Analysis 1 für WI/IT/AV/VS/DS
XXM1.AN1

Dr. Andreas Henrici

22. September 2022

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Reelle Funktionen einer Variablen

1.1 Zahlmengen

Definition 1.1.1. Eine *Menge M* ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Die Objekte sind untereinander unterscheidbar und heissen die *Elemente* der Menge.

Bemerkung. Ein Element kann nur einmal in einer Menge vorkommen.

Wir benötigen insbesondere die folgenden Zahlmengen:

- $\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{N}^*$: Menge der natürlichen Zahlen ohne 0:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{Z}$: Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- $\mathbb{Q}$: Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

- $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen: „Vollständige“ Zahlengerade
- $\mathbb{C}$: Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} = \{p + q \cdot j | p \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}\}$

Definition 1.1.2. Die Menge, die kein Element enthält, heisst die *leere Menge*; Bezeichnung: $\{\}$ oder $\emptyset$

Bemerkung. Mengen können aufzählend oder beschreibend charakterisiert werden, siehe z.B. die Darstellungen der Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$.

Definition 1.1.3. Die Zugehörigkeit von Objekten zu einer Menge wird folgendermassen beschrieben:

- Falls das Objekt p in der Menge M enthalten ist, schreibt man $p \in M$.
- Falls das Objekt q in der Menge M nicht enthalten ist, schreibt man $q \notin M$.

Beispiel. $3 \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definition 1.1.4. Eine Menge A heisst Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist; Notation: $A \subseteq B$ oder $A \subset B$ (die beiden Notationen werden nicht immer strikt unterschieden).

Beispiel. Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; allgemeiner stehen die verschiedenen Zahlmengen in folgender Beziehung zueinander:

$$\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Definition 1.1.5. Unter einem *Intervall* verstehen wir eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Bemerkung. Wir verzichten auf eine präzise Definition des Begriffs „zusammenhängend".

Speziell betrachten wir für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ (mit $a \leq b$) folgende Intervalle:

- *Abgeschlossene* Intervalle:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
- *Offene* Intervalle:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$
- *Halboffene* Intervalle, z.B.:
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$
- *Unendliche* Intervalle, z.B.:
$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$$

Bemerkung.
- Unendliche Intervalle sind immer halboffen oder offen, da ∞ und $-\infty$ keine reellen Zahlen sind und deshalb nicht im Intervall enthalten sein können.
- Mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ kann also *nicht* wie mit gewöhnlichen reellen Zahlen gerechnet werden.

Beispiel. Häufig gebrauchte unendliche Intervalle sind

- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_{<0} = (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$
- $\mathbb{R}_{\leq 0} = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$

1.2 Begriff einer Funktion

Wenn es darum geht, Vorgänge, Situationen oder charakteristische Eigenschaften zu beschreiben, dann werden zur Darstellung/Modellierung häufig *Funktionen* benutzt – nicht nur in technischen Gebieten, sondern auch in den Wirtschaftswissenschaften, der Soziologie, der Psychologie und anderen Gebieten.

Definition 1.2.1. Eine *Funktion* f ist eine Vorschrift, die jedem Element einer Menge D genau ein Element einer Menge W zuordnet. Die Menge D wird als *Definitionsbereich* bezeichnet, die Menge W wird als *Wertebereich* bezeichnet. Man bezeichnet f als *eine Funktion von D nach W.*

Konvention: Definitions- und Wertebereich sind jeweils $\mathbb{R}$ oder Teilmengen D von $\mathbb{R}$ (falls nichts anderes angegeben ist).

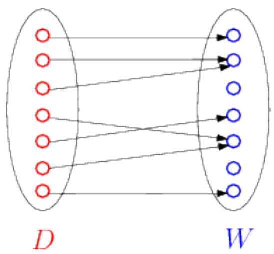


Abbildung 1.1: Definitions- und Wertebereich einer Funktion

Beziehung zum Funktionsbegriff in der Informatik: Die Elemente x des Definitionsbereichs können als Eingabe- und die erhaltenen Elemente $y = f(x)$ des Wertebereichs als Rückgabewerte verstanden werden, bzw. als Input und Output. Allerdings haben mathematische Funktionen immer zwingend einen einzigen Input und einen einzigen Output (wobei diese z.B. auch vektoriell sein können).

Beispiel.

- Jeder Person einer bestimmten Gruppe wird ihr Geburtsjahr zugeordnet. Hier ist also D =Menge der Mitglieder der betreffenden Gruppe, $W = \mathbb{N}$, d.h.

$$f(p) = \text{Geburtsjahr von } p$$

- Einem Quadrat mit Seitenlänge $x > 0$ wird seine Fläche zugeordnet,

$$f(x) = x^2.$$

Hier ist also $D = W = \mathbb{R}^+$. Allerdings kann die Funktion $f(x) = x^2$ auch mit $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}$ betrachtet werden, oder mit $D = \mathbb{R}$ und $W = \mathbb{R}^+$; nur ist dann die Interpretation als Fläche eines Quadrats mit Seitenlänge x nicht mehr sinnvoll.

Bemerkung. Der Wertebereich einer Funktion ist nicht immer eindeutig festgelegt, da er nicht "ausgeschöpft" werden muss; vgl. das vorige Beispiel oder die Diskussion von surjektiven Funktionen in Abschnitt 1.4. Ebenso kann es sinnvoll sein, den Definitionsbereich einer Funktion kleiner zu halten als die Menge, die mathematisch möglich wäre; diese Verkleinerung ist dann sinnvoll, wenn sich die Einschränkung des Definitionsbereich von der betrachteten Anwendung her aufdrängt.

Die oben betrachteten Funktionen hängen jeweils nur von *einer* Variablen ab. Viele Vorgänge sind jedoch nicht nur durch eine, sondern durch mehrere Grössen bestimmt – bei ihrer Beschreibung werden also *mehrere* Variablen benötigt. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Funktion jetzt mehrere Eingabewerte hätte, sondern dass der Definitionsbereich mehrdimensional gefasst werden muss, d.h. die Funktion hat dann vektorielle Eingabewerte.

Beispiel.

- Flächeninhalt eines Rechtecks mit Länge x und Breite y:

$$F(x, y) = x \cdot y.$$

Hier ist also $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $W = \mathbb{R}$.

- Die kinetische Energie eines Körpers,

$$E_{\mathsf{kin}}(m, v) = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

(m und v bezeichnen die Masse bzw. Geschwindigkeit des Körpers). Hier ist also $D = (\mathbb{R}^+)^2$, $W = \mathbb{R}$.

Auch bei diesen Beispielen könnte der Definitionsbereich grösser gefasst werden, z.B. $D = \mathbb{R}^2$, womit aber erneut die anschauliche Interpretation der Funktionen nicht mehr möglich wäre.

1.3 Darstellungen von Funktionen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Funktionen darzustellen, z.B.:

(a) Durch eine Tabelle, falls D aus endlich vielen Elementen besteht:

Beispiel (Fortsetzung)**.** Die Geburtsjahr-Funktion einer Gruppe von Menschen wird am besten durch eine Tabelle dargestellt.

(b) Durch eine Formel:

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & W \\ x & \mapsto & f(x) = \dots \end{array}$$

Manchmal verwendet man auch die Kurznotation

$$f(x) = \dots \quad \text{oder } y = \dots,$$

vor allem wenn es klar und/oder unwichtig ist, was Definitions- und Wertebereich der Funktion sind.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 2 \end{array}$$

Die Kurznotationen

$$f(x) = 2x + 2$$

und

$$y = 2x + 2$$

bezeichnen dieselbe Funktion. Wenn sie auf anderen Definitions- und/oder Wertebereichen betrachtet wird, müsste das explizit angegeben werden.

(c) Wenn es sich um eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ handelt, stellt man die Funktion häufig anschaulich durch einen Graphen dar.

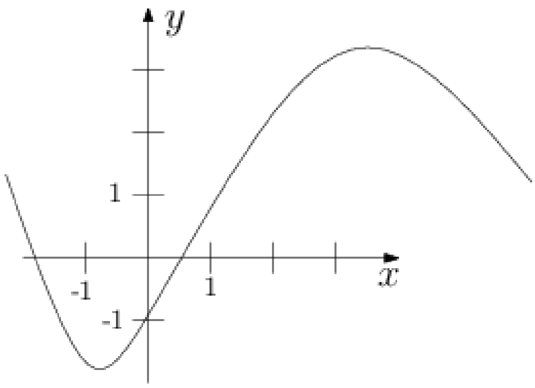


Abbildung 1.2: Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Die Definition des Graphen einer Funktion ist allerdings rein mengentheoretisch und hat nichts mit einer bildlichen Darstellung zu tun. Sie ist auch für Funktionen mit anderen Definitions- oder Wertebereichen als $\mathbb{R}$ gültig.

Definition 1.3.1. Der *Graph* einer Funktion $f : D \to W$ ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x))|x \in D\} \subseteq D \times W. \tag{1.1}$$

Graphische Darstellungen wie Abbildung 1.2 sind jedoch die übliche Veranschaulichung der Definition 1.3.1.

1.4 Eigenschaften von Funktionen

1.4.1 Nullstellen

Definition 1.4.1. Ein $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heisst *Nullstelle* von f, falls

$$f(x_0) = 0$$

gilt.

Bemerkung. Graphisch bedeutet dies, dass an der Stelle x_0 die Funktionskurve von f die x-Achse schneidet.

Beispiel. Die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 9$ sind

$$x_{1,2} = \pm 3.$$

Nullstellen von Polynomfunktionen werden allgemein in Abschnitt 1.5.2 besprochen.

1.4.2 Symmetrie

Definition 1.4.2. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst

- *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

- *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Wie in den Abbildungen 1.3 und 1.4 ersichtlich ist, ist der Graph einer geraden Funktionen achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, während der Graph einer ungeraden Funktion punktsymmetrische bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

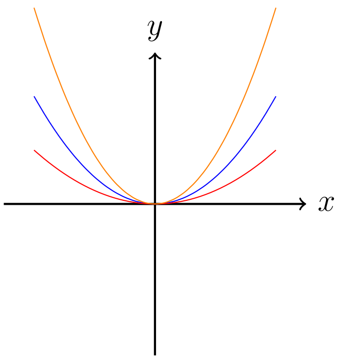


Abbildung 1.3: Gerade Funktionen

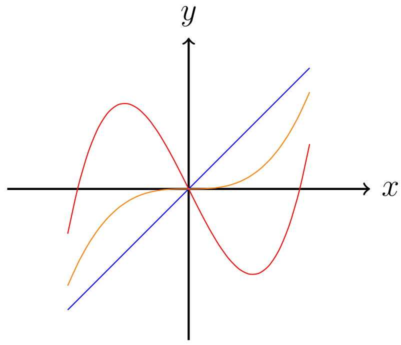


Abbildung 1.4: Ungerade Funktionen

Beispiel.
- Die Funktionen $y = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind gerade bzw. ungerade, falls n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist.
- Die Funktionen $y = \cos(x)$ ist eine gerade Funktion, während $y = \sin(x)$ eine ungerade Funktion ist.
- Die meisten Funktionen sind jedoch *weder gerade noch ungerade*. So ist z.B. die Funktion $y = x^2 + x$ weder gerade noch ungerade.

1.4.3 Periodizität

Definition 1.4.3. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *T-periodisch*, wenn gilt:

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

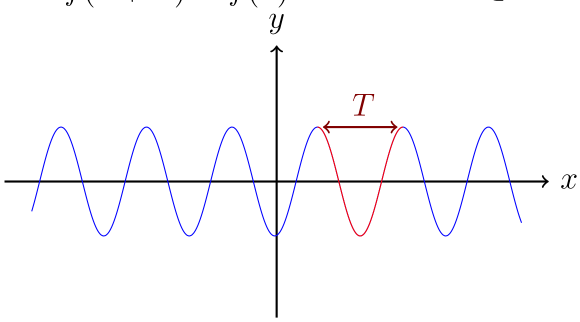


Abbildung 1.5: Periodische Funktion

Beispiel. Die Funktionen $y = \cos(x)$ und $y = \sin(x)$ sind 2π-periodische Funktionen.

1.4.4 Monotonie

Definition 1.4.4. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ (wobei $D \subseteq \mathbb{R}$) heisst

- *monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1.2}$$

- *monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \tag{1.3}$$

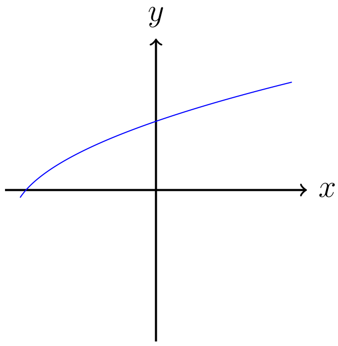


Abbildung 1.6: Monoton wachsende Funktion

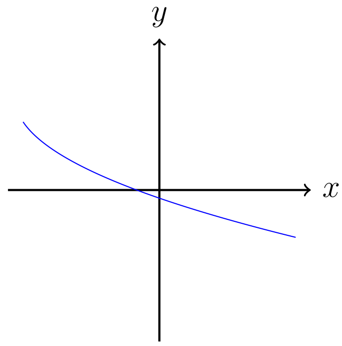


Abbildung 1.7: Monoton fallende Funktion

Bemerkung. Wir sprechen von *strenger Monotonie*, wenn in der entsprechende Relation, d.h. (1.2) bzw. (1.3), Gleichheit ausgeschlossen ist (beispielsweise $<$ statt $\leq$).

Wir werden später ein Kriterum formulieren, das es erlaubt, das Monotonieverhalten einer Funktion durch Betrachtung der Ableitung der gegebenen Funktion festzustellen (Satz 3.5.1).

Beispiel. Um die Monotonie der Funktionen

$$f(x) = x^n$$

für $n \in \mathbb{N}^*$ mittels der Definition (1.4.4) zu untersuchen, schreiben wir für $x_1 < x_2$

$$x_2^n - x_1^n = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$$

Durch weitere Untersuchung des Vorzeichens der rechten Seite der obigen Zerlegung erhält man:

- n ungerade: $f(x)$ ist streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$.
- n gerade: $f(x)$ ist streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$

1.4.5 Bijektivität

Definition 1.4.5. Eine Funktion $f : D \to W$ heisst

- *injektiv*, wenn aus $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in D$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt.
- *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in W$ ein $x \in D$ gibt mit $f(x) = y$.
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Anschaulich gesprochen bedeutet Injektivität, dass kein Wert aus dem Wertebereich mehr als einmal angenommen wird, und Surjektivität, dass jeder Wert aus dem Wertebereich mindestens einmal angenommen wird. Dementsprechend bedeutet Bijektivität, dass jeder Wert genau einmal angenommen wird. Damit ist die Funktion umkehrbar (siehe unten).

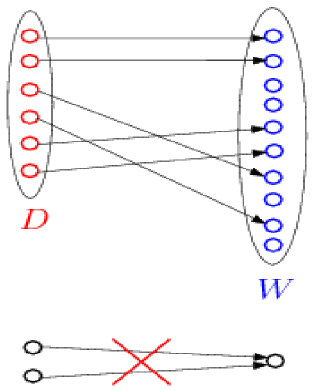


Abbildung 1.8: Injektiv

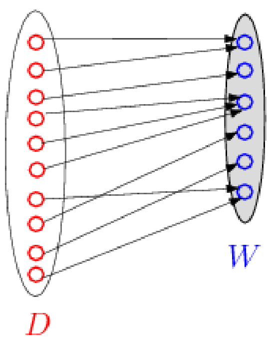


Abbildung 1.9: Surjektiv

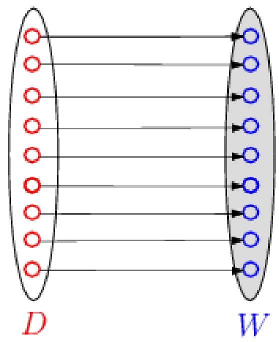


Abbildung 1.10: Bijektiv

Bemerkung. Streng monotone Funktion sind automatisch injektiv, da die Bedingung für strenge Monotonie eine Verschärfung der Bedingung für Injektivität ist.

Beispiel. Um die Injektivität und Surjektivität der Funktionen $f(x) = x^n$ zu untersuchen, müssen wir den Definitions- und Wertebereich genau beachten, und zudem zwischen geraden und ungeraden Exponenten unterscheiden:

- n ungerade: $f(x)$ ist bijektiv als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Die Injektivität folgt aus der strengen Monotonie, und die Surjektivität kann explizit gezeigt werden.
- n gerade: $f(x)$ ist als Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv. Wir zeigen das spezifisch für den Fall $n = 2$:
  - nicht injektiv: Es gilt $f(3) = f(-3) = 9$, im Widerspruch zur Definition von Injektivität.
  - nicht surjektiv: Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$, im Widerspruch zur Definition von Surjektivität.

  Wenn man hingegen die Funktion als Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ auffasst, handelt es sich um eine bijektive Funktion, was man wie oben sehen kann.

1.5 Polynomfunktionen

1.5.1 Grundbegriffe

Definition 1.5.1. Eine *Polynomfunktion* bzw. ein *Polynom* oder eine *ganzrationale Funktion* ist eine Funktion der Form

$$y = f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \quad \text{mit } a_n \neq 0$$

Dabei ist n der *Grad* der Polynomfunktion, und a_0, a_1, $\ldots a_n \in \mathbb{R}$ sind die *Koeffizienten* der Polynomfunktion. Der Definitionsbereich einer Polynomfunktion ist ganz $\mathbb{R}$.

Beispiel. Die Funktion

$$y = 3x^7 - 4x^3 + 5x - 4$$

ist ein Polynom vom Grad 7.

Bemerkung. Polynome spielen in der Informatik eine grosse Rolle, so z.B. in der Komplexitätstheorie. Wenn ein Problem in Polynomialzeit lösbar ist, bedeutet dies, dass die benötigte Rechenzeit einer deterministischen Rechenmaschine nicht stärker als mit einer Polynomfunktion der Problemgrösse wächst. Z.B. ist das Sortieren eines Arrays der Grösse n mit einem einfachen Verfahren (fortwährendes Finden und nach hinten Schieben des grössten der noch vorhandenen Elemente) ein polynomialer Algorithmus, da die Laufzeit quadratisch von n abhängt.

Konstante Funktionen Eine konstante Funktion der Form

$$y = a_0, \tag{1.4}$$

hat als Graph einer zur x-Achse parallele Gerade. Es handelt sich dabei um ein Polynom vom Grad 0.

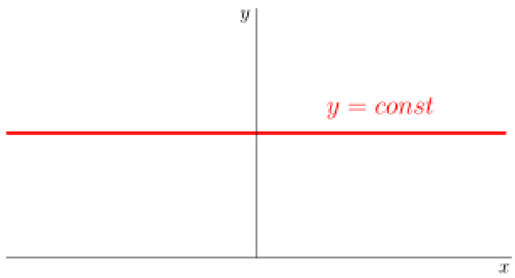


Abbildung 1.11: Konstante Funktion

Bemerkung. Die Funktion f, die alle Werte auf 0 abbildet, d.h. $f(x) = 0$ für alle x ist ein Spezialfall; man sagt manchmal, dass diese Funktion den Grad $-\infty$ hat.

Lineare Funktionen Ein Polynom 1. Grades bzw. eine lineare Funktion ist eine Funktion der Form

$$y = mx + b. \tag{1.5}$$

Der Graph einer solchen Funktion ist eine Gerade mit Steigung m und y-Achsenabschnitt b. Im Spezialfall $m = 0$ geht (1.5) in (1.4) über.

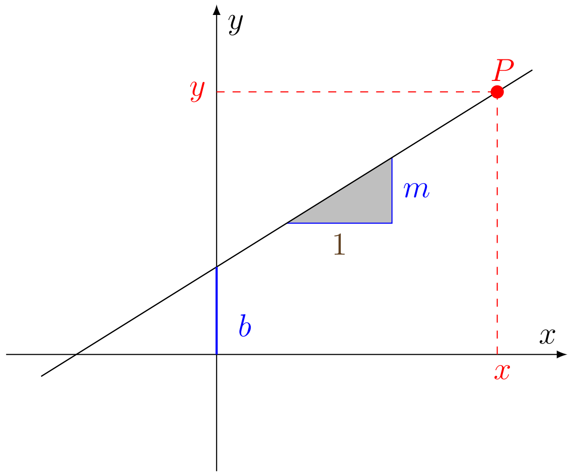


Abbildung 1.12: Lineare Funktion

Beispiel. Die *Identitätsfunktion* bezeichnet diejenige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jede reelle Zahl auf sich selbst abbildet:

$$f(x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

Sie wird häufig mit id bezeichnet.

Bemerkung. Vertikale Geraden, d.h. Geraden parallel zur y-Achse, können sind keine Graphen von Funktionen. Sie können aber durch eine Gleichung der Form $x = a$ dargestellt werden.

Andere Formen der Darstellung einer linearen Funktion sind die *Punkt-Steigungsform*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \tag{1.7}$$

wenn ein Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ und eine Steigung m vorgegeben sind, und die *Zwei-Punkte-Form*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

wenn zwei (verschiedene) Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ vorgegeben sind.

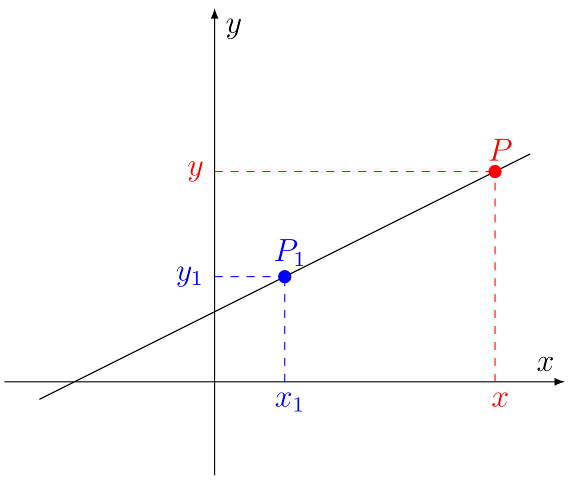


Abbildung 1.13: Punkt-Steigungsform

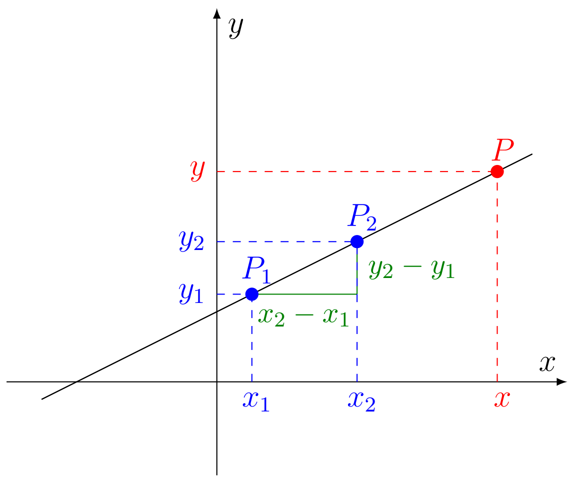


Abbildung 1.14: Zwei-Punkte-Form

Quadratische Funktionen Ein Polynom 2. Grades bzw. eine quadratische Funktion ist eine Funktion der Form

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \tag{1.8}$$

Die Graphen quadratischer Funktionen sind Parabeln, die durch Translationen und Streckungen/Stauchungen aus der der Normalparabel $y = f(x) = x^2$ hervorgehen. Der Koeffizient a bestimmt die Öffnung der Parabel: Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, für $a < 0$ nach unten.

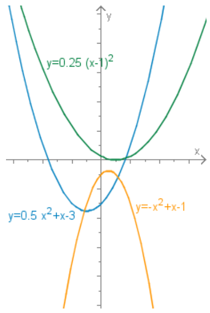


Abbildung 1.15: Quadratische Funktionen

Andere Formen der Darstellung einer quadratischen Funktion sind die folgenden:

- *Produktform:* Falls die Funktion (1.8) reelle Nullstellen x_1, x_2 hat, kann sie in der Form
$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
geschrieben werden.

- *Scheitelpunktsform:* Sei $S = (x_0, y_0)$ der Scheitelpunkt der zu (1.8) gehörenden Parabel. Dann kann die Funktion in der Form
$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$
geschrieben werden. Die Koordinaten von S können aus a, b, c berechnet werden mittels der Formel
$$S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

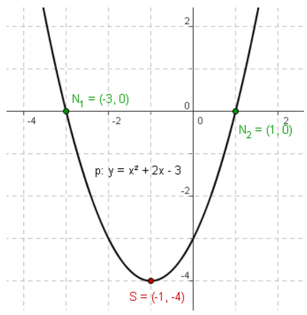


Abbildung 1.16: Scheitelpunkt und Nullstellen einer Parabel

1.5.2 Nullstellen von Polynomfunktionen

Bestimmung von Nullstellen Zur Berechnung der Nullstellen einer Polynomfunktion $y = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ kann gesagt werden:

- Grad 0, d.h. $y = a_0 \neq 0$: Keine Nullstelle
- Grad 1, d.h. $y = a \cdot x + b$ mit $a \neq 0$: Eine Nullstelle $x_0 = -\frac{b}{a}$
- Grad 2, d.h. $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$: Es gibt 0, 1, oder 2 Nullstellen, die mit der "Mitternachtsformel"
$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$
berechnet werden können, falls sie existieren.
- Grad 3, 4: Es existieren (sehr komplizierte) Formeln für die Berechnung von Nullstellen. Wir behandeln diese Formeln nicht.
- Grad $\geq$ 5: *Satz von Abel-Ruffini:* Es existieren keine algebraischen (d.h. nur die Grundrechenarten und Wurzelausdrücke enthaltenden) Formeln für die Berechnung von Nullstellen (ausser in Spezialfällen).

