概率论习题

1.设独立随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$满足 $P\left(X_n = \pm n^{\theta}\right) = \frac{1}{2}$，其中 $\theta > 0$ 是常数. 记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1)当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时，证明 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0，即对任意 $\epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = 0$

(2) 证明: $\frac{S_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$，其中 $\operatorname{Var}(S_n)$ 是表示 S_n 的方差，$\xrightarrow{D}$ 表示以分布收敛.

2.设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的随机变量，其有共同的分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 现对随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 按大小顺序重新排列为 $\boldsymbol{X}_{n1} \leq \boldsymbol{X}_{n2} \leq \cdots \leq \boldsymbol{X}_{nn}$

(1) 求随机变量 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合概率密度函数 $f_{1n}(x, y)$；

(2) 如果 $X_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 服从区间 $[0, 1]$ 上的均匀分布，求随机变量 $U = X_{nn} + X_{n1}$ 的密度函数 $f_U(u)$.

参考

1.【参考解析】: 对于 $i \geq 1, EX_i = 0, EX_i^2 = i^{2\theta}$，则

$$ES_n = 0, \operatorname{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^{2\theta}$$

注意 $\int_0^n x^{2\theta} \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} \mathrm{d}x$ 以及

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^{2\theta} - n^{2\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{2\theta} &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_i^{i+1} x^{2\theta} \mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{2\theta} = \sum_{i=1}^{n} i^{2\theta}\end{aligned}$$

得到

$$\frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} \leq \operatorname{Var}(S_n) \leq \frac{1}{2\theta+1} n^{2\theta+1} + n^{2\theta}$$

(1) 由于

$$P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) \leq \frac{ES_n^2}{n^2\epsilon^2} \leq \frac{1}{\epsilon^2}\left[\frac{1}{2\theta+1} n^{-(1-2\theta)} + n^{-2(1-\theta)}\right]$$

则当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \epsilon\right) = 0,$$

即得 $\frac{S_n}{n}$ 依概率收敛于 0

(2)【思路一】下面验证林德贝格 (Lindeberg) 条件成立，即对任意 $\tau > 0$，当 $n \to \infty$ 时，

$$\frac{1}{\operatorname{Var}(S_n)} \sum_{i=1}^{n} E X_i^2 I\left(|X_i| \geq \tau \sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}\right) \to 0$$

事实上，由假设知，对于 $1 \leq i \leq n, |X_i| \leq n^{\theta}$，并且

$$\frac{n^{\theta}}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \leq \sqrt{\frac{2\theta+1}{n}}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\theta}}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} = \mathbf{0}$. 于是，对较大的 n 以及 $1 \leq i \leq n$,

$$I\left(|X_i| \geq \tau \sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}\right) = 0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Var}(S_n)} \sum\limits_{i=1}^{n} E X_i^2 I\left(|X_i| \geq \tau \sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}\right) = 0$，所以 $\frac{s_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$

【思路二】下面验证李雅普诺夫 (Lyapunov) 条件成立，即当 $n \to \infty$ 时

$$\frac{1}{(\operatorname{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^{n} E X_i^4 \to 0$$

事实上，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} E X_i^4 &= \sum_{i=1}^{n} i^{4\theta} = \sum_{i=0}^{n-1} i^{4\theta} + n^{4\theta} \\
&\leq \int_0^n x^{4\theta} \mathrm{d}x + n^{4\theta} = \frac{1}{4\theta+1} n^{4\theta+1} + n^{4\theta}
\end{aligned}$$

于是，

$$\frac{1}{(\operatorname{Var}(S_n))^2} \sum_{i=1}^{n} E X_i^4 \leq (2\theta+1)^2 \left[\frac{1}{4\theta+1} n^{-1} + n^{-2}\right]$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\operatorname{Var}(S_n))^2} \sum\limits_{i=1}^{n} E X_i^4 = 0$，所以

$$\frac{s_n}{\sqrt{\operatorname{Var}(S_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

2.【参考解析】：(1) 记 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合分布函数为 $F_{X_{n1}X_{nn}}(x,y)$，若 $x < y$，则

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{X_{n1}X_{nn}}(x,y) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{X}_{n1} \leq x, \boldsymbol{X}_{nn} \leq y\right) \\
&= P\left(X_{nn} \leq y\right) - P\left(X_{n1} > x, X_{nn} \leq y\right) \\
&= P\left(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \cdots, X_n \leq y\right) \\
&- P\left(x < X_1 \leq y, x < X_2 \leq y, \cdots, x < X_n \leq y\right) \\
&= [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})]^n - [\boldsymbol{F}(y) - \boldsymbol{F}(x)]^n
\end{aligned}$$

若 $x \geq y$ ，则

$$F_{X_{n1}X_{nn}}(x,y) = P\left(X_{n1} \leq x, X_{nn} \leq y\right) \\ = P\left(X_{nn} \leq y\right) = [F(y)]^n$$

故 $(\boldsymbol{X}_{n1}, \boldsymbol{X}_{nn})$ 的联合密度函数为

$$f_{1n}(x,y) = \begin{cases} n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2} f(x) f(y) & ,x < y \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

【思路一】记 $v = x_{nn} - x_{n1}$ ，则

$$\begin{cases} u = x_{nn} + x_{n1} \\ v = x_{nn} - x_{n1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n1} = \dfrac{u-v}{2} \\ x_{nn} = \dfrac{u+v'}{2} \end{cases}$$

该变换雅可比行列式 $J = \dfrac{\partial\left(x_{n1}, x_{nn}\right)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2}$ ，则由 (X_{n1}, X_{nn}) 的联合密度得 (U,V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u,v) = f_{1n}\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)|J|$$

则 $U = X_{nn} + X_{n1}$ 的密度函数

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)\mathrm{d}v = \\ \begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2}\displaystyle\int_0^u v^{n-2}dv = \dfrac{n}{2}u^{n-1}, 0 < u < 1 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}\displaystyle\int_0^{2-u} v^{n-2}dv = \dfrac{n}{2}(2-u)^{n-1}, 1 < u < 2 \\ 0,\ \text{其他} \end{cases}$$

【思路二】求 U 的分布函数 $F_U(u)$. 显然 U 的取值范围是 $[0,2]$. 所以，当 $u \leq 0$ 时，$F_U(u) = P(U \leq u) = 0$ ；当 $u \geq 2$ 时, $F_U(u) = 1$ ；当 $0 < u < 1$ 时，

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \iint_{x+y \leq u} f_{1n}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ = \int_0^{u/2}\mathrm{d}x \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}u^n$$

当 $1 < u < 2$ 时，

$$F_U(u) = P(U \leq u) = \iint_{x+y \leq u} f_{1n}(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ = \int_0^{u-1}\mathrm{d}x \int_x^1 n(n-1)(y-x)^{n-2}\,\mathrm{d}y \\ + \int_{u-1}^{u/2}\mathrm{d}x \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2}\,\mathrm{d}y \\ =1 - \frac{1}{2}(2-u)^n$$

故 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{X}_{nn}+\boldsymbol{X}_{n1}$ 的密度函数

$$f_U(u)=\begin{cases} nu^{n-1}/2 & ,0<u<1 \\ n(2-u)^{n-1}/2, 1<u<2 & \\ 0 & ，其他 \end{cases}$$