

Intra d'Analyse 1

TC/GIM/MM

Mardi 04/11/2025

Durée : 2h

Enseignant : EYIMI MINTO'O Azariel Paul

Les téléphones et les calculatrices graphiques sont interdits

Exercice 1

1) Pour tout réel $x \neq 1$, si on pose $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$, alors on a $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$.
Calculer alors $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^n \left(2^{\frac{k}{2^k}}\right)$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2

1) Dans \mathbb{R} , factoriser le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$.

2) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$.

a) Trouver les réels a , b et c tels que :

$$\frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10} = \frac{a}{k+5} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n .

2) Pour tout entier $k \in [0, n]$, on pose $P_n = \prod_{k=3}^n \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$.

Exprimer P_n en fonction de n et de factorielle n .

Exercice 3

1) Dans \mathbb{R} , effectuer la division euclidienne de $2x^2 - 9x - 13$ par $2x - 13$.

On pose $W_n = \sum_{p=0}^n \frac{2p^2 - 9p - 13}{(p+2)!}$. En déduire l'expression de W_n en fonction de n .

2) Calculer chacun des produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k+3}{2k}, \quad \prod_{k=1}^{2n} \frac{k}{2(n!)}, \quad \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - 1\right)^{k-1}.$$

Exercice 4

Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq -1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$t_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \text{ et } U_n = \sum_{k=1}^n t_k.$$

1) Calculer $(1-x)U_n$.

2) a) Lorsque $|x| < 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

b) Lorsque $|x| > 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.