In allen Fällen, wo die Berechnung von Nullstellen auf algebraischem Weg schwierig oder unmöglich ist, verwendet man üblicherweise numerische Approximationsverfahren, um die gesuchten Nullstellen auf iterativem Weg mit der gewünschten Genauigkeit zu bestimmen. Wir werden ein solches Verfahren behandeln, das *Tangentenverfahren von Newton* (siehe Abschnitt 3.9). Dieses Verfahren benützt allerdings Hilfsmittel aus der Differentialrechnung. Ein einfacheres (dafür langsameres) Verfahren ist die *Bisektion*, das sich nur auf den Zwischenwertsatz über stetige Funktionen abstützt.
Wir erinnern daran, dass sich eine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$, falls sie zwei reelle Nullstellen x_1, x_2 hat (siehe Definition 1.4.1), sich in der Form

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

schreiben lässt, vgl. (1.5.1). Für Polynome beliebiger Ordnung gilt entsprechend der Zerlegungssatz:

Satz 1.5.2. Ist x_0 eine Nullstelle der Polynomfunktion $y = f(x)$ vom Grad n, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomfunktion $q(x)$ vom Grad $n - 1$, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot q(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Um im Fall einer bekannten Nullstelle x_0 das reduzierte Polynom $q(x)$ zu finden, führt man eine Polynomdivision durch, die anhand des folgenden Beispiels erläutert wird:

Beispiel. Das Polynom $y = 2x^5 + 4x^4 - 54x^3 - 16x^2 + 136x + 96$ hat die Nullstelle $x_0 = 4$. Um das Polynom in der Form

$$y = (x - 4) \cdot q(x)$$

zu schreiben, führen wir eine Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{l}
\big(\; 2x^5 + 4x^4 - 54x^3 - 16x^2 + 136x + 96\big) : \big(x - 4\big) = 2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 40x - 24 \\
\underline{-\,2x^5 + 8x^4} \\
\qquad 12x^4 - 54x^3 \\
\qquad \underline{-\,12x^4 + 48x^3} \\
\qquad\qquad -\,6x^3 - 16x^2 \\
\qquad\qquad \underline{6x^3 - 24x^2} \\
\qquad\qquad\qquad -\,40x^2 + 136x \\
\qquad\qquad\qquad \underline{40x^2 - 160x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\,24x + 96 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{24x - 96} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Das gesuchte Polynom ist also

$$q(x) = 2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 40x - 24.$$

Eine Polynomfunktion $y = f(x)$ kann auch mehrfache Nullstellen haben; darunter verstehen wir Folgendes:

Definition 1.5.3. Sei $y = f(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad n. Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ heisst *m-fache Nullstelle* (oder *Nullstelle der Multiplizität/Vielfachheit m*) der Polynomfunktion $f(x)$, falls es eine Polynomfunktion $g(x)$ vom Grad $n - m$ gibt, so dass gilt:

$$f(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}$$

Beispiel. Wir betrachten das Polynom $y = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$ und bestimmen davon die Nullstellen samt ihren Vielfachheiten.
Man kann "erraten", dass das Polynom die Nullstelle $x = -1$ hat. Mit Polynomdivision erhält man

$$
\begin{array}{l}
\big(\; x^3 + 8x^2 + 13x + 6\big) : \big(x + 1\big) = x^2 + 7x + 6 \\
\underline{-\,x^3 - x^2} \\
\qquad 7x^2 + 13x \\
\qquad \underline{-\,7x^2 - 7x} \\
\qquad\qquad 6x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{-\,6x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zusammen mit der Zerlegung $x^2 + 7x + 6 = (x + 1)(x + 6)$ ergibt sich damit die Produktdarstellung des ganzen Polynoms:

$$x^3 + 8x^2 + 13x + 6 = (x + 1)^2(x + 6)$$

Also ist $x = -1$ eine doppelte Nullstelle und $x = -6$ eine einfache Nullstelle des gegebenen Polynoms.

Über die Anzahl reeller Nullstellen eines Polynoms lässt sich Folgendes aussagen:

Satz 1.5.4. Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n reelle Nullstellen.

Durch Kombination von Satz 1.5.2, Definition 1.5.3 und Satz 1.5.4 erhält man

Satz 1.5.5. Falls eine Polynomfunktion n-ten Grades genau n reelle Nullstellen (mit Vielfachheiten) hat, so lässt sie sich darstellen als

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \\ &= a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \end{aligned}$$

Die Vielfachheit einer Nullstelle lässt sich auch geometrisch charakterisieren, wie sich an der folgenden graphischen Darstellung von ein-, zwei- und dreifachen Nullstellen ablesen lässt:

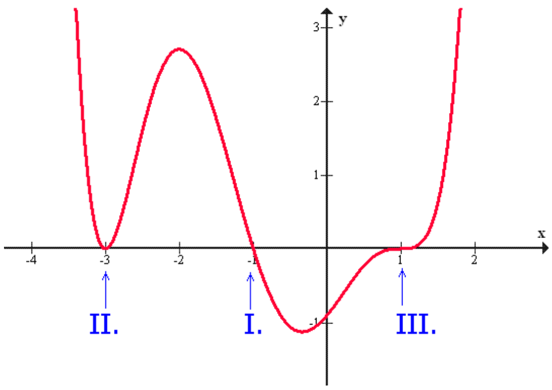


Abbildung 1.17: Nullstellen eines Polynoms der Vielfachheit 1 (bei der Markierung I.), 2 (bei II.), 3 (bei III.)

Man beachte, dass sich Satz 1.5.4 und Satz 1.5.5 auch zur Rekonstruktion eines Polynoms aus bekannten Nullstellen bekannter Vielfachheit benützen lassen.

Beispiel. Von einem Polynom 5. Grades $y = p(x)$ ist bekannt, dass es bei $x_1 = -2$ eine doppelte Nullstelle und bei $x_2 = 1$ eine dreifache Nullstelle hat. Zudem ist $p(0) = 10$. Wir rekonstruieren aus diesen Informationen das gesuchte Polynom:
Aus den Angaben über die Nullstellen wissen wir, dass das Polynom die Form

$$p(x) = A(x + 2)^2(x - 1)^3$$

haben muss; neben einer doppelten und einer dreifachen Nullstelle kann $p(x)$ wegen des Grades 5 keine weiteren Nullstellen mehr haben. Einsetzen von $x = 0$ ergibt $p(0) = A \cdot 4 \cdot (-1) = -4A$. Also folgt $-4A = 10$ und damit $A = -\frac{5}{2}$. Das Polynom ist also

$$p(x) = -\frac{5}{2}(x + 2)^2(x - 1)^3 = -\frac{5}{2}(x^2 + 4x + 4)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -\frac{2}{5}(\ldots)$$

Division mit Rest Satz 1.5.2 gibt Auskunft über die Abspaltung eines Terms $x - x_0$, falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms $y = f(x)$ ist. Falls x_0 *keine* Nullstelle des Polynoms ist, kann man den Term $x - x_0$ nicht ohne Rest abspalten. Man kann aber die Polynomdivision $f(x) : (x - x_0)$ trotzdem durchführen und erhält dann einen Rest. Wir behandeln diesen Fall etwas allgemeiner in Satz 1.10.5 über die Darstellung von rationalen Funktionen als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenrationalen Funktion.

1.6 Weitere Eigenschaften von Polynomfunktionen

Identitätssatz Ein Polynom wird durch seine Koeffizienten eindeutig bestimmt. Präzise können wir Folgendes aussagen:

Satz 1.6.1. Zwei Polynome

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$$

und

$$Q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot x + b_0$$

sind genau dann gleich, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_n = b_n$$

Man beachte, dass in diesem Satz zwar die Polynome als vom gleichen Grad n vorausgesetzt werden, dass er aber auch für Polynome von unterschiedlichem Grad gelten, wenn das Polynom vom tieferen Grad einige "künstliche" Zusatzterme mit Null-Koeffizienten erhält.
Der praktische Nutzen dieses Satzes besteht im Prinzip des Koeffizientenvergleichs, den wir an einem Beispiel illustrieren:

Beispiel. Es seien die beiden Polynome $P(x) = ax + 2a + b$ und $Q(x) = 3x + 2$ gegeben. Für welche Werte von a, b sind die beiden Polynome gleich?
Nach Satz 1.6.1 müssen alle Koeffizienten der beiden Polynome übereinstimmen. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ 2a + b & = & 2 \end{array} \right|$$

mit Lösung

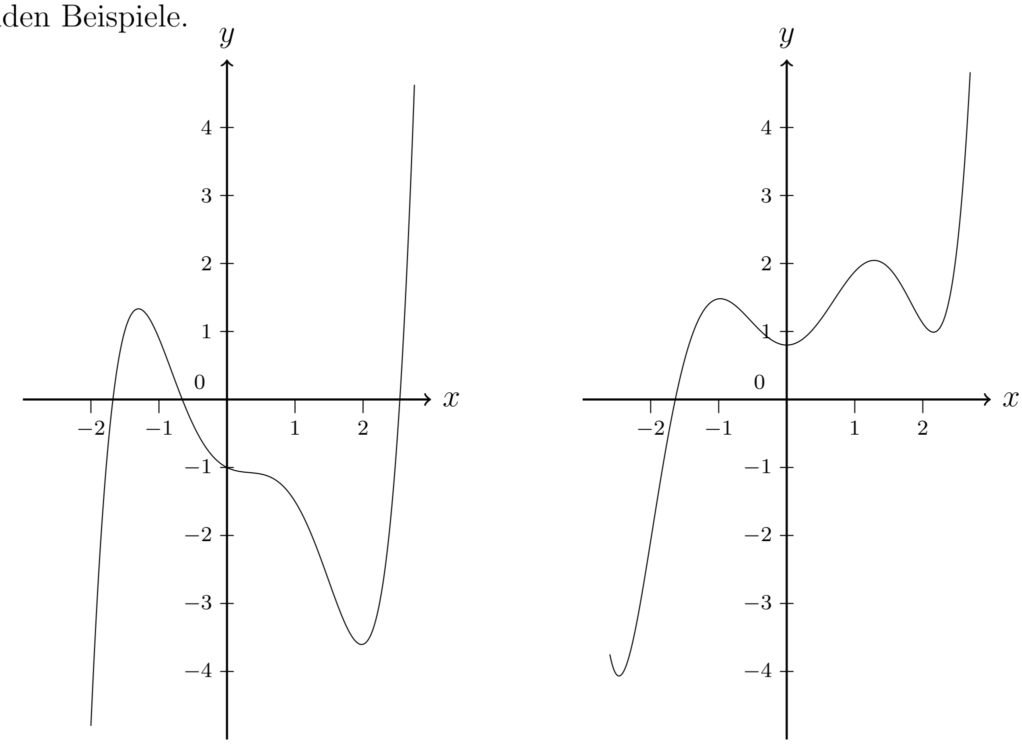
$$a = 3, \quad b = -4.$$

Symmetrie Wir erinnern an die Definition 1.4.2 von geraden und ungeraden Funktionen, und das darauffolgende Beispiel: Die Funktionen $y = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sind gerade bzw. ungerade, falls n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist. Für Polynome können wir daraus die folgenden Schlüsse ziehen:

Satz 1.6.2. Eine Polynomfunktion,

- die nur Terme mit geraden Exponenten enthält, ist eine gerade Funktion.
- die nur Terme mit ungeraden Exponenten enthält, ist eine ungerade Funktion.

Durch die Summation von Funktionen unterschiedlicher Typen von Symmetrie geht die Symmetrie im Allgemeinen verloren, daher haben Polynome, in denen gerade und ungerade Exponenten vorkommen, keine der beiden Typen von Symmetrie, siehe z.B. die folgenden Beispiele.



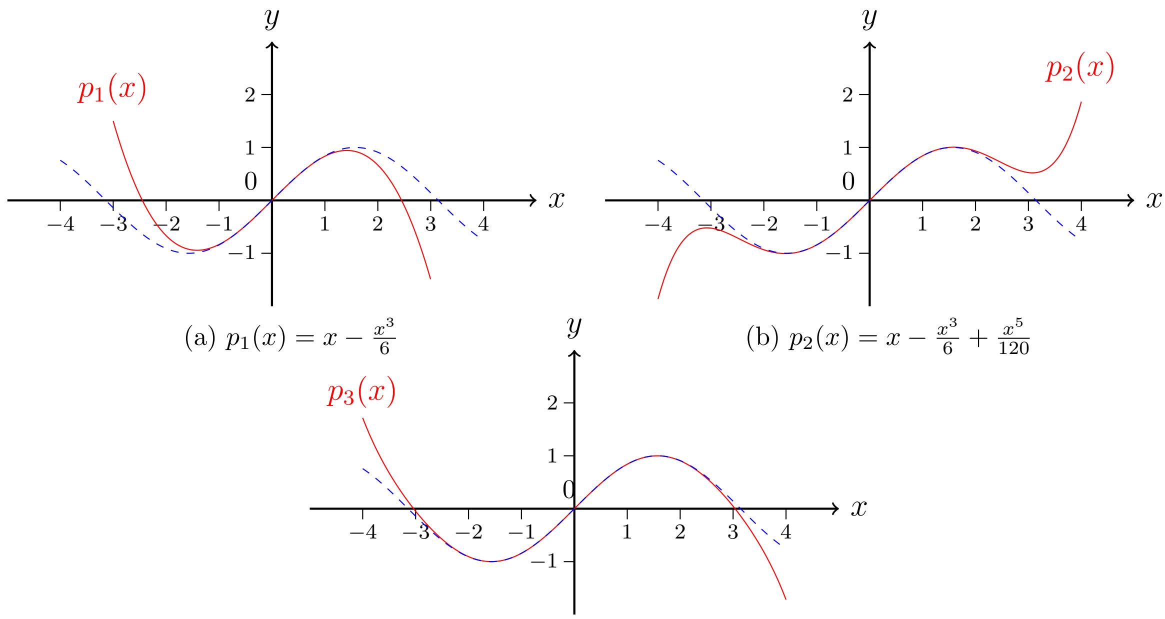
$f(x) = \frac{3}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$ $\qquad$ $g(x) = \frac{2}{25}x^6 - \frac{4}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{8}{5}x^2 + \frac{4}{5}$

Abbildung 1.18: Polynome ohne Symmetrie

Polynomfunktionen als Approximation für kompliziertere Funktionen Polynome spielen in der Analysis eine wichtige Rolle – unter anderem deshalb, weil sich viele „unhandliche" Funktionen lokal in guter Näherung durch Polynomfunktionen darstellen lassen.

Das ist hilfreich, da Polynomfunktionen sehr angenehme Eigenschaften haben – beispielsweise lassen sie sich einfach ableiten und integrieren (wie in den nächsten Kapiteln gezeigt wird), und ausserdem entstehen bei der Addition/Subtraktion/Multiplikation von Polynomen keine komplizierten Formeln, sondern wiederum Polynome.

Beispiel (Annäherung der Sinusfunktion durch Polynome)**.** Die Sinusfunktion (jeweils blau gestrichelt) und die jeweilige Approximation durch Polynomfunktionen (rot) verschiedenen Grades:



(a) $p_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$

(b) $p_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

(c) $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

Abbildung 1.19: Polynomiale Approximation der Sinusfunktion

Es stellt sich natürlich die Frage, wie man zu einer gegebenen nicht-polynomialen Funktion wie $y = \sin(x)$ die Polynome finden kann, die die Funktion immer besser approximieren. Dazu benötigt man die Theorie der sogenannten *Taylor-Polynome*.

1.7 Horner-Schema

Das Horner-Schema ist ein spezielles Berechnungsverfahren für die Funktionswerte von Polynomen, das die erforderliche Anzahl Multiplikationen für diese Berechnungen stark reduziert. Zu einem Polynom

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

lautet das entsprechende Horner-Schema:

$$y = (((a_n x + a_{n-1})x + \ldots)x + a_1)x + a_0$$

Es gibt standardisierte tabellarische Darstellungen des Hornerschemas, siehe die Illustration in den folgenden Beispielen; zudem kann das Horner-Schema (nebst anderem) auch für die Durchführung von Polynomdivisionen verwendet werden.
Wir erläutern zunächst das Grundmuster des Hornerschemas, bevor wir es auf Polynomdivisionen anwenden.

Beispiel. Wir werten das Polynom

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (((2x-3)x+4)x-5)x+6$$

an der Stelle $x = 2$ aus. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
p(2) &= (((\underbrace{\mathbf{2}\cdot 2}_{=\mathit{4}} - 3)\cdot 2 + 4)\cdot 2 - 5)\cdot 2 + 6 \\
&= ((\underbrace{\mathbf{1}\cdot 2}_{=\mathit{2}} + 4)\cdot 2 - 5)\cdot 2 + 6 \\
&= (\underbrace{\mathbf{6}\cdot 2}_{=\mathit{12}} - 5)\cdot 2 + 6 \\
&= \underbrace{\mathbf{7}\cdot 2}_{=\mathit{14}} + 6 \\
&= \mathbf{20}
\end{aligned}$$

Schematisch kann diese Rechnung folgendermassen dargestellt werden:

$$\begin{array}{c|rrrrr}
 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\
2 & & 4 & 2 & 12 & 14 \\
\hline
 & 2 & 1 & 6 & 7 & 20
\end{array}$$

In der ersten Zeile stehen die Koeffizienten des Polynoms (in absteigender Reihenfolge der Potenzen); in der mittleren bzw. letzten Zeile stehen die *kursiv* bzw. **fett** markierten Zwischenergebnisse der obigen Rechnung.
Die Berechnung des gleichen Funktionswerts ohne das Hornerschema,

$$\begin{aligned}
p(2) &= 2\cdot 2^4 - 3\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 6 \\
&= 2\cdot 16 - 3\cdot 8 + 4\cdot 4 - 5\cdot 2 + 6 \\
&= 32 - 24 + 16 - 10 + 6 \\
&= 20
\end{aligned}$$

ergibt natürlich das gleiche Resultat, benötigt aber erheblich mehr Rechenoperationen, insbesondere mehr Multiplikationen. Dies ist auch vom Standpunkt der Numerik her günstig, da sich Fehler bei Multiplikationen von gerundeten oder fehlerhaften Grössen bei Multiplikationen stärker aufschaukeln als bei Additionen.

Wie erwähnt kann das Hornerschema auch benützt werden, um Polynomdivisionen durchzuführen, für den Fall, dass man eine Nullstelle eines Polynoms schon kennt. Wir zeigen das an einem schon bei der Behandlung von Polynomdivisionen benützten Beispiel.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir betrachten das Polynom $y = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$ mit der bekannten Nullstelle $x = -1$. Es gilt also $p(-1) = 0$. Eine Anwendung des Hornerschemas auf diesen Fall liefert das entsprechende Resultat:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 13 & 6 \\ -1 & & -1 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 7 & 6 & 0 \end{array}$$

Wenn wir dies mit dem Resultat der Polynomdivision vergleichen,

$$(x^3 + 8x^2 + 13x + 6) : (x + 1) = x^2 + 7x + 6$$

siehe Seite 17, sehen wir, dass wir die Koeffizienten 1, 7, 6 des Ergebnisses der Polynomdivision aus der letzten Zeile des zugehörigen Hornerschemas ablesen können.
Man beachte aber, dass wir das Hornerschema nicht dazu verwenden können, Nullstellen zu finden, sondern nur, Nullstellen effizient abzuspalten, falls wir sie schon (wie auch immer) gefunden haben.

1.8 Operationen mit Funktionen

1.8.1 Grundoperationen

Da wir annehmen, dass Funktionen reelle Werte haben, lassen sich Funktionen addieren, multiplizieren etc. Wir benutzen dieselben Symbole wie bei der Addition, Multiplikation, etc von Zahlen; streng genommen haben sie hier aber eine andere Bedeutung: Sie beziehen sich auf die Ausführung einer Operation für unendlich viele Variablenwerte.

Definition 1.8.1. Seien zwei Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ und $g : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ gegeben. Dann können wir die folgenden Operationen definieren:

$$\begin{array}{llll}
f+g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto & f(x)+g(x) & \\
f-g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto & f(x)-g(x) & \\
f\cdot g\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto & f(x)\cdot g(x) & \\
\dfrac{f}{g}\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{falls } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D \\
c\cdot f\colon & D \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto & c\cdot f(x) & \text{für ein festes } c \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Bemerkung. Es mag der Eindruck entstehen, dass hier gar nichts Neues erklärt wird, da man ja schon lange weiss, was die Grundrechenarten Addition, Subktration, Multiplikation und Division sind. Das Neue an Definition 1.8.1 ist jedoch, dass die schon lange für Zahlen bekannten Operationen jetzt auch für Funktionen definiert werden. Diese Definition geschieht dadurch, dass die Grundoperationen auf die bekannte Art für jedes einzelne x ausgeführt werden; dadurch wird dann die entsprechende Grundoperation auf Funktionen übertragen.

Die Addition von Funktionen kann folgendermassen graphisch veranschaulicht werden:

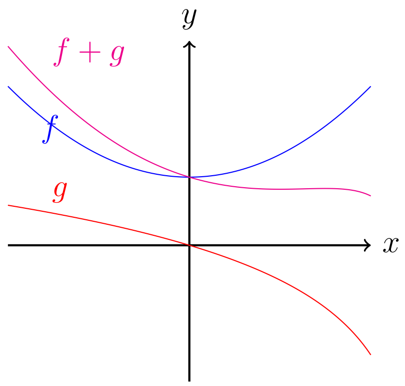


Abbildung 1.20: Addition von Funktionen

Beispiel. Wir betrachten die auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g, wobei $f(x) = -3x+4$ und $g(x) = x^2$. Die Funktion $f \cdot g$ ist ebenfalls auf $\mathbb{R}$ definiert, indem die Funktionswerte von f und von g punktweise multipliziert werden:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (-3x + 4) \cdot x^2 = -3x^3 + 4x^2$$

1.8.2 Komposition und Umkehrfunktion

Wir beschreiben die Verkettung von Funktionen zunächst schematisch:

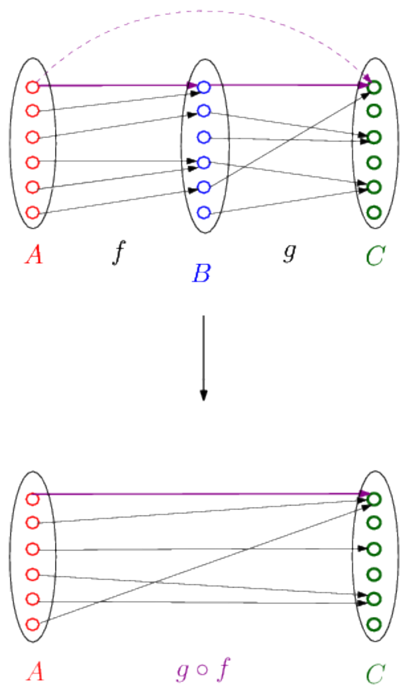


Abbildung 1.21: Verkettung von Funktionen

Definition 1.8.2. Für zwei gegebene Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, ist die Funktion $g \circ f : A \to C$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

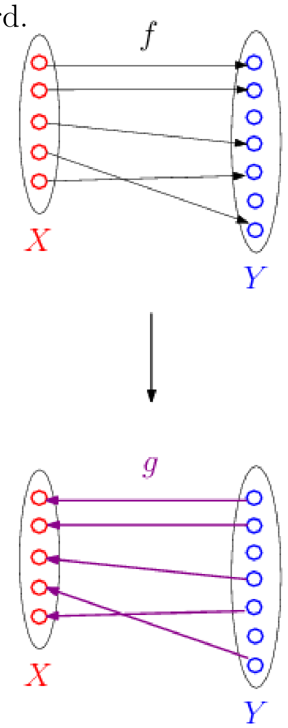
Diese neue Funktion heisst *Komposition* von f und g. (Andere Bezeichnungen: *Verkettung*, *Hintereinanderschaltung*.)

Bemerkung. Bei der Komposition $(g \circ f)(x)$ wird zuerst diejenige Funktion ausgeführt, die *rechts* steht. Zudem ist die Operation „Verkettung von Funktionen“ *nicht kommutativ*. D.h. $g \circ f$ ist im Allgemeinen nicht dasselbe wie $f \circ g$.

Beispiel. Wir betrachten die Funktionen $f(x) = 3x + 7$ und $g(x) = \sqrt{x}$. Die zusammengesetzten Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ sind

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 7 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(3x + 7) = \sqrt{3x + 7} \end{aligned}$$

Wenn eine Funktion $f : D \to W$ bijektiv ist, existiert eine Umkehrfunktion $g : W \to D$, die durch die Forderung $(g \circ f)(x) = x$ eindeutig festgelegt wird. Wenn f nur injektiv, nicht aber surjektiv (und damit auch nicht bijektiv) ist, kann man den Wertebereich W verkleinern, sodass f bijektiv wird.



$(f^{-1} := g)$

Abbildung 1.22: Umkehrfunktion

Definition 1.8.3. Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion. Die *Umkehrfunktion* $g : W \to D$ ist definiert durch

$$g(y) = x, \quad \text{wobei } x \text{ durch } f(x) = y \text{ eindeutig definiert wird.}$$

Diese Funktion g heisst wird auch als f^{-1} bezeichnet; diese Bezeichnung ist aber nicht mit dem Kehrwert zu verwechseln!

Satz 1.8.4. Sei $f : D \to W$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $g : W \to D$. Dann gelten die Beziehungen

$$(g \circ f)(x) = x, \qquad (f \circ g)(y) = y \quad \text{für alle } x \in D,\ y \in W$$

Um die Umkehrfunktion einer bijektiven Funktion $f : D \to W$ zu bestimmen, lösen wir die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auf und erhalten so die Umkehrfunktion

$$x = f^{-1}(y) = g(y). \tag{1.9}$$

Da es üblich ist, die unabhängige Variable mit x zu bezeichnen, vertauschen wir die Variablen und erhalten aus (1.9) die Umkehrfunktion in der Form

$$y = g(x).$$

Beispiel. Wir bestimmen die Umkehrfunktion der folgenden Funktionen:

- $y = f(x) = 0.8x + 3$: Auflösen nach x ergibt

  $$y = 0.8x + 3 \Rightarrow x = \frac{5}{4}(y - 3) = \frac{5y}{4} - \frac{15}{4}$$

  Die Umkehrfunktion ist also

  $$y = f^{-1}(x) = \frac{5x}{4} - \frac{15}{4}$$

  Sowohl f als auch f^{-1} haben ganz $\mathbb{R}$ als Definitions- und Wertebereich.

