2021 AMC12B Solutions

ANSWER KEYS

DBACD ACBDE DDDAD ABABA DBAAE

1. How many integer values of x satisfy $|x| < 3\pi$?

   有多少个整数值满足 $|x| < 3\pi$ ？

   (A) 9

   (B) 10

   (C) 18

   (D) 19

   (E) 20

【答案】D
【一级知识点】代数
【二级知识点】绝对值定义
【解析】 $-9 \le x \le 9$，共 19 个解

2. At a math contest, 57 students are wearing blue shirts, and another 75 students are wearing yellow shirts. The 132 students are assigned into 66 pairs. In exactly 23 of these pairs, both students are wearing blue shirts. In how many pairs are both students wearing yellow shirts?

   在一次数学竞赛中，57 名学生穿着蓝色衬衫，另外 75 名学生穿着黄色衬衫。132 名学生被分成了 66 对。这其中恰好有 23 对，每对的两名学生都穿着蓝色衬衫。问两名学生都穿着黄色衬衫的对有多少个?

   (A) 23

   (B) 32

   (C) 37

   (D) 41

   (E) 64

【答案】B
【一级知识点】代数
【二级知识点】基本应用题
【解析】23 对蓝色衬衫共有 46 人，剩下 11 个穿蓝色衬衫的同学与 11 个穿黄色衬衫的人组队，故 2 人都是黄色衬衫的有 $\dfrac{75-11}{2}=32$ 。

3. Suppose

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+x}}}=\frac{144}{53}.$$

What is the value of x?

假设

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+x}}}=\frac{144}{53}.$$

问 x 的值是多少?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{7}{8}$

(C) $\frac{14}{15}$

(D) $\frac{37}{38}$

(E) $\frac{52}{53}$

【答案】A

【一级知识点】代数

【二级知识点】方程求解

【解析】将常数移至等号右侧，然后两边取倒数，如此重复数次后即可得到答案。

4. Ms. Blackwell gives an exam to two classes. The mean of the scores of the students in the morning class is 84, and the afternoon class's mean score is 70. The ratio of the number of students in the morning class to the number of students in the afternoon class is $\frac{3}{4}$. What is the mean of the scores of all the students?

Blackwell 女士在两个班进行考试。上午班学生的平均分是 84，而下午班的平均分是 70。上午班学生人数与下午班学生人数之比是 $\frac{3}{4}$。问所有学生的平均分是多少?

(A) 74

(B) 75

(C) 76

(D) 77

(E) 78

【答案】C

【一级知识点】代数

【二级知识点】平均数应用题

【解析】假设上午班 3 人，下午班 4 人，则平均数为 $\frac{3\times84+4\times70}{7}=76$。

5. The point $P(a,b)$ in the xy-plane is first rotated counterclockwise by 90° around the point $(1,5)$ and then reflected about the line $y=-x$. The image of P after these two transformations is at $(-6,3)$. What is $b-a$?

xy 坐标平面中的点 $P(a,b)$ 首先绕着点 $(1,5)$ 逆时针旋转 90°，然后沿直线 $y=-x$ 反射。经过这两次变换后 P 的影像是点 $(-6,3)$。问 $b-a$ 是多少?

(A) 1

(B) 3

(C) 5

(D) 7

(E) 9

【答案】D
【一级知识点】坐标系
【二级知识点】一次函数，几何变换

【解析】利用复数可知，P 旋转后的坐标是 $1+5i+i\left(a+bi-\left(1+5i\right)\right)=\left(6-b\right)+\left(4+a\right)i$，

反射后的坐标为 $\left(-\left(4+a\right),-\left(6-b\right)\right)$，从而解得 $a=2,b=9$。

6. An inverted cone with base radius 12 cm and height 18 cm is full of water. The water is poured into a tall cylinder whose horizontal base has a radius of 24 cm. What is the height in centimeters of the water in the cylinder?

一个底部半径为 12 厘米，高度为 18 厘米的倒置圆锥体中充满了水。将水倒入一个水平底部半径为 24 厘米的高圆柱体中。问圆柱体中水的高度是多少厘米?

(A) 1.5

(B) 3

(C) 4

(D) 4.5

(E) 6

【答案】A
【一级知识点】几何
【二级知识点】圆锥圆柱体积

【解析】根据体积公式 $\frac{12^2\times18\pi}{3}=24^2\times height\times\pi$，解方程即得。

7. Let $N = 34 \cdot 34 \cdot 63 \cdot 270$. What is the ratio of the sum of the odd divisors of N to the sum of the even divisors of N?

令 $N = 34 \cdot 34 \cdot 63 \cdot 270$。$N$ 的奇约数之和与 N 的偶约数之和的比值是多少?

