美国 AMC 12 数学竞赛常用公式汇总

AMC12 是高中生可以参加的最高等级考试，难度也是最大的,晋级之后可以参加 AIME 考试,也就是美国高中数学邀请赛，冲刺更高的奖项。在 AMC12 和 AIME 比赛中获奖，将会让孩子在常规申请材料之外,向大学招生官展示美国人非常认可的高含金量筹码，相当于一只脚进入了名校。

为了帮助学生更好地备考 AMC12，我整理了一些 AMC12 常用公式供参考，帮助孩子提升解题速度。

几何板块

海伦公式

假设有一个三角形，边长分别为 $a,b,c,$，三角形的面积 S 可由以下公式求得：

$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$，而公式里的 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，称为半周长。

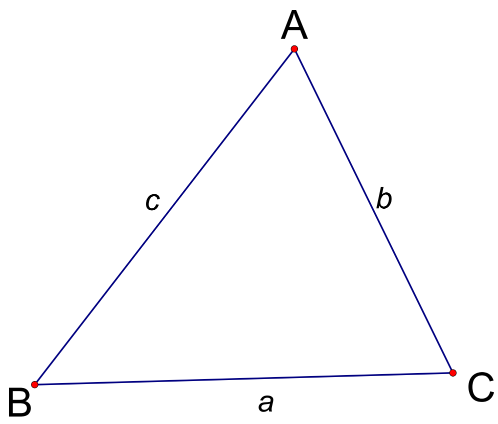


图1

为了证明该公式，海伦公式有多种变形，如：S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+b^2-c^2+2ab)[-(a^2+b^2-c^2-2ab)]}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$$

这个公式是一个求三角形面积的“万能公式”，基本上对于所有和三角形面积相关类型的题目，都可以尝试着使用这一公式去求解。

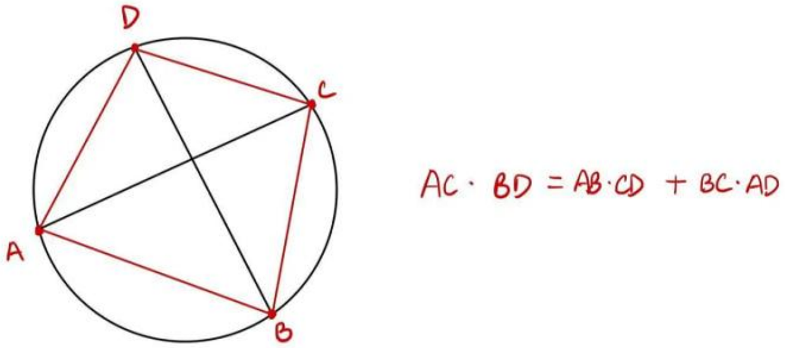
维维亚尼定理

维维亚尼(Viviani)定理说明：在等边三角形内任意一点 P 跟三边的垂直距离之和，等于三角

形的高。
这个定理可一般化为：等角多边形内任意一点 P 跟各边的垂直距离之和，是不变的，跟该点的位置无关。

设 ABC 为等边三角形，P 为其内部一点。设 s 为其边长，h 为高，l、m、n 为 P 到各边的距离。那么：S(ABC)=S(ABP)+S(ACP)+S(BCP),
sh/2=sl/2+sm/2+sn/2,
h=l+m+n