- $y = \frac{3x}{2x-5}$: Auflösen nach x ergibt

  $$y = \frac{3x}{2x - 5} \Rightarrow (2x - 5)y = 3x \Rightarrow x(2y - 3) = 5y \Rightarrow x = \frac{5y}{2y - 3}$$

  Die Umkehrfunktion ist also

  $$y = f^{-1}(x) = \frac{5x}{2x - 3}$$

  Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$, dies ist auch der Wertebereich von f^{-1}. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, dies ist auch der Wertebereich von f.

Man erhält den Graphen der Umkehrfunktion $y = g(x)$ einer bijektiven Funktion $y = f(x)$, indem man den Graphen von f an der Geraden $y = x$ spiegelt.

Beispiel. a) Graph der Umkehrfunktion f^{-1} einer gegebenen Funktion f:

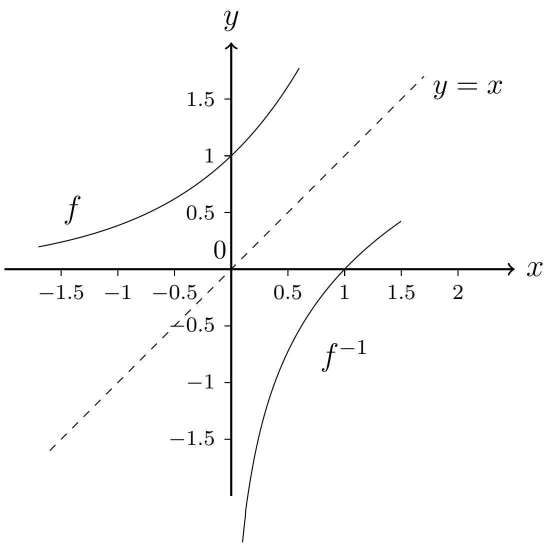


Abbildung 1.23: Graph der Umkehrfunktion

b) Wenn man den folgenden Funktionsgraphen an der Geraden $y = x$ spiegelt, erhält man eine Kurve, die kein Graph einer Funktion sein kann (weil es x-Koordinaten gibt, zu denen zwei verschiedene y-Koordinaten auf der Kurve gehören). Dies zeigt, dass die gegebene Funktion f nicht invertierbar sein kann.

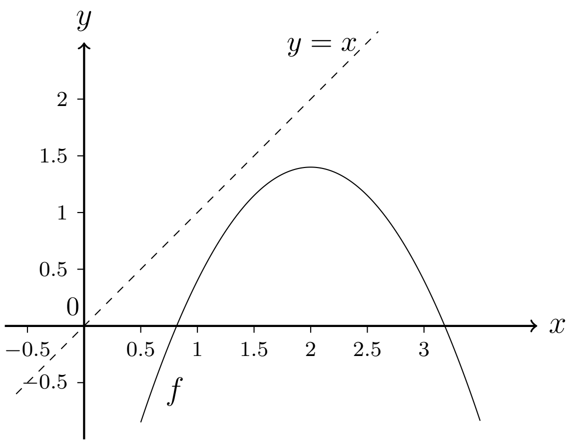


Abbildung 1.24: Nicht umkehrbare Funktion

1.9 Einfache Koordinatentransformationen

Es kommt immer wieder vor, dass man von einem Koordinatensystem zu einem anderen wechselt. Die Koordinaten eines Punktes werden dabei *transformiert*. Wir werden verschiedene Möglichkeiten betrachten, eine gegebene Funktion zu transformieren und damit in eine neue (aber verwandte) Funktion umzuwandeln.

Beispiel. Ein Mann wirft einen Stein waagrecht von einer 8 Meter hohen Klippe, so dass die Geschwindigkeit beim Abwurf 10 m/s beträgt.

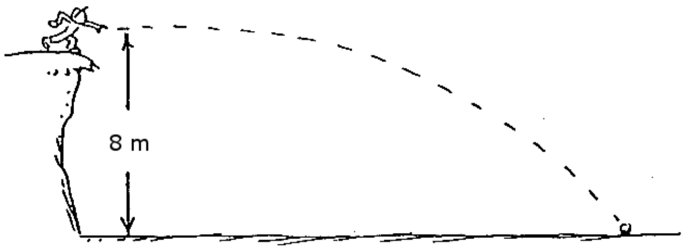


Abbildung 1.25: Schiefer Wurf

Die Höhe des Steines nach x Metern ist dabei durch die folgende Formel gegeben:

$$y = f(x) = 8 - \frac{g}{450} \cdot x^2 \quad (g = 9.81\ldots) \tag{1.10}$$

a) Wenn der der Abwurf 2 m höher erfolgt, verschiebt sich die Kurve um 2m nach oben, und wir erhalten

$$y = f(x) + 2 = 10 - \frac{g}{450} \cdot x^2$$

b) Wenn der Abwurf 3 m weiter hinten (d.h. links) erfolgt, verschiebt sich die Kurve um 3m nach links. Dies bedeutet, dass wir x durch $x+3$ ersetzen müssen, und wir erhalten

$$y = f(x+3) = 10 - \frac{g}{450} \cdot (x+3)^2$$

c) Wenn die Angaben auf der x-Achse neu in dm statt in m angegeben werden, bedeutet das eine Skalierung um den Faktor 0.1 der x-Achse, und wir erhalten

$$y = f\left(\frac{x}{10}\right) = 10 - \frac{g}{450} \cdot \left(\frac{x}{10}\right)^2$$

Wir untersuchen nun, wie sich die Änderungen einer Funktionsgleichung auf den Funktionsgraphen der gegebenen Funktion auswirken. Es geht hier vor allem darum, den Zusammenhang zwischen *analytischen* und *geometrischen* Eigenschaften einer gegebenen Funktion kennenzulernen. Wir untersuchen dabei die Addition einer Konstanten zum Funktionswert, die Addition einer Konstanten zur unabhängigen Variablen, die Multiplikation des Funktionswerts mit einer Konstanten sowie die Multiplikation der unabhängigen Variablen mit einer Konstanten.

- *Addition einer Konstanten c zum Funktionswert:* Aus der gegebenen Funktion $y = f(x)$ wird die neue Funktion
$$y = f(x) + c.$$
Dies führt zu einer Verschiebung des Graphen um den Wert c in y-Richtung, siehe Abbildung 1.26.

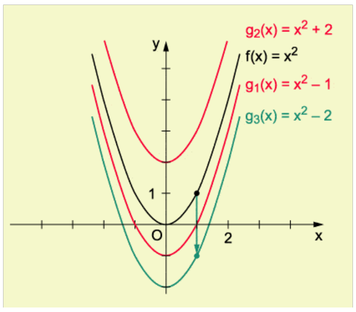


Abbildung 1.26: Verschiebung in y-Richtung

- *Addition einer Konstanten c zur unabhängigen Variablen:* Aus der gegebenen Funktion $y = f(x)$ wird die neue Funktion
$$y = f(x + c).$$
Dies führt zu einer Verschiebung des Graphen um den Wert c in die negative x-Richtung, siehe Abbildung 1.27.

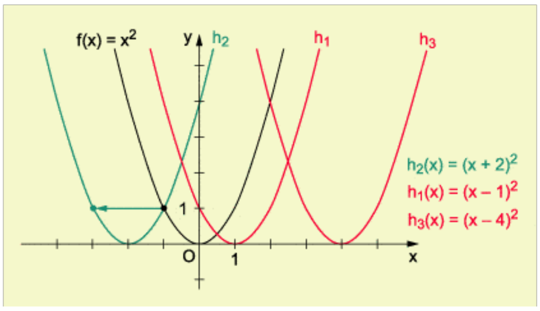


Abbildung 1.27: Verschiebung in x-Richtung

- *Multiplikation des Funktionswerts mit einer Konstanten c:* Aus der gegebenen Funktion $y = f(x)$ wird die neue Funktion
$$y = c \cdot f(x).$$

Dies führt zu einer Streckung ($|c| > 1$) bzw. Stauchung ($|c| < 1$) des Graphen um den Faktor c in y-Richtung, zudem im Fall $c < 0$ um eine Spiegelung an der y-Achse, siehe Abbildung 1.28.

- *Multiplikation der unabhängigen Variablen mit einer Konstanten c:* Aus der gegebenen Funktion $y = f(x)$ wird die neue Funktion

$$y = f(c \cdot x).$$

Dies führt zu einer Stauchung ($|c| > 1$) bzw. Streckung ($|c| < 1$) des Graphen um den Faktor c in x-Richtung, zudem im Fall $c < 0$ um eine Spiegelung an der x-Achse, siehe Abbildung 1.28.

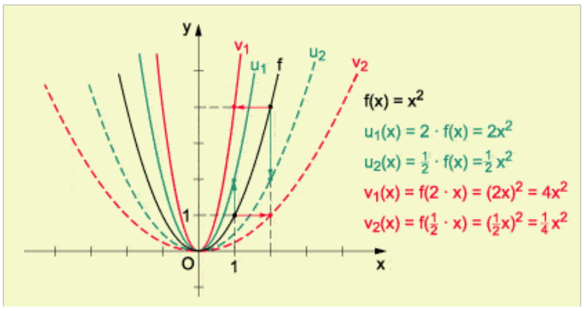


Abbildung 1.28: Streckung/Stauchung

Natürlich können diese Transformationen auch kombiniert werden. Man beachte dabei, dass es auf die Reihenfolge ankommt. Vertauscht man beispielsweise eine Verschiebungs- und eine Streckungsoperation, so kommt am Ende eine andere Funktion heraus.

Beispiel. Wenn man die Funktion $y = f_0(x) = x^2$ geschieht

- zuerst um den Faktor 2 in x-Richtung streckt und dann um den Wert 1 in x-Richtung verschiebt, erhält man nacheinander

$$f_1^{(1)}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} \qquad f_2^{(1)}(x) = \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{x^2 - 2x + 1}{4}$$

Insbesondere hat $f_2^{(1)}$ eine Nullstelle bei $x = 1$.

- zuerst um den Wert 1 in x-Richtung verschiebt und dann um den Faktor 2 in x-Richtung streckt, erhält man nacheinander

$$f_1^{(2)}(x) = (x-1)^2 \qquad f_2^{(2)}(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{4}$$

Insbesondere hat $f_2^{(2)}$ eine Nullstelle bei $x = 2$.

1.10 Rationale Funktionen

1.10.1 Grundbegriffe

Wenn man zwei Polynome addiert, substrahiert oder multipliziert, erhält man wieder ein Polynom. Hingegen ist der Quotient zweier Polynome im Allgemeinen kein Polynom mehr, sondern eine sog. *rationale Funktion*.

Definition 1.10.1. Eine *rationale* bzw. *gebrochenrationale Funktion* ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots b_1 x + b_0} \quad \text{mit } a_m \neq 0,\ b_n \neq 0$$

$g(x)$: Zählerpolynom vom Grad m
$h(x)$: Nennerpolynom vom Grad n

Wenn $n > m$ gilt, so heisst die Funktion *echt (gebrochen) rational.*
Wenn $n \leq m$ gilt, so heisst die Funktion *unecht (gebrochen) rational*
(vgl. echte und unechte Brüche)

Beispiel. Die Funktionen

$$y = \frac{1}{x^n} \qquad\qquad y = \frac{x}{x^2+1}$$

sind echt (gebrochen)rationale Funktionen, hingegen ist

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

eine unecht (gebrochen)rationale Funktion.

1.10.2 Eigenschaften von rationalen Funktionen

Nullstellen Die Nullstellen einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ sind die Nullstellen des Zählerpolynoms $p(x)$, solange das Nennerpolynom an den betreffenden Stellen nicht ebenfalls verschwindet. Es gilt also:

Satz 1.10.2. Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist genau dann eine Nullstelle der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn

$$p(x_0) = 0, \qquad q(x_0) \neq 0$$

gilt.

Beispiel. Die Nullstellen der rationalen Funktion $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ sind $x_{1,2} = \pm 1$.

Polstellen Unter den Definitionslücken einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ versteht man die Nullstellen des Zählerpolynoms $q(x)$. Je nachdem, ob es sich bei dem betreffenden x_0 ebenfalls um eine Nullstelle des Zählerpolynoms[1] $p(x)$ handelt oder nicht, spricht man von einer hebbaren Definitionslücke oder einer Polstelle. Wir betrachten zuerst Polstellen.

Definition 1.10.3. Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine *Polstelle* bzw. ein *Pol* der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wenn

$$q(x_0) = 0, \qquad p(x_0) \neq 0$$

gilt. Wenn $q(x)$ bei x_0 eine mehrfache Nullstelle hat, spricht man entsprechend von einer mehrfachen Polstelle von $f(x)$.
An einer Polstelle x_0 einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ schmiegt sich der Graph *asymptotisch* an die in der Polstelle errichtete Parallele zur y-Achse an, der sog. *vertikalen Asymptote* oder *Polgerade*. Je nach dem Grad der Polstelle erfolgt diese Annäherung auf der gleichen oder auf unterschiedlichen Seiten der x-Achse.

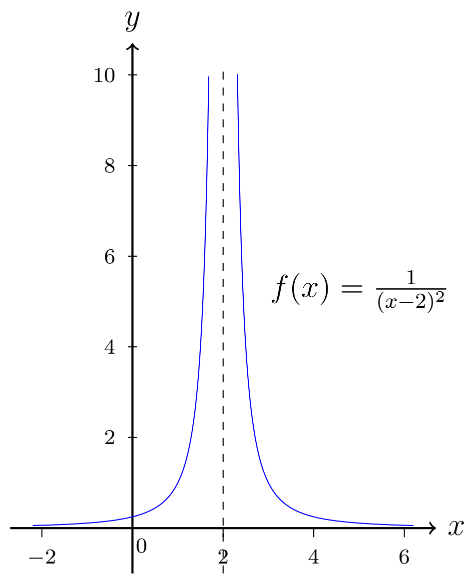


Abbildung 1.29: Polstelle einer rationalen Funktion

Beispiel. Wir betrachten die rationale Funktion $y = \frac{x}{x^2-4}$ und bestimmen Null- und Polstellen.

- Die einzige Nullstelle der Funktion ist $x = 0$.
- Die Polstellen der Funktion sind $x_{1,2} = \pm 2$.

[1] bzw. präzise: um eine Nullstelle der mindestens gleich grossen Ordnung

Hebbare Defintionslücke Wir betrachten schliesslich den Fall, dass es für eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, das eine Nullstelle sowohl des Zählerpolynoms $p(x)$ als auch des Nennerpolynoms $q(x)$ ist. Wir betrachten nur den Fall, dass beide Nullstellen einfache Nullstellen sind. Prinzipiell kann man dann einen Faktor $x - x_0$ aus der Funktion kürzen, allerdings vergrössert man dadurch den Definitionsbereich der Funktion, was streng genommen eine andere Funktion ergibt. Wir erklären diesen Sachverhalt anhand eines Beispiels.

Beispiel. Wir betrachten die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Dann ist $x_0 = 1$ eine Definitionslücke von $f(x)$, dementsprechend sieht der Graph von $f(x)$ folgendermassen aus:

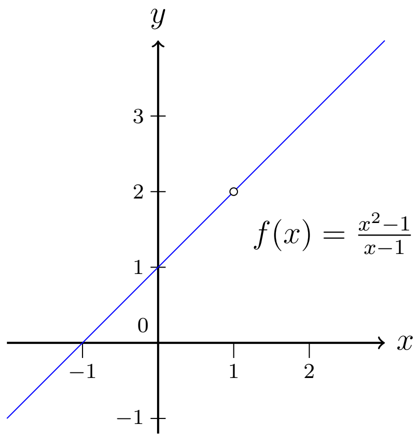


Abbildung 1.30: Hebbare Definitionslücke

Wenn wir in $f(x)$ den Faktor $x - 1$ kürzen, bleibt $x + 1$ übrig; man kann aber nicht sagen, dass die Funktionen $f(x)$ und $g(x) = x + 1$ übereinstimmen. Die beiden Funktionen haben nämlich nicht den gleichen Definitionsbereich: Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist $\mathbb{R}$, der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Man kann aber sagen, dass $g(x)$ aus $f(x)$ durch „Stopfen“ der Definitionslücke hervorgegangen ist, d.h. durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

Dann gilt tatsächlich

$$\tilde{f}(x) = g(x) = x + 1.$$

Beispiel. Wir bestimmen die Nullstellen, Polstellen und hebbare Definitionslücken der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12}$$

Wenn wir Zähler und Nenner in Faktoren zerlegen, erhalten wir die faktorisierte Darstellung

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)^2(x-3)(x+4)}$$

von $f(x)$. Damit sind die Nullstellen, Polstellen und hebbaren Definitionslücken erkennbar:

- Nullstelle: $x = -2$
- Polstellen: $x = 1$ (doppelt), $x = -4$
- Hebbare Definitionslücke: $x = 3$

Wenn wir die hebbare Definitionlücke "stopfen", indem wir den Faktor $(x - 3)$ kürzen, erhalten wir die neue Funktion

$$\tilde{f}(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2(x+4)} = \frac{x+2}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$$

die mit $f(x)$ in der Beziehung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 3 \\ \frac{5}{28} & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

steht.

Symmetrie Die Symmetrie einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ hängt von den Symmetrien der beiden Polynome $p(x)$ und $q(x)$ ab. Im Allgemeinen gilt auch hier, dass in den meisten Fällen eine gegebene rationale Funktion weder gerade noch ungerade ist. Falls allerdings sowohl $p(x)$ als auch $q(x)$ eine Symmetrie aufweisen, hat auch $f(x)$ eine Symmtrie, und zwar folgendermassen:

- Falls $p(x)$ und $q(x)$ denselben Symmetrietyp haben (d.h. beide gerade oder beide ungerade), ist $f(x)$ eine gerade Funktion.
- Falls $p(x)$ und $q(x)$ einen unterschiedlichen Symmetrietyp haben (d.h. $p(x)$ gerade und $q(x)$ ungerade oder umgekehrt), ist $f(x)$ eine ungerade Funktion.

Beispiel. Genauso wie für die Monome $y = x^n$ gilt für die Funktionen

$$y = \frac{1}{x^n}$$

dass es sich um eine gerade bzw. ungerade Funktion handelt, je nachdem ob n eine gerade bzw. ungerade natürliche Zahl ist. Dies folgt daraus, dass man den Zähler als $1 = x^0$ (eine gerade Funktion) schreiben kann und dann diese Regel anwendet.

Asymptotisches Verhalten im Unendlichen Wir untersuchen nun, wie sich eine rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$, verhält. Dabei spielt der Begriff der Asymptote eine wichtige Rolle.

Definition 1.10.4. Eine *Asymptote* einer Funktion f ist eine Funktion g mit der folgenden Eigenschaft: Der Graph von f nähert sich dem Graphen von g beliebig genau an für $x \to \infty$.

Bemerkung. Wir werden den Sachverhalt "beliebig genau annähern" in Abschnitt 3.1.1 präzisieren, mittels des Begriffs des Grenzwerts von Funktionen.

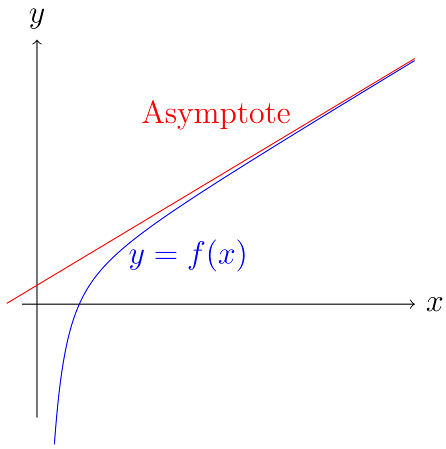


Abbildung 1.31: Asymptote einer Funktion $y = f(x)$

Bemerkung. Wir haben schon bei Polstellen von vertikalen Asymptoten gesprochen, siehe Definition 1.10.3. Vertikale Asymptoten sind allerdings nicht Asymptoten im Sinn von Definition 1.10.4, da sie keine Funktionsgraphen sind.

Um das asymptotische Verhalten einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ zu untersuchen, müssen wir die Fälle von echt oder unecht gebrochenrationalen Funktionen unterscheiden, vgl. Definition 1.10.1. Eine echt gebrochenrationale Funktion strebt für $x \to \pm\infty$ immer gegen Null, bzw. die x-Achse ist eine Asymptote einer solchen Funktion. Um das asymptotische Verhalten von unecht gebrochenrationalen Funktionen zu bestimmen, benötigen wir die folgende Zerlegung:

Satz 1.10.5. Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion. Dann gibt es eine Polynomfunktion $g(x)$ ("Quotient ohne Rest") und eine echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$ ("Rest"), sodass $f(x)$ in der Form

$$f(x) = g(x) + r(x) \tag{1.12}$$

geschrieben werden kann. Diese Zerlegung ist eindeutig.

Das Polynom $g(x)$ ist dann die Asymptote der Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$.

Bemerkung.

- Falls $f(x)$ selbst schon echt gebrochenrational ist, ist (1.12) durch $g(x) = 0$ und $r(x) = f(x)$ erfüllt.
- Falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ unecht gebrochenrational ist, kann man $g(x)$ z.B. durch *Polynomdivision* $p(x) : q(x)$ finden. Der bei dieser Polynomdivision anfallende Rest ist dann die echt gebrochenrationale Funktion $r(x)$.

Beispiel. Um für die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

die Zerlegung (1.12) zu finden, führen wir eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^2 \qquad +1\big) : \big(x-1\big) = x + 1 + \dfrac{2}{x-1} \\
\underline{-\,x^2 + x} \\
\qquad\quad x + 1 \\
\qquad\; \underline{-\,x + 1} \\
\qquad\qquad\;\; 2
\end{array}$$

Also erhalten wir $g(x) = x + 1$, $r(x) = \frac{2}{x-1}$.

Satz 1.10.5 ist der Schlüssel zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens einer rationalen Funktion für $x \to \pm\infty$:

- Falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine echt gebrochenrationale Funktion ist, so ist $y = 0$, d.h. die x-Achse, die Asymptote der Funktion $f(x)$ im Unendlichen.
- Falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine unecht gebrochenrationale Funktion ist, so schreiben wir sie gemäss (1.12) als Summe eines Polynoms und einer echt gebrochenrationalen Funktion, $f(x) = p(x) + r(x)$, und das Polynom $p(x)$ ist dann die Asymptote der Funktion $f(x)$ im Unendlichen.

Beispiel. Wir bestimmen alle Asymptoten der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$$

Die einzige Polstelle der Funktion ist $x = -2$. Deshalb hat $f(x)$ bei $x = -2$ eine vertikale Asymptote. Um die schiefe Asymptote zu bestimmen, zerlegen wir $f(x)$ gemäss dem Schema (1.12) und führen dazu wieder eine Polynomdivision durch:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^2 + 4x + 3\big) : \big(x+2\big) = x + 2 + \dfrac{-1}{x+2} \\
\underline{-\,x^2 - 2x} \\
\qquad\quad 2x + 3 \\
\qquad \underline{-\,2x - 4} \\
\qquad\qquad\; -\,1
\end{array}$$

Daraus entnehmen wir, dass $y = x + 2$ die schiefe Asymptote dieser Funktion ist. Dies ist auch aus der folgenden Graphik ersichtlich:

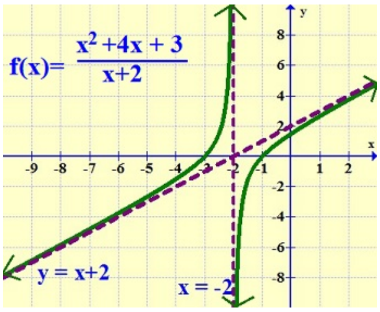


Abbildung 1.32: Vertikale und schiefe Asymptoten

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Der Begriff einer Folge

Werden Elemente einer vorgegebenen Zahlenmenge (meistens $\mathbb{R}$) in einer ganz bestimmten Reihenfolge angeordnet, dann spricht man von einer Folge. Meistens stellt man Zahlenfolgen so dar, dass man die einzelnen Elemente der Reihe nach aufschreibt, zumindest so viele davon, bis ein Bildungsgesetz erkennbar ist.

Definition 2.1.1. Eine *Zahlenfolge* oder *Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n,$$

und sie wird dargestellt als

$$(a_k) = (a_k)_{k\geq 1} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots).$$

(Falls die Folge mit a_0 beginnt, handelt sich es um eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.) Die Elemente der Folge heissen die *Glieder* der Folge, d.h. a_n ist das n-te Glied der Folge.

Also sind z.B. a_1 und a_2 das erste bzw. zweite Glied der Folge. Bei einer Folge ist also die Reihenfolge der Glieder genau festgelegt. Es dürfen mehrere Glieder einer Folge mit derselben Zahl belegt sein, aber dieselben Zahlen in unterschiedlicher Reihenfolge ergeben unterschiedliche Folgen. Insbesondere ist die Folge $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ von der Menge $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ zu unterscheiden: In einer Menge kommt es nicht auf die Reihenfolge an, in der die Elemente dargestellt werden, hingegen darf jedes Element nur einmal vorkommen; bei einer Folge ist es genau umgekehrt.

