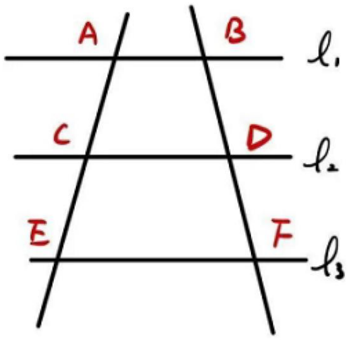
美国 AMC10 数学竞赛常用公式汇总

目录

一、几何板块

1、平行线分线段成比例定理

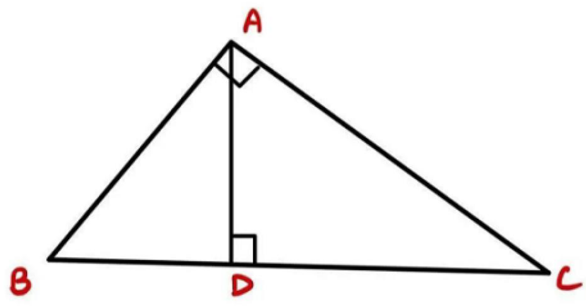


$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$

$$\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BD}{BF}$$

2.射影定理

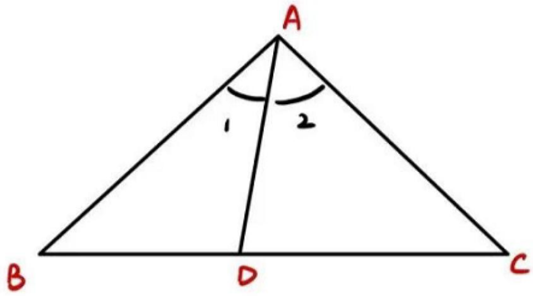


$AB^2 = BD \cdot BC$

$AC^2 = CD \cdot BC$

$AD^2 = BD \cdot CD$

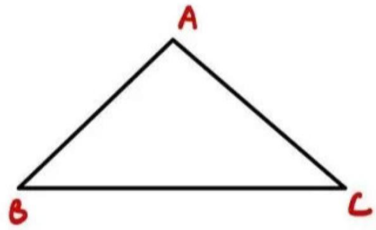
3.角平分线定理



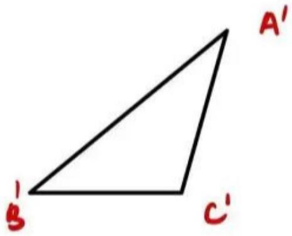
If $\angle 1 = \angle 2$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

4、利用正弦求三角形面积



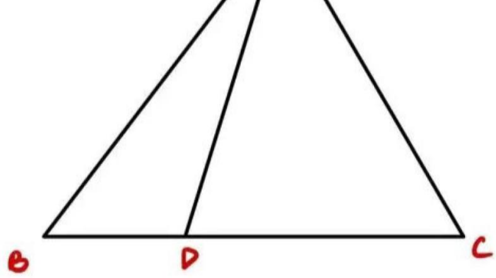
$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sin\angle B \cdot AB \cdot BC}{2}$$



If $\angle B = \angle B'$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{AB \cdot BC}{A'B' \cdot B'C'}$$

5、斯图尔特定理



$$AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD$$
$$= BC\,(AD^2 + BD \cdot CD)$$

二、代数板块

6、韦达定理

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$$

$$P(r_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2 \ldots n$$

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots r_1 r_n) + (r_2 r_3 + \cdots r_2 r_n) + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$r_1 r_2 r_3 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

7、算数平均-几何平均不等式

non-negative $a_1, a_2 \cdots a_n$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

especially

$$a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1 a_2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2 a_1 a_2 .$$

8、二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

9、合分比定理

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (a \neq c)$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0 \quad , (a>0, c>0)$$

$$\frac{c}{d} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$$

10、余数定理

$$P(x) = (x-r)\,Q(x) + P(r),$$

If $P(r) = 0$

$x-r$ is the factor.

三、数论板块

11、孙子定理

Suppose you wish to find the least number x which leaves a remainder of:

$$\begin{array}{lcl} y_1 & \text{when divided by} & d_1 \\ y_2 & \text{when divided by} & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ y_n & \text{when divided by} & d_n \end{array}$$

such that d_1, d_2, ... d_n are all relatively prime. Let $M = d_1 d_2 \cdots d_n$, and $b_i = \dfrac{M}{d_i}$. Now if the numbers a_i satisfy:

$$a_i b_i \equiv 1 \pmod{d_i}$$

for every $1 \leq i \leq n$, then a solution for x is:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i y_i \pmod{M}$$

12、费马小定理

假如 p 是质数，若 p 不能整除 a，则 a^(p-1) ≡1（mod p），若 p 能整除 a，则 a^(p-1) ≡0（mod p）。

若 p 是质数，且 a,p 互质，那么 a 的(p-1)次方除以 p 的余数恒等于 1。

13、威尔逊定理

若 p 为质数，则 p 可整除(p-1)!+1。

14、欧几里德算法

两个数的最大公约数是指两个数的共有约数中的最大一个，例如, (6, 9) 的最大公约数为 3; (10, 15) 的最大公约数为 5; (252, 105) 的最大公约数为 21.

欧几里得算法可以高效地求解两个正整数 (a, b) 的最大公约数 (greatest common divisor, GCD). 该算法基于如下定理：对于正整数 (a, b), 其最大公约数等于 (b, c) 的最大公约数，其中，c = a % b; 基于上述思想，可以将该算法写成递归的形式：

保证 a > b.
当 a % b == 0 成立时，表明 b 为 a 的约数，且 b 为 (a,b) 二者的最大公约数，所以返回 b.
若 a % b != 0 成立时，重复步骤 2, 寻找 (b, a % b) 的最大公约数。

15、立方和公式

立方和的公式是： $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

16、欧拉定理

$$\varphi(x)=x\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

计数板块

16、互补计数

互补计数，顾名思义就是计算所求集合中补集的元素个数。典型的例子是找出 “至少有 n 个” 的互补情况，也就是 “至多有 n-1”。

结合题目中出现的 "至多"、“至少” 这样的关键词，利用互补的思想，可以使一些计数和概率计算变得更简洁有效。

18、容斥原理

两个集合的容斥关系公式：AUB=A+B-A∩B（∩为重合的部分）

三个集合的容斥关系公式：AUBUC=A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C。

三集合容斥问题的核心公式如下：

标准型：|A∪B∪C | = | A | + | B | + | C | - | A∩B | - | B∩C | - | C∩A | + | A∩B∩C |。

非标准型：| A∪B∪C | = | A | + | B | + | C | -只满足两个条件的 - 2×三个都满足的。

列方程组：| A∪B∪C | =只满足一个条件的＋只满足两个条件

的＋三个都满足的。

|A|+|B|+|C|=只满足一个条件的＋2×只满足两个条件的＋3×三个都满足的，对于以上三组公式的理解，可以通过想象三个圆两两相交的重叠情况来加深。

19、隔板法

隔板法就是在 n 个元素间的（n-1）个空中插入若干个（b）个板，可以把 n 个元素分成（b+1）组的方法。

应用隔板法必须满足三个条件：

1、这 n 个元素必须互不相异

2、所分成的每一组至少分得一个元素

3、分成的组别彼此相异

20、抽屉原理

▶ 原理 1：把 n+1 个元素分成 n 类,不管怎么分,则一定有一类中有 2 个或 2 个以上的元素.

▶ 原理 2：把 m 个元素任意放入 n（n＜m＝个集合,则一定有一个集合呈至少要有 k 个元素.

▶ 原理 3：把无穷多个元素放入有限个集合里,则一定有一个集合里含有无穷多个元素.