2021 AMC 10 解析 @TD

1.

答案： D

原式=(4 — 2) — (9 — 3) + (16 — 4) = 2 — 6 + 12 = 8

2.

答案： C

翻译： Portia 高中的学生是 Lara 高中的学生数量的 3 倍。两个高中一共有 2600 个学生。求

Portia 高中学生的数量。

思路： 设 Portia 高中有 x 个学生，则 Lara 高中有;个学生，那么 x + ： = 2600,解得 x =

1950.

3.

答案： D

翻译： 两个自爛晌和是 17402。其中 f 是 10 的倍数，并且若将它的个噻去掉，就变 成了另夕巧

砰邀。求两馒的差。

思路： 较大的数是 10 的倍数，所以它个噻是 0,那么去掉它的个噻其实是将它除以

10.我们设较小数是 X,所以较大数是 10x,那么 $Wx + x$ = 17402,它们的差是 10x-x =

9x = llx*-= 17402*- = 14238.

4. 回 回

答案：D **翻译：**一辆车在下坡时第一秒走 5 米，此后每秒比前一秒多走 7 米。它下坡一共花了 30 回

秒，那么它一共走了多长的路?

5 + 12 + 19 + - + 208 =~~伽+ ‘疙。~~=3195

5.

答案:

一个班上有 k > 12 个学生，一次考试成绩平均分时 8.从中选取 12 份成绩，平均分

是 14,那么剩下的成绩平均分是多少?

思路：所有学生—共得了 12k,选走了 12 *14 = 168,还剩 12k - 168 分，上一 12 个学生,

平均分普

6.

答案：A **翻译：**Chantal 和 Jean 去爬山。Chantal—开始速度为每小时 4 英里，到一半的路程时速度 降为每小时 2 英里。Chantal 到达终点后立刻以每小时 3 英里的速度返回，在一半路程点和

Jean 相遇，求 Jean 的平均速度。

思路:不妨设总路程为 2 英里，那么 Chantal 前一半路程花费 15 分钟，后一半路程花费 30

分钟，返回时花费 20 分钟，一共 65 分钟。那么 Jean 的平均速度就是 1《=若.

7.

答案：D

翻译：Tom 有 13 条蛇，其中 3 条是紫色的，4 条是开心的。他发现如下几点条件

(1) 所有开心的蛇都会做加法，

(2) 没有紫色的蛇会做减法，

⑶所有不会做减法的蛇跻会敞口法。

由此可以推断出什么结论？

思路：紫色的蛇不会做减法，而根据⑶不会做减法的蛇也不会做加法，所以紫色的蛇不 会做 h

口法。而所有开心的蛇都会加法，所以艶的蛇不开心，D 正确。

8.

答案：E

翻译：给定一{繼以，有无限循环小数

$$1.\,abab\ldots = 1.\,ab$$

有 T*学生在用 66 乘它的时候，没有注意 SU 右面记号的含义，直接用 66 乘以了 1. 沥. 他后

来发现自己得到的数比正确答案少 0.5,求两位数 *ab* 的值。

思路：由无穷等比数列

ab ab ab /I 1 1 \ *ab*
La 妞. . . = 1 +诬+面+示+ . . . = 1 +沥（诬+面+示+ ‧. . ）= 1 +菊

而学生用的数 1. 沥=1 +器，所以 66 (l + g) = 66 (1 +器）+ §我们解方程得到 $ab = 75$

答案：D

翻译：对于任意实数求$(xy - 1)^2$ + (x +力 2 的最小值。

我们拆开原式的括号，得至 U $(xy - I)^2 + (x + y)^2 = x^2y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 +$

$2xy = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 = (x^2 + l)(y^2 + 1)$.由于 $x^2,y^2 > 0$,我们得到原式最小<1® 1, 取{牛是 $x = y = 0$.

10.**答案：**C

思路：我们利用完全平方公式，将原式乘(3-2)可以得到

(3 - 2) (2 + 3) (22 + 32) 04 + 34) ($_2^{64}$ + 3^{64})

=(3^2 一 22) (22 + 32) (24 + 3 与... (2^{64} + 3^{64})

=(3^4 一 2 匀(24 + 3^4) ... (2^{64} + 364)

=(3^{64} ___ 2^{64}) (2^{64} + 364)

—3】28 ___ 2】28

11.