Beispiel. Hier sind ein paar typische Folgen aufgeführt:

a) $(a_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$

b) $(b_k) = (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, \ldots)$

c) $(c_k) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$

d) $(d_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ ("Fibonacci-Folge")

Bei all diesen Beispielen ist ein Bildungsgesetz intuitiv erkennbar. Um Bildungsgesetze systematisch zu untersuchen, müssen wir zwischen zwei verschiedenen Typen von Bildungsgesetzen, nämlich expliziten und rekursiven Bildungsgesetetzen unterscheiden:

Definition 2.1.2. a) *Explizites/direktes Bildungsgesetz:* Darunter versteht man ein Bildungsgesetz der Form

$$a_k = f(k),$$

für eine Funktion f. So lässt sich das k-te Folgenglied berechnen, ohne dass man die vorherigen Folgenglieder kennt.

b) *Rekursives Bildungsgesetz:* Darunter versteht man ein Bildungsgesetz, das das k-te Glied a_k durch die vorigen Glieder a_{k-1}, a_{k-2} ausdrückt:

$$a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots) \tag{2.1}$$

Für die Berechnung des k-ten Folgenglieds ist es also notwendig, dass man alle vorherigen Folgenglieder kennt.

Beispiel. Wir bestimmen (intuitiv) ein Bildungsgesetzt für die Folgen:

a) $(a_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$: explizit,

$$a_k = k$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer *arithmetischen Folge*, siehe 2.2.

b) $(b_k) = (1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, \ldots)$: explizit,

$$b_k = k \mod 3$$

c) $(c_k) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$: explizit,

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$$

d) $(d_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, Fibonacci-Folge: rekursiv,

$$d_{k+2} = d_k + d_{k+1}$$

Beispiel. Im Jahr 2006 wurde jährliche Wachstum der Weltbevölkerung auf 1.14% geschätzt. Wir betrachten die Folge (a_k), wobei a_k die Weltbevölkerung im Jahr $2005 + k$ ist, ausgehend von $a_1 = 6.584 \cdot 10^9$ (Schätzung für die Weltbevölkerung im Jahr 2006). Die Folge (a_k) hat dann das explizite Bildungsgesetz

$$a_k = 6.584 \cdot 10^9 \cdot 1.0114^k$$

Dies ist ein typisches Beispiel einer *geometrischen Folge*, siehe 2.6. Nach diesem Modell würde sich die Weltbevölkerung in ca 61 Jahren verdoppeln. Selbstverständlich ist dies nicht realistisch, da sich die Wachstumsrate laufend ändert.

Wir werden im Folgenden einige Typen von Folgen systematisch untersuchen. Es ist immer wünschenswert, ein explizites Bildungsgesetz zu haben; manchmal erweist es sich allerdings als schwierig, ein rekursives in ein explizites Bildungsgesetz zu verwandeln, so z.B. bei der Fibonacci-Folge.

2.2 Spezielle Folgen

In vielen Anwendungen hat man es mit Folgen zu tun, die auf speziellen Bildungsgesetzen beruhen, besonders *arithmetische* und *geometrische* Folgen. In beiden Typen ist zunächst ein rekursives Bildungsgesetz gegeben, und wir finden dann ein explizites Bildungsgesetz.

Definition 2.2.1. Eine Folge (a_k) heisst *arithmetische Folge*, falls die Differenz zweier benachbarter Glieder immer gleich gross ist, d.h. falls

$$a_{k+1} - a_k = d \tag{2.2}$$

gilt für ein festes $d \in \mathbb{R}$ und für alle $k \geq 1$.

Wenn (2.2) in der Form

$$a_{k+1} = a_k + d \tag{2.3}$$

geschrieben wird, wird deutlich, dass es sich um ein rekursives Bildungsgesetz handelt. Zur eindeutigen Bestimmung der Folge muss noch ein Startwert a_1 angegeben werden.

Beispiel. Die Folge

$$(a_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots), \tag{2.4}$$

vgl. früheres Beispiel, ist eine arithmetische Folge mit $d = 1$.

Arithmetische Folgen verdanke ihren Namen der folgenden Eigenschaft: Ein beliebiges Glied der Folge (mit Ausnahme von a_1) ist das *arithmetische Mittel* seiner beiden Nachbarn: Es gilt für alle $k \geq 2$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Bei einer arithmetischen Folge kann man aus dem rekursiven Bildungsgesetz (2.3) ohne Weiteres ein explizites Bildungsgesetz herleiten:

Satz 2.2.2. Sei (a_k) ein arithmetische Folge mit Differenz d und Anfangsglied $a_1 = A$. Dann gilt

$$a_n = A + (n-1) \cdot d \qquad (n \geq 1). \tag{2.5}$$

Beispiel (Fortsetzung). Finden Sie mit der Formel (2.5) ein explizites Bildungsgesetz für die Folge $(a_k) = (1, 3, 5, 7, \ldots)$.

Definition 2.2.3. Eine Folge (a_k) heisst *geometrische Folge*, falls der Quotient zweier benachbarter Glieder immer gleich gross ist, d.h. falls

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q \tag{2.6}$$

gilt für ein festes $q \in \mathbb{R}$ und alle $k \geq 1$.

Beispiel. Wenn ein Anfangskapital K_0 in jedem Zeitraum mit einem festen Zinssatz von $p\%$ verzinst wird, so ist die Folge (K_n) der Kapitalien nach n Zeiträumen eine geometrische Folge, denn K_{n+1} entsteht aus K_n durch Multiplikation mit dem Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$.

Beispiel. Die Fibonacci-Folge $(d_k) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ ist keine geometrische Folge. Allerdings konvergieren die Quotienten $\frac{d_{k+1}}{d_k}$ für $k \to \infty$ gegen den *Goldenen Schnitt* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

Beispiel (Fortsetzung). Die Folge (a_k) der Weltbevölkerungszahlen im Jahr $2015 + k$ ist eine geometrische Folge mit $q = 1.0114$, wenn eine konstante Wachstumsrate von 1.14% angenommen wird.

Wenn (2.6) in der Form

$$a_{k+1} = a_k \cdot q \tag{2.7}$$

geschrieben wird, wird deutlich, dass es sich um ein rekursives Bildungsgesetz handelt. Zur eindeutigen Bestimmung der Folge muss noch ein Startwert a_1 angegeben werden. Dann erhalten wir aus dem rekursiven Bildungsgesetz (2.7) ein explizites Bildungsgesetz:

Satz 2.2.4. Sei (a_k) ein geometrische Folge mit Quotient q und Anfangsglied $a_1 = A$. Dann gilt

$$a_n = A \cdot q^{n-1} \qquad (n \geq 1). \tag{2.8}$$

Geometrische Folgen verdanke ihren Namen der folgenden Eigenschaft: Falls alle Glieder positiv sind, ist ein beliebiges Glied der Folge (mit Ausnahme von a_1) das *geometrische Mittel* seiner beiden Nachbarn: Es gilt für alle $k \geq 2$

$$a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

2.3 Summenzeichen

Eines der wichtigsten Dinge, die man mit natürlichen Zahlen tun kann, ist das Zählen. So werden natürliche Zahlen oft als Laufzahlen oder Indizes für Summen und Produkte verwendet.

Summe	**Mit Summenzeichen**	**Programmcode**
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$	sum $= 0$ FOR $k = 1$ TO n sum $=$ sum $+ a[k]$ END OUTPUT sum
$a_s + a_{s+1} + a_{s+2} + \ldots + a_n$	$\displaystyle\sum_{k=s}^{n} a_k$	sum $= 0$ FOR $k = s$ TO n sum $=$ sum $+ a[k]$ END OUTPUT sum

Es geht in diesem Abschnitt also zunächst nur um die Art der Darstellung von Summen, nicht um ihre Berechnung.

Beispiel. a) Wir schreiben die Summe $\sum_{k=3}^{7}(2k+1)$ ohne Summenzeichen:

$$\sum_{k=3}^{7}(2k+1) = 7 + 9 + 11 + 13$$

b) Wir schreiben die Summe $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ mit Summenzeichen: Dazu erkennen wir, dass die Summanden von der Form $\frac{1}{k^2}$ für k zwischen 2 und 5 sind:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k^2}$$

Rechenregeln für das Summenzeichen

(1) $\displaystyle\sum_{k=s}^{n}(c \cdot a_k) \quad = \quad c \cdot a_s + c \cdot a_{s+1} + \ldots + c \cdot a_n \quad = \quad c \cdot \sum_{k=s}^{n} a_k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=s}^{n}(a_k + b_k) \quad = \quad a_s + b_s + a_{s+1} + b_{s+1} + \ldots + a_n + b_n \quad = \quad \sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=s}^{n} b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=s}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k \quad = \quad \sum_{k=s}^{m} a_k = \sum_{r=s}^{m} a_r = \sum_{i=s}^{m} a_i$

Summen dürfen somit aufgespalten und zusammengefasst werden.

Bemerkung. Hingegen gilt im Allgemeinen

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot b_k)\right) \neq \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$$

Indextransformation Manche Summen lassen sich vereinfachen, indem man den Summations-Index *verschiebt*.

Beispiel. Es gilt

$$\sum_{k=9}^{216}(k-4)^3 = \sum_{k=5}^{212} k^3,$$

denn beide Summen sind gleich

$$5^3 + 6^3 + \ldots + 212^3.$$

Man kann die Indextransformation auch durchführen, indem man in der ersten Summe die Substitution $l = k - 4$ bzw. $k = l + 4$ durchführt. Der Summand ist dann $l = k - 4$, und die untere Grenze $k = 9$ ist dann $9 = l + 4$, also $l = 5$, und analog die obere Grenze.

Man kann also den Summationsindex beliebig verschieben – die Summationsgrenzen müssen einfach entsprechend angepasst werden! Formal wird die Verschiebung um z also folgendermassen ausgedrückt:

$$\sum_{k=s}^{n} a_k = \sum_{k=s-z}^{n-z} a_{k+z}$$

Beispiel. Wir schreiben Sie $\sum_{k=8}^{100}(2k-9)^2$ als Summe mit Startindex 1: Dazu müssen wir den Index um 7 erniedrigen, was bedingt, dass wir das k im Summanden um 7 erhöhen:

$$\sum_{k=8}^{100}(2k-9)^2 = \sum_{k=1}^{93}(2(k+7)-9)^2 = \sum_{k=1}^{93}(2k+5)^2$$

Man beachte, dass nicht der Summand $(2k-9)^2$ der Summe um 7 erhöht wird, sondern die Summationsvariable k des Summanden.

Doppelsumme Es sind auch Doppelsummen möglich, z.B. wenn die Summe aller Elemente einer $n \times n$-Matrix $A = (A_{kl})_{1 \le k,l \le n}$ berechnet wird:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right) && (2.9)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{kn})\\
&= (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n}) + \ldots && (2.10)\\
&\quad + (a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nn})
\end{aligned}$$

Oft wird eine solche Summe auch als

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}$$

notiert.

Beispiel. Die (3×3)-Matrix $A = (a_{kl})_{1 \leq k,l \leq 3}$ ist durch $a_{kl} = k \cdot l$ definiert. Wir stellen die Summe aller Einträge der Matrix als Doppelsumme mit Summenzeichen und dann ohne Summenzeichen dar:

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{3} a_{kl} &= \sum_{k,l=1}^{3} (k \cdot l) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{l=1}^{3} (k \cdot l) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{3} (k + 2k + 3k) \\
&= (1 + 2 + 3) + (2 + 4 + 6) + (3 + 6 + 9)
\end{aligned}$$

Bemerkung. Bei einer Doppelsumme vom Typ (2.9) darf die Reihenfolge, nach der über die Indizes summiert wird, vertauscht werden, ohne dass sich die Grenzen ändern, d.h. es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kl} \right)$$

Wenn die Grenzen der inneren Summation vom Index der äusseren Summation abhängen, kann allerdings die Summationsreihenfolge nicht mehr ohne Weiteres vertauscht werden, ohne dass sich die Grenzen ändern.

2.4 Der Begriff einer Reihe

Wenn man für eine gegebene Folge (a_k) die Folgenglieder bis zu einer oberen Grenze n aufsummiert, erhält man die Partialsummen der betreffenden Folge.

Definition 2.4.1. Sei (a_k) eine Folge.

a) Die Grösse

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{2.11}$$

heisst *n-te Partialsumme* der Folge (a_k).

b) Die Folge
$$(s_n)_{n\geq 1} \tag{2.12}$$
der Partialsummen heisst die zur Folge (a_k) gehörende *Reihe.*

Bemerkung. Die Reihe (s_n) ist also eine neue Folge, die aus der ursprünglichen Folge (a_k) gebildet wird. Das n-te Glied der Reihe (s_n) ist die n-te Partialsumme der ursprünglichen Folge (a_k).

Beispiel (Fortsetzung)**.** Die Partialsummen der Folge
$$(a_k) = (1, 2, 3, 4, \ldots), \tag{2.13}$$
vgl. (2.4), sind
$$(s_k) = (1, 3, 6, 10, \ldots).$$

Beispiel. Die Partialsummen der Folge
$$(b_k) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$
sind
$$(s_k) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{12}, -\frac{13}{60}\right).$$

2.5 Spezielle Reihen

Arithmetische Reihen, bzw. Partialsummen von arithmetischen Folgen Wir erinnern daran, vgl. (2.5), dass das n-te Glied einer arithmetische Folge (a_k) mit Anfangsglied A und Differenz d als
$$a_n = A + (n-1) \cdot d \tag{2.14}$$
geschrieben werden kann. Daraus lässt sich eine Formel für die n-te Partialsumme einer arithmetischen Folge herleiten.

Satz 2.5.1. Sei (a_k) eine arithmetische Folge (a_k) mit Anfangsglied A und Differenz d. Dann gilt für die n-te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$:
$$\begin{aligned} s_n &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} && (2.15) \\ &= n \cdot \left(A + \frac{n-1}{2} \cdot d\right). && (2.16) \end{aligned}$$

Beweis. Wir schreiben die Summengleichung für s_n zweimal untereinander, in umgekehrter Reihenfolge der Summation:
$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - d) + a_n \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1 \end{aligned}$$

Wenn diese beide Summengleichungen addiert werden, erhält man

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

und damit (2.15). Die zweite Darstellung (2.16) entsteht aus (2.15) durch Einsetzen der expliziten Formel (2.14) für a_n.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir bestimmen eine explizite Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen (ohne 0), vgl. (2.13). Die Folge der natürlichen Zahlen ist eine arithmetische Folge mit $A = 1$ und $d = 1$, also erhalten wir mit der Formel (2.16) für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$s_n = n \cdot \left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Geometrische Reihen, bzw. Partialsummen von geometrischen Folgen Wir erinnern daran, vgl. (2.8), dass das n-te Glied einer geometrischen Folge (a_k) mit Anfangsglied A und Quotient q als

$$a_n = A \cdot q^{n-1} \tag{2.17}$$

geschrieben werden kann. Daraus lässt sich eine Formel für die n-te Partialsumme einer geometrischen Folge herleiten.

Satz 2.5.2. Sei (a_k) eine geometrische Folge (a_k) mit Anfangsglied $a_1 = A$ und Quotient q. Dann gilt für die n-te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$:

$$s_n \quad = \quad A \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad (q \neq 1). \tag{2.18}$$

Bemerkung. Die Formel (2.18) gilt nicht im Fall $q = 1$. In diesem Fall ist die Folge allerdings auch eine arithmetische Folge mit $d = 0$, also ist die Formel (2.16) anwendbar.

Beweis. Wir schreiben untereinander die Summengleichung für s_n und diejenige für $q \cdot s_n$:

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ q \cdot s_n & = & \phantom{a_1 + {}} a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \end{array}$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile erhalten wir

$$(1-q)s_n = a_1(1-q^n).$$

Division durch $(1-q)$ liefert die behauptete Formel (2.18).

Beispiel. Wir betrachten die geometrische Folge (a_k) mit

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}} \tag{2.19}$$

d.h.

$$(a_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right).$$

Wir bestimmen eine Formel für die n-te Partialsumme s_n: Es ist $A = 1$ und $q = \frac{1}{2}$, also erhalten wir aus (2.18)

$$s_n = 1 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt dies $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{3}{2}$, $s_3 = \frac{7}{4}$, was mit der direkten Berechnung dieser Partialsummen übereinstimmt.

2.6 Grenzwerte von Folgen

Bei vielen Folgen gilt das Interesse nicht nur der Berechnung des n-ten Glieds oder der n-ten Partialsumme einer Folge, sondern dem Verhalten von a_n oder s_n für $n \to \infty$, d.h. dem *asymptotischen Verhalten* der Folge oder Reihe für $n \to \infty$. Da es kein a_∞ oder s_∞ gibt, muss zuerst ein geeigneter Begriff etabliert werden, um dieses asymptotische Verhalten zu beschreiben. Wir illustrieren die Problematik zunächst anhand von Beispielen.

Beispiel. Untersuchen Sie durch Berechnung der Folgenglieder für grosse Werte von n, wie sich die folgenden Folgen für $n \to \infty$ verhalten:

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ Die ersten paar Folgenglieder sind

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right),$$

und es ist erkennbar, dass die Folge den Grenzwert 0 hat, siehe Satz 2.6.3, Teil a).

b) $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$ Die ersten paar Folgenglieder sind

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right),$$

und es ist erkennbar, dass die Folge den Grenzwert 1 hat.

c) $(a_n) = \left(3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right)$ Die ersten paar Folgenglieder sind

$$(a_n) = \left(3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \ldots\right),$$

und es ist erkennbar, dass die Folge den Grenzwert 0 hat, siehe Satz 2.6.4, Teil a).

d) $(a_n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ Die ersten paar Folgenglieder sind

$$(a_n) = (2, 2.25, 2.370..., 2.441\ldots),$$

und es ist nicht unmittelbar erkennbar, ob und wenn ja, welchen Grenzwert die Folge hat. Es lässt sich jedoch zeigen, dass die Folge gegen die Eulersche Zahl $e = 2.718...$ konvergiert, siehe Satz 2.6.3, Teil c).

In all diesen Beispiel streben die Folgenglieder für wachsendes n gegen einen bestimmten Wert a. Dieser Wert, der *Grenzwert* der Folge, wird von keinem Folgenglied exakt angenommen, die Glieder nähern sich ihm aber beliebig genau an: Zu jeder noch so kleinen Fehlerschranke ϵ sind die Folgenglieder ab einem gewissen Index N nur noch höchstens ϵ vom Grenzwert entfernt.

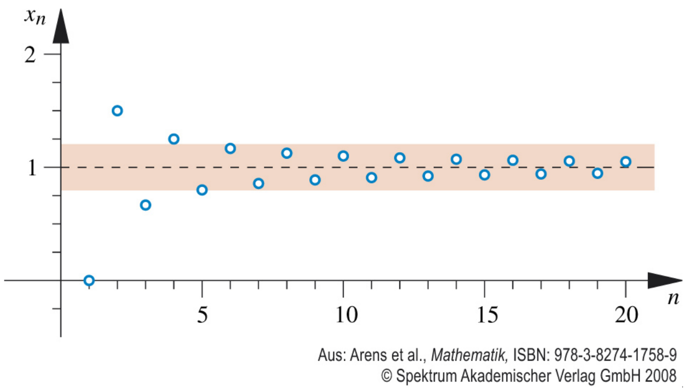


Abbildung 2.1: Grenzwert einer Folge

Wir formulieren diese Idee der beliebig genauen Annäherung nun exakt.

Definition 2.6.1. Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat als *Grenzwert/Limes* die Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder Fehlerschranke $\epsilon > 0$ gibt es eine Index-Untergrenze $N \in \mathbb{N}$, sodass alle Folgenglieder a_n mit Index $n > N$ im Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ liegen, bzw. falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : \ |a_n - a| < \epsilon \tag{2.20}$$

Eine Folge heisst *konvergent*, falls sie einen Grenzwert besitzt, ansonsten *divergent*.

Nicht jede Folge hat einen Grenzwert, aber es kann nur einen Grenzwert geben:

Satz 2.6.2. Eine Folge (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert.

Bemerkung. Auch wenn dies in den Beispielen typischerweise nicht vorkommt, ist es nicht ausgeschlossen, dass der Grenzwert a selbst schon als Folgenglied vorkommt.

Satz 2.6.3. Es gelten die folgenden Grenzwerte:

a) Harmonische Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

b) n-te Wurzeln: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes fixierte $a > 0$; zudem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

c) Eulersche Zahl: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) = e$

Nicht alle Folgen haben einen Grenzwert, wie die folgenden Beispiele zeigen. Dabei gibt es (nebst anderen) grundsätzlich zwei verschiedene Typen von Divergenz, nämlich das Oszillieren zwischen verschiedenen „Häufungspunkten“ und die Divergenz gegen ∞.

Beispiel (Fortsetzung)**.** a) Die Folge $(a_n) = ((-1)^n)$ oszilliert zwischen 1 und -1 und kann deshalb keinen Grenzwert haben:

$$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$$

b) Die Folge $(a_n) = (3 + 2n)$ wächst ins Unendliche und kann deshalb keinen Grenzwert haben:

$$(a_n) = (5, 7, 9, 11, \ldots)$$

Man sagt aber bei einer solchen Folge, dass sie “gegen unendlich konvergiert” und benützt auch die Schreibweise $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, siehe die folgende Erklärung.

Bei einer divergenten Folge, deren Glieder mit wachsendem n beliebig gross werden, schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

und meint damit, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}$ einen Index N gibt, so dass alle Folgenglieder a_n mit $n > N$ über diesem a liegen. Rein formal lässt sich dieser Sachverhalt in Analogie zu (2.20) folgendermassen ausdrücken:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N :\ a_n > a$$

Manchmal werden solche Folgen *bestimmt divergent* genannt. Solche Folgen sind also immer noch divergent, obwohl wir sagen, dass “die Folge gegen ∞ geht. Als konvergent bezeichnen wir eine Folge nur, wenn sie gegen eine reelle Zahl konvergiert.
Entsprechend kann man $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ folgendermassen definieren:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N :\ a_n < a$$

Bemerkung. Eine arithmetische Folge (a_n) mit Differenz d ist nur dann konvergent, wenn $d = 0$ gilt: Dann ist sie konvergent mit Limes $a = a_1$. Ansonsten gilt für eine arithmetische Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Grenzwerte geometrischer Folgen Eine geometrische Folge mit Quotient q hat je nach dem Wert von q einen Grenzwert: Es gilt, vgl. (2.8) und (2.17), $a_n = A \cdot q^{n-1}$. Die Konvergenz einer geometrischen Folge hängt also entscheidend vom Verhalten von q^n für $n \to \infty$ ab.

Beispiel. Wenn man das Verhalten der Folge (q^n) für verschiedene Werte von q empirisch untersucht, erkennt man, dass die Folge für $|q| < 1$ gegen 0 konvergiert, für $q = 1$ konstant ist (und damit gegen 1 konvergiert) und in den anderen Fällen divergiert.

Wir sehen also:

a) Für $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, d.h. die Folge (q^n) ist konvergent.

b) Für $|q| > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty$, d.h. die Folge (q^n) ist divergent.

c) Für $q = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$, d.h. die Folge (q^n) ist konvergent.

d) Für $q = -1$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nicht, d.h. die Folge (q^n) ist divergent.

Das Anfangsglied A ist für das Konvergenzverhalten einer geometrischen Folge unerheblich, deshalb erhalten wir aus der Untersuchung der Folge (q^n) direkt das Konvergenzverhalten der ursprünglichen Folge:

Satz 2.6.4. Sei (a_n) eine geometrische Folge mit Anfangsglied $A \neq 0$ und Quotient $q \neq 0$. Dann gilt:

a) Für $|q| < 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h. die Folge (a_n) ist konvergent.

b) Für $|q| > 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$, d.h. die Folge (a_n) ist divergent.

c) Für $q = 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, d.h. die Folge (a_n) ist konvergent.

d) Für $q = -1$ existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nicht, d.h. die Folge (a_n) ist divergent.

Berechnung von Grenzwerten Viele Grenzwerte von Folgen können nicht direkt mit den Grenzwerten von Satz 2.6.3 oder Satz 2.6.4 berechnet werden. Stattdessen benötigen wir Regeln über die Grenzwerte von Folgen, die sich aus verschiedenen Teilen mit bekannten Grenzwerten zusammensetzen, sowie eine Reihe von Tricks, mit denen gewisse häufig vorkommende Grenzwerte in eine behandelbare Form übergeführt werden können.

Satz 2.6.5. Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{b}$, falls $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = a^k$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$ falls $a_n \geq 0$ und $a \geq 0$

Bemerkung. Die Regel e) könnte auf *stetige Funktionen* ausgeweitet werden, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a),$$

falls f eine stetige Funktion ist. Stetige Funktionen werden in Abschnitt 3.1.2 behandelt.

