TD – ANALYSE 1 – RETARDATAIRES – CPI-1 – TC – EIL – 2024/2025

Exercice 1 Dans chacun des cas, exprimer l'expression de la somme en fontion de n.

$$1) \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right), \qquad 2) \sum_{p=1}^{n}(2\sqrt{p}-\sqrt{p-1}-\sqrt{p+1})$$

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$.

1) Trouver les réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k}$.

2) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 3 Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2+k-2}$.

Exprimer V_n en fonction de n (utiliser le procédé de l'exercice 2 pour S_n).

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite arithmétique de raison r.
A l'aide d'une somme télescopique, montrer que : $\forall n \geq p,\ u_n = u_p + (n-p)r$.

Exercice 5 Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite de terme général u_n .

1. $u_n = \dfrac{\cos(e^n)}{n}$, 2. $u_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$, 3. $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$, 4. $u_n = \dfrac{2^n-1}{3^n+3}$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite réelle définie par : $\begin{cases} S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2+n}{3} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Calculer u_n et u_{n+1} en fonction de n.

3) Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.

Exercice 7 1) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Que dire de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$?

b) Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer U_n en fonction de n.

2) Soit la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = Z_n + U_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Calculer Z_1, Z_2 et Z_3.

b) En raisonnant par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ Z_n = 1 + n^2.$$

c) Etudier la monotonie de la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 8 Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{12} k(1-2k)$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} k^2$, $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.

Exercice 9 Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite de terme général u_n .

$$u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^i} \ ; \ u_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) .$$

Exercice 10 1) Trouver les réels a et b tels que : $\dfrac{2k+1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$, où $k \geq 1$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(2k+1)}{k(k+1)}$.

a) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$.

Exercice 1 Dans chacun des cas, déterminer le domaine de définition de la fonction f.

$$f(x) = \frac{x+5}{x+|x|},\quad f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}+\sqrt{x}},\quad f(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}.$$

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$$

1) Montrer que f est impaire.
2) Montrer que $f(x) = 2x^3 + x$.
3) Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π, et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

1) Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé (*rappel* : $\pi \approx 3,14$).
2) f est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$?
3) f est-elle dérivable en $\frac{\pi}{2}$?

Exercice 4 Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$, 2) $\lim\limits_{x\to1^+} \ln x . \ln\ln(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^3+x}$, 5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$, 16) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$
17) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\sin x}$, 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$, 9) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$, où $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a \neq b$.

Exercice 5 Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$. On pose $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln(x)$.
   (b) Etudier les variations de la fonction g
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution m sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (d) Dressez le tableau de variation de f.
3. Représenter $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé.

GROUPE EM GABON – UNIVERSITE
Ecole d'Ingénieurs de Libreville (EIL)

Année 2024/2025

RATTRAPAGE ANALYSE 1
EIL - TC-1
Spécial retardataires

Enseignant : *EYIMI MINTO'O EBANG Azariel*

Durée : $1h30mn$

Les Téléphones et les calculatrices graphiques sont interdits

Exercice 1 (sur 7 points)

1) Trouver les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}.$$

a et b

2) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+2k}$.

a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 2 (sur 8 points)

1) Trouver les réels a et b tels que :

$$\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$

2) Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

a) Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

b) La suite $(S_n)_{n \geq 2}$ est-elle convergente (justifier votre réponse) ?

Exercice 3 (sur 5 points)

Soit $(S_n)_{n \geq p}$ une suite réelle arithmétique de raison r.
A l'aide d'une somme télescopique, montrer que :

$$\forall n \geq p, \quad S_n = S_p + (n-p)r.$$

EM GABON **EIL CP I RATTRAPAGE L1 ALGEBRE 2 Durée 2h**

Prof : BAO.A

Exercice 1 (7 points)

On rappelle que les fonctions

- La restriction g de la fonction cos à $[0 \ , \pi]$ est une bijection de décroissante de bijection réciproque notée Arc cos (-cos)

- $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow IR$
  $x \longmapsto \ln(x)$
  est une bijection de bijection réciproque la fonction exp définie par exp (x) = e^x
- h est la restriction de la fonction ln à $[1, e^{\pi}]$

On considère la fonction f définie par f = g o ln où o est la composée

1° Définir f . Calculer f(1) et f (e^{π})

2° a) Démontrer que f est bijective

b) Définir la bijection réciproque f^{-1}

c) Calculer f^{-1} (1) et f^{-1} (-1)

Exercice 2 (13 points)

On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ Où a ∈ IR

1° Ecrire le plus simplement possible M_0^{2025} (M_0 exposant 2025)

2° a) Démontrer que le déterminant de M_a est égal à $(1-a^3)^2$

b) Pour quelles valeurs de a , M_a est –elle inversible

3° a) Démontrer que M_{-1} est inversible

b) Déterminer son inverse M_{-1}^{-1}

4° En utilisant ce qui précèdent, calculer le déterminant la matrice carrée d'ordre 4 ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