(A) $1:16$

(B) $1:15$

(C) $1:14$

(D) $1:8$

(E) $1:3$

【答案】C
【一级知识点】数论
【二级知识点】因数和问题

【解析】回顾因数和公式，若 $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$，则它的所有正因子的和为

$$\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{e_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{e_2}\right)\cdots\left(1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{e_k}\right).$$

本题中，$N = 2^3 3^5 5^1 7^1 17^2$，奇约数和偶数约数只与质因数分解中是否有 2 有关，因此偶数约数和为 $S_{even} = \left(2^1 + 2^2 + 2^3\right)(\cdots)$，奇数约数和为 $S_{odd} = \left(2^0\right)(\cdots)$，故比值为 $1:14$。

8. Three equally spaced parallel lines intersect a circle, creating three chords of lengths 38, 38, and 34. What is the distance between two adjacent parallel lines?

三条等间距的平行线与一个圆相交，形成三条长度分别为 38，38 和 34 的弦。问相邻的两条平行线之间的距离是多少?

(A) $5\frac{1}{2}$

(B) 6

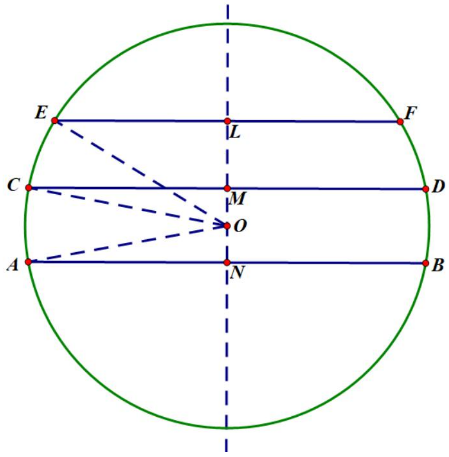
(C) $6\frac{1}{2}$

(D) 7

(E) $7\frac{1}{2}$

【答案】B
【一级知识点】几何
【二级知识点】圆中的弦长计算，垂径定理
【解析】过圆心 O 向 3 条平行的弦 AB, CD, EF 作垂线，垂足分别为 N, M, L。利用对称性可知 $OM = ON$。假设 $LM = MN = x$，$OA = OC = OE = y$，则根据勾股定理可以得到方

程组$\begin{cases}\left(x+\dfrac{x}{2}\right)^2+17^2=y^2\\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2+19^2=y^2\end{cases}$，求解方程可得$x=6$。



9. What is the value of

$$\frac{\log_2 80}{\log_{40} 2}-\frac{\log_2 160}{\log_{20} 2}?$$

算式

$$\frac{\log_2 80}{\log_{40} 2}-\frac{\log_2 160}{\log_{20} 2}$$

的值是多少?

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{5}{4}$

(D) 2

(E) $\log_2 5$

【答案】D

【一级知识点】代数

【二级知识点】对数基本运算

【解析】观察到分子分母底数不同，从而想到利用换底公式的推论$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$，我们可得$\dfrac{\log_2 80}{\log_{40} 2}-\dfrac{\log_2 160}{\log_{20} 2}=\log_2 80\cdot\log_2 40-\log_2 160\cdot\log_2 20$。设$\log_2 5=x$，拆分可得

$\log_2(16\cdot5)\cdot\log_2(8\cdot5)-\log_2(32\cdot5)\cdot\log_2(4\cdot5)=(4+x)(3+x)-(5+x)(2+x)=2$。

10. Two distinct numbers are selected from the set $\{1,2,3,4,\ldots,36,37\}$ so that the sum of the remaining 35 numbers is the product of these two numbers. What is the difference of these two numbers?

从集合 $\{1,2,3,4,\ldots,36,37\}$ 中选出两个不同的数，使得剩下 35 个数的和是选出的两个数的乘积。问这两个数的差是多少?

(A) 5

(B) 7

(C) 8

(D) 9

(E) 10

【答案】E
【一级知识点】数论
【二级知识点】不定方程，SFFT
【解析】根据题意，得到方程 $\frac{37\cdot 38}{2}-x-y=xy$，这是典型的可以利用 SFFT（配长方形）求解的不定方程，从而有 $(x+1)(y+1)=19\cdot 37+1=2^6\cdot 11$，因为 $1\le x.y\le 37$,从而经过尝试可得 $(x+1)(y+1)=22\cdot 32$ 是唯一满足条件的，因此差是 10。

11. Triangle ABC has $AB=13$, $BC=14$, and $AC=15$. Let P be the point on $\overline{AC}$ such that $PC=10$. There are exactly two points D and E on line BP such that quadrilaterals $ABCD$ and $ABCE$ are trapezoids. What is the distance DE?

在三角形 ABC 中，$AB=13$，$BC=14$，并且 $AC=15$。设 P 是 $\overline{AC}$ 上一点，满足 $PC=10$。在直线 BP 上恰好有两点 D 和 E，使得四边形 $ABCD$ 和 $ABCE$ 是梯形。问 DE 的长度是多少?