Beispiel. Wir bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$, wobei

$$c_n = \frac{4n^3 - 2n^2 + 5n - 8}{-7n^3 + 4n^2 - 6n + 1} \tag{2.21}$$

Satz 2.6.5 c) ist hier nicht direkt anwendbar, da wir es mit einem Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ für $n \to \infty$ zu tun haben. Wenn wir den Bruch mit n^3 kürzen, kommt er in eine Form, die die Anwendung der genannten Regel erlaubt:

$$\frac{4n^3 - 2n^2 + 5n - 8}{-7n^3 + 4n^2 - 6n + 1} = \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{-7 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$$

In dieser Darstellung erhalten wir aufgrund der Regeln

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{-7 + \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{4 - 0 + 0 - 0}{-7 + 0 - 0 + 0} = -\frac{4}{7}$$

Beispiel. Wir bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, wobei

$$a_n = \frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2}$$

Satz 2.6.5 c) ist auch hier nicht direkt anwendbar, da wir es mit einem Ausdruck vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$ für $n \to \infty$ zu tun haben. Wenn wir den Bruch mit 3^n kürzen, kommt er in eine Form, die die Anwendung der genannten Regel erlaubt:

$$\frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2} = \frac{3 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{2}{3^n}}$$

In dieser Darstellung erhalten wir aufgrund der Regeln

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + (\frac{2}{3})^n}{1 + \frac{2}{3^n}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3$$

Beispiel. Wir bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, wobei

$$b_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2n+1}$$

Satz 2.6.5 e) ist hier nicht direkt anwendbar, da wir es mit einem Ausdruck vom Typ $\infty - \infty$ für $n \to \infty$ zu tun haben. Auch hier müssen wir den Ausdruck umformen, um ihn in eine Form zu bringen, die die Anwendung der Regeln erlaubt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2n+1} &= \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-2n+1})(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n+1})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n+1}} \\
&= \frac{(n^2+1) - (n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n+1}} \\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n+1}}
\end{aligned}$$

Jetzt kürzen wir den Ausdruck mit n und erhalten

$$\frac{2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-2n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}$$

In dieser Darstellung erhalten wir aufgrund der Regeln

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Beispiel. Wir bestimmen $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$, wobei

$$d_n = \left(1+\frac{1}{5n}\right)^n$$

Dieser Grenzwert ähnelt stark dem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ der Eulerschen Zahl. Allerdings müssen wir den gegebenen Ausdruck auch mit einem Trick zuerst leicht umformulieren, um den bekannten Grenzwert anwenden zu können:

$$\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{5n}\right)^{\frac{5n}{5}} = \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Jetzt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{5n}\right)^{5n}\right)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{1}{5}}$$

2.7 Grenzwerte von Reihen

Nach (2.11) und (2.12) gehört zu einer Folge (a_n) die Reihe (s_n), wobei das n-te Glied der Reihe (s_n) gleich der n-ten Partialsumme der Folge (a_n) ist,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Man kann nun bei dieser Reihe, d.h. der Folge der Partialsummen, ebenfalls untersuchen, ob sie im Sinn von (2.20) konvergent ist. Falls dies der Fall ist, hat man es mit einer unendlichen Reihe bzw. „unendlichen Summe“

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

zu tun. Diese unendliche „Summe“ ist allerdings mit Vorsicht zu behandeln, insbesondere gelten nicht alle Regeln, die man von gewöhnlichen Summen kennt, auch für unendliche „Summen“.

Definition 2.7.1. Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst *konvergent* bzw. *divergent*, falls die Teilsummenfolge (s_n) konvergent bzw. divergent ist. Falls sie konvergent ist, nennt man den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ die *Summe* der unendlichen Reihe und schreibt dafür

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Falls die Folge (s_n) bestimmt divergent ist, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, so nennt man die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ebenfalls bestimmt divergent und schreibt

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty.$$

Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kann nur konvergent sein, wenn für die Folgenglieder gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt, siehe unten.

Satz 2.7.2. Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente unendliche Reihe. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Beispiel. Untersuchen Sie, ob die zu den Folgen (a_n) gehörenden Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergieren:

- $(a_n) = (1, 1.5, 2, 2.5, 3, \ldots)$: Dies ist eine arithmetische Folge mit zugehöriger Reihe
$$(s_n) = (1, 2.5, 4.5, 7, 10, \ldots)$$
ist divergent.

- $(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$: Die zu dieser Folge gehörende Reihe
$$(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$
ist divergent.

- $(a_n) = (1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots)$: Die zu dieser Folge gehörende unendliche Reihe
$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + ...$$
konvergiert gegen $s = 1.111\ldots = \frac{10}{9}$. Dies kann allgemein anhand von Satz 2.7.3 gezeigt werden.

- $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$: Die zu dieser Folge gehörende unendliche Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$
heisst *harmonische Reihe*. Sie ist *divergent*, obwohl die Folgenglieder gegen Null konvergieren, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Bemerkung. Hingegen ist die zur Folge $(a_n) = (\frac{1}{n^2})$ gehörende Reihe konvergent, und es gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$
Ebenfalls konvergent ist die zur Folge $(a_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ gehörende Reihe, und es gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots = \ln(2).$$

Grenzwerte geometrischer Reihen Die zu einer geometrischen Folge

$$(a_n) = (A, Aq, Aq^2, Aq^3, \ldots)$$

gehörende Reihe heisst *geometrische Reihe*:

$$A + Aq + Aq^2 + Aq^3 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1}.$$

Für die n-te Partialsumme gilt im Fall $q \neq 1$ nach (2.18) die Formel

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = A \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach Satz 2.6.4 genau für $n \to \infty$, wenn $|q| < 1$ gilt, und die Summe der unendlichen Reihe ist dann

$$s = \frac{A}{1-q}.$$

Satz 2.7.3. Eine unendliche geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1}$ ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ gilt. In diesem Fall gilt die Summenformel

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} Aq^{k-1} = \frac{A}{1-q} \qquad (|q| < 1). \tag{2.22}$$

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir betrachten die geometrische Folge (a_k) mit

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}}$$

siehe (2.19). Aus der Folge der Partialsummen

$$(s_k) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots\right)$$

lässt sich schon erahnen, dass die unendliche Reihe den Wert $s = 2$ hat. Dies lässt sich mit der Formel (2.22) bestätigen:

$$s = \frac{A}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Kapitel 3

Differentialrechnung

3.1 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Als Voraussetzung für die Differentialrechnung müssen wir uns mit dem *Grenzwert von Funktionen* an einer bestimmten Stelle x_0 beschäftigen. Um den Grenzwertbegriff für Funktionen zu etablieren, benützen wir den Grenzwertbegriff für Folgen, den wir im vorigen Kapitel behandelt haben.

3.1.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir betrachten eine Funktion $y = f(x)$ und möchten untersuchen, ob diese Funktion an der Stelle x_0 einen Grenzwert hat. Dieses x_0 muss nicht unbedingt zum Definitionsbereich der Funktion gehören. Wir wählen nun eine Folge (x_n) von Punkten im Definitionsbereich von f, $x_n \in D(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die gegen x_0 konvergiert, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Gleichzeitig schauen wir uns die Folge $(f(x_n))$ der zugehörigen Funktionswerte an.

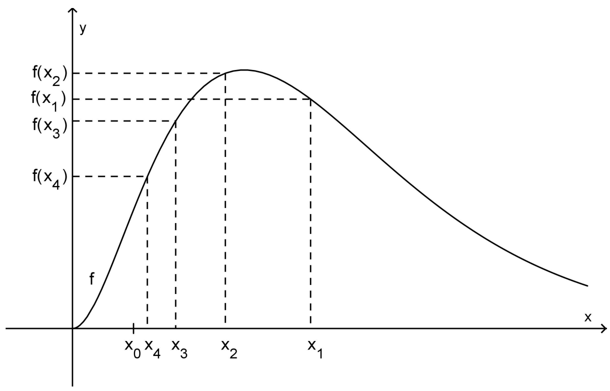


Abbildung 3.1: Grenzwert einer Funktion

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 2$. Dieser Punkt gehört zum Definitionsbereich der Funktion.

n	$x_n = 2 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = 2 + \frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$
1	1	1	3	9
2	1.5	2.25	2.5	6.25
3	1.666...	2.777...	2.333...	5.444...
4	1.75	3.0625	2.25	5.0625
5	1.8	3.24	2.2	4.84
10	1.9	3.61	2.1	4.41
100	1.99	3.9601	2.01	4.0401
1000	1.999	3.996001	2.001	4.004001
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 2$	4	$x_0 = 2$	4

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x_0 = 1$; dieser Punkt gehört nicht zum Definitionsbereich der Funktion, wir können aber trotzdem die Frage des Grenzwerts an diesem Punkt stellen. Es handelt sich im Prinzip um Frage, ob es sich bei diesem Punkt um eine hebbare Definitionslücke handelt; diese Frage haben wir schon in Abschnitt 1.10.2 diskutiert und kommen hier auf leicht andere Art zum gleichen Ergebnis.

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$
1	0	1	2	3
2	0.5	1.5	1.5	2.5
3	0.666...	1.666...	1.333...	2.333...
4	0.75	1.75	1.25	2.25
5	0.8	1.8	1.2	2.2
10	0.9	1.9	1.1	2.1
100	0.99	1.99	1.01	2.01
1000	0.999	1.999	1.001	2.001
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 1$	2	$x_0 = 1$	2

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \frac{x}{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Dieser Punkt gehört nicht zum Definitionsbereich der Funktion.

n	$x_n = \dfrac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = -\dfrac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$	$\hat{x}_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$	$f(\hat{x}_n)$
1	1	1	-1	-1	-1	-1
2	0.5	1	-0.5	-1	0.5	1
3	0.333...	1	-0.333...	-1	-0.333...	-1
4	0.25	1	-0.25	-1	0.25	1
5	0.2	1	-0.2	-1	-0.2	-1
10	0.1	1	-0.1	-1	0.1	1
100	0.01	1	-0.01	-1	0.01	1
101	0.0099	1	-0.0099	-1	-0.0099	-1
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 0$	1	$x_0 = 0$	-1	$x_0 = 0$	

Definition 3.1.1. Gegeben seien eine Funktion $y = f(x)$ sowie $x_0 \in \mathbb{R}$. Wenn für jede beliebige (im Definitionsbereich von f liegende) Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die zugehörige Folge $(y_n) = (f(x_n))$ der Funktionswerte gegen einen Grenzwert $y_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, so besitzt die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 den *Grenzwert* y_0. Anders ausgedrückt: Die Funktion f *konvergiert an der Stelle* x_0 *gegen* y_0. Notation:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Besitzt die Funktion f an der Stelle x_0 keinen Grenzwert, so ist f an der Stelle x_0 *divergent.*

Bemerkung.

- Es wird nicht vorausgesetzt, dass x_0 im Definitionsbereich von f liegt. Falls x_0 im Definitionsbereich von f liegt, wird auch nicht verlangt, dass der Grenzwert von f an der Stelle x_0 mit $f(x_0)$ übereinstimmt.
- Wie bei Folgen verlangen wir $y_0 \in \mathbb{R}$, damit wir die Funktion als an der Stelle x_0 konvergent bezeichnen. Wenn die Funktion an der Stelle x_0 gegen ∞ strebt, schreiben wir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, nennen die Funktion aber divergent an der Stelle x_0.

Wenn die betrachtete Stelle x_0 im Definitionsbereich der Funktion f liegt, stimmt der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ meistens mit dem Funktionswert $f(x_0)$ überein, siehe das erste der betrachteten Beispiele. Bei stetigen Funktionen ist das automatisch erfüllt, siehe Definition

3.1.4, und die meisten der hier betrachteten Funktionen sind stetig, siehe Satz 3.1.5. Kritisch sind meistens diejenigen Fälle, bei denen x_0 nicht im Definitionsbereich von f liegt, siehe das zweite und dritte der betrachteten Beispiele.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Die Funktion $f(x) = x^2$ besitzt an der Stelle $x_0 = 2$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Dies entspricht dem Funktionswert $f(2) = 4$.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ besitzt an der Stelle $x_0 = 1$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Diese Funktion ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert. Diese Stelle ist aber gleichzeitig eine hebbare Definitionslücke der (gebrochenrationalen) Funktion $f(x)$. Der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ist gleichzeitig der Wert, der schon als "Hebung der Definitionslücke" berechnet wurde, vgl. (1.11). Man kann in diesem Fall (und ebenso in anderen vergleichbaren Fällen) den Grenzwert dadurch berechnen, dass man im Funktionsausdruck $\frac{x^2-1}{x-1}$ Zähler und Nenner in Faktoren zerlegt, die gemeinsamen Faktoren wegkürzt und anschliessend x_0 einsetzt. Man beachte aber, dass durch das Kürzen dieser Faktoren aus f eine neue Funktion $\tilde{f}$ wird, vgl. die Diskussion in Abschnitt 1.10.2.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Die Funktion $f(x) = \frac{x}{|x|}$ besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, sie ist an dieser Stelle divergent. Dies ergibt sich dadurch, dass für zwei verschiedene Folgen (x_n), die beide gegen x_0 konvergieren, die entsprechenden Folgen der Funktionswerte $(f(x_n))$ einen unterschiedlichen Grenzwert haben, wie oben gezeigt wurde.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert, wie ein Blick auf den Graphen der Funktion zeigt:

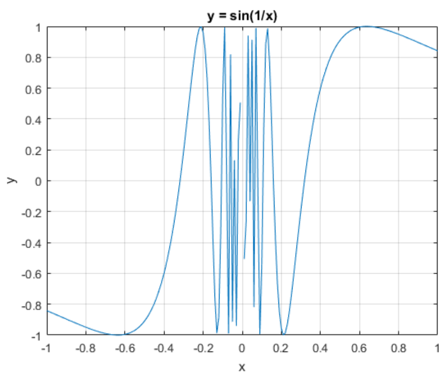


Abbildung 3.2: Funktion ohne Grenzwert bei $x_0 = 0$

Man könnte dies aber auch anhand der Definition des Grenzwerts, siehe Definition 3.1.1, zeigen.

Ähnlich definiert man den Grenzwert einer Funktion für $x \to \infty$:

Definition 3.1.2. Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$. Wenn für jede beliebige (im Definitionsbereich von f liegende) Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ die zugehörige Folge $(y_n) = (f(x_n))$ der Funktionswerte gegen einen Grenzwet y_0 konvergiert, so besitzt die Funktion $f(x)$ für $x \to \infty$ den *Grenzwert* y_0. Anders ausgedrückt: Die Funktion f *konvergiert für* $x \to \infty$ *gegen* y_0. Notation:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0.$$

Besitzt die Funktion f für $x \to \infty$ keinen Grenzwert, so ist f für $x \to \infty$ *divergent*. Auch hier kann es vorkommen, dass die Funktionswerte gegen ∞ streben für $x \to \infty$; wir schreiben in diesem Fall $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, nennen die Funktion f aber für $x \to \infty$ divergent.

Bemerkung. Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ist genauso definiert.

Beispiel. Wir untersuchen, ob die folgenden Funktionen einen Grenzwert für $x \to \infty$ besitzen, und bestimmen diesen Grenzwert, falls er existiert:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$: Genauso wie die entsprechende Folge $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, siehe Satz 2.6.3, konvergiert diese Funktion gegen 0:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

b) $f(x) = \frac{7x+1}{5x+6}$: Wir gehen ähnlich vor wie bei (2.21) und kürzen den Ausdruck:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x+1}{5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{7+\frac{1}{x}}{5+\frac{6}{x}} = \frac{7+0}{5+0} = \frac{7}{5}$$

c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$: Ebenso erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = \infty$$

d) $f(x) = \sin(x)$: Die Funktion hat keinen Grenzwert für $x \to \infty$, da sie (anschaulich gesprochen) beliebig oft zwischen -1 und 1 oszilliert, ähnlich wie die Funktion $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

e) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$: Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ und $\sin(0) = 0$ gilt auch

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Bei rationalen Funktionen, die für $x \to \infty$ divergent sind, ist es manchmal möglich, statt eines Grenzwerts eine Asymptote anzugeben, siehe Definition 1.10.4 und Satz 1.10.5.

Satz 3.1.3 (Rechnen mit Grenzwerten)**.** Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei konvergente Funktionen mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_1, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = y_2 \qquad (y_1, y_2 \in \mathbb{R}),$$

und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{y_1}{y_2}$, falls $g(x) \neq 0$ und $y_2 \neq 0$

Wir haben diese Regeln bei den vorigen Beispielen schon angewendet.

3.1.2 Stetigkeit von Funktionen

Anschaulich gesprochen lässt sich die Stetigkeit einer Funktion wie folgt beschreiben: Eine Funktion f heisst *stetig* auf einem Intervall $I \subseteq D$, falls man den zugehörigen Graphen der Funktion von einem Intervallendpunkt zum anderen zeichnen kann, ohne den Stift dabei abzusetzen.
Um den Begriff der Stetigkeit präzise zu definieren, definieren wir zuerst die Stetigkeit an einem Punkt $x_0 \in D$ und sagen anschliessend, dass die Funktion insgesamt stetig ist, wenn sie an jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist. Umgekehrt ist eine Funktion genau dann unstetig, falls sie an mindestens einem Punkt ihres Definitionsbereichs unstetig ist.

Definition 3.1.4. a) Eine Funktion f, die in einer Umgebung von x_0 (inkl. x_0) definiert ist, heisst *stetig an der Stelle* x_0, falls der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert und mit $f(x_0)$ übereinstimmt, d.h. falls gilt:

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

b) Eine Funktion f heisst *stetig*, falls sie an jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Satz 3.1.5. a) Polynome $y = a_n x^n + \ldots + a_0$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) Gebrochenrationale Funktionen $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ für Polynome p_1, p_2 sind auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig.

c) Exponentialfunktionen $y = a^x$ (für $a > 0$) sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

d) Logarithmusfunktionen $y = \log_a(x)$ (für $a > 0$) sind auf ganz $\mathbb{R}^+$ stetig.

Bemerkung. Gebrochenrationale Funktion $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ sind nicht unstetig, da Unstetigkeiten nur an einem Punkt des Definitionsbereichs auftreten können. Die Nullstellen des Nenners, d.h. die Polstellen und die hebbaren Definitionslücken, sind keine Unstetigkeiten, da die Funktion an diesen Stellen gar nicht definiert ist. Bei einer hebbaren Lücke an der Stelle x_0 kann die Funktion so in die Lücke x_0 fortgesetzt werden, dass die erweiterte Funktion an der Stelle x_0 stetig ist, siehe das folgende Beispiel.

Wenn also für die Funktion $f(x)$, die an der Stelle x_0 stetig ist, der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ berechnet werden soll, ist dieser Grenzwert gleich dem Funktionswert $f(x_0)$. Nur wenn die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 unstetig oder nicht definiert ist, muss man irgendwelche "Tricks" zur Berechnung des Grenzwerts verwenden.

Beispiel (Fortsetzung)**.** a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ stetig.

b) Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Es gilt nämlich für alle $x \in \mathbb{R}$: $\tilde{f}(x) = x + 1$, vgl. Abschnitt 1.10.2.

An einer Polstelle kann eine rationale Funktion hingegen nicht stetig fortgesetzt werden.

Beispiel. a) Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

b) Sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ c, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, aber an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

Typische Beispiele von Unstetigkeiten sind (endliche) Sprünge, wie sie bei Funktionen vom Typ „Rechteckimpuls“, „Sägezahnfunktion“, etc. typischerweise auftreten.

Beispiel. a) Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig und überall sonst stetig.

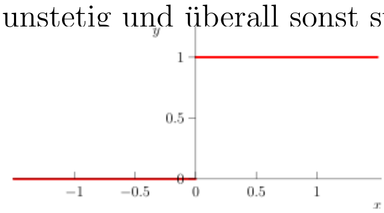


Abbildung 3.3: Sprungfunktion

b) Die Funktion

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ (2-\text{periodisch}), & \text{sonst} \end{cases}$$

ist an den Stellen $x_0 = -1, 1, 3, 5, \ldots$ unstetig, an allen anderen Stellen hingegen stetig.

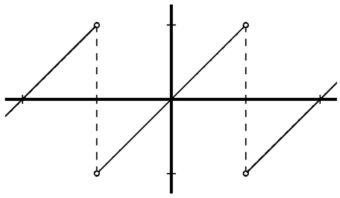


Abbildung 3.4: Sägezahnfunktion

Satz 3.1.6 (Rechnen mit stetigen Funktionen)**.** Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die an der Stelle x_0 stetig sind, und seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) Die Funktion $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.

b) Die Funktion $f(x) \cdot g(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig.

c) Die Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist an der Stelle x_0 stetig (falls $g(x_0) \neq 0$).

d) Falls $g(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist und $f(x)$ an der Stelle $g(x_0)$, so ist die Verknüpfung $(f \circ g)(x)$ an der Stelle x_0 stetig.

Satz 3.1.7. Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig. Dann gilt:

a) f ist in $[a, b]$ beschränkt, d.h. es gibt ein $M \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$.

b) [Zwischenwertsatz] f nimmt in $[a, b]$ zwischen zwei Funktionswerten jeden beliebigen Zwischenwert an. Insbesondere gilt: Falls f in $[a, b]$ stetig ist, und falls $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt, so gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ (d.h. $a < x_0 < b$) mit $f(x_0) = 0$.

Bemerkung. Die letzte Tatsache wird zur Konstruktion numerischer Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen verwendet (Bisektion).

3.2 Grundlagen der Differentialrechnung

3.2.1 Steigung und Differenzenquotient

Die Differentialrechnung beruht auf folgender Frage: Wie definiert und bestimmt man die *Steigung* einer Funktionskurve? Diese Frage ist eine äusserst wichtige Frage, weil man damit die Änderungstendenz einer Funktion, also z.B. die Geschwindigkeit eines Körpers im Raum oder die Zuwachsrate einer ökonomischen Grösse, beschreiben kann. Die Ableitung einer Funktion gibt also Auskunft über die Entwicklung bzw. die Veränderung der durch die Funktion dargestellten Grösse im zeitlichen Verlauf.
Anders formuliert: Bei der Differentialrechnung geht es darum, nicht nur einen Zustand zu beschreiben, sondern auch wie sich dieser Zustand im zeitlichen und/oder räumlichen Verlauf ändert. Damit wird für dynamische (und nicht nur statische) Prozesse eine mathematische Beschreibung ermöglicht. Zwar kann man auch ohne Differentialrechnung die Zustände eines Systems zu verschiedenen Zeitpunkten t und $t+h$ beschreiben und z.B. die Differenz bilden. Wenn man aber die *momentane* Änderungsrate eines Systems zu einem gegebenen Zeitpunkt beschreiben will, muss man eine *infinitesimale* Betrachtung vornehmen und sich mit dem Verhalten unendlich kleiner Grössen auseinandersetzen. Es ist das Verdienst der Differentialrechnung, für diese Betrachtung von unendlich kleinen Grössen ein Instrumentarium geschaffen zu haben.

Beispiel. Bei einer linearen Funktion $f(x) = mx + q$ ist die Steigung des Funktionsgraphen überall gleich m, also unabhängig von x, siehe Abbildung 3.5, vgl. auch Abbildung 1.12.

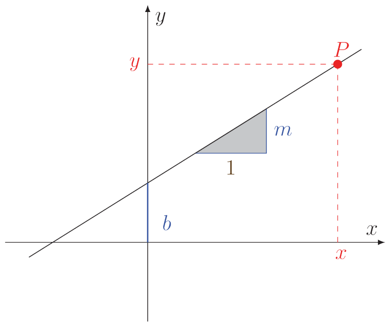


Abbildung 3.5: Steigung einer linearen Funktion

Man beachte, dass die Steigung gleich dem Verhältnis der Änderung Δf der Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0+h)$ für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ zur Änderung Δx der x-Werte x_0 und $x_0 + h$ ist, und zwar an jeder Stelle x_0:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{m(x_0+h) + q - (mx_0 + q)}{h} = \frac{mh}{h} = m.\end{aligned}$$

Im Allgemeinen ist das Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ aber nicht unabhängig von x_0 und h:

Beispiel. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$. Wir bestimmen das Verhältnis

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a) für $x_0 = 1$ und $h = 2$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(3) - f(1)}{2} = \frac{1.4 - 0.6}{2} = 0.4$$

b) für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$ und $h > 0$:

$$\frac{\left(\frac{1}{10}(x_0 + h)^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{10}x_0^2 + \frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{\frac{1}{5}x_0 h + h^2}{h} = \frac{1}{5}x_0 + h \tag{3.1}$$

Definition 3.2.1. Sei f eine Funktion und $[x_0, x_0 + h]$ ein Intervall, das im Definitionsbereich von f liegt. Der Quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.2}$$

heisst *Differenzenquotient* von f.

Der Differenzenquotient von f entspricht also der Steigung einer *Sekanten* des Graphen der Funktion f.

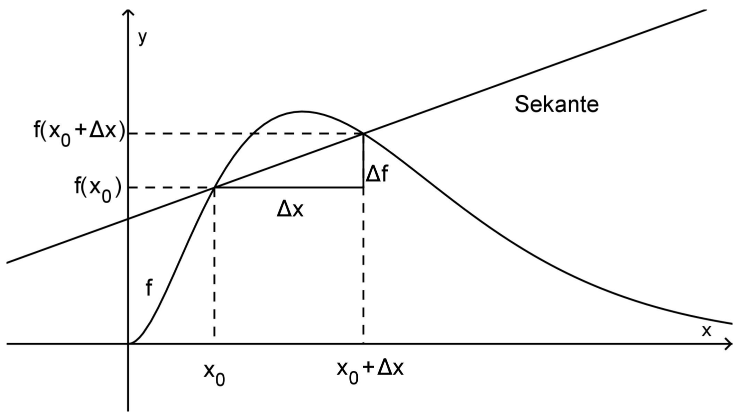


Abbildung 3.6: Sekantensteigung

3.2.2 Ableitung und Ableitungsfunktion

Wir sind nun aber nicht in erster Linie an der Steigung einer *Sekante* an den Graphen von f interessiert, sondern an der Steigung der *Tangente* an den Graphen von f an der Stelle x_0. Diese Tangentensteigung lässt sich nicht direkt durch eine Formel von Typ (3.2) darstellen, da man dazu $h = 0$ wählen müsste, was jedoch auf einen Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ führen würde. Wir erhalten die gesuchte Tangentensteigung jedoch, indem wir einen *Grenzprozess* durchführen, d.h. im Intervall $[x_0, x_0 + h]$ das h immer kleiner werden lassen und dann hoffen, dass die zugehörigen Differenzenquotienten gegen einen Grenzwert konvergieren. Falls dies so ist, ist der erhaltene Grenzwert die gesuchte Tangentensteigung an der Stelle x_0.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$. Wir untersuchen, ob das Verhältnis

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für fixiertes x_0 und $h \to 0$ gegen einen Grenzwert konvergiert. Wegen (3.1) gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{5}x_0 + h\right) = \frac{1}{5}x_0 \tag{3.3}$$

Definition 3.2.2. Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert, so heisst f an der Stelle x_0 *differenzierbar*. Den Grenzwert selbst bezeichnet man als *Ableitung* (oder *Differentialquotient*) von f an der Stelle x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.4}$$

Der Differentialquotient bzw. die Ableitung bezeichnet geometrisch also die *Tangentensteigung* an die Funktionskurve an der Stelle x_0.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$. Wir bestimmen die Ableitung $f'(x_0)$ an einer beliebigen Stelle x_0. Aus (3.3) erhalten wir

$$f'(x_0) = \frac{1}{5}x_0 \tag{3.5}$$

Bemerkung. Wir werden später eine Formel für die Geradengleichung der Tangente an die Funktionskurve an der Stelle x_0 angeben, siehe Satz 3.4.1.