答案：E

翻译：下列哪个 b 使得 b 进制数 202 為−22 是不是 3 的彳饑?

(4)3 (B)4 (C)6 (D)7 (E)8

2021_b - 221_b = (2 * 6^3 + 2 * 6 + 1) - (2 * b^2 + 2 * + 1) = $2b^3$ - $2b^2$ =

2b(b - 1).它不是 3 的融的充分必要条件是 b 三 2(mod 3),选 Eo

12.

答案：E

翻译：如图两个向下的圆锥承有等量的液体。两个圆锥液体顶面的半径分别为 3 和 6. 现分 别往两个圆锥中掷入半径为 1 的小球，小球完全被液体覆没。求较细圆锥液体高度的升高 量与较粗圆锥的液体升高量的比值。

思路：由于圆锥的体积式救户儿我们知道较细圆锥的高度和较粗圆锥的高度比例是 4:1.由 于体积增加量相同，高度和半径也成比例增加，所以高度的增加量也是 4:1.

13.

答案：C

翻译:四面体 ABCD 的边= *2, AC* = 3, *AD = 4,BC = Vl3,BD* = 2 偈, *CD* = 5,求体 积。

思路：根据勾股定理，注意到 ABD, ABC 都是直角三角形。视 ABD 为低，那么 AC 就是高，体积就 j*j*2*4*3 = 4

14.

答案：A

翻译：多项式 $z^6 — 10z^5 + Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + 16$ 的所(可能重 复). 求 B 的值。

思路：我们设六个根是 X1，X_2, x_3, x_4, x_5, x_6,那么由韦达定理，我们得到

+ *2 + *3 + *4 + %5 + %6 = 10

乂 1 乂 2%3%4 乂 5 乂 6 = 16

而题目给定%$_{1(}$ X_2, X_3, X_4, % %6 都是正整数，所以由此我们推断它们的值一定是

(2,2,2,2,1,1).我们再根据韦达定理，得到

B = — $ Xi XjX$_k$ = —4 * (2 * 2 * 2) - 12 * (2 * 2 * 1) - 4 * (2 * 1 * 1) = —88
l<i<J<k<6

15.

答案： C

翻译： 有多少种从 1,2, 3,4, 5, 6 中不重复地选 A, B, C, D 的方法，使得 y = Ax^2+B,y = Cx^2 + D 会相交？不区分两个曲线的 II 贿：例如 4 = 3,B = 2,C = 4,D = 1 和 A = 4,B = *1,C = 3, D* = 2 是一样的。

思路： 两个曲线相交的充要芻牛知>*C,B*> D 或者 4 <*C,B*<*D.*由于第二种情况 RB 改 变第一种情况中列举两个曲线的 II 赡，我们只用考虑第一种情况。我们先从 6 馒中选 4 个作为备选的数，有 15 种选法，假设这 4 馋是 1,2, 3,4. 引吆由于 4 最大，它只能是 A 或者 B,有两种选法，假设 4 = 4.因为 1 最小，它只能是 C 或者 D。若 C = l,剩下两馒 只能是 B = *3,D = 2*. *若 D = 1,*剩下两个数可以随意洌。综上，一共有 15 *2*3 = 90 种方 法。

16.