(A) $\frac{42}{5}$

(B) $6\sqrt{2}$

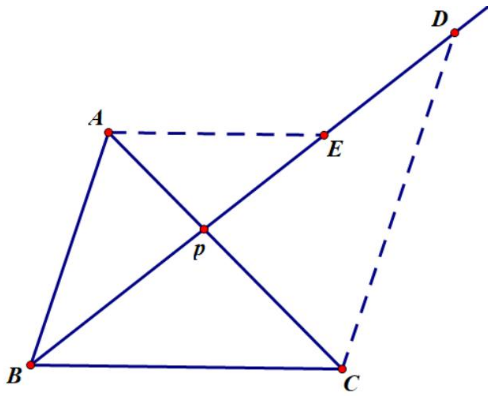
(C) $\frac{84}{5}$

(D) $12\sqrt{2}$

(E) 18

【答案】D
【一级知识点】几何
【二级知识点】相似线段计算
【解析】典型的相似型问题，首先作图，易知 D 和 E 分别是过 A 和 C 的与 BC 和 BA 平行的直线与 BP 的交点。利用 $\triangle ABP\sim\triangle DCP$，$DP/BP=PC/PA=2$，同理有

$PE/PB = AP/CP = 1/2$，从而得到 $DE = \dfrac{3}{2}BP$。利用 Stewart 定理（或者余弦定理）可以求得 $BP^2 = \dfrac{1}{3}\cdot 14^2 + \dfrac{2}{3}13^2 - 5\cdot 10 = 128$，即 $DE = \dfrac{3}{2}\cdot 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$。



12. Suppose that S is a finite set of positive integers. If the greatest integer in S is removed from S, then the average value (arithmetic mean) of the integers remaining is 32. If the least integer in S is *also* removed, then the average value of the integers remaining is 35. If the greatest integer is then returned to the set, the average value of the integers rises to 40. The greatest integer in the original set S is 72 greater than the least integer in S. What is the average value of all the integers in the set S?

假设 S 是正整数的有限集合。如果把 S 中最大的整数从 S 中移除，则其余的整数的（算术）平均值为 32。如果把 S 中的最小整数也移除，则其余的整数的平均值为 35。如果又把最大的整数加回到集合中，则整数的平均值上升到 40。原来集合 S 中最大的整数比 S 中最小的整数大 72。问集合 S 中所有整数的平均值是多少？

(A) 36.2

(B) 36.4

(C) 36.6

(D) 36.8

(E) 37

【答案】D
【一级知识点】代数
【二级知识点】线性方程组求解
【解析】设数字和、最大整数、最小整数、元素个数分别为 S, x, y, n，则可以得到方程

$$\begin{cases} S - x = 32(n-1) \\ S - y = 40(n-1) \\ S - x - y = 35(n-2) \\ x - y = 72 \end{cases}$$

1-2+4 式可得 $n = 10$，1+2-3 式可得 $S = 37n - 2 = 368$。

13. How many values of θ in the interval $0 < \theta \le 2\pi$ satisfy

$$1 - 3\sin\theta + 5\cos 3\theta = 0?$$

在区间 $0 < \theta \le 2\pi$ 中有多少个 θ 值满足

$$1 - 3\sin\theta + 5\cos 3\theta = 0?$$

(A) 2

(B) 4

(C) 5

(D) 6

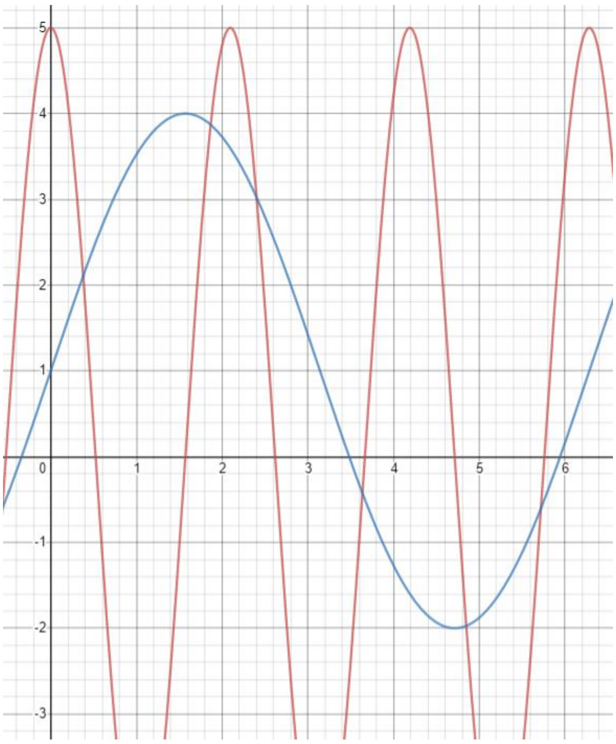
(E) 8

【答案】D

【一级知识点】代数

【二级知识点】三角函数图像

【解析】观察方程，发现并不能用恒等变换或者复数来求解方程，因此考察内容为三角函数图像，可以看成 2 个三角函数的交点问题，即 $5\cos 3x = 1 + 3\sin x$，简单画出图像得 6 交点。



14. Let $ABCD$ be a rectangle, and let $\overline{DM}$ be a segment perpendicular to the plane of $ABCD$. Suppose that $\overline{DM}$ has integer length, and the lengths of $\overline{MA}$, $\overline{MC}$, and $\overline{MB}$ are consecutive odd positive integers (in this order). What is the volume of pyramid $MABCD$?

