EM GABON EIL CP I DEVOIR n°1 INTRA L1 ALGEBRE 2 Durée 3h

Prof : **Mr BAO**

Exercice 1 (7 points)

On rappelle que

- La restriction de la fonction tan à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers IR notée $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto \tan(x)$

  On appelle Arctan la bijection réciproque

- Si $x \in \mathbb{R}$, E(x) est la partie entière de x le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x

  On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x - E(x)}$

1° Démontrer que f est une application

2° Justifier que

a) L'image directe de f est $[0, 1[$

b) $f(x+1) = f(x)$

c) f n'est ni injective ni surjective

3° a) Démontrer que la restriction g de la fonction Arctan o f à $[0, 1[$ est une bijection

b) Définir la bijection réciproque

c) Justifier que $g^{-1}(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ si x appartient à l'ensemble de départ de g^{-1}

Exercice 2 (7 points)

On considère les matrices A et B définies ci-dessous

$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ -2 & -7 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 14 & -8 & -1 \\ -9 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

1° Calculer A*B. Conclure. En déduire $(A * B)^n$ où n est un entier naturel non nul

2° Calculer déterminant de A .En déduire sans les calculer ceux de B et A^n

3° Trouver les réels x , y et z en utilisant les matrices

$$\begin{cases} 14x - 8y - z = 29 \\ -9x + 5y + z = -18 \\ 7x - 4y - z = 14 \end{cases}$$

NB : det(E*F) = det(E) * det(F)

Exercice 3 (6 points)

I_2 est la matrice identité d'ordre 2 et n est un entier naturel non nul

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et B telles que $A = B + I_2$

1° Justifier que $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

2° Calculer B^2 puis B^n pour $n \geq 2$

3° a) Démontrer que $A^n = I_2 + n*B$ pour tout entier naturel non nul

b) En déduire A^n en fonction de n