation des méthodes Python provenant de la librairie `scipy`¹. Ici on réfère plus particulièrement aux fonctions `scipy.integrate.odeint` ainsi que `scipy.optimize.solve_ivp`, deux fonctions très efficaces et optimisées pour résoudre des systèmes d'équations différentielles.

B. Calcul du spectre de Lyapunov

Pour déterminer le spectre de Lyapunov dans le cas tridimensionnel ($\lambda_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$), on utilisera des méthodes de calcul matricielles. En effet, pour déterminer comment se comporte l'espace autour d'un point d'une trajectoire chaotique donnée, on initialisera une matrice identité $U_{3 \times 3}$. Il est possible de penser que cette matrice représente une sphère de rayon unitaire au temps $t = 0$ de la simulation et que sa déformation suivant les trois directions que constituent l'espace tridimensionnel au cours du temps permet d'obtenir le spectre de Lyapunov. Pour se faire, on calcule d'abord la matrice jacobienne J du système d'équations différentielles étudié pour chaque point de la trajectoire de la particule à l'intérieur de l'attracteur. Cette matrice est la matrice des dérivées partielles pour chaque équation du système, c.-à.-d. que pour un système d'équations f on aurait

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad \text{avec } x_j \in \{x, y, z\},$$

où ici le terme f_i représente l'équation différentielle i du système et x_j la variable selon laquelle dériver. Pour donner un exemple concret, le jacobien au point $r = (x, y, z)$ pour l'attracteur de Lorenz (2) est la suivante :

$$J_L(r) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}.$$

Cette matrice J joue un rôle clé dans le calcul du spectre de Lyapunov puisqu'elle permet d'avoir (pour tout point de la trajectoire) les taux de contraction/expansion de l'espace dans les directions orthogonales du système. En d'autres mots, ces taux de contraction/expansion donnent l'information sur l'évolution de trajectoires infinitésimale voisines à la trajectoire originale. On reconnaît ici la définition même des exposants de Lyapunov donnée dans la section [II.B. Exposants de Lyapunov](#). Pour continuer le calcul, on procédera, à chaque itération, à la multiplication de la matrice J à la matrice U pour obtenir la contraction/expansion locale à chaque point de l'espace des phases. On multiplie ensuite cette matrice

résultante par la transposée de U dans le but d'obtenir ces étirements dans la base de référence donnée par les vecteurs de U . Autrement dit, on obtient les contractions/expansions à un instant donné via $J \cdot U$ et l'on applique celles-ci sur les vecteurs de la matrice U pour savoir comment ses vecteurs se comportent par rapport au temps. À la place d'avoir seulement des taux, on obtient des mesures concrètes de contraction/expansion de la sphère unitaire créée au début de la simulation. On dira notamment que l'élément $[U^T \cdot (J \cdot U)]_{ij}$ correspond au taux de contraction/expansion des vecteurs directeurs de la sphère dans la direction i s'ils ont été perturbés dans la direction j . C'est d'ailleurs pour cette raison que si l'on extrait la diagonale de cette dernière matrice, on obtient le spectre de Lyapunov.

Ainsi, en termes algorithmiques, pour chaque temps t_i de la simulation, on procède aux étapes suivantes :

- ◊ Calcul de la position et de la matrice jacobienne J associée à cette position.
- ◊ Détermine la contraction/expansion de la sphère initialement unitaire dans les directions $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ grâce à $R_i = U_i^T \cdot (J_i \cdot U_i)$.
- ◊ Collecte du spectre de Lyapunov (L_i) en faisant l'extraction de la diagonale de R_i .
- ◊ Utilisation de transformations de Householder afin de rendre la matrice R_i antisymétrique.
- ◊ Mise à jour des dimensions de la sphère de contraction/expansion grâce au produit matriciel $U_i \cdot R_i$.

En termes numériques, on arrive à procéder à toutes ces itérations en utilisant une fois de plus la librairie `scipy`. On fabrique essentiellement un système d'équation matriciel que l'on intègre par rapport au temps via la fonction `scipy.integrate.odeint`. Le système injecté dans cette fonction est un système qui est une généralisation des étapes algorithmiques décrites un peu plus haut soit :

$$\dot{U} = UX \quad \text{et} \quad \dot{L} = \text{diag}(R)$$

C. Algorithme de convergence

Comme introduit dans la section [II.B. Exposants de Lyapunov](#), puisque l'équation (1) concernant l'exposant de Lyapunov est une somme infinie, il est évident que ce calcul est numériquement impossible. Cependant, il existe une panoplie d'algorithme de convergence qui permettent d'estimer la valeur d'une série pour un nombre infini de termes en utilisant seulement quelques termes de ladite