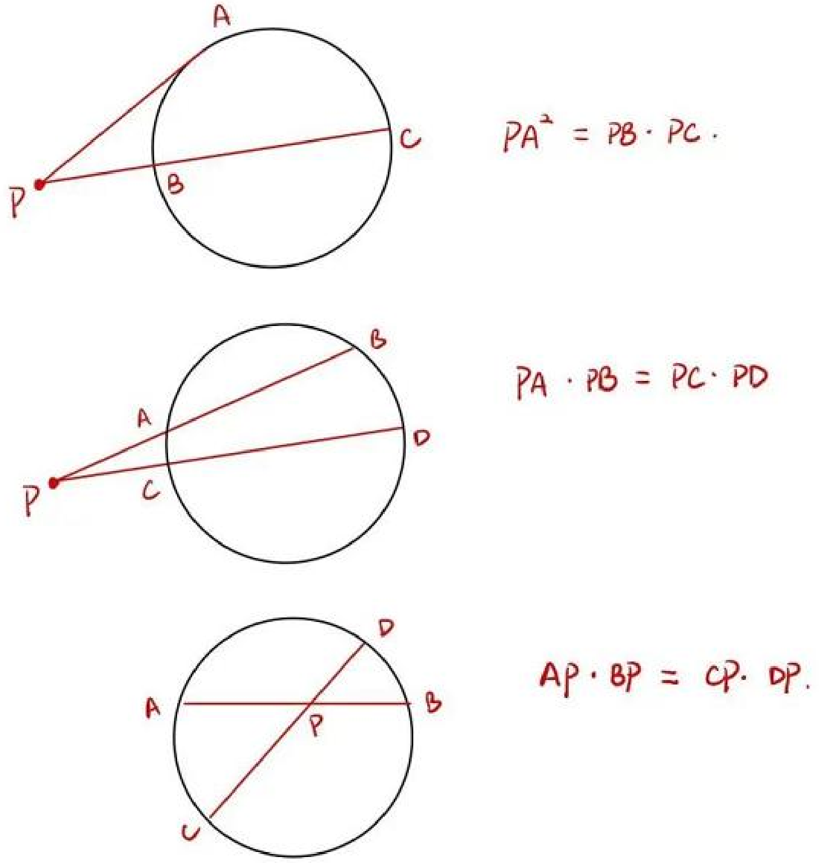
托勒密定理



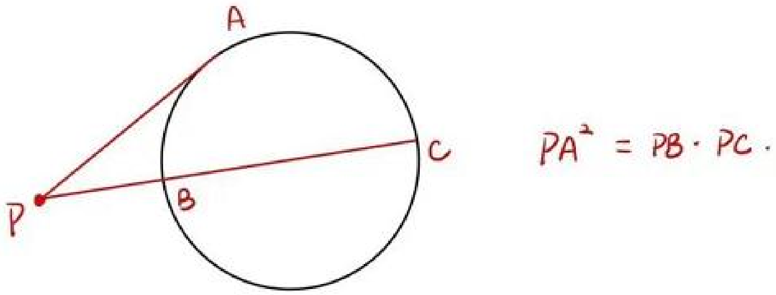
使用这个定理的时候一定别忘了要先证明四边形内接于一个圆。

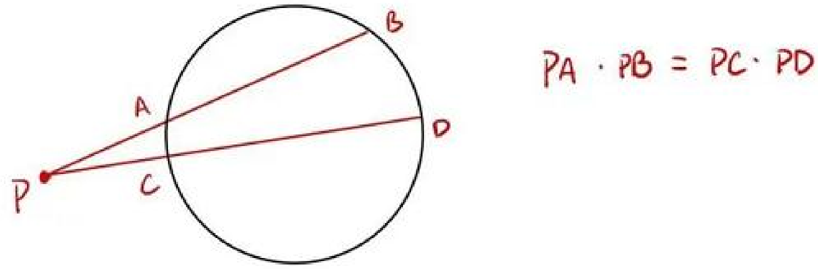
圆幂定理
整的圆幂定理其实包含了三个部分：切割线定理，割线定理 ，相交弦定理。

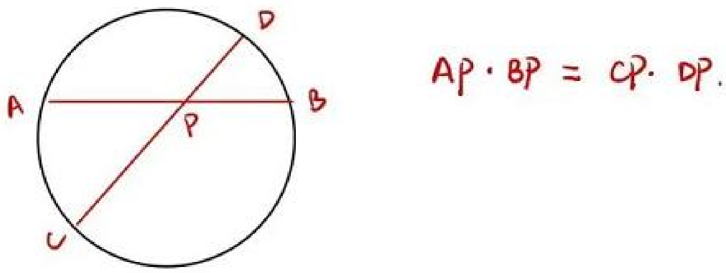
切割线定理



割线定理

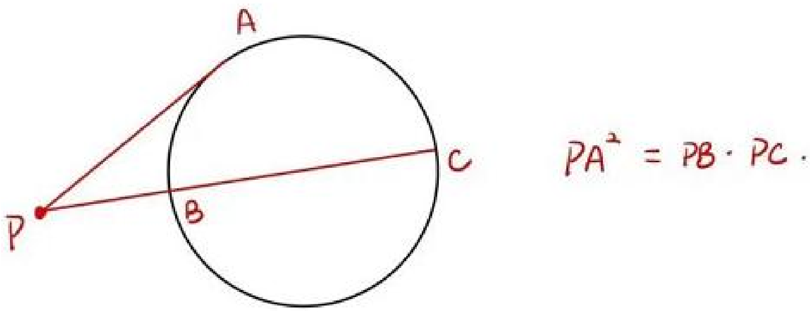


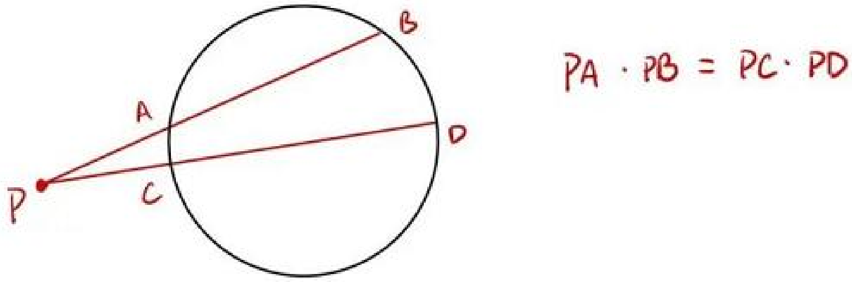


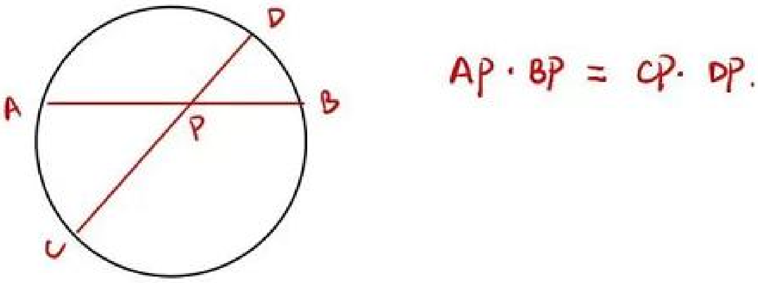


相交弦定理

或







代数版块

对数换底公式

当 a>0，a≠1，b>0，b≠1 且 N>0 时，

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \qquad (1)$$

称为对数换底公式，式中 1/logab 称为以 a 为底的对数换成以 b 为底的对数的转换模，特殊情形是

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

或

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

换底公式可以把一个对数化为以任何大于零而不等于 1 的数为底的对数
特别的当（1）中 a=10 时

$$\log_b N = \frac{\lg N}{\lg b}.$$

对数换底公式推论

$$\log_{\sqrt[n]{a^m}} b = \frac{n \cdot \log_a b}{m}$$

欧拉公式