Wenn die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D an jeder Stelle $x \in D$ existiert, entsteht auf diese Art und Weise aus der ursprünglichen Funktion $y = f(x)$ eine neue Funktion, nämlich die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$.

Definition 3.2.3. Sei $y = f(x)$ eine Funktion mit Definitionsbereich D, die an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar ist. Die *Ableitungsfunktion* bzw. *Ableitung* $y' = f'(x)$ von f ist die Funktion, die jedem $x \in D$ die Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

zuordnet.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2}$. Bei (3.5) haben wir an einer fixierten Stelle x_0 die Ableitung bestimmt, nämlich $f'(x_0) = \frac{1}{5}x_0$. Wenn wir statt der fixierten Stelle x_0 ein variables x betrachten, erhalten wir so die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$:

$$y = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{5}x$$

Ob eine Funktion differenzierbar ist, kann man grob danach beurteilen, ob es keine Knicke im Funktionsgraphen gibt, genauso wie man die Stetigkeit daran erkennen kann, dass es keine Sprünge gibt. Wenn es im Funktionsgraphen einen Knick (aber keinen Sprung) gibt, ist das ein Zeichen dafür, dass die Funktion an der betreffenden Stelle stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Beispiel. Das typische Beispiel eines stetigen, aber nicht differenzierbaren Funktionsverhaltens ist das Verhalten der Funktion

$$f(x) = |x|$$

an der Stelle $x_0 = 0$.

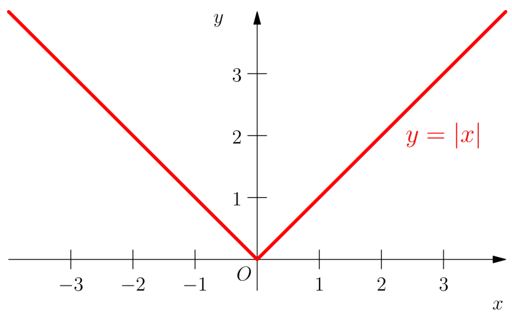


Abbildung 3.7: Betragsfunktion

- Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig bei $x_0 = 0$, da man "die Funktion ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann" bzw präzise ausgedrückt, da das Kriterium $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ erfüllt ist (Satz 3.1.4).
- Die Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar bei $x_0 = 0$, da der Funktionsgraph an der Stelle einen "Knick" hat, bzw. weil der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ für $x_0 = 0$ nicht existiert. Die Nicht-Existenz des Grenzwerts $\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ kann wie bei einem der Beispiele am Anfang von Abschnitt 3.1.1 gezeigt werden.

3.2.3 Höhere Ableitungen

Wenn eine Funktion $f(x)$ in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs D differenzierbar ist, so ist demnach die Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ ebenfalls auf ganz D definiert. Wenn diese Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$ selbst wieder differenzierbar ist, nennt man die Ableitung der Ableitung die *zweite Ableitung* von $f(x)$. Analog definiert man die 3. Ableitung $f'''(x)$ oder $f^{(3)}(x)$ als die Ableitung von $f''(x)$.

Definition 3.2.4. Eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D heisst n-mal differenzierbar an der Stelle x_0, wenn alle Ableitungen $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $\ldots$, $f^{(n)}(x_0)$ existieren. Ebenso heisst $f(x)$ n-mal differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs n-mal differenzierbar ist. Die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ ist dann die Funktion, die jedem $x_0 \in D$ die n-te Ableitung an der Stelle x_0 zuordnet.

Bemerkung. Physikalisch ist von den höheren Ableitungen vor allem die zweite Ableitung $f''(x)$ einer durch $f(x)$ beschriebenen Ortskurve wichtig: Während die erste Ableitung $f'(x)$ die momentane Geschwindigkeit angibt, beschreibt $f''(x)$ die momentane Beschleunigung. In vielen physikalischen Gesetzen kommen Beschleunigungen vor, deshalb ist dieser Begriff für die mathematische Beschreibung physikalischer Prozesse wichtig. Die geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung $f''(x)$ werden wir in Abschnitt 3.5.2 diskutieren.

Um Beispiele von höheren Ableitungen betrachten zu können, diskutieren wir jetzt die Ableitungsegeln, die für Ableitungen beliebiger Ordnung gelten.

3.3 Ableitungsregeln

3.3.1 Ableitung der elementaren Funktionen

Konstante Funktionen

Satz 3.3.1. Die konstante Funktion $f(x) = c$ ist für jedes $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = 0. \tag{3.6}$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = c$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Die Formel (3.6) ist der Spezialfall $n = 0$ der nächsten Formel (3.7).

Potenzfunktionen

Satz 3.3.2. Die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}. \tag{3.7}$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = x^n$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Unter Benützung der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \dots$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2 \cdot (\dots) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + h^2 \cdot (\dots)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + h \cdot (\dots)) \\ &= nx^{n-1}, \end{aligned}$$

und damit die behauptete Formel (3.7).

Beispiel. Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^8$ ist

$$f'(x) = 8x^7.$$

Die Regel (3.7) gilt nicht nur, wenn der Exponent eine natürliche Zahl ist, sondern für beliebige reelle Exponenten. Allerdings ist die Funktion $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha \notin \mathbb{N}$ im allgemeinen nur für $x > 0$ definiert.

Satz 3.3.3. Die Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$ (für $x > 0$) ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \qquad (x > 0). \tag{3.8}$$

Beweis. Man kann einige spezielle Fälle von Exponenten wie z.B. $\alpha = -1$ oder $\alpha = \frac{1}{2}$ direkt beweisen, d.h. mittels der Definition der Ableitung; den allgemeinen Fall führt man mit der Darstellung

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

auf die untenstehenden Regeln (3.9) und (3.20) über die Ableitung der Exponentialfunktion und die Ableitung von verketteten Ausdrücken zurück.

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{x^4}$: Dazu schreiben wir die Funktion als $f(x) = x^{-4}$ und wenden dann die Regel (3.8) an:
$$f'(x) = -4x^{-3} = \frac{-4}{x^3}$$

b) $f(x) = \sqrt{x}$: Dazu schreiben wir die Funktion als $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ und wenden dann die Regel (3.8) an:
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Man beachte, dass der Definitionsbereich von $f(x)$ die Menge $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist, der Definitionsbereich von $f'(x)$ aber die Menge $\mathbb{R}_{>0}$. Geometrisch äussert sich dies darin, dass der Graph der Wurzelfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ eine vertikale Tangente hat.

c) $f(x) = \frac{x^2 \cdot x^3}{\sqrt[3]{x^5}}$: Dazu schreiben wir die Funktion als $f(x) = x^{2+3-\frac{5}{3}} = x^{\frac{10}{3}}$ und wenden dann die Regel (3.8) an:
$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion

Satz 3.3.4. Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist überall differenzierbar, und es gilt
$$f'(x) = e^x. \tag{3.9}$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = e^x$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\ &= e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wir benützen nun (ohne Beweis) die Tatsache, dass gilt:
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Einsetzen in (3.10) liefert
$$f'(x) = e^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$
und damit die behauptete Formel (3.9).

Bemerkung. Man beachte den grundsätzlichen Unterschied im Ableitungsverhalten zwischen Potenz- und Exponentialausdrücken: Während jede Potenzfunktion durch wiederholtes Ableiten irgendwann verschwindet, reproduziert sich die Exponentialfunktion durch Ableiten. Dasselbe gilt auch (nach mehreren Ableitungen) für die trigonometrischen Funktion Sinus und Cosinus - ein erster Hinweis auf die enge Verwandtschaft zwischen Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

Satz 3.3.5. Sei $a > 0$. Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist überall differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = a^x \cdot \ln(a). \tag{3.11}$$

Beweis. Wir schreiben $f(x) = a^x$ als

$$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}.$$

Um aus dieser Darstellung die behauptete Formel (3.11) herzuleiten, benötigt man die Kettenregel, d.h. die Formel (3.20).

Bemerkung. Man beachte, dass (3.11) im Fall $a = e$ mit (3.9) übereinstimmt.

Trigonometrische Funktionen

Bemerkung. Die folgenden Regeln über die trigonometrischen Funktionen sind nur richtig, wenn im Bogenmass gerechnet wird. Wir rechnen also im Folgenden immer im Bogenmass, ohne dies irgendwann nochmals explizit anzugeben.

Satz 3.3.6. Die trigonometrischen Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ sind überall differenzierbar, und es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x) \tag{3.12}$$
$$\cos'(x) = -\sin(x) \tag{3.13}$$

Beweis. Wir setzen $f(x) = \sin(x)$ in die Definition der Ableitung ein und erhalten

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}.$$

Wir benützen nun das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

und erhalten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Wir benützen nun (ohne Beweis) die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Einsetzen in (3.14) liefert

$$f'(x) = \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x)$$

und damit die behauptete Formel (3.12). Die Formel (3.13) über die Ableitung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ wird auf ähnliche Art bewiesen.

3.3.2 Ableitung von zusammengesetzten Funktionen

Wenn wir die Ableitung von zusammengesetzen Funktionen berechnen wollen, greifen wir einerseits auf die Regeln des vorigen Abschnitts zurück und überlegen uns andererseits, wie sich die Ableitung einer zusammengesetzen Funktion aus den Ableitungen der einzelnen Bausteine zusammensetzen lässt. Oft ist es notwendig, diese Regeln mehrmals anzuwenden, insbesondere auch bei der Berechnung von höheren (meist zweiten) Ableitungen. Wir betrachten Regeln über die Ableitung von Ausdrücken folgender Typen:

- Summen und Differenzen von Funktionen, Produkte von Funktionen mit einem konstanten Faktor
- Produkte und Quotienten von Funktionen
- Verkettungen von Funktionen
- Potenzausdrücke, bei denen sowohl Basis wie auch Exponent nichtkonstante Funktionen sind
- Umkehrfunktionen bekannter Funktionen

Faktor- und Summenregel

Satz 3.3.7. Die Ableitung der Funktion $f(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ sowie beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$f'(x) = \lambda_1 u'(x) + \lambda_2 v'(x). \tag{3.15}$$

Beweis. Dies folgt durch direktes Einsetzen in die Definition

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Bemerkung. In der Sprache der Linearen Algebra nennt man $f(x) = \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x)$ eine Linearkombination $u(x)$ und $v(x)$, und die Formel (3.15) drückt aus, dass die Ableitung eine lineare Abbildung auf dem Vektorraum der differenzierbaren Funktionen ist.

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^7 - x + 2$:
$$f'(x) = 28x^6 - 1$$

b) $f(x) = 2e^x + 4\ln(x) - \frac{2}{\sqrt{x}}$: Dazu schreiben wir $\frac{2}{\sqrt{x}}$ zuerst als $2x^{-\frac{1}{2}}$ und erhalten dann
$$f'(x) = 2e^x + \frac{4}{x} + x^{-\frac{3}{2}}$$

c) $f(x) = \log_a(x)$ (für $a > 0$): Dazu schreiben wir $\log_a(x)$ zunächst als $\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ und erhalten dann
$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Produktregel Man beachte zunächst, dass die Ableitung eines Produkts von Funktionen *nicht* gleich dem Produkt der Ableitungen der beiden Faktoren ist.

Satz 3.3.8. Die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x). \tag{3.16}$$

Beweis. Der Differenzenquotient von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}.$$

Wir fügen nun im Zähler dieses Ausdrucks den Term $-v(x+h)u(x) + v(x+h)u(x)$ ein (der Zusatzterm ergibt insgesamt Null, die beiden Teile werden dann aber unterschiedlich weiterverarbeitet) und erhalten
$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x+h)v(x+h) - v(x+h)u(x) + v(x+h)u(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \underbrace{v(x+h)}_{\overset{h\to 0}{\to} v(x)} \cdot \underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\to} u'(x)} + \underbrace{u(x)}_{\overset{h\to 0}{\to} u(x)} \cdot \underbrace{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\to} v'(x)}.
\end{aligned}$$

Im Limes $h \to 0$ erhalten wir damit
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

d.h. die behauptete Formel (3.16).

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2e^x$:
$$f'(x) = 2(2xe^x + x^2e^x) = (4x + 2x^2)e^x$$

b) $f(x) = x^7 \ln(x)$:
$$f'(x) = 7x^6 \ln(x) + x^7 \cdot \frac{1}{x} = (7\ln(x) + 1)x^6$$

Bei mehr als zwei Faktoren, d.h. einer Funktion der Form
$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x),$$
verallgemeinert sich die Regel (3.16) folgendermassen:
$$f'(x) = (f_1'(x)f_2(x)\ldots f_n(x)) + (f_1(x)f_2'(x)\ldots f_n(x)) + \ldots + (f_1(x)f_2(x)\ldots f_n'(x))\,.$$

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der Funktion $f(x) = e^x(x^2 + 5x - 8)\ln(x)$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x^2 + 5x - 8)\ln(x) + e^x(2x + 5)\ln(x) + e^x(x^2 + 5x - 8)\frac{1}{x} \\ &= e^x\left((x^2 + 7x - 3)\ln(x) + \left(x + 5 - \frac{8}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Quotientenregel Man beachte auch hier, dass die Ableitung eines Quotienten von Funktionen *nicht* gleich dem Quotienten der Ableitungen der beiden Funktionen ist.

Satz 3.3.9. Die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ (mit $v(x) \neq 0$ für alle x) ist
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \tag{3.17}$$

Beweis. Wir schreiben $\frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$, wenden die Produktregel (3.16) auf die Faktoren $u(x)$ und $\frac{1}{v(x)}$ an und erhalten
$$f'(x) = \left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)'. \tag{3.18}$$

Wir werden mit der Kettenregel (3.20) zeigen, dass gilt:
$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} \tag{3.19}$$

Einsetzen von (3.19) in (3.18) liefert dann die behauptete Formel (3.17).

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x^3-x}$:

$$f'(x) = \frac{8x(x^3-x)-(4x^2+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} = \frac{-4x^4-7x^2+1}{(x^3-x)^2}$$

b) $f(x) = \frac{e^x}{x^4+1}$:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^4+1)-e^x\cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{e^x(x^4-4x^3+1)}{(x^4+1)^2}$$

c) $f(x) = \tan(x)$: Dazu schreiben wir $\tan(x)$ zunächst als $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und erhalten dann

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

oder, anders umgeformt,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

Die beiden Darstellungen der Ableitung der Tangensfunktion, d.h. $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$, sind beide gebräuchlich und werden je nach Zweckmässigkeit eingesetzt.

Kettenregel

Satz 3.3.10. Die Ableitung der Funktion $f(x) = (u\circ v)(x) = u(v(x))$ für differenzierbare Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ ist

$$f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x). \tag{3.20}$$

Bemerkung. Man nennt die beiden Faktoren in (3.20) die äussere bzw. innere Ableitung: $u'(v(x))$ ist die äussere, $v'(x)$ die innere Ableitung. In den Anwendungen besteht meistens die Gefahr, dass man die innere Ableitung vergisst.

Beweis. Der Differenzenquotient von $f(x) = u(v(x))$ ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h}.$$

Wir fügen nun in diesem Ausdruck den Faktor $\frac{v(x+h)-v(x)}{v(x+h)-v(x)}$ ein und erhalten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{h} = \frac{u(v(x+h))-u(v(x))}{v(x+h)-v(x)}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

Wir schreiben nun $\Delta v = v(x+h) - v(x)$ und setzen diese Schreibweise im ersten Faktor des letzten Produkts ein. Auf diese Weise erhalten wir

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} = \underbrace{\frac{u(v(x)+\Delta v) - u(v(x))}{\Delta v}}_{\overset{h\to 0}{\to} u'(v(x))} \cdot \underbrace{\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\to} v'(x)}$$

Im Limes $h \to 0$ erhalten wir damit

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = u'(v(x)) \cdot v'(x),$$

d.h. die behauptete Formel (3.20).

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{3x^2+4x}$: Die äussere bzw. innere Funktion $u(x)$ bzw. $v(x)$ sind $u(x) = \sqrt{x}$ und $v(x) = 3x^2 + 4x$, also erhalten wir

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+4x}} \cdot (6x+4) = \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x}}$$

b) $f(x) = (x^2+e^x)^{100}$: Die äussere bzw. innere Funktion $u(x)$ bzw. $v(x)$ sind $u(x) = x^{100}$ und $v(x) = x^2 + e^x$, also erhalten wir

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = 100(x^2+e^x)^9 9 \cdot (2x + e^x)$$

c) $f(x) = \sin(2x)$: Die äussere bzw. innere Funktion $u(x)$ bzw. $v(x)$ sind $u(x) = \sin(x)$ und $v(x) = 2x$, also erhalten wir

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x)$$

Zudem liefern wir die versprochene Ableitung von $\frac{1}{v(x)}$ für eine beliebige Funktion $v(x) \neq 0$, die den Beweis der Quotientenregel (Satz 3.3.9) vervollständigt: Die äussere Funktion ist $u(x) = \frac{1}{x}$ mit Ableitung $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, während die innere Funktion $v(x)$ unbestimmt bleibt. Also liefert die Formel (3.20)

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{1}{v(x)^2} \cdot v'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2},$$

d.h. (3.19).

Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 3.3.11. Gegeben sei eine umkehrbare und an der Stelle x differenzierbare Funktion $f(x)$. Zudem sei $f'(x) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{3.21}$$

Durch Vertauschen von x und y erhält man schliesslich folgende Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3.22}$$

Beweis. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt

$$\underbrace{f^{-1}(f(x))}_{=(f^{-1}\circ f)(x)} = x$$

Wir bilden nun die Ableitung auf beiden Seiten dieser Gleichung; für die linke Seite benötigen wir die Kettenregel (3.20):

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1.$$

Einsetzen von $y = f(x)$ bzw. $x = f^{-1}(y)$ und Auflösen nach $f^{-1}(y)$ liefert

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))},$$

d.h. die behauptete Formel (3.21).

Wenn man die Formel (3.22) auf die Funktionen $f(x) = \tan(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = e^x$ anwendet, erhält man die Ableitungen der Arkusfunktionen und des Logarithmus:

Satz 3.3.12. Es gelten folgende Ableitungsregeln:

a) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

b) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Beweis. Wir beweisen nur die Formel d): Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, also ergibt sich nach (3.22) mit $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ und $f^{-1}(x) = \ln(x)$

$$\ln'(x) = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e(\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

Logarithmische Ableitung Bei Funktionen von Typ $f(x) = u(x)^{v(x)}$ sind weder die Regel (3.8) über die Ableitung von Potenzausdrücken der Form $f(x) = x^\alpha$ noch die Regel (3.11) über die Ableitung von Exponentialausdrücken der Form $f(x) = a^x$ anwendbar, da sowohl die Basis als auch der Exponent von x abhängen. Um einen Ausdruck der Form $f(x) = u(x)^{v(x)}$ abzuleiten, logarithmieren wir zuerst die Funktionsgleichung und erhalten

$$\ln(f(x)) = v(x) \cdot \ln(u(x)).$$

Jetzt können wir beide Seiten mit den bekannten Regeln ableiten,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)},$$

und dann nach $f'(x)$ auflösen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \\ &= u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Beispiel. Wir bestimmen die Ableitung der Funktionen $f(x) = x^x$ (definiert für $x > 0$): Es gilt $u(x) = v(x) = x$, also nach (3.23)

$$f'(x) = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$$

3.4 Linearisierung einer Funktion

Wir benützen die Kurventangente einer nichtlinearen Funktion $y = f(x)$, um diese Funktion in der Nähe eines bestimmten Punktes durch eine lineare Funktion zu approximieren. Die Kurventangente an einem bestimmten Punkt spielt hier also die Rolle der Linearisierung: Man ersetzt die gegebene Funktion durch eine lineare Approximation, deren Funktionswerte in einer Umgebung des Punktes x_0 nicht zu stark von den exakten Funktionswerten abweichen. Dies ist für bestimmte theoretische Überlegungen nützlich (z.B. gibt es Differentialgleichungen, die erst dann analytisch lösbar werden, wenn bestimmte in der Gleichung vorkommende Terme durch ihre Linearisierung ersetzt werden), andererseits erhält man so manchmal eine nützliche Näherung zwischen den *Zuwächsen* der unabhängigen Variablen und den entsprechenden Zuwächsen der Funktionswerte.
Salopp gesprochen sieht jede differenzierbare Funktion unter dem Mikroskop wie eine lineare Funktion aus:

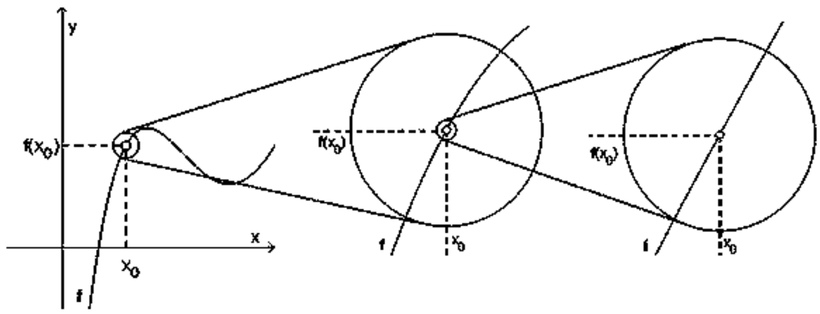


Abbildung 3.8: Linearisierung einer Funktion

Analytisch ist die gesuchte Linearisierung nicht anderes als die Tangente an den Funktionsgraphen an der Stelle x_0. Im Unterschied zur Ableitung $f'(x_0)$ von $f(x)$ an der Stelle x_0 bestimmen wir jetzt also nicht nur die Tangentensteigung, sondern die Geradengleichung dieser Tangente, vgl. Abschnitt 1.5.1.

Satz 3.4.1. Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und $x_0 \in D$. Die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \tag{3.24}$$

Beweis. Wenn (3.24) in der Form

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

geschrieben wird, entspricht dies genau der in Abschnitt 1.5.1 erwähnten Punkt-Steigungsform einer Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) mit Steigung m: Es gilt $y_0 = f(x_0)$, und die Tangente hat an die Steigung $m = f'(x_0)$.

Zwischen den Zuwächsen Δx und Δy besteht in der Nähe der Stelle x_0 also die approximative Beziehung

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $y = e^x$.

a) Wir bestimmen die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$: Es gilt $f(x_0) = f'(x_0) = e^0 = 1$, also erhalten wir aus (3.24) als Tangentengleichung

$$y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1$$

b) Wenn wir z.B. für $x = 0.01$ die Funktionswerte auf der Funktionskurve und auf der Tangenten vergleichen, sehen wir, dass die Approximation der Funktionskurve durch die Tangente sehr gut ist, wenn wir so nahe am Entwicklungspunkt sind (wobei wir mit $t(x)$ die Tangentengleichung $t(x) = x + 1$ meinen):

$$f(0.01) = 1.010005\ldots, \quad t(0.01) = 1.01$$

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $y = \sin(x)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Funktionsgraphen von $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Es gilt $f(x_0) = \sin(0) = 0$ und $f'(x_0) = \cos(0) = 1$, also erhalten wir aus (3.24) als Tangentengleichung

$$y = 1 \cdot (x - 0) = x$$

Dieses Resultat, d.h. dass die Sinusfunktion in der Nähe des Ursprungs durch die Gerade $y = x$ approximiert werden kann, hat eine physikalische Anwendung, siehe das folgende Beispiel.

Beispiel. Die Differentialgleichung der Auslenkung $\phi(t)$ eines (reibungsfreien) Pendels mit Masse m ist

$$m \cdot g \cdot \sin(\phi(t)) = -m \cdot l \cdot \ddot{\phi}(t).$$

(In der Physik notiert man die Ableitung einer Funktion oft mit einem Punkt statt einem Strich, d.h. in der Form $\dot{\phi}$ statt ϕ', insbesondere dann, wenn die unahängige Variable t und nicht x heisst.) Diese Differentialgleichung ist analytisch nicht lösbar. Wenn man $\sin(\phi(t))$ durch die Linearisierung $\phi(t)$ ersetzt, d.h. wenn man die Näherung

$$\sin(\phi) \approx \phi$$

vornimmt (die im vorigen Beispiel hergeleitet wurde), erhält man die Differentialgleichung

$$m \cdot g \cdot \phi(t) = -m \cdot l \cdot \ddot{\phi}(t),$$

die einfach lösbar ist. Die Näherung $\sin(\phi) \approx \phi$ ist aber nur für kleine Werte der Auslenkung ϕ zulässig.

Bemerkung. Wenn man das Prinzip, komplizierte Funktionen durch Polynome zu approxmieren, auf Polynome höherer Ordnung (statt nur lineare Funktionen) ausweitet, erhält man Taylorpolynome und Taylorreihen (siehe AN2).

3.5 Monotonie und Krümmung

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, welche Rückschlüsse man aus der Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ auf den Verlauf der Funktionskurve selbst ziehen kann. Insbesondere geht es also um eine Korrespondenz zwischen den analytischen Eigenschaften einer Funktion und den geometrischen Eigenschaften ihres Funktionsgraphen. Dabei gibt die erste Ableitung $f'(x_0)$ Auskunft über die Steigung des Funktionsgraphen von $f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$, während die zweite Ableitung $f''(x_0)$ eine Aussage über die Krümmung der Kurve in diesem Punkt macht.