1. SciPy: Fundamental algorithms for scientific computing in Python.

série. On utilisera ici l'algorithme epsilon. Une façon intuitive d'introduire l'algorithme de convergence epsilon est en prenant une série de valeurs quelconques composée de 5 termes tous identifiés par les lettres $S_{i=1,2,\dots}$. On définit l'algorithme epsilon grâce à un tableau triangulaire Soit

0	$\epsilon_0^{(0)} = S_0$			
0	$\epsilon_0^{(1)} = S_1$	$\epsilon_1^{(0)}$	$\epsilon_2^{(0)}$	
0	$\epsilon_0^{(2)} = S_2$	$\epsilon_1^{(1)}$	$\epsilon_2^{(1)}$	$\epsilon_3^{(0)}$
0	$\epsilon_0^{(3)} = S_3$	$\epsilon_1^{(2)}$	$\epsilon_2^{(2)}$	$\epsilon_3^{(1)}$
0	$\epsilon_0^{(4)} = S_4$	$\epsilon_1^{(3)}$		$\epsilon_4^{(0)}$
0				

FIGURE 2 – Tableau triangulaire représentant le mode de fonctionnement de l'algorithme epsilon pour une série de 5 termes [8].

la figure 2, on voit que chaque élément du tableau est déterminé grâce aux trois éléments qui figurent en haut à gauche, directement à gauche et en bas à gauche jusqu'à arriver au dernier élément puisque cela forme un triangle. Numériquement, on initialise d'abord la première colonne de valeur comme

$$\epsilon_{k=-1}^{(n)} = 0 \quad \text{et} \quad \epsilon_{k=0}^{(n)} = S_n,$$

pour ensuite déterminer les autres termes du tableau grâce à l'expression

$$\epsilon_{k+1}^{(n)} = \epsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\epsilon_k^{(n+1)} + \epsilon_k^{(n)}}, \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

où l'on considère qu'il y a n lignes et k colonnes dans le tableau triangulaire. On note également que les termes dans les colonnes d'indices impairs ne constituent pas de bonnes approximations pour la série S_n et donc si l'on donne à l'algorithme une nombre de termes impairs, il est impératif d'ajouter une colonne nulle à l'indice $k = -1$ de sorte à ce qu'à la fin de l'algorithme la valeur rentrée soit précisément celle qui soit le pic du triangle.

IV. RÉSULTATS

A. Trajectoires

Soit les figures 3, 4 et 5 qui présentent les résultats pour la simulation des attracteurs (Lorenz, Rössler et Bouali) définis mathématiquement dans la section II. Théorie. On voit sur lesdites figures la trajectoires d'une particule de masse unité dans les systèmes dynamiques dissipatifs représentés par les différents attracteurs. Étonnement,

les trajectoires montrées sur ces figures ne semble pas du tout chaotiques, et se rapprochent d'arrangements très bien organisés voir même prédictibles. Une fois de plus, la subtilité réside dans la sensibilité de ces systèmes aux conditions initiales. Il est d'ailleurs à noter que ces figures sont des trajectoires qui proviennent d'**une seule** position initiale à chaque fois. Pour voir à quel point ces attracteurs sont chaotiques ou non, nous devrions exécuter la simulation pour une multitude de coordonnées initiales et ainsi observer la divergence très précoce entre les solutions. Un bon indicateur de signature chaotique est le spectre de Lyapunov et c'est pourquoi nous allons analyser ce spectre en utilisant les mêmes trajectoires attractives.

Il est également intéressant d'observer sur les figures 3, 4 et 5 que le théorème d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires est vérifié [9]. On observe effectivement aucun croisement dans les trajectoires obtenues.

B. Spectre de Lyapunov

Considérons les figures 6, 7 et 8, sur lesquelles ont observe le calcul du spectre de Lyapunov en fonction du temps pour les trajectoires attractives discutées dans la section IV A. Trajectoires. Il est intéressant d'observer la précieuse utilisation de l'algorithme de convergence epsilon introduit dans la section III C. Algorithme de convergence. La convergence est pertinente et permet bien d'identifier le comportement à long terme ($\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t)$) du spectre de Lyapunov pour la trajectoire des attracteurs étudiés.

On remarque premièrement, pour tous les attracteurs, que l'exposant de Lyapunov maximal λ_1 est positif. Comme introduit dans la section II B. Exposants de Lyapunov, il s'agit-là d'une signature typique de chaos. Mathématiquement, cela signifie que dans la direction associée à l'exposant λ_1 deux trajectoires voisines divergent exponentiellement rapidement dans le temps et donc que de toutes petites perturbations peuvent mener à des trajectoires très différentes. On peut ici faire un lien avec la contraction/expansion de l'espace des phases modélisée par l'évolution du volume de la sphère unitaire U vis-à-vis du signe obtenu pour les composantes du spectre de Lyapunov.