$ABCD$ 是一个矩形，而 $\overline{DM}$ 是垂直于平面 $ABCD$ 的线段。假设 $\overline{DM}$ 的长度为整数，并且 $\overline{MA}$，$\overline{MC}$ 和 $\overline{MB}$ 的长度是连续的正奇数（依此顺序）。问棱锥 $MABCD$ 的体积是多少？

(A) $24\sqrt{5}$

(B) 60

(C) $28\sqrt{5}$

(D) 66

(E) $8\sqrt{70}$

【答案】A

【一级知识点】几何，数论

【二级知识点】空间勾股定理，不定方程

【解析】假设 $DM=a, DA=BC=x, AB=CD=y$，则根据题意可知

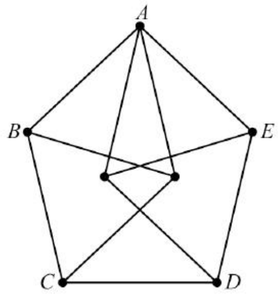
$$MA^2=a^2+x^2=(z-2)^2, MC^2=a^2+y^2=z^2, MB^2=a^2+x^2+y^2=(z+2)^2.$$

求解方程组,目标是因式分解。利用 1+2-3 式可得 $a^2=z^2-2z-3=z^2-8z=(z-4)^2-16$，

根据平方差可得 $(z-4+a)(z-4-a)=16$，由于 $a\geq 1$，从而 $(z-4+a)(z-4-a)=8\cdot 2$，

解得 $z=9, a=3$，代入可得 $x=\sqrt{40}, y=\sqrt{72}$，计算体积为 $\dfrac{xya}{3}=24\sqrt{5}$.

15. The figure below is constructed from 11 line segments, each of which has length 2. The area of pentagon $ABCDE$ can be written as $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, where m and n are positive integers. What is $m+n$?



上图由11条线段构成，每条线段的长度都是2。五边形 $ABCDE$ 的面积可以写成 $\sqrt{m}+\sqrt{n}$，其中 m 和 n 是正整数。问 $m+n$ 是多少？

(A) 20

(B) 21

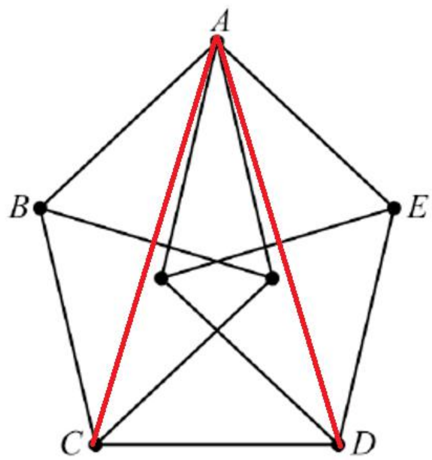
(C) 22

(D) 23

(E) 24

【答案】D
【一级知识点】几何
【二级知识点】多边形面积
【解析】观察图形，发现图中有很多正三角形，利用对称性进行分割，讲五边形化成 3 部分。

其中 $[ABC]=[ADE]=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$；$AC=AD=2\sqrt{3}$，利用勾股定理可知A到CD的距离为 $\sqrt{12-1}=\sqrt{11}$，从而 $[ADE]=\sqrt{11}$。



16. Let $g(x)$ be a polynomial with leading coefficient 1, whose three roots are the reciprocals of the three roots of $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, where $1<a<b<c$. What is $g(1)$ in terms of a,b, and c?