答案： C

翻译： —列数中 1,2，…，200 分别出现了 1,2，…，200 次。求这列数的中位数。

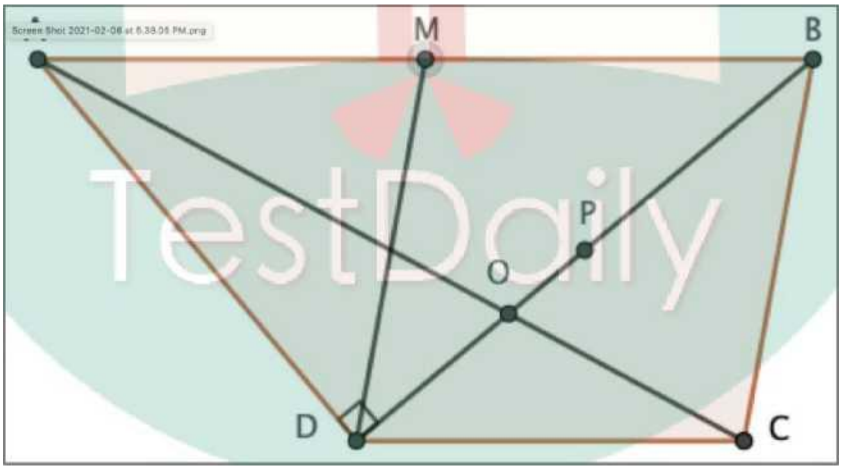
思路： 这列数一共有竺严= 20100 个数，所以中位数应该在第 10050 和 10051 之间。那 么如果答案是 n 的话，那么 71 应该是满足匹羿 2 1°°50 的最小正整数。尝试几个选项后 可以得到" = 142.

17.

答案：D **翻译：**梯形 ABCD 满足 AB 平行于 CD, BC = CD = 43, AD 垂直于 BD。设 AC 交 BD 于

0, P 是 BD 的中点。若 OP = 11,则 AD 的长度可以表示为 m 宓, 求 *m* + *n.*

思路：因为 DCB 是等腰三角形，那么 CP 既是中线也是垂线。由于 AB 和 CD 平行，我们 得到 *ZABD* = *£BDC* = *ZDBC*.注意到 ABD 和 BCP 都是直角三角形，并且有 f 角相 等，所以两个三角形相似，所以我们得到导=器设= %, 则 PB = x + 11.带入等式可 以求出 *AB* = *2DC* = 86.由于 AB 和 CD 平行，我们运用平行线截线段成比例的性质可以 得到卷=芸= § 所以学=2,解得％ = 22.由勾股定理，$AD^2=AB^2-BD^2 = 86^2 - 66^2 = 3040$,所= 4V190,答案是 194.



、，32 116、16 置

二洌靈尹 H § 2J(3) = 3J(4) § + § H 4J(5) S6) f(2) +

f(3) H 5J(7) H 7J(8) § + 1H H 6*(9) H f(3) + f(3)、6JE)

H 11*(16) H f (4) + f (4) ㅁ 8 J(17) H 17

J(25) 負(5) + ST 10 J(32) ㅁ f (8) + f (4) ㅁ

1。• 雲 0 期 f 団醫 (T2T (g) + >32)、1。+

f iE)AT6T@+ 8 + f ︶ 恥 ︵ 7 M7) Hr (T) Im 負 ︶ 罕 ” 6 + 為) 74-AT)

京 + f (6)、5 + f 衣 ︵ 10 N >9)

哥 e

s.. 半圍中諒 IE< 震 § » § ? 」 ■) f(a) + f(sf(p) u p。睬 xsUTF^mssfcr) A 02

I

17 11 7 7 25

(4) I (B) I (c) — (D) — (E)

*^T
es&
a=y
、挡
20w+EeI1
潍
—
回
a
半

19.

答案:

翻译: 若工 2 + y2 = 3|x _ y| + 3|x + yI 的图像所封闭的面积可以表示为 m + nir,求 m + *n.*

我们考虑 X-y,x + y> 0 的情况，最后再乘以 4.这种情况下等式化为(X — 3)2 +

y^2 = 9,是 f 圆心为(3,0),半径为 3 的圆。我们要求的是这个圆被 y = 土’ 所切割后的面

积。用扇形瘢虹角形的面积可以求出切掉的面积是¥，所以切割完的面积是如-

911-18

20.