Ensuite, on remarque que dans les résultats obtenus, deux des trois exposants sont négatifs. Cela signifie logiquement que deux trajectoires voisines tendent à converger au sein de l'attracteur et demeurer près l'une de l'autre. Physiquement, on peut aussi dire que des exposants négatifs indiquent que les systèmes étudiés sont dissipatifs (perdent de l'énergie au cours du temps) et donc qu'il est normal d'observer la convergence de

certaines trajectoires comme par exemple lorsque l'on étudie un oscillateur harmonique amorti.

Finalement, on voit que certains des exposants de Lyapunov sont nuls. Ces derniers n'impliquent pas de compor-

tement chaotique particuliers. On peut conclure que mathématiquement, une perturbation d'une trajectoire ayant un exposant de Lyapunov nul peut se voir diverger mais seulement de façon logarithmique. On appelle ce phénomène : *comportement quasi-périodique*.

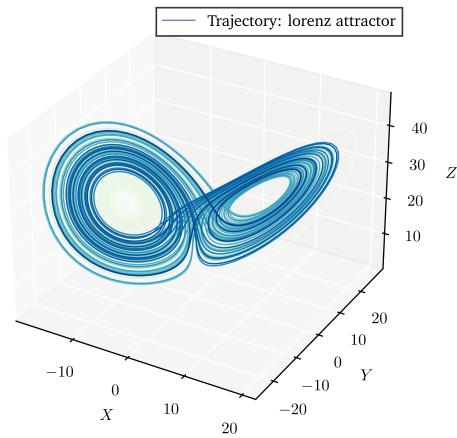


FIGURE 3 – Trajectoire obtenue pour la simulation d'une particule de masse unité dans le bassin d'attraction de l'attracteur de Lorenz ayant comme position initiale $r_0 = (1, 0, -1)$ ainsi que pour un temps de 100 secondes avec un pas de $h = 0.01$.

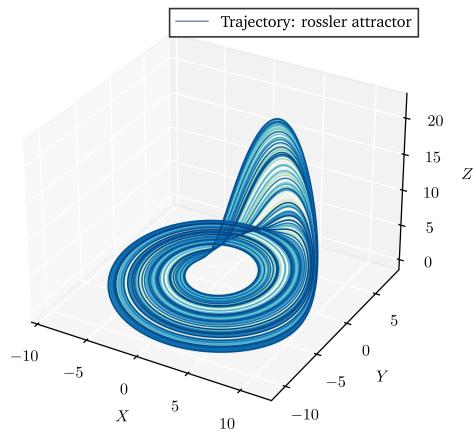


FIGURE 4 – Trajectoire obtenue pour la simulation d'une particule de masse unité dans le bassin d'attraction de l'attracteur de Rössler ayant comme position initiale $r_0 = (1, 1, -1)$ ainsi que pour un temps de 1000 secondes avec un pas de $h = 0.001$.

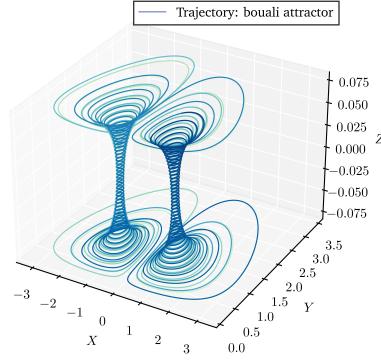


FIGURE 5 – Trajectoire obtenue pour la simulation d'une particule de masse unité dans le bassin d'attraction de l'attracteur de Bouali ayant comme position initiale $r_0 = (0.2, 0.2, -0.08)$ ainsi que pour un temps de 1000 secondes avec un pas de $h = 0.001$.