设 $g(x)$ 是一个首项系数为 1 的多项式，它的三个根是 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的三个根的倒数，其中 $1<a<b<c$。问 $g(1)$ 如何用 a,b 和 c 来表示？

(A) $\dfrac{1+a+b+c}{c}$

(B) $1+a+b+c$

(C) $\dfrac{1+a+b+c}{c^2}$

(D) $\dfrac{a+b+c}{c^2}$

(E) $\dfrac{1+a+b+c}{a+b+c}$

【答案】A

【一级知识点】代数

【二级知识点】多项式与韦达定理

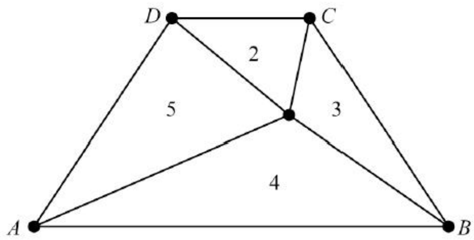
【解析】设 $f(x)$ 的三个根为 r,s,t，则根据韦达定理可知

$$\begin{aligned}&r+s+t=-a\\&rs+rt+st=b.\\&rst=-c\end{aligned}$$

根据题意，$g(x)$ 以 $\frac{1}{r},\frac{1}{s},\frac{1}{t}$ 为根，从而可以假设 $g(x)=\left(x-\frac{1}{r}\right)\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{t}\right)$，计算可得

$$g(1)=\frac{(r-1)(s-1)(t-1)}{rst}=\frac{rst-(rs+st+rt)+(r+s+t)-1}{rst}==\frac{1+a+b+c}{c}。$$

17. Let $ABCD$ be an isosceles trapezoid having parallel bases $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ with $AB > CD$. Line segments from a point inside $ABCD$ to the vertices divide the trapezoid into four triangles whose areas are 2, 3, 4, and 5 starting with the triangle with base $\overline{CD}$ and moving clockwise as shown in the diagram below. What is the ratio $\dfrac{AB}{CD}$?



在 $ABCD$ 等腰梯形中，$\overline{AB}$ 与 $\overline{CD}$ 是平行的底边，并且 $AB > CD$。从 $ABCD$ 内一点到其各顶点的线段将梯形分成了四个三角形，从底边为 $\overline{CD}$ 的三角形开始，沿顺时针方向，面积分别为 2，3，4 和 5，如上图所示。问比值 $\dfrac{AB}{CD}$ 是多少？

(A) 3

(B) $2+\sqrt{2}$

(C) $1+\sqrt{6}$

(D) $2\sqrt{3}$

【答案】B

【一级知识点】几何

【二级知识点】chasing，面积计算

【解析】假设 $CD = x$ 以及 $AB = y$. 则根据上下两个三角形的面积为 2 和 4 可知它们的高分别为 $\frac{4}{x}$ 和 $\frac{8}{y}$，从而可以根据梯形的面积公式，得到

$$\frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{4}{x}+\frac{8}{y}\right)=14$$

求解方程可以得到 $\frac{y}{x}$。

（注：本题的难点在于 3 和 5 的面积其实是与解题不相关的）

18. Let z be a complex number satisfying

$$12|z|^2 = 2|z+2|^2 + |z^2+1|^2 + 31.$$

What is the value of $z + \frac{6}{z}$?

假设复数 z 满足

$$12|z|^2 = 2|z+2|^2 + |z^2+1|^2 + 31。$$

问 $z + \frac{6}{z}$ 的值是多少?

(A) -2

(B) -1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

(E) 4

【答案】A

【一级知识点】代数

【二级知识点】复数模长运算，共轭复数

【解析】考虑到复数的模长平方可以写成共轭复数的乘积，即 $|z|^2 = z\overline{z}$，代入化简可得

$$12z\overline{z} = 2(z+2)(\overline{z}+2) + (z^2+1)(\overline{z}^2+1) + 31 \Leftrightarrow z^2\overline{z}^2 - 10z\overline{z} + z^2 + \overline{z}^2 + 4z + 4\overline{z} + 40 = 0$$

此时如果用代数表示展开，会是一个比较复杂的 4 此方程，因此根据对称性可以考虑因式分解或者配方，仔细观察，发现可将 40 进行拆分，得到

$z^2\overline{z}^2 - 12z\overline{z} + 36 + z^2 + \overline{z}^2 + 2z\overline{z} + 4z + 4\overline{z} + 4 = 0 \Leftrightarrow (z\overline{z}-6)^2 + (z+\overline{z}+2)^2 = 0$，解得 $z = -1 + \sqrt{5}i$，从而 $z + \frac{6}{z} = -2$。

19. Two fair dice, each with at least 6 faces, are rolled. On each face of each die is printed a distinct integer from 1 to the number of faces on that die, inclusive. The probability of rolling a sum of 7 is $\frac{3}{4}$ of the probability of rolling a sum of 10, and the probability of rolling a sum of 12 is $\frac{1}{12}$. What is the least possible number of faces on the two dice combined?