答案：D

翻译：有多少种排列 1, 2, 3, 4, 5 的方法使得没有相邻的三项是递增或者递减的？

思路：按照第类。若第展 1,有 5 种排法：13254, 14253, 14352, 15243,

15342.若第 2,有 7 种排法：21453, 21534, 23154, 24153, 25143, 24351, 25341,若 第是 3,有 8 种

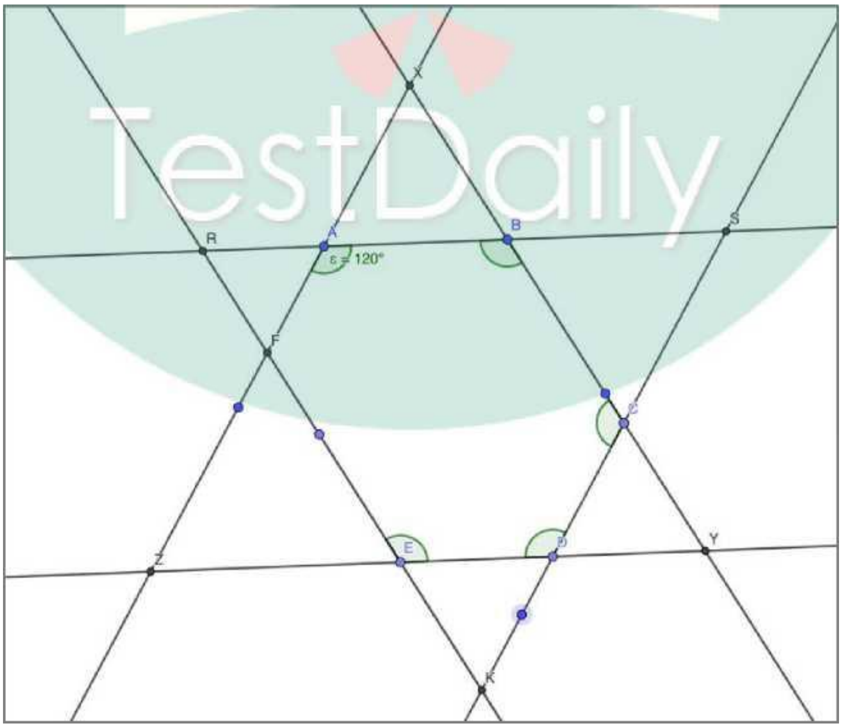
排法：31425, 31524, 32415, 32514, 34251, 34152, 35142,35241.第一

4 的情况和第一ˆ> 2 的情况对称，第一ˆB 5 的情新第一 1 的情况

对称，所以一共有 5+ 7 + 8 +7 + 5 = 32.

答案：c **翻译：**等角六边形 ABCDEF 中，线 AB, CD, EF 组成的三角形面积为 192 偈, 线 BC, DE, FA 组成的三角形面积为 324 饵, 那么边长可以表示为 $m + n\hat{}p$,求 $m + n + p$.

思路：设 AB 交 EF 于 R, DC 于 S；设 AF 交 BC 于 X, ED 于 Z；设 EF 交 CD 于 K；设 ED 交 BC 于 Y。由于 ABCDEF 等角，所有角都是 120 度，那么所有外角都是 60 度，所以 XYZ, RSK 都是等边三角形。我们知道若等边三角形边长是 a,面积就是^a2,以此我们求出两个三角形边长分别是 SK = 16 西 XZ = 36. 同时，我们注意到延长得到的六个小三角形也是等边三角形，所以 4B $= AX.FE = FZ,ED = DK,BC = SC.$由此，周长 p $= AB + BC + CD+DE + EF + FA = AX + SC + CD + DK + FZ + AF = XZ + SK =$ 16V3 + 36,答 55.



着 ˌ 海 Hiram 尊命湁 3®

斗御 X、4 命沛 H1k 亲。要

0—计命卅 HI2kH- 旃沛 3 制

驱口剥爻 2x + 2k | 1)言

宛 MH® 苴湖嚬 N 1275。测

泛露弔 S 磨 3 英、41275

I k(2x + 2k | 1) U 19(50

| 2ky 古西帝幽 325 H

k(2x + 2k | 39) “^ulk^325

3 擊露。B u lwx H 21。^is 13.

4、鶩蓄。

餍国 -Hs^-ts 浏

smH 也 3 弔

§ 19.寓

侧留普暨

亲国 .

s..

Hi

ra

ms

50

斗

膊 SWSI25 l-r’M— cij’

呆黛

l-ral 衆增

君

2、Mn

呆黛

五 FTS3

*^T

es&

a=y

、挡

20w+EeI1

潍

—

回

a

半

23.