EM GABON *EIL CP I RA*

Prof : BAO.A

<u>Exercice</u> 1 (7 points)

On rappelle que les fonctions

- La restriction g de la fonction cos à $[0\ ,\pi\ ]$ est une bijection de décroissante de bijection réciproque notée Arc cos (-Cos)
- $\ln :]\,0,\ +\infty[\ \longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto \ln(x)$

  est une bijection de bijection réciproque la fonction exp définie par $\exp(x) = e^{x}$
- h est la restriction de la fonction ln à $[1, e^{\pi}]$

On considère la fonction f définie par $f = g \circ \ln$ où o est la composée

1° Définir f . Calculer f(1) et $f\,(e^{\pi})$

2° a) Démontrer que f est bijective

b) Définir la bijection réciproque f^{-1}

c) Calculer $f^{-1}\,(1)$ et $f^{-1}\,(-1)$

<u>Exercice</u> 2 (13 points)

On considère la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a \\ a & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ Où $a \in \mathbb{R}$

1° Ecrire le plus simplement possible M_0^{2025} (M_0 exposant 2025)

2° a) Démontrer que le déterminant de M_a est égal à $(1-a^3)^2$

b) Pour quelles valeurs de a , M_a est –elle inversible

3° a) Démontrer que M_{-1} est inversible

b) Déterminer son inverse M_{-1}^{-1}

4° En utilisant ce qui précèdent, calculer le déterminant la matrice carrée d'ordre 4 ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

GROUPE EM GABON – UNIVERSITE
Ecole d'Ingénieurs de Libreville (EIL)

Année 2024/2025

Rattrapage de Mathématiques 1
Analyse 1
EIL - GIM

Enseignant : EYIMI MINTO'O EBANG Azariel

***Durée :** 1h30mn*

Les Téléphones et les calculatrices graphiques sont interdits

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

1) Calculer $f(x+4)$, $f(x+6)$ et $f(x+8)$.
2) En déduire que f est périodique en précisant la période.

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π, et définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi & \text{si} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

1) Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé (*rappel* : $\pi \approx 3,14$).
2) f est-elle continue en $\frac{\pi}{2}$?
3) f est-elle dérivable en $\frac{\pi}{2}$?

Exercice 3

Calculer chacune des limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ $-\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 2} |x-2| \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$ $+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - \cos x}{2x + e^{\frac{1}{x}}}$

EM – GABON EIL 1 EXAMEN de RATTRAPAGE ALGEBRE 1 07 1 2025 durée 2h

Exercice 1 (5 points)

Soit A, B et C trois propositions .R, Q, S, U et T les propositions ci-dessous

R « $\overline{(A \Longrightarrow C)} \vee \overline{(B \Longrightarrow C)}$ », Q «$(A \vee B) \Longrightarrow C$ », S « $B \Longrightarrow \overline{A}$ » , U « $B \Longrightarrow C$ » et T « $(A \wedge B) \Rightarrow C$ »

1° En utilisant le tableau de vérité justifier que $\overline{A} \vee B$ équivaut $A \Longrightarrow B$

2° Exprimer T en fonction de S et U

3° Démontrer **sans utiliser le tableau de vérité** que R et Q sont contraires

Exercice 2 (7 Points)

Le point (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$. (P_1) désigne l'ensemble (P) privé des droites $(O,\vec{I})$ et$(O,\vec{J})$

On définit une relation $\mathcal{R}$ définie sur (P_1) par : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathcal{R}\ M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x{*}y' = x'{*}y$

1° Les points $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4.5 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont-ils en relation suivant $\mathcal{R}$? Justifier votre réponse

2° $\mathcal{R}$ est- elle réflexive ? Symétrique ? Antisymétrique ? et Transitive dans (P_1) Justifier votre réponse

3° $\mathcal{R}$ est – elle une relation d'

a) Equivalence ? Si oui, déterminer les classes d'équivalence

b) Ordre ? Si oui, l'ordre est- il total ou partiel

Justifier votre réponse

Exercice 3 (8 points)

Partie A

On considère les ensembles $A = \{a; b; 1\}$, $B = \{b; c; 1; 2\}$ et $C = \{a; 3\}$

Déterminer en extension

1° $C_{A\times B}^{(A/B)\times(B/A)}$ et $C_A^{A/B} \times C_B^{B/A}$

2° $C_{B\times C}^{(B/C)\times(C/B)}$ et $C_B^{B/C} \times C_C^{C/B}$

Partie B

Soit E et F deux ensembles quelconques non vides

Que peut-on dire de $C_{E\times F}^{(E/F)\times(F/E)}$ et $C_E^{E/F} \times C_F^{F/E}$ dans les cas ci-dessous

1° E et F sont disjoints

2° E est inclus dans F