3.5.1 Monotonie

Wie wir gesehen haben, ist die 1. Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 die Steigung der Tangente an die Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0. Wir können diese Information über die Steigung der Kurventangente folgendermassen in eine Information über das Monotonieverhalten der Funktonskurve in der Nähe des Punktes x_0 übersetzen (zum Begriff von monoton wachsenden bzw. monoton fallenden Funktionen siehe (1.2) bzw. (1.3)):

Satz 3.5.1. Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und Ableitung $y' = f'(x)$, und sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

- Ist $f'(x_0) > 0$, so *wächst* die Kurve *streng monoton* in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$.
- Ist $f'(x_0) < 0$, so *fällt* die Kurve *streng monoton* in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$.
- Ist $f'(x_0) = 0$, so hat die Funktionskurve im Kurvenpunkt $P = (x_0, f(x_0))$ eine horizontale Tangente.

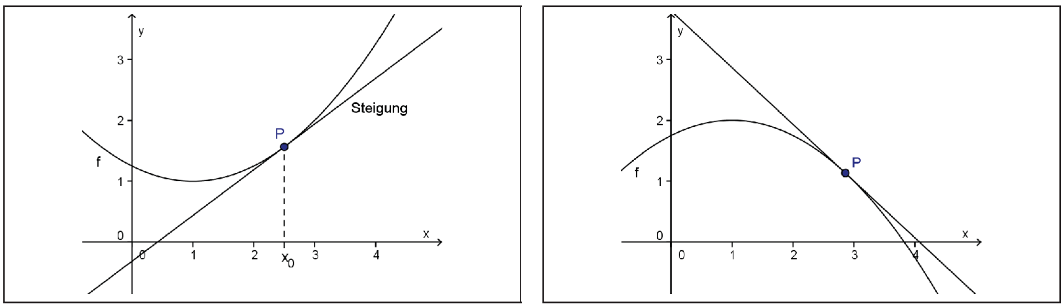


Abbildung 3.9: Monotonie und Ableitung

Beispiel. Wir illustrieren das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen $y = f(x)$ anhand des Vorzeichens ihrer Ableitungsfunktion $y' = f'(x)$:

a) $y = e^x$: Es gilt $y' = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion überall monotan steigend.

b) $y = e^{-x}$: Es gilt $y' = -e^{-x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion überall monotan fallend.

c) $y = \ln(x)$: Es gilt $y' = \frac{1}{x} > 0$ für alle $x > 0$, d.h. alle für alle Elemente des Definitionsbereichs der Funktion, also ist die Funktion auf ihrem ganzen Definitionsbereich monoton steigend.

d) $y = (2 - 2x - x^2) \cdot e^{1-x}$: Es gilt (Produkt- und Kettenregel)

$$y' = (-2 - 2x)e^{1-x} - (2 - 2x - x^2)e^{1-x} = (x^2 - 4)e^{1-x}$$

Daraus folgt

$$y' \begin{cases} > 0 & (x < -2) \\ = 0 & (x = -2) \\ < 0 & (-2 < x < 2) \\ = 0 & (x = 2) \\ > 0 & (x > 2) \end{cases}$$

Wir lernen daraus, dass die Funktion für $|x| > 2$ monoton steigend und für $|x| < 2$ monoton fallend ist. (Über die Bedeutung der Nullstellen von $f'(x)$ werden wir anschliessend diskutieren.) Diese Erkenntnisse übers Monotonieverhalten werden vom Graphen der Funktion bestatigt:

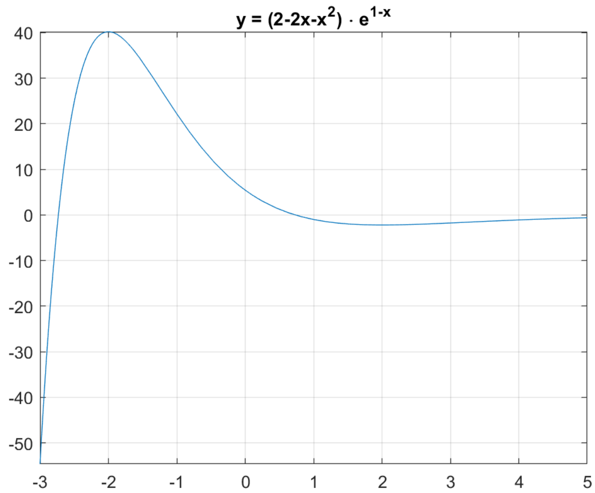


Abbildung 3.10: Monotonie und 1. Ableitung

3.5.2 Krümmung

Die 2. Ableitung $y'' = f''(x)$ ist die Ableitung der 1. Ableitung (vgl. Abschnitt 3.2.3), gibt also Auskunft über die Änderungstendenz der Tangentensteigung. Anschaulich äussert sich dies in der *Krümmung* der Kurve, d.h. ob die Kurve im Punkt $(x_0, f(x_0))$ (in steigender x-Richtung) eine Links- oder Rechtskurve beschreibt (wenn die Steigung für wachsende x immer grösser wird, beschreibt der Funktionsgraph eine Linkskurve, bzw. Rechtskurve für immer kleiner werdende Steigungen für wachsende x), oder ob sich der Drehsinn in dem betreffenden Punkt gerade ändert.

Satz 3.5.2. Sei $y = f(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich D und 2. Ableitung $y'' = f''(x)$, und sei $x_0 \in D$. Dann gilt:

- Ist $f''(x_0) > 0$, so ist die Kurve in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$ nach *links* gekrümmt, bzw. sie ist *konvex*.
- Ist $f''(x_0) > 0$, so ist die Kurve in einer Umgebung des Kurvenpunktes $P = (x_0, f(x_0))$ nach *rechts* gekrümmt, bzw. sie ist *konkav*.
- Ist $f''(x_0) = 0$, so ist die Kurve im Kurvenpunkt $P = (x_0, f(x_0))$ nicht eindeutig gekrümmt.

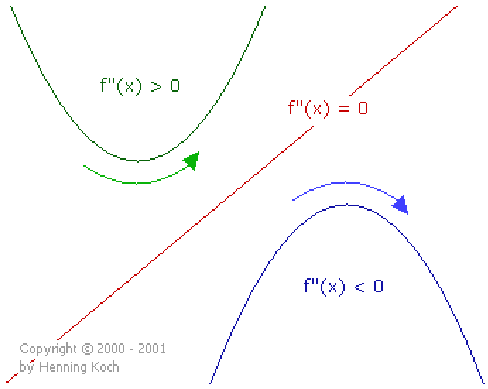


Abbildung 3.11: Krümmung und 2. Ableitung

Beispiel (Fortsetzung)**.** Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten der folgenden Funktionen $y = f(x)$ anhand des Vorzeichens ihrer zweiten Ableitung $y'' = f''(x)$:

a) $y = e^x$: Es gilt $y'' = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion überall konvex.

b) $y = e^{-x}$: Es gilt $y'' = e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion überall konvex.

c) $y = \ln(x)$: Es gilt $y'' = -\frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist die Funktion überall konkav.

3.6 Charakteristische Kurvenpunkte

Mit der Differentialrechnung lassen sich charakteristische Kurvenpunkte wie relative Extrema oder Punkte, an denen sich der Drehsinn der Kurve ändert, einfach beschreiben und auffinden. Die *geometrische* Aufgabe, in der Funktionskurve diese speziellen Punkte zu finden, kann also in die *analytische* Aufgabe, Nullstellen der 1. bzw. 2. Ableitung der Funktion zu finden, übergeführt werden.

3.6.1 Relative Extrema

Definition 3.6.1. Eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich D besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ eine *relative Maximalstelle* bzw. *relative Minimalstelle*, d.h. ein *relative Extremalstelle*, falls in einer Umgebung U von x_0 gilt:

$$\begin{cases} f(x_0) > f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{(relatives Maximum)} \\ f(x_0) < f(x) & (x \neq x_0, x \in U) \quad \text{(relatives Minimum)} \end{cases}$$

Die entsprechenden Funktionswerte $y = f(x_0)$ heissen *relatives Maximum/relatives Minimum/relatives Extremum*, und die zugehörigen Kurvenpunkte $(x_0, f(x_0))$ heissen *relativer Hochpunkt/relativer Tiefpunkt/relativer Extremalpunkt.*

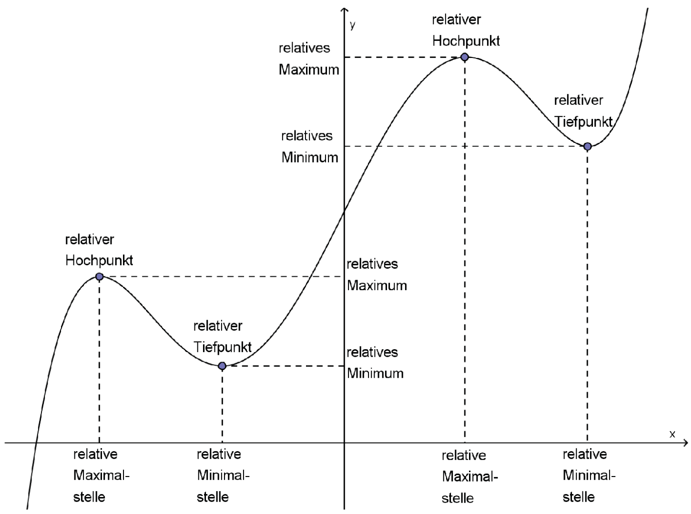


Abbildung 3.12: Relative Extrema

Bemerkung. Man beachte, dass diese Definition nichts mit Differentialrechnung zu tun hat. Es wird ja auch nicht vorausgesetzt, dass die Funktion $f(x)$ differenzierbar sein soll. Wir benützen die Differentialrechnung aber, um die relativen Extrema zu finden, falls $f(x)$ differenzierbar ist.

Beispiel. Die Funktion $y = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, hat aber an genau dieser Stelle $x_0 = 0$ ein relatives (und sogar absolutes) Minimum.

Falls $f(x)$ aber differenzierbar ist, findet man die relativen Extrema durch Lösen der Gleichung $f'(x_0) = 0$, vgl. Satz 3.5.1, denn an so einem Kurvenpunkt hat der Funktionsgraph eine horizontale Tangente. Allerdings ist dies eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für relative Extrema.

Satz 3.6.2. Sei x_0 eine relative Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion $y = f(x)$. Dann gilt
$$f'(x_0) = 0.$$

Beispiel. Dass die Bedingung $f'(x_0) = 0$ nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für ein Extremum ist, sieht man an den Funktionen $y = x^2$ und $y = x^3$ und $x_0 = 0$:

a) $y = x^2$: Ja, an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion ein relatives (und sogar globales) Extremum. Dies folgt, weil zusätzlich zur notwendigen Bedingung $f'(x_0) = 0$ auch das hinreichende Kriterium $f''(x_0) \neq 0$, siehe Satz 3.6.3, erfüllt ist.

b) $y = x^3$: Nein, an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion kein lokales Extremum, wie man durch Betrachten des Funktionsgraphen feststellen kann. Das hinreichende Kriterium $f'(x_0 = 0)$, $f''(x_0) \neq 0$ für einen Extremalpunkt ist nicht erfüllt, hingegen sind die hinreichenden Kriterien von Satz 3.6.6 für einen Wendepunkt erfüllt (siehe unten).

Satz 3.6.3. Sei $y = f(x)$ eine differenzierbare Funktion. Falls an der Stelle x_0 die Bedingungen
$$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) \neq 0$$
erfüllt sind, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 ein relatives Extremum. Im Fall $f''(x_0) < 0$ handelt es sich dabei um ein relatives Maximum, im Fall $f''(x_0) > 0$ um ein relatives Minimum.

Beispiel. Die Funktion $y = x^2$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, weil die hinreichenden Bedingungen $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 2 > 0$ für ein lokales Minimum erfüllt sind.

Dieser Satz gibt nun eine hinreichende Bedingung für relative Extrema. Allerdings ist die Zusatzbedingung $f''(x_0) \neq 0$ nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Die Funktion $y = x^4$ hat $x_0 = 0$ ein relatives (und sogar globales) Extremum, obwohl das hinreichende Kriterium von Satz 3.6.3 nicht erfüllt ist. Um dieses Beispiel sicher zu klassifizieren, muss auf die komplizierteren Bedingungen von Satz 3.6.7 zurückgegriffen werden.

3.6.2 Wendepunkte, Sattelpunkte

Definition 3.6.4. Eine Funktion $y = f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 einen *Wendepunkt* $(x_0, f(x_0))$, falls sich an der Stelle x_0 der Drehsinn der Kurve ändert; dabei heisst x_0 die zugehörige *Wendestelle*. Wendepunkte mit horizontaler Tangente heissen *Sattelpunkte* oder *Terrassenpunkte*. Allgemein heisst die „Tangente“ an die Kurve an einem Wendepunkt *Wendetangente*.

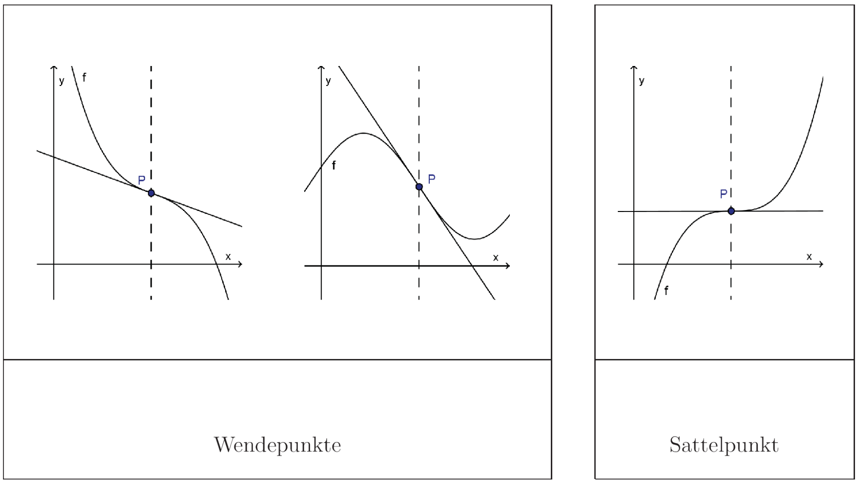


Abbildung 3.13: Wendepunkte und Sattelpunkte

Anschaulich geht die Kurve an einem Wendepunkte also von einer Links- in eine Rechtskurve über oder umgekehrt (in steigender x-Richtung). Wie bei relativen Extrema benützt auch die Definition von Wendepunkten keine Begriffe aus der Differentialrechnung. Wir benützen aber die Differentialrechung, um Wendepunkte zu finden, und geben zuerst ein notwendiges und dann ein hinreichendes Kriterium.

Satz 3.6.5. Sei $(x_0, f(x_0))$ ein Wendepunkt einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$. Dann gilt

$$f''(x_0) = 0.$$

Beispiel (Fortsetzung)**.** Dass die Bedingung $f''(x_0) = 0$ nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt ist, sieht man an den Funktionen $y = x^3$ und $y = x^4$ und $x_0 = 0$:

a) $y = x^3$: Ja, an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion einen Wendepunkt. Dies folgt, weil zusätzlich zur notwendigen Bedingung $f''(x_0) = 0$ auch das hinreichende Kriterium $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, siehe Satz 3.6.6, erfüllt ist. Da zudem $f'(x_0) = 0$ gilt, handelt es sich sogar um einen Terrassenpunkt.

b) $y = x^4$: Nein, an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Funktion keinen Wendepunkt, wie man durch Betrachten des Funktionsgraphen feststellen kann. Mit Satz 3.6.7 über die Klassifizierung von Punkten mit vielen verschwindenden Ableitungen, d.h. mit $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = 0$ kann man hingegen nachweisen, dass bei dieser Funktion im Ursprung ein lokales Minimum vorliegt.

Satz 3.6.6. Sei $y = f(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion.

a) Falls an der Stelle x_0 die Bedingungen

$$f''(x_0) = 0, \qquad f^{(3)}(x_0) \neq 0$$

erfüllt sind, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

b) Falls zusätzlich die Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

erfüllt ist, handelt es sich bei diesem Wendepunkt um einen Sattelpunkt bzw. Terrassenpunkt.

Bemerkung. Für einen Sattelpunkt an der Stelle x_0 müssen also die beiden Bedingungen $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ erfüllt sein, sowie in den meisten Fällen $f^{(3)}(x_0) \neq 0$. Typischerweise hat eine gegebene Funktion keinen Sattelpunkt.

Beispiel. Wir bestimmen die relativen Extrema (inkl. Typbestimmung) und Wendepunkte der Funktion

$$y = \sin(x).$$

- *Relative Extrema:* Die Nullstellen der 1. Ableitung, also von $y' = \cos(x)$, sind

  $$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  An all diesen Stellen ist die 2. Ableitung, d.h. $y'' = -\sin(x)$, ungleich Null, d.h. $y''(x_k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Also hat die Sinusfunktion nach Satz 3.6.3 an all diesen Stellen x_k ein relatives Extremum. Es gilt

  $$y''(x_k) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

  also sehen wir: Für gerade k ist $y''(x_k) = -1 < 0$, d.h. es liegt ein lokales Maximum vor, und für ungerade k ist $y''(x_k) = 1 > 0$, d.h. es liegt ein lokales Minimum vor.

- *Wendepunkte:* Die Nullstellen der 2. Ableitung von $y = \sin(x)$, d.h. von $y'' = -\sin(x)$, sind

  $$x_k^{(W)} = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  An all diesen Stellen ist die 3. Ableitung, d.h. $y^{(3)}(x) = -\cos(x)$, ungleich Null, d.h. $y''(x_k^{(W)}) \neq 0$. Also hat die Sinusfunktion nach Satz 3.6.6 an all diesen Stellen $x_k^{(W)}$ einen Wendepunkt.

All diese rechnerisch hergeleiteten Fakten können durch eine Betrachtung des Graphen der Sinusfunktion bestätigt werden.

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Klassifikation von "kritischen" Punkten, d.h. Punkten x_0 mit der Eigenschaft $f'(x_0) = 0$, ist durch folgenden Satz gegeben:

Satz 3.6.7. Sei $f(x)$ ein genügend oft differenzierbare Funktion, und es gelte $f'(x_0) = 0$. Sei zudem $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0, d.h. es gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

a) Wenn n gerade ist, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 ein relatives Extremum, und zwar ein relatives Maximum im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein relatives Minimum im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$.

b) Wenn n ungerade ist, hat $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Wendepunkt (und damit einen Sattelpunkt).

Bemerkung. Falls $f^{(n)}(x_0) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, müssen zur Typbestimmung andere Methoden verwendet werden.

3.7 Kurvendiskussion

Unter Kurvendiskussion verstehen wir die Zusammenstellung aller relevanten Eigenschaften einer Funktion $y = f(x)$, die es erlauben, ein ungefähres Bild des Graphen von $f(x)$ zu erhalten. Selbst wenn man Funktionsgraphen auch ohne Kurvendiskussion mit einem Klick produzieren kann, lohnt es sich, das Verfahren für einige Beispiele durchzugehen, da man damit ein vertieftes strukturelles Verständnis einer Funktion erhält. Besonders bei rationalen Funktionen ist das Verfahren sinnvoll.
Konkret untersucht man folgende Fragen für eine gegebene Funktion $y = f(x)$:

- Definitionsbereich
- Symmetrie
- Schnittpunkte mit der Koordinatenachsen
- Polstellen und hebbare Definitionslücken
- Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung
- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte

Beispiel. Wir führen für die Funktion $f(x) = \frac{-5x^2+5}{x^3}$ eine Kurvendiskussion mit den oben erwähnten Elementen durch:

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Symmetrie: ungerade Funktion, da der Zähler eine gerade und der Nenner eine ungerade Funktion ist
- Schnittpunkte mit der Koordinatenachsen: kein Schnittpunkt mit der y-Achse, da für $x = 0$ nicht definiert; Nullstellen: $x_{1,2} = \pm 1$
- Polstellen und hebbare Definitionslücken: Polstelle: $x = 0$; keine weiteren Definitionslücken
- Verhalten für $x \to \pm\infty$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$
- Relative Extrema, inkl. Typbestimmung: Die Ableitung $f'(x)$ ist

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 15}{x^4}$$

also sind $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ (kritische Punkte). Zur Typbestimmung berechnen wir die zweite Ableitung $f''(x)$, $f''(x) = \frac{-10x^2}{60}$, und erhalten $f''(x^*_1) > 0$, $f''(x^*_2) < 0$, also ist x^*_1 eine lokale Minimalstelle, und x^*_2 ist eine lokale Maximalstelle. Die entsprechenden Kurvenpunkte sind

$$P^*_{1,2} = \pm\left(\sqrt{3}, -\frac{10}{3\sqrt{3}}\right) \approx \pm(1.732, -1.924)$$

- Wendepunkte, insbesondere Sattelpunkte: Die Lösungen der Gleichung $f''(x) = 0$ sind $x^{(W)}_{1,2} = \pm\sqrt{5}$. Zur Kontrolle berechnen wir, dass $f^{(3)}(x^{(W)}_{1,2}) \neq 0$ gilt. Die Wendenstellen sind also $x^{(W)}_{1,2} = \pm\sqrt{5}$, und die entsprechenden Kurvenpunkte sind

$$W1, 2 = \pm\left(\sqrt{5}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

All diese Ergebnisse werden vom Graph der Funktion $f(x)$ bestätigt:

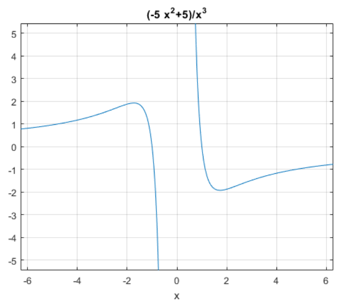
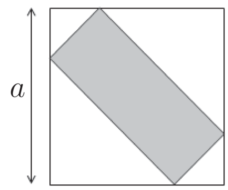


Abbildung 3.14: Funktionsgraph und Kurvendiskussion

3.8 Extremwertprobleme

In vielen Anwendungsproblemen geht es darum, den grössten oder kleinsten Wert einer differenzierbaren Funktion $f(x)$ in einem bestimmten Bereich zu finden. Dieser Bereich kann kleiner sein als der mathematisch mögliche Definitionsbereich der gegebenen Funktion, etwa aufgrund geometrischer oder praktischer Einschränkungen. Dies hat zur Konsequenz, dass die gesuchten Extrema auch am *Rand* des betrachteten Bereichs liegen können: In diesem Fall erfüllen sie oft *nicht* die Bedingung $f'(x) = 0$. Dies bedeutet, dass man unter Umständen die Punkte am Rand des Definitionsbereichs neben den Lösungen von $f'(x) = 0$ in die „Kandidatenliste" für die gesuchten Extrema aufnehmen muss. Die Lösung des Extremwertproblems bestimmt man dann oft am einfachsten durch den Vergleich der Funktionswerte an allen in der Kandidatenliste vorkommenden Punkten (während die Typbestimmung mit der zweiten Ableitung in dieser Art von Problemen oft überflüssig ist).
Falls die zu maximierende oder minimierende Funktion von mehreren Variablen abhängt, ist es oft möglich, durch Einsetzen einer Nebenbedingung in die Zielfunktion eine Funktion von einer Variablen zu erhalten, die man dann mit den bekannten Methoden untersuchen kann.

Beispiel. Einem Quadrat der Seitenlänge a soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Die Seiten des Rechtecks sollen parallel zu den Diagonalen des Quadrats sein.



Wir bestimmen Länge und Breite des gesuchten Rechtecks mit dem gesuchten maximalen Flächeninhalt.

Beispiel. Aus einem Baumstamm mit kreisförmigen Querschnitt (Radius R) soll in Balken mit rechteckigem Querschnitt und Seitenlängen b und h herausgeschnitten werden. Wie müssen b und h gewählt werden, damit das Widerstandmoment

$$W = \frac{1}{6}bh^2$$

maximal wird?

Beispiel. Gegeben ist die Kurve

$$y = x^2.$$

Welcher Punkt auf dieser Kurve hat den kleinsten Abstand vom Punkt $P = (-1, 2)$?

Bei Extremwertproblemen dieser Art ist das folgende Vorgehen zielführend:

- Bestimmung der *Zielfunktion* f, d.h. der Funktion, die es zu maximieren/minimieren gilt, und des Bereichs I, auf dem die Zielfunktion betrachtet wird

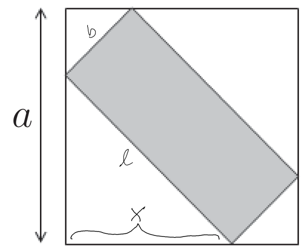
- Bestimmung allenfalls vorhandener *Nebenbedingungen* und Einsetzen dieser Nebenbedingungen in die Funktionsgleichung

- Bestimmung der im Innern von I liegenden relativen Extremalstellen $x_1, x_2, \ldots$ durch Lösen der Gleichung $f'(x_0) = 0$, evtl. mit Typbestimmung

- Bestimmung des gesuchten Maximums/Minimums durch Vergleich der Funktionswerte an den relativen Extremalstellen sowie evtl. an den Randpunkten des Intervalls

Bemerkung. Falls der betrachtete Definitionsbereich ein *offenes Intervall* $I = (a, b)$ ist, d.h. die Randpunkte *nicht* enthält, kann es auch sein, dass die Funktion auf I kein Maximum/Minimum hat, z.B. dann wenn $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x\to b} f(x) = \pm\infty$ gilt. Nur auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $I = [a, b]$ kann man sicher sein, dass $f(x)$ tatsächlich ein Maximum und ein Minimum hat (zumindest falls es sich um eine differenzierbare Funktion handelt).