答案：D

翻译：Frieda 在—3*3 的格子里跳，每次随机在上，下，左，右四个方向里暇？f 跳 一格。当 Frieda 要跳的方向会出格子时，Frieda 就会围倒另夕一个边上。例如如果 Frieda 从中间的格子开始，连续往上跳两个，就会跳到最后一行中间的格子。假设 Frieda 从中间 开始，随机®侄多四次，如期倒四个角的任意 f 立刻停，求最后它落在角上的概率。 **思路：**我们计算最后不在角上的概率。

Frieda-共只有三个可能的状态：在中心，在边 上，或者在角上。第一步之后 Frieda 必然在边上。第二步 Frieda 有 1/4 的概率回到中心，1/4 的概率留在边上，1/2 的概率到角上（结束）。如果 Frieda 回到中心，那么 Frieda 第三 步结束必然到边上，第四步有 1/2 的概率不到角上，这一类的概率髙

＊ ：=手如果 Frieda

4 2 8

留在边上，下一步 Frieda 有 1/4 的概率回到中心，1/2 的概率到角上（结束）,]/4 的概率

留在边上。如果 Frieda 回到中心，它在一步之内无法到达角上，这一类的概率是= 上.

4 4 16

如果 Frieda 留在边上，它最后一步有 1/2 的概率不到角上，这 T 的概率岛*卜卜所 以留到角上的

概率是 1 -土一号=||▪

24.

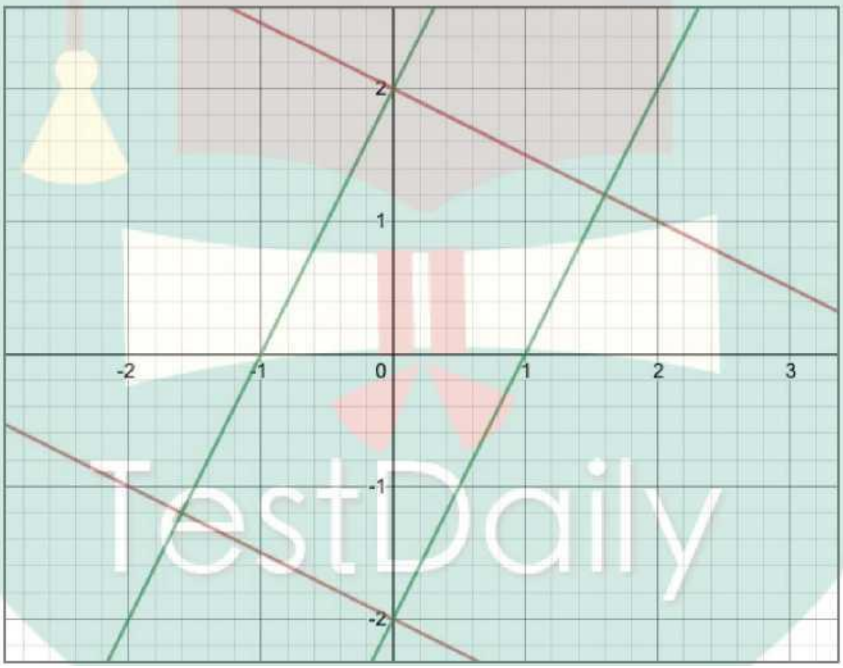
答案：D **翻译：**求被$(x + ay)^2 = 4a^2$, $(ax - y)^2 = W$ 的图像所包围的四边形的面积。

思路：我们求出四条线分别是 $x + ay = 2a, x + ay = -2a, ax-y = a, ax-y = -a$.我们发

现这四条线组成的是 f 正方形，我们其实要求的是两组平行线中每组的间距。平行线的

间距是从原点往其中 f 直线做高的两倍，我们用面积法可以求出高分别是烏, 烏, 所

以面积是$\frac{4a}{\sqrt{a^2+1}} * \frac{2a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{8a^2}{a^2+1}$.



25.

答案：E

翻译：有多少种方法可源 3 个畋马，3 个廳码和 3^®码来填满—3*3 的格子,

使得所有横向或者纵向相邻的筹码颜色都不同？

思路：中心格有 3 种填法，不妨设为红色。剩余两个红色都不能在边上，只能从角上的四

个格中选择，有 6 种选法。当选完红色后，稍加尝试可以发现剩下的六个格子可以分为两 组，一组必须是蓝色，一组必须是绿色，所以有 2 种选法。最终答案是 3 *6*2 = 36.