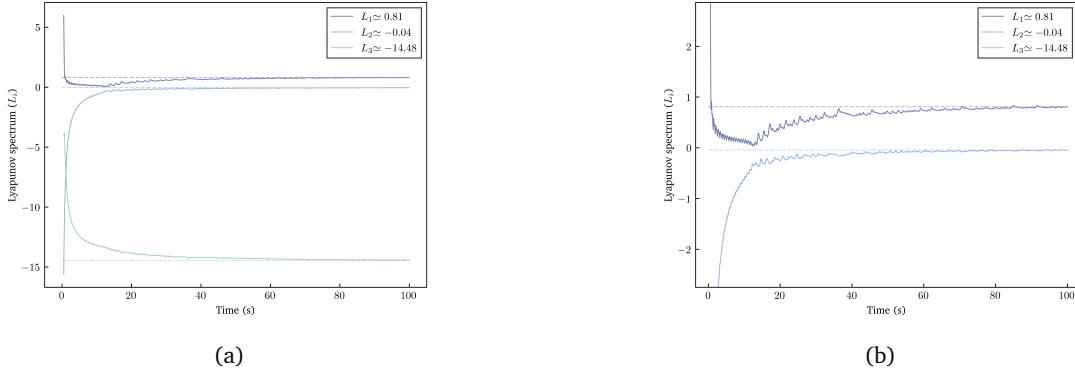


FIGURE 6 – Spectre de Lyapunov ($\lambda_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$) dans la simulation de l'attracteur de Lorenz. (a) Spectre complet. (b) Mise en évidence du comportement pour les exposants λ_1 et λ_2 étant donnée la superposition et le bruit.

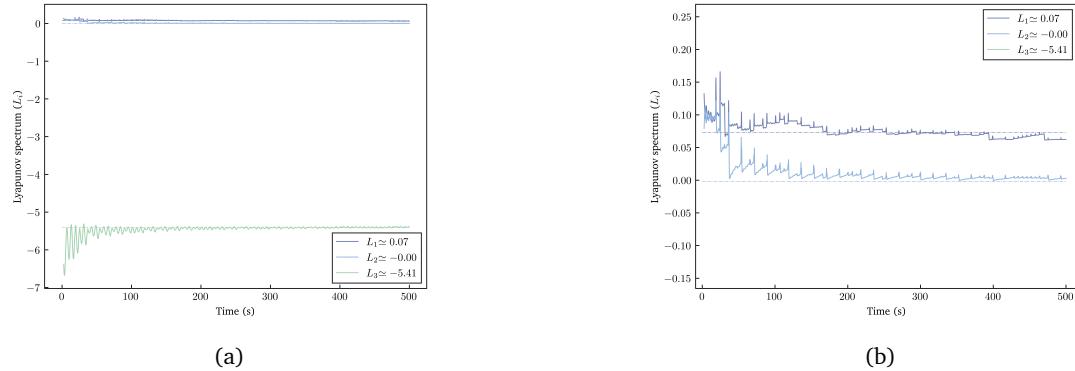


FIGURE 7 – Spectre de Lyapunov ($\lambda_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$) dans la simulation de l'attracteur de Rössler. (a) Spectre complet. (b) Mise en évidence du comportement pour les exposants λ_1 et λ_2 étant donnée la superposition et le bruit.

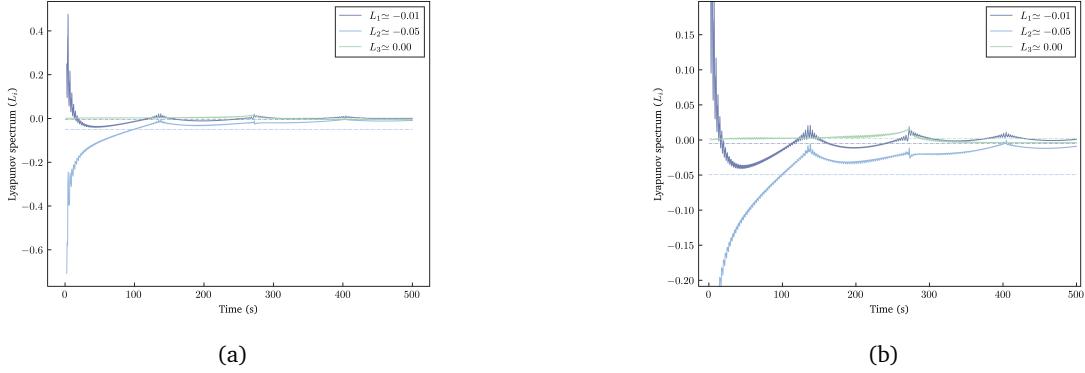


FIGURE 8 – Spectre de Lyapunov ($\lambda_i \forall i \in \{1, 2, 3\}$) dans la simulation de l'attracteur de Bouali. (a) Spectre complet. (b) Mise en évidence du comportement pour les exposants λ_1 , λ_2 et λ_3 étant donnée la superposition et le bruit.

V. CONCLUSION

Pour conclure, cette étude théorique et numérique de surface au sujet des attracteurs chaotiques a permis de comprendre comment caractériser ces entités topologiques grâce à certaines méthodes numériques et au calcul d'indicateurs comme le spectre de Lyapunov. D'abord en dressant un portrait théorique puis en développant des méthodes numériques telles que la résolution d'équations différentielles, la décomposition de matrices QR ainsi que la convergence de séries à l'aide du langage Python.