复变函数中，e^(ix)=(cos x+isin x)称为欧拉公式，e 是自然对数的底，i 是虚数单位。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

棣莫弗定理

棣莫弗定理由法国数学家棣莫弗(1667-1754 年)创立。指的是设两个复数（用三角函数形式表示）Z1=r1(cos θ 1+isin θ 1），Z2=r2(cos θ 2+isin θ 2），则：Z1Z2=r1r2[cos（θ 1+ θ 2）+isin（θ 1+ θ 2）]。

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z^n = r^n[\cos n\theta + i\sin(n\theta)]$$

共轭复数根定理

共轭复根是一对特殊根。指多项式或代数方程的一类成对出现的根。若非实复数α是实系数 n 次方程 f(x)=0 的根，则其共轭复数α*也是方程 f(x)=0 的根，且α与α*的重数相同，则称α与α*是该方程的一对共轭复（虚）根。

共轭复根经常出现于一元二次方程中，若用公式法解得根的判别式小于零，则该方程的根为一对共轭复根。

For $P(x)$ with real coefficient,

If $P(a+bi) = 0$,

$$P(\overline{a+bi}) = 0$$

柯西-施瓦茨不等式

除了对数和复数部分的相关公式定理， 这里我们再补充一个在 AMC 12 中经常使用的不等式，柯西-施瓦茨不等式。

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

数论板块

质因式分解

在 AMC 12 中，利用质因数分解求解的题目也非常多。在这一技巧的基础上，还经常结合计数去考察特定因数的个数。这里我们根据质因数分解的通式，给出奇因数和偶因数个数的表达式。

$$n = 2^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_m^{a_m}.$$

$p_2 \dots p_m$ are prime numbers.