抛掷两个均匀的骰子，每个骰子都至少有 6 个面。就每个骰子而言，每个面上都印有一个不同的整数，取值分别是从 1 开始到该骰子面数之间的那些整数。两个骰子掷出的数总和为 7 的概率是掷出的数总和为 10 的概率的 $\frac{3}{4}$，并且掷出的数总和为 12 的概率是 $\frac{1}{12}$。问两个骰子面数之和的最小可能值是多少？

(A) 16

(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

【答案】B

【一级知识点】组合计数

【二级知识点】概率计算，概率反推

【解析】假设 2 个骰子的面数分别是 a,b，易知扔出 7 的可能情况为 6 种，由题意知扔出 10 的可能情况为 $6\cdot\frac{4}{3}=8$ 种，即 $x+y=10\left(1\le x\le a,1\le y\le b\right)$ 共有 8 组解，这意味着 a,b 中有一个数为 8，另一个数至少是 9，不妨设 $a=8,b\ge 9$。此时 2 个骰子扔出 12 的概率为 $\frac{6}{ab}\left(if\ b=9\right)$，$\frac{7}{ab}\left(if\ b=10\right)$，$\frac{8}{ab}\left(if\ b\ge 11\right)$，求解可知 $b=9$ 满足条件。

20. Let $Q(z)$ and $R(z)$ be the unique polynomials such that

$$z^{2021}+1=(z^2+z+1)Q(z)+R(z)$$

and the degree of R is less than 2. What is $R(z)$?

设 $Q(z)$ 和 $R(z)$ 是满足

$$z^{2021}+1=(z^2+z+1)Q(z)+R(z)$$

以及 R 的次数小于 2 的唯一一组多项式。问 $R(z)$ 是多少？

(A) $-z$

(B) -1

(C) 2021

(D) $z+1$

(E) $2z+1$

【答案】A
【一级知识点】代数
【二级知识点】因式分解，多项式除法

【解析】z^2+z+1 并不是一个易于处理的除数，但是它作为 z^3-1 的一个因子，我们可以优先考试 z^3-1，根据同余运算法则 $z^3\equiv 1\left(\bmod z^3-1\right)$，进一步计算可知 $z^{2021}+1\equiv\left(z^3\right)^{673}z^2+1\equiv z^2+1\left(\bmod z^3-1\right)$，从而 $z^{2021}+1\equiv z^2+1\equiv -z\left(\bmod z^2+z+1\right)$。

21. Let S be the sum of all positive real numbers x for which

$$x^{2^{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}^{2^x}.$$

Which of the following statements is true?

设 S 是所有满足

$$x^{2^{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}^{2^x}.$$

的正实数 x 的和。问以下哪个论断正确？

(A) $S<\sqrt{2}$

(B) $S=\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{2}<S<2$

(D) $2\le S<6$

(E) $S\ge 6$

【答案】D
【一级知识点】代数
【二级知识点】指数对数运算，指对数函数性质
【解析】等式两边都是迭代的指数形式，因此考虑用对数进行化简，在两边都取以 2 对底的对数可得，$2^{\sqrt{2}}\log_2 x=2^x\log_2\sqrt{2}\Leftrightarrow\log_2 x=2^x\cdot\frac{1}{2}/2^{\sqrt{2}}=2^{x-1-\sqrt{2}}$，根据单调性和凹凸性可知 $f\left(x\right)=\log_2 x$ 与 $g\left(x\right)=2^{x-1-\sqrt{2}}$ 有 2 个交点（易知其中一个是 $x=\sqrt{2}$）。

代入部分特殊值，得到 $f\left(2\right)=1>2^{1-\sqrt{2}}=g\left(2\right),f\left(4\right)=2<2^{3-\sqrt{2}}=g\left(4\right)$，因此另一个交点必定位于 $\left(2,4\right)$ 之中，所以两个交点的横坐标之和在 $\left(2,6\right)$ 之间。

22. Arjun and Beth play a game in which they take turns removing one brick or two adjacent bricks from one "wall" among a set of several walls of bricks, with gaps possibly creating new walls. The walls are one brick tall. For example, a set of walls of sizes 4 and 2 can be changed into any of the following by one move: $(3,2)$, $(2,1,2)$, (4), $(4,1)$, $(2,2)$, or $(1,1,2)$.

Arjun plays first, and the player who removes the last brick wins. For which starting configuration is there a strategy that guarantees a win for Beth?

Arjun 和 Beth 玩一个游戏，他们轮流从一个由砖块组成，可能包括空隙的"墙"上移除一块砖或两块相邻的砖。这些墙的高度都和砖的高度一样。例如，一个由 4 块砖和 2 块砖组成的墙可以通过一次操作变为以下的一种构型：$(3,2)$，$(2,1,2)$，(4)，$(4,1)$，$(2,2)$ 或者 $(1,1,2)$。

