EM GABON EIL CP I DEVOIR n° 2 FINAL L1 ALGEBRE 2 Durée 4h

Prof : BAO.A

Exercice 1 (7 points)

On rappelle que la fonction

- $\text{th} : \mathbb{R} \longrightarrow]-1\,,1[$

  $x \longmapsto \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$ est une bijection de bijection réciproque notée Argth

- $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto \ln(x)$ est une bijection de bijection réciproque la fonction exp définie par

$\exp(x) = e^x$

On considère la fonction f définie par f = th o ln où o est la composée

1° Définir f . Calculer f(1)

2° a) Démontrer que f est bijective

b) Définir la bijection réciproque f^{-1}

c) Calculer $f^{-1}(0)$

3° Démontrer que $e^{\text{Argth}(x)} = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 2 (8 points)

Partie A (6 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ où a , b et c sont des nombres réels deux à deux distincts

1° Démontrer que le déterminant de A (noté det(A)) vaut $(a-b)*(a-c)*(c-b)$

2° En déduire que A est inversible

3° Démontrer A^{-1} vaut $\begin{pmatrix} \dfrac{b*c}{(a+b)*(a+c)} & \dfrac{a*c}{(a+b)*(c-b)} & \dfrac{a*b}{(a-c)*(b-c)} \\ \dfrac{b+c}{(a-b)*(c-a)} & \dfrac{a+c}{(a-b)*(b-c)} & \dfrac{a+b}{(a-c)*(c-b)} \\ \dfrac{1}{(a-b)*(a-c)} & \dfrac{1}{(a-b)*(c-b)} & \dfrac{1}{(a-c)*(b-c)} \end{pmatrix}$

Partie B (Application numérique) (2 points)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Déterminer det(A) puis déduire A^{-1}

Exercice 3 (5 points)

On pose $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

1° Ecrire D^n en fonction de n où n est un entier naturel non nul

2° a) Justifier que P est inversible

b) En déduire la matrice inverse P^{-1}

3° a) Déterminer $P^{-1} * A * P$

b) En déduire une écriture de A en fonction de D ; P et P^{-1}

4° Ecrire A^n en fonction de n

EM – GABON | **EIL1 ALGEBRE 1 DEVOIR SURVEILLE N° 2 FINAL** | 29 – 11 - 2024 Durée 2h

Prof : **BAO**. Alassane

<u>Exercice</u> 1 (7 points)

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ par : $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}^*$, on a $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 0$

1° $\mathcal{R}$ est –elle réflexive ? Symétrique ? ~~Antisymétrique~~ ? et Transitive ? Justifier votre réponse dans chaque cas

2° $\mathcal{R}$ est –elle une relation

a) D'équivalence ? Si oui, déterminer une classe d'équivalence

b) D'ordre ? Si oui, l'ordre est-il total ou partiel ?

<u>Exercice</u> 2 (7 points)

<u>Partie</u> A

On considère les ensembles A = $\{1; 3\}$, B = $\{3; 4; 5\}$, E = {b ; 1 ; 3} et F = {b ; 3 ; 4 ; 5}

1° a)Déterminer $C_E^A \ \Delta \ C_F^B$ et $C_{E \Delta F}^{A \Delta B}$

b) Que peut –on en conclure ?

2° Déterminer $C_{E \times F}^{A \times B}$ et $C_E^A \times C_F^B$

<u>Partie</u> B

E et F sont deux ensembles finis quelconques. A et B sont deux sous-ensembles respectifs de E et F

Démontrer que

1° $A \times B \subset E \times F$

2° $C_E^A \times C_F^B \subset C_{E \times F}^{A \times B}$

<u>Exercice</u> 3 (6 points)

A partir des propositions A, B et C, on considère les propositions

R : « $[(A \Longrightarrow \overline{B}) \vee (B \Longrightarrow C)]$ » ; T : « $[A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)]$ » et S : « $(A \wedge B \wedge \overline{C})$ »

1° Les propositions R et T sont telles équivalentes ?

Justifier votre réponse de deux façons différentes

2° **Sans utiliser un tableau de vérité**

a) Justifier R et S sont contraires

b) Qu'en est - il de S et T ?