number of even factors. $a_1 (a_2+1)(a_3+1) \cdots (a_m+1)$

number of odd factors $(a_2+1)(a_3+1) \cdots (a_m+1)$

贝祖定理

裴蜀定理（或贝祖定理）得名于法国数学家艾蒂安·裴蜀，说明了对任何整数 a、b 和它们的最大公约数 d，关于未知数 x 和 y 的线性不定方程（称为裴蜀等式）：若 a,b 是整数,且 gcd(a,b)=d，那么对于任意的整数 x,y,ax+by 都一定是 d 的倍数，特别地，一定存在整数 x,y，使 ax+by=d 成立。

它的一个重要推论是：a,b 互质的充分必要条件是存在整数 x,y 使 ax+by=1

贝祖定理，也叫裴蜀定理。贝祖定理告诉我们两个正整数的线性叠加可以组成的最小正整数就是这两个数字的最大公因数。

Bezout's Lemma states that if x and y are nonzero integers and $g = \gcd(x, y)$, then there exist integers α and β such that $x\alpha + y\beta = g$. In other words, there exists a linear combination of x and y equal to g.

Furthermore, g is the smallest positive integer that can be expressed in this form, i.e. $g = \min\{x\alpha + y\beta | \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, x\alpha + y\beta > 0\}$.

In particular, if x and y are relatively prime then there are integers α and β for which $x\alpha + y\beta = 1$.

丢番图方程

丢番图方程又名不定方程、整系数多项式方程，是变量仅容许是整数的多项式等式；即形式如下图的方程，其中所有的 a_j，b_j 和 c 均是整数，若其中能找到一组整数解 $m_1, m_2 \dots m_n$ 者则称之有整数解。

$$a_1 x_1^{b_1} + a_2 x_2^{b_2} + \dots\dots + a_n x_n^{b_n} = c$$

这是一个在 AMC 中常用的针对两个变量的因式分解技巧。适用于 ‘xy+Ax+By‘ 这样的形式。

相似的，作为丢番图方程的一种，该技巧也是主要针对方程只有整数解的情况。

Let's put it in general terms. We have an equation $xy + jx + ky = a$, where j, k, and a are integral constants. According to Simon's Favourite Factoring Trick, this equation can be transformed into:

$$(x+k)(y+j) = a + jk$$

欧拉函数的应用

欧拉 phi 函数，等于不超过 X 且和 X 互素的整数个数，公式如下：

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i-1}(p_i - 1) = \prod_{p|n} p^{\alpha_p-1}(p-1) = n\prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

p1，p2……pn 为 X 的所有素因数

欧拉公式的延伸：一个数的所有质因子之和是 euler(n)*n/2

计数板块

二项分布

二项分布简而言之就像抛硬币，每次只会出现对立的两种情况，且两种情况发生的概率之和为 1。如果重复 n 次，出现 x 次某一种情况的概率就可以表示为：

$$P_x = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

其中 p 是该时间每次发生的概率，q 为对立事件每次发生的概率。

对称性原理

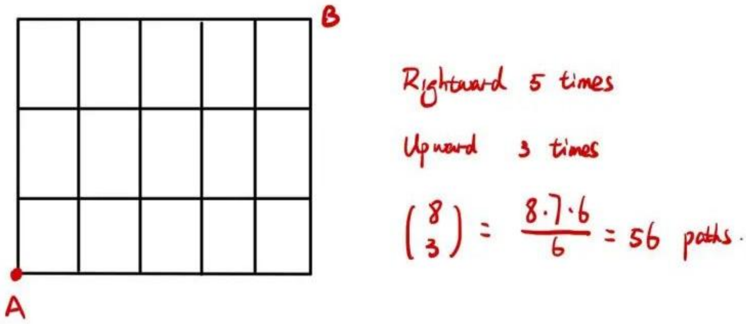
有这样一类问题，其中包含着一组组对称的情况。例如，我们会发现，两个骰子掷出的数字之和，得到 “3” 的概率和得到 “11” 的概率是一样的。

对于条件中隐藏着对称性情况的概率题目，可以直接通过对称性，简化相应概率的求解过程。

路线问题

从 A 点到 B 点，每次只能向右或者向上移动一个单位， 一共有多少种不同的路线呢？这就是一个典型的路线数目求解问题。

事实上，无论是怎么走，都需要移动相同的步数。不仅如此，向某一方向移动的总次数也是固定的。所以像这样的路线数目求解，可以转化为一个普通组合数的求解。



解析几何在概率问题中的应用

在 AMC 的概率题中，还有一类问题适合将已知条件转化为坐标系的中的曲线，进而计算出满足条件的面积所占比例。对于一些特殊表达式，这里给出了它们对应的曲线。