

## Intra d'Analyse 1

TC/GIM/MM

Mardi 04/11/2025

Durée : 2h

Enseignant : EYIMI MINTO'O Azariel Paul

# Les téléphones et les calculatrices graphiques sont interdits

## Exercice 1

1) Pour tout réel  $x \neq 1$ , si on pose  $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ , alors on a  $f'(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ .

Calculer alors  $f'(\frac{1}{2})$ .

2) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n (2^{\frac{k}{2^k}})$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## Exercice 2

1) Dans  $\mathbb{R}$ , factoriser le polynôme  $P$  défini par :  $P(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ . ✓

2) Pour tout entier  $n \geq 0$ , on pose  $V_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$ .

a) Trouver les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$\frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10} = \frac{a}{k+5} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

b) En déduire l'expression de  $V_n$  en fonction de  $n$ .

2) Pour tout entier  $k \in [0, n]$ , on pose  $P_n = \prod_{k=3}^n \frac{1}{k^3 + 8k^2 + 17k + 10}$ .

Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$  et de factorielle  $n$ .

## Exercice 3

1) Dans  $\mathbb{R}$ , effectuer la division euclidienne de  $2x^2 - 9x - 13$  par  $2x - 13$ .

On pose  $W_n = \sum_{p=0}^n \frac{2p^2 - 9p - 13}{(p+2)!}$ . En déduire l'expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

2) Calculer chacun des produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{3k+3}{2k}, \quad \prod_{k=1}^{2n} \frac{k}{2(n!)}, \quad \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - 1\right)^{k-1}.$$

## Exercice 4

Pour tout réel  $x \neq 1$  et  $x \neq -1$  et pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$t_n = \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \text{ et } U_n = \sum_{k=1}^n t_k.$$

1) Calculer  $(1-x)U_n$ .

2) a) Lorsque  $|x| < 1$ , calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

b) Lorsque  $|x| > 1$ , calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .