犀牛AMC竞赛秋季班

上海/苏州/深圳/南京/无锡/线上

班级名称	课时	班型
AMC8全程班-2022秋季A班	34	3-6人班
AMC8全程班-2022秋季B班	34	3-6人班
AMC10冲刺班-2022秋季班	30	3-6人班
AMC12冲刺班-2022秋季班	30	3-6人班
AMC10模考点评-2022国庆班	10	10人班
AMC12模考点评-2022国庆班	10	10人班

(多种班型可供选择，线下+线上同步授课，上海、苏州、深圳、南京、无锡均有校区。更多课程详情可添加微信xnew007或扫描二维码进行咨询。)

咨询课程详情请加微信：13261653514（同电话）

2021 AMC 10B 解析

1.**答案：**D

翻译：有多少个整数 x 满足|x| < 3ir?

思路：3TI 介于 9 和 10 之间，所以-9 < x < 9, x—共有 19 个可能的值。

2.**答案：**D

思路：原式（2V3 - 3）+（3 + 2V3）= 4V3

3.**答案：**C

翻译：一个课后活动项目中 28 个 11 年级和 12 年级学生参加，其中同样数量的 11 年级和 12 年级学生参加了辩论队。在所有学生中，有 25%的 11 年级学生和 10% 的 12 年级学生参加了辩论队，问项目中一共有多少个 11 年级学生。

思路：设辩论队中 11 年级和 12 年级学生各有 x 个。那么项目中有 4x 个 11 年级学 生，10x 个 12 年级学生。所以 4x + 10x = 28,x = 2.项目中有 4*2 = 8 个 11 年级 学生。

4. **答案：**B

5. **翻译：**在一个数学比赛中，有 57 个穿蓝色衣服的学生和 75 个穿黄色衣服的学生。我们把这 132 个学生分到 66 组里，其中恰好有 23 组的学生都穿蓝色衣服。那么有 多少组学生都穿蓝色衣服？

思路：有 23 * 2 = 46 个学生在都穿蓝色衣服的组内，那么剩下的 57-46 = 11 个穿 蓝色衣服的学生就会和 11 个穿黄色衣服的学生搭配。剩下的 75 -11 = 64 个穿黄 色衣服的学生就会两两配对，会有? = 32 组穿都穿黄色衣服。

5.

答案：B

翻译：Jonie 的四个堂兄弟的年龄是各不相同的一位正整数。已知其中两个年龄相乘是 24,另外两个相乘是 30,求四个堂兄弟年龄和。

思路：30 只有 5*6 这一种分解为两个一位数的方法，所以这两个数是 5 和 6. 由于 6 已经用过，相乘为 24 的数只能是 3 和 8,年龄和就是 3 + 5 + 6 + 8 = 22.

6.

答案：C

翻译：Blackwell 的两个班做了同一个考试。早上的课的平均分是 84,下午的课的平均分是 70,早上的课和下午的课的学生数量比是凄那么 Blackwell 所有学生的平 *4* 均分是多少？

思路：假设早上的课有 3x 个学生，那么下午的课就有 4x 个学生。根据平均数的定 义，所有学生的总分是(3x) *84 + (4x) * 70 = 532x,而 Blackwell —共有 7x 个学 生，所以学生的平均分是登=76.

7.

答案：D

翻译：平面中有四个半径分别为1, 3, 5, 7的圆都与直线1相切于同一点A,但它们可 以在I的两侧中的任意一侧。集合S是所有恰好在一个圆上的点的集合，求S的最 大面积。

思路：所有圆要么在，上方要么在】下方。如果所有圆都在同一方向，那么四个圆都 会重叠，集合S是在半径为7的圆里但不在半径为5的圆里的点，面积是n*72- n*5^2,如果圆在不同方向，最好情况是半径为7和半径为5的圆在直线两侧，而半 径为3和半径为1的圆在直线同一侧，这样只会重叠一次。此时面积是11*72+11* 5^2 — n * 3^2 = 65K.

8.

答案：A

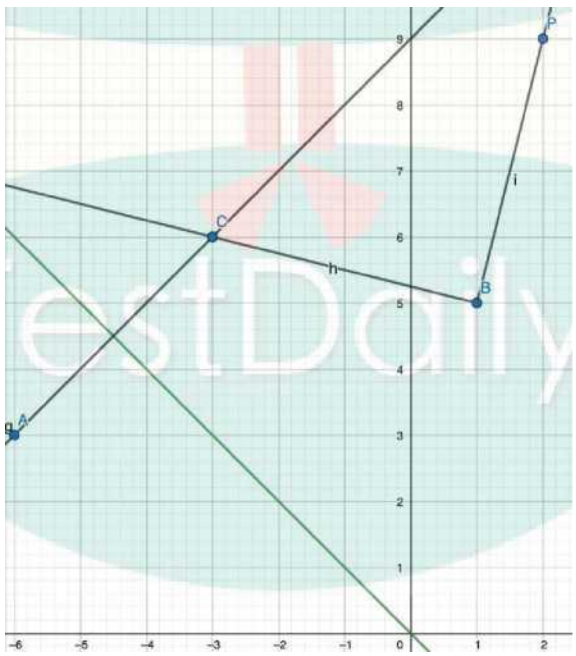
翻译：Zhou在一个15X15的格子里写1到225的正整数。如图所示，他把1写在 中心，然后依次逆时针写其它数。求第二行的所有数的最小值和最大值之和。

思路：我们注意最后写的顺序是第二行-第十五列-第十五行-第一列-第一行。由此可以求出第二行除第一个数之外其它数是157, 158, 170. 而第二行第一个数和第一列一起写，可以求出它是210.所以和是210 + 157 = 367.

答案：D

翻译：平面直角坐标系里有一点 P(a,b)被绕(1,5)逆时针旋转 90 度，然后沿 y = -x 作对称，得到的点是(-6,3).求 b-a.

思路：我们从最终的点开始反推点 P。如图，我们先将(−6,3)沿 y = -x 作对称得到点 C(—3,6),然后绕 B(l,5)顺时针旋转 90 度得到 P = (2,9),所以 b -*a* = *7.*



10.

答案：A

翻译：有一个盛水的倒立圆锥半径是 12cm,高是 18cm.现将圆锥里的水倒入一个半 径为 24cm 的圆柱形容器，求水的高度。关注 TestDaily,和 20W+出国党一同奋斗

思路：根据圆锥和圆柱的体积公式，可以得到 f *71 *122 *18 = 71* 242 **戒,** 解出

h = 1.5.

11.

答案：D

翻译：奶奶烤了一块长方形的饼干。她计划在横竖方向各切几刀，使得饼干分成一 些大小形状完全相同的小长方形。同时，最外侧(沿着锅壁)的饼干块数和内部的饼 干块数一样。求饼干块数的最大值。

思路：假设横竖分别切了块。那么在内部有(m - 2)(n - 2)块，外侧有 2m + 2 花−4 块，而这两个量相等。化简可以得到(m-4)(花−4) = 8,两组解是(m,n)= (6,8), (5,12),所以 mzi 的最大值是 5 * 12 = 60.

12.

答案：C

翻译：N = 34 * 34 * 63 * 270 的所有奇因子之和和所有偶因子之和的比是多少？ **思路：**根据题目给出的分解，我们求出 N 有三个 2 作为质因数。我们设 N = 8M,M 是奇数。那么对于每个 M 的约数 m,对应的 N 的约数有 m, 2m,4m, 8m,其中后三项 为偶数。所以奇因子之和和所有偶因子之和的比是 1： (2 + 4 + 8) = 1:14.

13.**答案：**B **翻译：**设 n 是正整数，d 是一位正整数。n 进制数 32d 和 10 进制数 263 相等；n 进制 数 324 和 6 进制数 11d1 相等，求 $n + d$.

关注TestDaily,和20w+出国党一同奋斗

思路：根据进制的计算方法，可以列出

$$d + 2n + 3 孔 2 = 263$$

$$4 + 2n + 3 花 2 = 1 + 6d + 36 + 216$$

两式相减消掉孔，求出 d = 2,带回一式求出?！ = 9,所以孔+ d = 11.

14.

答案：B

翻译：三个等距平行线交一定圆，截出的弦长分别是 38, 38, 34. 求相邻平行线的距 离。

思路：如图，设圆心为 O,两个交点是 L,R.过。向平行线作垂直，交点为 A 和

Bo 设平行线距离为 2d,半径是 r。三角形 BLO, RAO 是直角三角形，我们知道

$AO = d, B0 = 3d, 0L = 0R=r, BL = 11, AR = 19$,根据勾股定理，

$$19^2 + d^2 = r^2$$

$$17^2 + (3d)^2 = r^2$$

解得 d = 3,所以距离是 2 *3 = 6.

15.

答案：B

翻译：实数 x 满足％ + − = V5,求- $7x^7 + x^3$.
X

思路：我们把所给的等式两边平方，得到

ME

”+4=3

伊+£）2 = 9 .

4 1
X +w=7

由此求出刀 11 — $7x^7 + x^3 = X^7$ （刀 4 + 土 — 7）= =7 * 0 = 0.

16.

答案：C

翻译：如果一个正整数的每一个数字都比前一个数字大，我们叫这个正整数“上/ ’

的”. 例如 1357, 89, 5 是上坡的, 32, 1240, 466 不是。有多少个上坡的正整数被 15 整 除？

思路：所有被 15 整除的数必须被 5 整除，而被 5 整除的数个位必须是 0 或 5. 由于 所有数字单调递增，最后一位不能是 0,只能是 5. 而上坡的数最后一位是最大的， 并且给定数字之和有唯一的排列方式，所以我们只要从 1234 中选出一些数来组成 上坡数并且被 3 整除就可以了。如果这个数有 5 位，只能是 12345,如果有 4 位， 只能是 1245. 如果有 3 位，可以是 345, 135,如果有 2 位，可以是 45, 15.所以一共 有 6 个被 15 整除的上坡正整数。

17.

答案：C

翻译：Ravon, Oscar, Aditi, Tyrone, Kim 在玩一个游戏。每个人从标有 1, 2, 3, ...10 的 10 张牌中抽取两张，分数是两张牌的数字和。他们的成绩分别是 Ravon-11, Oscar-4, Aditi-7, Tyrone-16, Kim-17.下列哪个命题是正确的？

(A) Ravon 有 3.

(B) Aditi 有 3.

(C) Ravon 有 4.

(D) Aditi 有 4.

(E) Tyrone 有 7.

思路：由于卡不能重复，Oscar 的 4 分只能是 1 和 3. Aditi 的 7 分可能是 $1+6, 2+5, 3+4$,但 1

和 3 被 Oscar 用过了，所以 Aditi 只能是 2 和 5. Ravon 的 11 分可能是 1 + 10,2 + 9,3 + 8,4 + 7,5 + 6,但 1, 2, 3, 5 被 Oscar 和 Aditi 用过了，所以 Ravon 只能是 4 和 7, C 正确。

18.

答案：C

翻译：重复扔一个六面的骰子直到出现第一个奇数。求出现奇数前，所有偶数都出 现至少一次的概率。

思路：第一个数是偶数的概率是:•下一个不同的数是偶数的概率是 § 下一个和前两 个不同的数是偶数的概率是所以概率是:。* s=土.

4 2 5 4 20

19.

答案：D

翻译：S 是一些正整数的集合。如果把 S 中最大的数移除，S 的平均数变为 32.如 果再把最小的数移除，平均数变为 35. 如果再将最大的数放回集合中，平均数变为 40,最大的数和最小的数的差是 72,求 S 中所有数的平均数。

思路：设 S 中有 n + 2 个数，最大，最小的数分别是 a,b,根据平均数定义我们知道

$$35n + a = 32\ (n + 1)$$

$$35n + b = 40\ (n + 1)$$

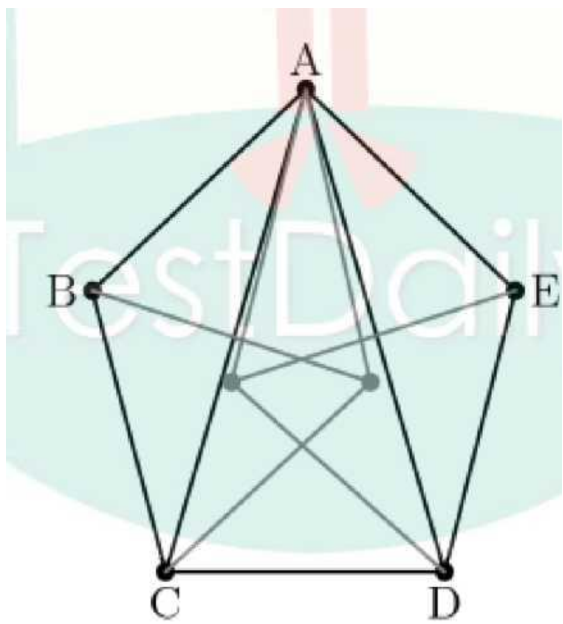
$$b - a = 72$$

解出 n = 8,a = 8,b = 80,所以平均数是兰踣理=等=36.8.

20.

答案：D

翻译：图中所有线段长度都是 2.若 ABCDE 的面积可以表示为而+插, 求 m + *n*. **思路：**我们将 ABCDE 分为三个三角形: ABC,AED,ACD. 由于 AB, BC 各是两个 等边三角形的一边，角 ABC 是 120 度。所以 ABC 和 AED 的面积是：∗ 2 * 2 * *sin* 120 = V3. ACD 是一个边长为 2 西 2 西 2 的等腰三角形，可以求出由 A 到 CD 的高是 VII,所以 ACD 的面积是: VII * 2 = 面, 所以 ABCDE 的面积是 2 龙+ V1T = V12+面, 答案是 23.



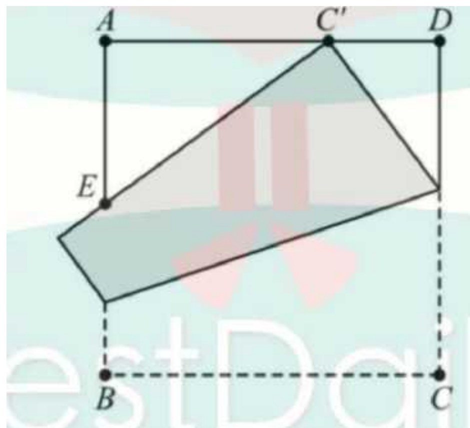
21.

答案：A

翻译：纸片 ABCD 是一个边长为 1 的正方形。如图，我们折这张纸使得 C 到边″’ AD 上，记为 C5;BC 折完后交边 AB 与 E。若 *CD* = 求三角形 AEC，的周长。 **思路：**设折痕和 CD 的交点是 F。由于折过去的部分和原本的部分形状一样，我们 知道 C'F = *CF, AECF* = 90.设 CF = X,则 DF = *l-x,C'F = x.*在三角形 C'DF 中 用勾股定理可以得到 G)2 + (1- x)2 = X^2,解得 x =|.同时，我们知道也’=1-：=|. 因为, ZEC" = 90,可以推出三角形 AEC，和三角形 DCT 相似。由吡 盖= 給，所以厶 E = »最后，我们对于三角形 AEC，使用勾股定理，得到 *C'E=l*，三角形

DF 2 6

AEC，得周长＞ˆ ＋｜＋｜＝ 2,



22.

答案：D

翻译：Ang, Ben, Jasmine 各有 5 个分别为红, 蓝，黄，白, 绿的木块。现有 5 个空的盒 子。他们每个人都独立地，随机地将五个木块分别放入五个盒子内，则至少有一个 盒子有 3 个颜色相同的木块的概率是糸求 m + n.

思路：三个人一共有(5!)3 = 1203 种放法。我们现在利用容斥原理求有多少种满足 题目条件的情况。我们知道根据容斥原理，满足条件的数量是恰有一个同色盒子的 数量，减去恰有两个的数量，加上恰有三个的数量，减去恰有四个的数量，加上恰 有五个的数量。所以数

量是

(；)* 5 * $(4!)^3$ __ (；) * 5 * 4 * (3!尸 _(；) *5*4*3* $(2!)^3$ 一 (；)*5*4*3*2

* (1!)3 + (；) *5*4*3*2*1

= 5*5* (4!)3 - 10 *5*4*3* $(3!)^3$ + 10 *5*4*3* $(2!)^3$ - 5 * 5! + 5!

=5! (5 * $(4!)^2$ -10*3* (3!)2 + 10* $(2!)^2$ - 5 + 1) = 5! * 2556 = 120 * 2556 所以概率是岑辭=灸,

答案是 471.

23.