Ce processus a permis de vérifier le théorème d'unicité concernant les trajectoires obtenues numériquement. Trajectoires qui constituent les solutions aux systèmes d'équations différentielles qui définissent les attracteurs étudiés. Il a également été possible de conclure sur le comportement des attracteurs par rapport au signe des éléments de leur spectre de Lyapunov par rapport au temps. On a pu observer que les attracteurs chaotiques étudiés avaient bel et bien une signature chaotique au sens de ce spectre ($\lambda_1 > 0$) notamment grâce à la convergence des valeurs des composantes du spectre grâce à l'approximation donnée par l'algorithme epsilon.

Pour poursuivre ce projet, il serait intéressant de prendre d'autres indicateurs tels que les diagrammes de bifurcations de certains systèmes dynamiques afin de voir où apparaissent mathématiquement ces attracteurs dans l'évolution d'un système [10]. On aurait également pu analyser les points critiques des différents attracteurs.

Annexe A: Algorithme epsilon

Soit la série de Gregory pour la fonction $\arctan(x)$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

connue pour sa lente convergence. Si l'on pose $x = 1$ dans cette série, nous aurions d'un côté $\arctan(1) = \pi$ et de l'autre un série qui converge lentement vers cette même valeur. On peut donc se servir, pour accélérer la convergence de l'algorithme epsilon définit sur la figure 2 pour vérifier notre implémentation. Voici un graphique qui montre l'erreur commise sur la valeur de π de la librairie numpy en fonction du nombre de terme dans la série de Gregory. On voit ici sur la figure 9 que l'algorithme fait

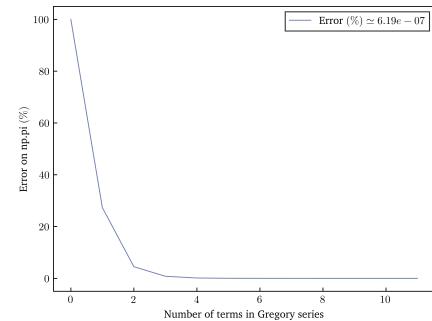


FIGURE 9 – Erreur sur l'extrapolation de la série de Gregory (en prenant les 12 premiers termes) via l'algorithme epsilon.

effectivement converger la série vers la valeur attendue. On remarque qu'avec seulement 5 termes dans la série de

Gregory, on peut avoir de très bonnes estimations

Annexe B: Théorème d'unicité

$$\frac{\text{estimation}}{\text{np.pi}} \cdot 100 \simeq \frac{3.142342342342342}{3.141592653589793} \cdot 100 \simeq 0.024\%$$

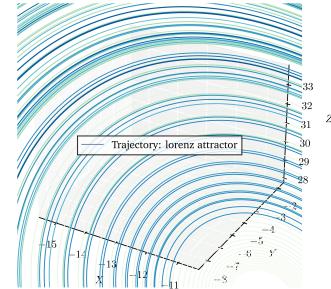


FIGURE 10 – Démonstration qualitative du théorème d'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires du premier ordre à l'aide d'une trajectoire de l'attracteur de Lorenz.

- [1] H. Poincaré, *Acta Mathematica* **13**, 5 (1900).
- [2] C. Rouvas-Nicolis and G. Nicolis, *Scholarpedia* **4**, 1720 (2009).
- [3] E. N. Lorenz, *Journal of Atmospheric Sciences* **20**, 130 (1963).
- [4] O. Rossler, *Physics Letters A* **57**, 397 (1976).
- [5] S. Bouali, A 3d strange attractor with a distinctive silhouette. the butterfly effect revisited (2013).
- [6] Wikipedia contributors, *Lyapunov exponent* — Wikipedia, the free encyclopedia (2023), [Online ; accessed 2-April-2023].
- [7] A. Politi, *Scholarpedia* **8**, 2722 (2013), revision #137286.

- [8] D. Sénéchal, Méthodes numériques et simulations, https://www.physique.usherbrooke.ca/pages/sites/default/files/PHQ404_0.pdf (2020), accessed : 2023-04-03.
- [9] Wikipedia contributors, *Picard–lindelöf theorem* — Wikipedia, the free encyclopedia (2023), [Online ; accessed 10-April-2023].
- [10] Wikipedia contributors, *Bifurcation diagram* — Wikipedia, the free encyclopedia (2022), [Online ; accessed 10-April-2023].