Arjun 首先开始，谁取走最后一块砖谁将获胜。对于哪种起始的构型，Beth 可以有必胜策略？

(A) $(6,1,1)$

(B) $(6,2,1)$

(C) $(6,2,2)$

(D) $(6,3,1)$

(E) $(6,3,2)$

【答案】B

【一级知识点】组合

【二级知识点】两人策略游戏，对称性

【解析】称 k 块连在一起的砖为"k 连砖"。考虑到对称性，如果某构型中所有的 k 连砖都有偶数块，则该构型是是完全对称的，则先手必须，因为后手一定有办法利用对称性，拿走和先手拿走的砖对称的砖，故对于 $(6,1,1),(6,2,2)$ 的构型，Arjun 只要一开始拿走 6 连砖正中间的 2 块，则就形成了完全对称的 $(2,2,1,1),(2,2,2,2)$ 构型，从而 Arjun 必胜；对于 $(6,3,1),(6,3,2)$ 的构型，Arjun 只要一开始拿走 6 连砖中的 1 块或 2 块，则就形成了完全对称的 $(3,1,3,1),(3,2,3,2)$ 构型，从而 Arjun 必胜。因此根据排除法只有选项 B。

23. Three balls are randomly and independently tossed into bins numbered with the positive integers so that for each ball, the probability that it is tossed into bin i is 2^{-i} for $i = 1, 2, 3, \ldots$. More than one ball is allowed in each bin. The probability that the balls end up evenly spaced in distinct bins is $\frac{p}{q}$, where p and q are relatively prime positive integers. (For example, the balls are evenly spaced if they are tossed into bins 3, 17, and 10.) What is $p+q$?

将三个球随机并且相互独立地扔进用正整数编号的桶里，对于每个球而言，它被扔进编号为 i 的桶的概率是 2^{-i}，$i = 1, 2, 3, \ldots$。每个桶里可以有多于一个球。设三个球在不同的桶中并且桶的编号等距分布的概率为 $\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 是互质的正整数。(例如，如果球被扔进编号 3，17 和 10 的桶中，那么就认为是等距的。) 问 $p+q$ 是多少?

(A) 55

(B) 56

(C) 57

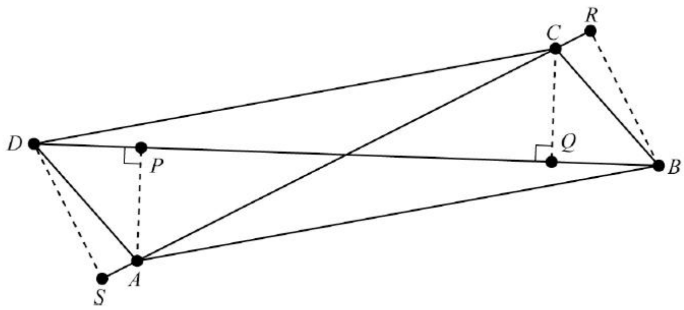
(D) 58

(E) 59

【答案】A
【一级知识点】代数
【二级知识点】多重求和符号运算
【解析】假设三个球在编号为 $a, a+i, a+2i$ 的三个箱子中，其中 $a \geq 1, i \geq 1$，则概率可以表示为 $\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^a}\frac{1}{2^{a+i}}\frac{1}{2^{a+2i}}\right) = \sum_{a=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{3a+3i}}\right) = \left(\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3a}}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3i}}\right) = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$，考虑到排列需要再乘以 6，所以答案为 $\frac{6}{49}$。

24. Let $ABCD$ be a parallelogram with area 15. Points P and Q are the projections of A and C, respectively, onto line BD; and points R and S are the projections of B and D, respectively, onto line AC. See the figure, which also shows the relative locations of these points.

Suppose $PQ = 6$ and $RS = 8$, and let d denote the length of $\overline{BD}$, the longer diagonal of $ABCD$. Then d^2 can be written in the form $m + n\sqrt{p}$, where m, n, and p are positive integers and p is not divisible by the square of any prime. What is $m + n + p$?



$ABCD$ 是面积为 15 的平行四边形。点 P 和 Q 分别是 A 和 C 在直线 BD 上的投影；点 R 和 S 分别是 B 和 D 在直线 AC 上的投影。如图所示，图中也显示了这些点的相对位置关系。

假设 $PQ = 6$，并且 $RS = 8$，用 d 表示 $ABCD$ 的较长对角线 $\overline{BD}$ 的长度。那么 d^2 可以写成 $m + n\sqrt{p}$ 的形式，其中 m，n 和 p 是正整数，p 不被任何质数的平方所整除。问 $m + n + p$ 的值是什么？

(A) 81

(B) 89

(C) 97

(D) 105

(E) 113

【答案】A

【一级知识点】几何

【二级知识点】相似，三角函数，四边形面积

【解析】设 AC 与 BD 的交点为 O，夹角为 θ，则根据垂直条件以及平行四边形对角线互相平分的特点，$OA = \dfrac{3}{\cos\theta}, OD = \dfrac{4}{\cos\theta}$,平行四边形的面积可以表示为

$\dfrac{AC \cdot BD \cdot \sin\theta}{2} = \dfrac{24\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{24\sin\theta}{1-\sin^2\theta} = 15$，解方程可得 $\sin\theta = \dfrac{-4+\sqrt{41}}{5}$，代入解得

$d^2 = \left(\dfrac{8}{\cos\theta}\right)^2 = 8\sqrt{41} + 32$。

25. Let S be the set of lattice points in the coordinate plane, both of whose coordinates are integers between 1 and 30, inclusive. Exactly 300 points in S lie on or below a line with equation $y = mx$. The possible values of m lie in an interval of length $\frac{a}{b}$, where a and b are relatively prime positive integers. What is $a + b$?