答案：C

翻译：如图，正方形的边长是 8,其中心有一个黑色的边长为 2 偈的正方形，四个 角有四个黑色的边长为 2 的等腰直角三角形。此时在正方形内随机扔入一个直径为 1 的圆形硬币，使得整个硬币都在正方形内。那么硬币有一部分在黑色区域的概率 是⊥*(a + b\[2* + n),求 a + *b.*

196 ' ,

思路：我们考虑硬币的中心。由于整个硬币都在正方形内，硬币的中心离四边的距 离至少是 i，所以中心所有能到的位置的面积是 7 * 7 = 49,我们现在算硬币有一部分 在黑色区域内的中心所覆盖的面积。如果硬币覆盖了一部分中间的正方形，那么硬

币中心要么在正方形内，要么在正方形外并且距离某一个边至多 § 所以这部分对应 的面积就是这个正方形，以四个边向外的四个边长是 2 控, :的长方形，以及四个半 径为:的四分之

一圆。这一部分的面积是 8 + 4V2+J 如果硬币覆盖了一部分角上

2 4

的三角形，由于对称性我们只用考虑其中一个三角形。中心要么在三角形内，要么 在由三角形的斜边为边向外作出的边长为 2 扼修的长方形内。但由于整个硬币都要 在正方形内，中^>离正方形的边的距离不能小于§由此，我们可以看出符合条件的 区域是一个等腰直角三角形，面积是罕. 那么覆盖三角形的总面积就是这个面积 乘以 4,是 3 + 2^2.综上，所有满足条件的面积是 8 + 4V2 + ; + 3 + 2 很=11 +

4

6V2 + 所以概率是符合条件的面积除以总面积，兰普坦=44+驽+二答案是

44 + 24 = 68.

24.

答案：B **翻译：**一个游戏中有一些墙，Aijun 和 Beth 轮流选择一堵墙并移除一个或两个相邻的砖块。如果在某位玩家操作后一堵墙出现了缝隙就被分为两堵墙。例如在一个回 合后(4,2)俵示有两堵墙，长度分别是 4 和 2)可能出现的情况有(3,2), (2,1,2), (4),

(4.1) , (2,2) (1,1,2). Aijun 先行动。问以下哪个情况 Beth 有必胜策略？

缶）(6,1,1),　　(B)(6,2,l),　　　(C)(6,2,2),　　　(D)(6,3,l),　　　(£)(6,3,2)

思路：首先，对称的情况（例如(6,6,3,3))后手胜，因为后走方只需要模仿先走方的 行动就可以了. 由此，我们知道剩下一堵墙(n)的所有情况都是先手胜，因为先走方 永远可以把这堵墙分为两堵数量相同的墙。类似的，A,C 都是先手胜，因为先手 方可以分别将其变为(2,2,1,1),(2,2,2,2),都是对称的。

我们接下来分析(6,2,1).首先，如果 Aijun 不动 6,那么他行动完有三种可能的情况：

(6.1.1)　, (6,1), (6,2).第一种情况和 A 选项一样，先手胜。第二种情况 B 将其变为

(4.1)　　,此后无论 A 如何行动 B 都能将其变为对称的情况，B 胜。第三种情况 B 将其 变为(3,2,1),此后无论 A 如何行动 B 都能将其变为对称的情况，B 胜。如果 Aijun 动 6 的话，B 都可以相应的从 6 中移除一些砖块，使得图形对称。例如若 A 将图形 变为(3,2,1,1), B 就将其变为(2,2,1,1).所以(6,2,1)是后手胜。

由此，(6,3,1)的情况 A 只要将其变成(6,2,1)就可以获胜，先手胜。

(6,3,2)的情况下 A 可以一步将其变为(3,3,2,2),是对称的，先手胜。 所以答案是 B。
25.

答案：E

翻译：设 S 是平面直角坐标系上两个坐标都是 1 到 30 的整数的点的集合。若 S 中恰 有 300 个点在直线 y = mxT,那么 m 的取值范围的区间长度是;，求 a + *b.*

思路：我们首先估计 m 大概的范围。由于 S 中一共有 900 个点，我们要其中:的 点，我们可以估计 m 大概在 | 左右，因为此时直线下方的面积是总面积的我们现 在数 m =；时有多少点在直线的上面。我们数每个 x 对应多少个在直线上方的点。 通过前几项我们发现规律是

30 + 29 + 28 + 28 + 27 + 26 + 26 + 25 + 24 + 24 + •••+10 = 600,所以 m 弓恰好满足条件。如果再把斜率下调一点点，现在在直线 上的点会到直线上方，总点数不足 300,所以:是下限。现在我们注意到直线上方 最近的点距离直线的竖直距离都是§那么如果我们增加斜率，x 值大的点更容易 被打到，所以我们观察图像发现第 301 个到直线上的点应该是(28,19),所以 m 的上 限是苏区间的差是药-卜制答案是 85.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30