设 S 是坐标平面上横纵坐标都是从 1 到 30 之间（包括 1 和 30）的整数的格点组成的集合。在 S 中恰好有 300 个点在解析式是 $y = mx$ 的直线上或者位于该直线的下方。m 的可能值构成长度为 $\frac{a}{b}$ 的区间，其中 a 和 b 是互质的正整数。问 $a + b$ 是多少?

(A) 31

(B) 47

(C) 62

(D) 72

(E) 85

【答案】E

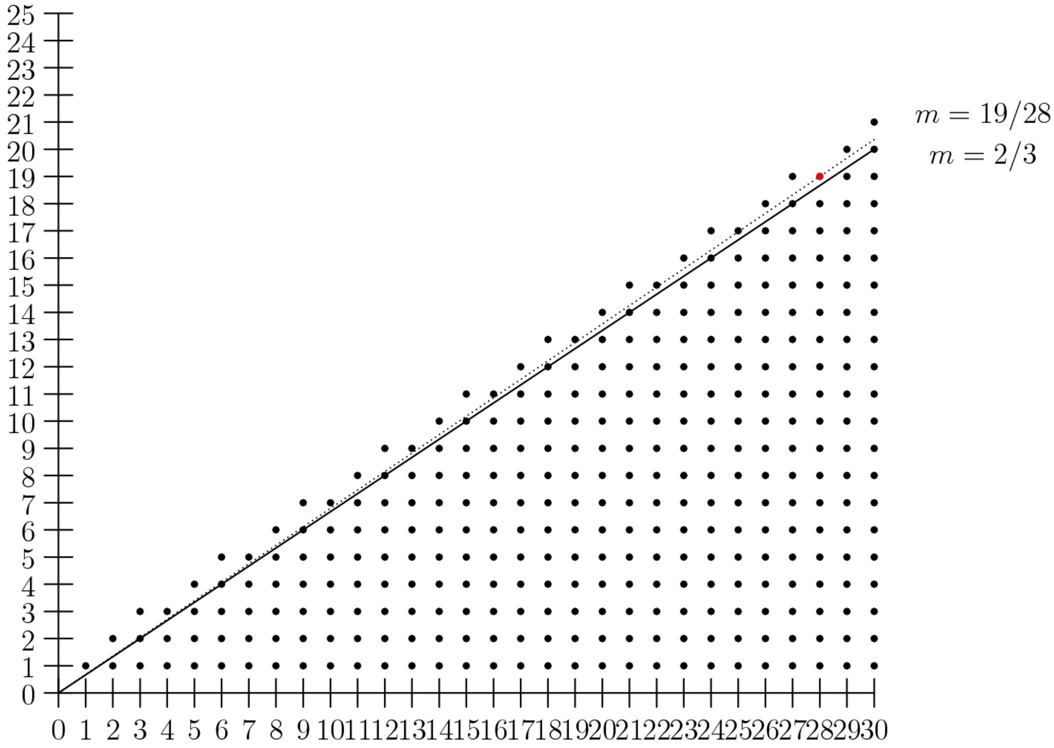
【一级知识点】数论，代数

【二级知识点】取整函数，一次函数，不等式

【解析】首先明确对于一条斜率为 k 的直线，易知位于 $y = kx$ 上以及其下方的点数为 $\sum_{i=1}^{30} \lfloor ik \rfloor$。为了找出满足条件的区间，我们首先需要找到一条直线能够满足题目的条件，因为在 $y = x$ 上及其线下方的点大约为一般，而 $300/450 = 2/3$，因此我们考虑直线 $y = \frac{2}{3}x$。

代入计算可得 $\sum_{i=1}^{30} \lfloor ik \rfloor = 0+1+2+2+3+4+4+...+28+28+29+30 = 300$，发现此直线正好满足 300 个点的要求，并且它上面有 10 个点，因此 $\frac{2}{3}$ 是最小值。

接下来考虑在取值范围内并且满足 $\frac{a}{b} > \frac{2}{3}$ 的最小有理数，即 $\frac{3b-2a}{3b}$ 的最小值，我们希望 $3b - 2a = 1$ 且 b 尽可能地大，尝试 $b = 28, 29, 30$ 可得 $b = 28$ 时，$\frac{a}{b} = \frac{19}{28}$ 满足条件。因此区间长度为 $\frac{19}{28} - \frac{2}{3} = \frac{1}{84}$。



$m = 19/28$
$m = 2/3$