Beispiel (Fortsetzung)**.** Einem Quadrat der Seitenlänge a soll ein Rechteck mit grösstmöglichem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Die Seiten des Rechtecks sollen parallel zu den Diagonalen des Quadrats sein. Wir bestimmen Länge und Breite des gesuchten Rechtecks.



- Die Zielfunktion ist die Fläche des Rechtecks $A = l \cdot b$, wobei l und b die Länge bzw. Breite des Rechtecks sind.

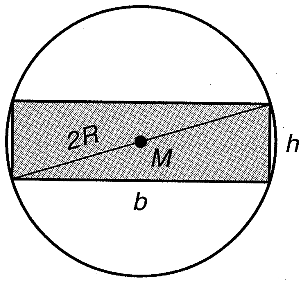
- Dies ist eine Funktion von zwei Variablen; wir machen daraus eine Funktion von einer Variablen, indem wir l und b durch den eingezeichneten Teil x der Seitenlänge ausdrücken, siehe Skizze:

$$A(x) = l \cdot b = \left(\sqrt{2} \cdot x\right) \cdot \left(\sqrt{2}(a - x)\right) = 2x(a - x) = 2ax - 2x^2$$

- Die Berechnung von $A'(x)$ bzw. das Lösen von $A'(x) = 0$ ergibt $A'(x) = 2a - 4x$ bzw. die Gleichung $2a - 4x = 0$, mit Lösung
$$x = \frac{a}{2}$$
Typbestimmung: $A''(x) = -4 < 0$, also handelt es sich um ein relatives Maximum (auch anschaulich klar, da nach unten geöffnete quadratische Parabel).

- Bestimmung von Länge und Breite:
$$l = \sqrt{2} \cdot x = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad b = \sqrt{2}(a - x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$
Die Rechnung hat also das erwartete Resultat gebracht, nämlich dass das Quadrat das flächengrösste unter all diesen eingeschriebenen Rechtecken ist.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Aus einem Baumstamm mit kreisförmigen Querschnitt (Radius R) soll in Balken mit rechteckigem Querschnitt und Seitenlängen b und h herausgeschnitten werden. Wie müssen b und h gewählt werden, damit das Widerstandmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ maximal wird?



- Die Zielfunktion ist das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$

- Dies ist eine Funktion von zwei Variablen; wir machen daraus eine Funktion von einer Variablen, indem wir wie in der Skizze ersichtlich b und h via die pythagoräische Beziehung $b^2 + h^2 = 4R^2$ verbinden. Wir erhalten so
$$W(b) = \frac{1}{6}b(4R^2 - b^2) = \frac{2R^2}{3}b - \frac{1}{6}b^3$$

- Die Berechnung von $W'(b)$ bzw. das Lösen von $W'(b) = 0$ ergibt $W'(b) = \frac{2R^2}{3} - \frac{1}{2}b^2$ bzw. die Gleichung $\frac{2R^2}{3} - \frac{1}{2}b^2 = 0$, mit (positiver) Lösung
$$b^* = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$
Typbestimmung: $W''(b) = -b$, also $W''(b^*) < 0$, also handelt es sich um ein relatives Maximum (auch anschaulich klar).

- Wir haben also die gesuchte Breite $b^* = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ gefunden; die gesuchte Länge ergibt sich dann aus der Nebenbedingung $b^2 + h^2 = 4R^2$ zu $h^* = \sqrt{4R^2 - (b^*)^2} = \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}R$. Insgesamt

$$b^* = \frac{2R}{\sqrt{3}} \qquad h^* = \sqrt{\frac{8}{3}}R$$

Beispiel (Fortsetzung)**.** Gegeben ist die Kurve $y = x^2$. Wir bestimmen den Punkt auf dieser Kurve mit dem kleinstmöglichen Abstand vom Punkt $P = (-1, 2)$.

- Die Zielfunktion ist der Abstand eines beliebigen Punktes $P = (x, y)$ zum gegebenen Punkt $P = (-1, 2)$:
$$d(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$$
- Dies ist eine Funktion von zwei Variablen; wir machen daraus eine Funktion von einer Variablen, indem wir berücksichtigen, dass der gesuchte Punkt auf der Kurve $y = x^2$ liegen muss. Einsetzen in die Zielfunktion $d(x, y)$ liefert
$$d(x) = \sqrt{(x+1)^2 + (x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + x^4 - 4x^2 + 4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2x + 5}$$
- Die Berechnung von $d'(x)$ bzw. das Lösen von $d'(x) = 0$ ergibt $d'(x) = \frac{4x^3-6x+2}{2\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}}$ bzw. die Gleichung $4x^3 - 6x + 2 = 0$, mit den 3 Lösungen
$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$
Typbestimmung: $d''(x) = \frac{2x^6-9x^4+8x^3+30x^2-16}{(x^4-3x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}}$, also $d''(x_1) > 0$, $d''(x_2) < 0$, $d''(x_3) > 0$. D.h. bei x_1 und x_3 hat die Funktion $d(x)$ ein lokales Minimum, bei x_2 ein lokales Maximum.
- Für $x \to \pm\infty$ gilt $d(x) \to \infty$. Um das globale Minimum der Funktion $d(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, vergleichen wir also die Funktionswerte von $d(x)$ bei den lokalen Minima x_1 und x_3; wir erhalten den kleinere Funktionswert bei x_3. Der gesuchte Punkt ist also
$$P_{\min} = (x_3, x_3^2) = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
- *Hinweis:* Man könnte die Rechnung auch mit der quadrierten Zielfunktion $d^2(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + 5$ ausführen. Dies würde die gleichen Ergebnisse liefern - mit einer wesentlich einfacheren Rechnung. Dass das Resultat dasselbe ist, folgt aus der Überlegung, dass es für die Lage des Minimums keinen Unterschied macht, ob man den Abstand oder den quadrierten Abstand minimiert.

3.9 Tangentenverfahren von Newton

Es geht nun darum, ein Näherungsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen der Form $f(x) = 0$ bzw. zur Bestimmung von Nullstellen von $f(x)$ zu entwickeln.

Beispiel. Wir möchten die eindeutige Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2 - e^x = 0$$

bestimmen. Es ist nicht möglich, diese Gleichung analytisch zu lösen.

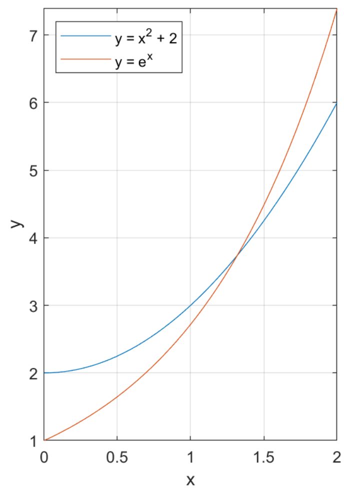


Abbildung 3.15: Eindeutiger Schnittpunkt zweier Kurven

Wenn wir die Graphen der beiden Funktionen $y = x^2 + 2$ und $y = e^x$ anschauen, sehen wir, dass es genau eine Lösung dieser Gleichung gibt.

Obwohl solche Gleichungen grundsätzlich nicht zur Differentialrechnung gehören, kann man Hilfsmittel aus der Differentialrechnung benützen, um sie zu lösen, wenn die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist. Das von Newton stammende Näherungsverfahren zur approximativen Berechnung von Nullstellen von $f(x)$ liefert eine Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ von Näherungswerten, die unter bestimmten Voraussetzungen gegen die unbekannte Nullstelle ξ konvergiert. Die Folge ist rekursiv definiert (vgl. (2.1) zu rekursiv definierten Folgen), d.h. zur Berechnung von x_{n+1} ist die Kenntnis von x_n notwendig.

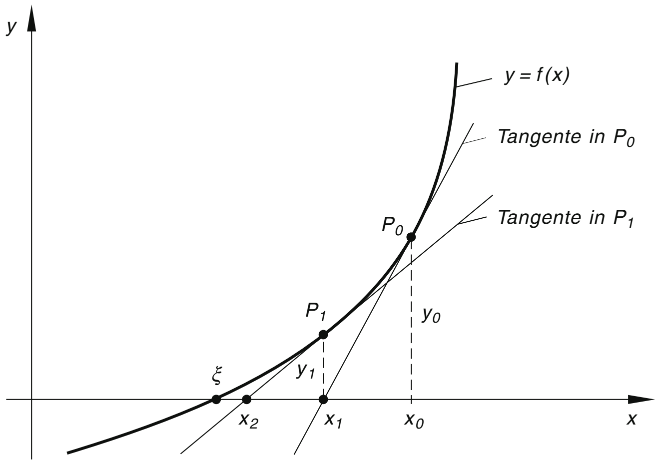


Abbildung 3.16: Die Idee des Newton-Verfahrens

Zur Herleitung des Algorithmus verweisen wir auf Abb. 3.16. Ausgehend vom Startwert x_0 suchen wir eine bessere Approximation für ξ, indem wir die Tangente an den Graphen von $f(x)$ an der Stelle x_0 mit der x-Achse schneiden. Diese Tangente hat die Gleichung (Punkt-Steigungs-Form, vgl. (1.7))

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0),$$

und sie schneidet die x-Achse im Punkt $(x_1, 0)$. Einsetzen von $x = x_1$ und $y = 0$ liefert

$$\frac{0 - y_0}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

bzw. nach x_1 aufgelöst

$$x_1 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.25}$$

Hier wird $f'(x_0) \neq 0$ vorausgesetzt. Es ist auch anschaulich klar, dass die betrachtete Tangente im Fall $f'(x_0) = 0$ keinen Schnittpunkt mit der x-Achse hat. Ausgehend vom Startwert x_0 liefert (3.25) also einen neuen Wert x_1, der näher bei ξ liegt als x_0.
Wenn diese Idee nun mit dem neuen Startwert x_1 erneut umgesetzt wird, erhalten wir für die nächste Approximation x_2 die Formel

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

oder allgemein für x_{n+1} die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Tangentenverfahren von Newton
Ziel: Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$ finden.

- Startwert x_0 geeignet wählen (nahe bei ξ)
- Iterationsvorschrift:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.26}$$

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert (bei geeignet gewähltem Startwert) gegen die Lösung ξ der Gleichung $f(x) = 0$.

Bemerkung. Um die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu beweisen, benötigt man z.B. das Konzept der Taylorreihe der Funktion $f(x)$ an der Stelle ξ (siehe AN2).

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir möchten die eindeutige Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2 - e^x = 0$$

bestimmen. Um diese eindeutige Lösung approximativ zu finden, wenden wir dazu das Verfahren (3.26) auf die Funktion $f(x) = x^2 + 2 - e^x$ an, mit Startwert $x_0 = 1$.

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n
1	1,5	– 0,2317	– 1,4817	1,3436
2	1,3436	– 0,0276	– 1,1456	1,3195
3	1,3195	– 0,0005	– 1,1026	1,3190
4	1,3190	+ 0,0000	–	–

Abbildung 3.17: Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 + 2 - e^x$

Wie in Abbildung 3.17 ersichtlich, erhalten wir die Näherungslösung

$$x \approx 1.3190$$

mit hoher Genauigkeit schon nach wenigen Schritten.

Bemerkung. Zur Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit können wir folgende Aussagen machen (ohne Beweise):

- Bei geeignet gewähltem Startwert x_0 ist die Konvergenz des Newton-Verfahrens *quadratisch*, d.h. die Anzahl korrekter Dezimalstellen verdoppelt sich ungefähr bei jedem Schritt.

- Besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ mehrere Lösungen, so muss man für jede Lösung einen geeigneten Startwert wählen und das Verfahren für die verschiedenen Startwerte getrennt anwenden, was zur Konvergenz gegen die jeweilige Lösung führt.

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^3 - 1.5x^2 + x - 1.5$ hat eine Nullstelle bei $\xi = 1.5$. Wir testen mit dem Startwert $x_0 = 2$, nach wievielen Schritten man diese Nullstelle auf 4 Nachkommastellen approximiert hat.
Wenn wir das Newton-Verfahren (3.26) auf die Funktion $f(x) = x^3 - 1.5x^2 + x - 1.5$ anwenden, erhalten wir mit dem Startwert $x_0 = 2$ die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 1.5x_n^2 + x_n - 1.5}{3x_n^2 - 3x_n + 1}$$

mit Resultaten

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.642857142857143 \\ x_2 &= 1.516086728449029 \\ x_3 &= 1.500234420339965 \\ x_4 &= 1.500000050711728 \end{aligned}$$

Die gewünschte Genauigkeit wird also schon nach 4 Schritten erreicht.

Wahl des Startwerts Es lässt sich zeigen, dass die Konvergenz der via (3.26) konstruierten Folge gegen die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ garantiert ist, wenn im Intervall $[a, b]$, in dem alle Näherungswerte liegen sollen, die Bedingung

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

stets erfüllt ist (unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ zweimal differenzierbar ist). Dies ist eine hinreichende, keine notwendige Bedingung. Tendenziell ungeeignet sind also Startwerte x_0 mit einem niedrigen Wert der Ableitung $f'(x_0)$, d.h. in einem flachen Bereich der Kurve (wie erwähnt, im Extremfall einer horizontalen Tangente kann das Verfahren unmöglich funktionieren). In praktischen Beispielen muss man aber nicht unbedingt diese Bedingung überprüfen, sondern sieht dann bei der Reukrsion schnell, ob die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, die man mit (3.26) erhält, konvergiert.

Kapitel 4

Einführung in die Integralrechnung

Die Integralrechnung wird durch zwei verschiedene Fragestellungen motiviert. Erstens soll der Prozess der Ableitung umgekehrt werden, d.h. zu einer gegebenen Ableitungsfunktion $f'(x)$ soll eine zugehörige Originalfunktion $f(x)$ ermittelt werden. Dies führt auf den Begriff der *Stammfunktion* und des *unbestimmten Integrals*. Zweitens sollen Formeln für die Berechnung verschiedener geometrischer Grössen wie Flächen/Volumina/Bogenlängen von Kurven hergeleitet werden. Dies führt auf den Begriff des *bestimmten Integrals*. Bestimmte Integrale kommena ber nicht nur bei geometrischen Problemen vor, sondern auch in physikalischen Zusammenhängen wie etwa bei der Berechnung der durch eine Kraft längs eines Wegs ausgeführten Arbeit, wenn die Kraft nicht konstant oder der Weg nicht geradlinig ist, oder bei der Berechnung des Mittelwerts eines zeitlich veränderlichen Stroms.
Die Berechnung bestimmter Integrale kann auf die Berechnung unbestimmter Integrale zurückgeführt werden, dies ist die Aussage des *Hauptsatzes der Integralrechnung*, der theoretisch zentralen Aussage dieses Kapitels.

4.1 Das unbestimmte Integral

Stammfunktion und unbestimmtes Integral In der Differentialrechnung war das zentrale Thema der Begriff und die Ermittlung der Ableitungsfunktion $f'(x)$ zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$. Nun beschäftigen wir uns mit der umgekehrten Frage, d.h. wie man aus einer gegebenen Ableitungsfunktion $f'(x)$ eine Originalfunktion $f(x)$ erhält. Die Integration ist also gewissermassen die Umkehrung der Ableitung.

Definition 4.1.1. Sei $f(x)$ eine auf einem Intervall I definierte Funktion. Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* von $f(x)$, falls für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Beispiel. In der Physik ist diese Fragestelltung beispielsweise relevant, wenn man aus einer bekannten Ortsfunktion $v(t)$ die Geschwindigkeitsfunktion $x(t)$ dieses Objekts bestimmen will; für die eindeutige Bestimmung ist dann auch noch die Kenntnis des Startorts $x(0)$ notwendig.

Beispiel. a) Für die Funktion $f(x) = 3(x-2)^2$ ist beispielsweise
$$F(x) = (x-2)^3$$
eine Stammfunktion.

b) Für die Funktion $f(z) = 2e^{\frac{z}{2}}$ ist beispielweise
$$F(z) = 4e^{\frac{z}{2}}$$
eine Stammfunktion

Diese Behauptungen können durch Ableiten nachgeprüft werden. Nach einigen Überlegungen zur Nicht-Eindeutigkeit der Stammfunktion beschäftigen wir uns dann mit der schwierigeren Frage, wie man eine Stammfunktion findet für eine gegebene Ursprungsfunktion.

Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist die Stammfunktion $F(x)$ *nicht* eindeutig definiert, ganz im Gegensatz zur Ableitung $f'(x)$, die eindeutig definiert ist. Wenn nämlich $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, lassen sich durch Addition einer Konstanten beliebig viele weitere Stammfunktionen erzeugen. Daneben gibt es aber keine weiteren Stammfunktionen.

Geometrisch kann dieser Sachverhalt folgendermassen veranschaulicht werden: Alle Stammfunktionen der gleichen Funktion erhält man durch Verschieben einer einzigen Stammfunktion in y-Richtung.

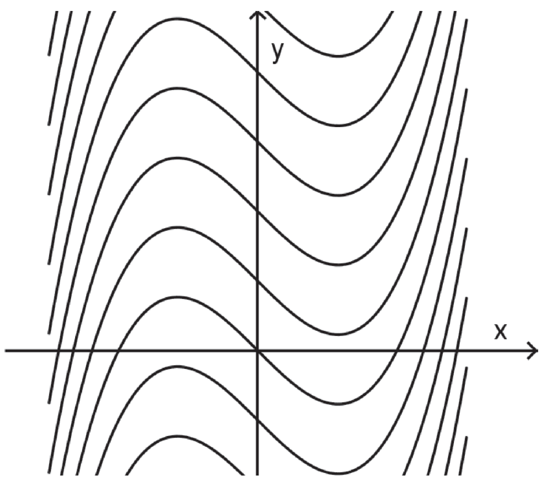


Abbildung 4.1: Verschiedene Stammfunktionen der gleichen Funktion

Satz 4.1.2. a) Falls $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf dem Intervall I ist, so ist für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ die Funktion $G(x) = F(x) + C$ ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x)$ auf dem Intervall I, so gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $F(x) = G(x) + C$.

Beweis. a) Falls $F'(x) = f(x)$ gilt, so gilt auch $(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f'(x)$, d.h. $F(x) + C$ ist auch eine Stammfunktion von $f(x)$.

b) Seien $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = f(x)$. Dann gilt für die Differenz $F(x)-G(x)$, dass $(F(x)-G(x))' = f(x)-f(x) = 0$. Die Differenz $F(x) - G(x)$ hat demnach die Ableitung Null, also muss $F(x) - G(x)$ konstant sein, d.h. es muss eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ geben mit der Eigenschaft $F(x) - G(x) = C$.

Definition 4.1.3. Die Menge aller Stammfunktionen einer gegebenen Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I heisst das *unbestimmte Integral* von $f(x)$. Man schreibt dafür

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Funktion $f(x)$ heisst auch der *Integrand* des Integrals.

Beispiel. Das unbestimmte Integral das Funktion $f(x) = x^3$ ist

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R}),$$

wie man durch Ableiten leicht überprüfen kann.

Beispiel. Das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = \sin(3x)$ ist

$$\int \sin(3x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C \quad (C \in \mathbb{R}),$$

wie man ebenfalls durch Ableiten überprüfen kann. Man beachte, dass der Vorfaktor $-\frac{1}{3}$ dazu dient, die "innere Ableitung" 3 sowie das Minuszeichen zu kompensieren, die bei der Ableitung von $\cos(3x)$ entstehen.

Wie beim Ableiten geht es nun darum, Regeln zu finden, mit denen man möglichst viele Funktionen integrieren kann. Diese Regeln setzen sich zusammen aus Regeln über die Integration der Grundfunktionen sowie Regeln über die Integration von Zusammensetzungen. Wir behandeln hier die meisten Grundintegrale sowie einige Regeln über die Integration von Zusammensetzungen; die komplizierteren Integrationsregeln werden dann in AN2 behandelt. Man beachte aber, dass es für manche Funktionen unmöglich ist, eine Stammfunktion durch elementare Funktionen auszudrücken, z.B. für die Funktionen $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ oder $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Es gilt: "Ableiten eine Technik, und Integrieren ist eine Kunst".

Integrale der Grundfunktionen Aus den Ableitungsregeln der elementaren Funktionen erhalten wir folgende unbestimmte Integrale der elementaren Funktionen (dies ist keine vollständige Liste):

Satz 4.1.4. Die unbestimmten Integrale der Grundfunktionen sind:

a) $$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

b) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

c) $$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

d) $$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

e) $$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + C$$

f) $$\int \log_a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C \quad (a > 0)$$

g) $$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

h) $$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

i) $$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| + C$$

j) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + C$$

k) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$$

l) $$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + C$$

Beweis. Die Regeln können durch Ableiten nachgerechnet werden. Man beachte die Betragsstriche bei $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$: damit wird sichergestellt, dass die Funktion $\frac{1}{x}$ auch im Bereich $x < 0$ eine Stammfunktion hat - denn $\ln(x)$ ist ja nur für $x > 0$ definiert. Für $x < 0$ gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$$

Elementare Integrationsregeln Die folgenden Regeln betreffen einerseits die Integration von Linearkombinationen von Funktionen mit jeweils bekannten Stammfunktionen, und andereseits die Integration von verschobenen oder gestreckten/gestauchten Versionen von Funktionen mit bekannter Stammfunktion. Die letzten beiden Regeln können als Spezialfälle des Prinzips "Integration durch Substitution" werden, das wir in AN2 behandeln werden.

Satz 4.1.5. Es seien die unbestimmten Integrale $F(x)+C$ und $G(x)+C$ der Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ bekannt. Dann gelten die folgenden Regeln:

a) Das unbestimmte Integral der Linearkombination $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)$ ist

$$\int (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}). \tag{4.1}$$

b) Das unbestimmte Integral der um den Betrag k in x-Richtung verschobenen Funktion $g(x) = f(x-k)$ ist

$$\int f(x-k)\,\mathrm{d}x = F(x-k) + C \quad (k \in \mathbb{R}). \tag{4.2}$$

c) Das unbestimmte Integral der um den Faktor k in x-Richtung gestreckten/gestauchten Funktion $g(x) = f(k \cdot x)$ ist

$$\int f(k \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k} F(k \cdot x) + C \quad (k \neq 0). \tag{4.3}$$

Beweis. Die Regeln können durch Ableiten nachgerechnet werden.

Beispiel. Wir berechnen die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int (-13x^3)\,\mathrm{d}x = -\frac{13}{4}x^4 + C$, nach (4.1)

b) $\displaystyle\int (8x^3 - 4x + 2)\,\mathrm{d}x = 2x^4 - 2x^2 + 2x + C$, nach (4.1)

c) $\displaystyle\int 25e^x\,\mathrm{d}x = 25e^x + C$, nach (4.1)

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x-6}\,\mathrm{d}x = \ln|x-6| + C$, nach (4.2)

e) $\displaystyle\int e^{\frac{3}{2}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C$, nach (4.3)

4.2 Das bestimmte Integral

Wir betrachten nun ein anderes Problem, das mit dem vorher betrachteten Problem auf den ersten Blick nichts zu tun hat. Es geht nämlich um die Berechnung von Flächen (bzw. Volumina, Bogenlängen, ...), oder, etwas abstrakter, um die "Gesamtwirkung einer Intensität" einer Funktion in einem bestimmten Bereich. Typischerweise möchten wir eine Fläche berechnen, die durch die x-Achse, den Graphen einer Funktion $f(x)$ sowie zwei Parallelen zur y-Achse an den Stellen a und b (wobei $a < b$) begrenzt ist. Wir nehmen dabei an, dass der Graph von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ oberhalb der x-Achse verläuft, d.h. dass $f(x) \geq 0$ für alle $a \leq x \leq b$ gilt.

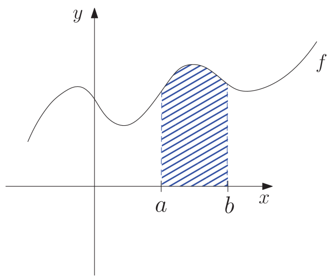


Abbildung 4.2: Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Die Grundidee zur Berechnung des Flächeninhalts solcher Flächenstücke ist die folgende: Man ersetzt krummlinig begrenzte Flächenstücke durch geradlinig begrenzte, leicht berechenbare Flächenstücke, die den gesuchten Flächeninhalt approximieren. Je feiner die Unterteilung in Teilflächen ist, desto kleiner wird der Fehler, den man durch die Ersetzung begeht. Im Grenzwert "unendlich kleiner" Teilflächen ergibt sich dann eine exakte Formel. Im Einzelnen gehen wir folgendermassen vor:

a) Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle, durch Einfügen von Zwischenwerten:
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$
Die Länge des i-ten Intervalls wird mit Δx_i bezeichnet, d.h. es gilt $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$. Meistens wählt man alle Teilintervalle gleich lang, d.h. $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, dies ist aber nicht zwingend.

b) In jedem der so entstandenen Teilintervalle wird auf beliebige Weise eine Zwischenstelle ξ_i gewählt und der zugehörige Funktionswert $f(\xi_i)$ gebildet. Der Flächeninhalt des senkrechten Flächenstreifens (unten von der x-Achse und oben vom Graphen von f begrenzt) im i-ten Intervall wird dann durch die Fläche
$$A_i = f(\xi) \cdot \Delta\xi_i$$
des zugehörigen Rechtecks approximiert.

c) Um einen Näherungswert für die gesamte Fläche unter dem Graphen von f zwischen den Stellen a und b zu erhalten, summiert man alle Näherungswerte A_i der Rechtecke auf und erhält so

$$S_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Die beschriebene Näherung für die gesuchte Fläche A wird umso besser, je grösser die Anzahl der Zwischenpunkte und folglich je kleiner die Breite Δx_i der Teilintervalle gewählt wird. Dies führt zum nächsten Schritt.

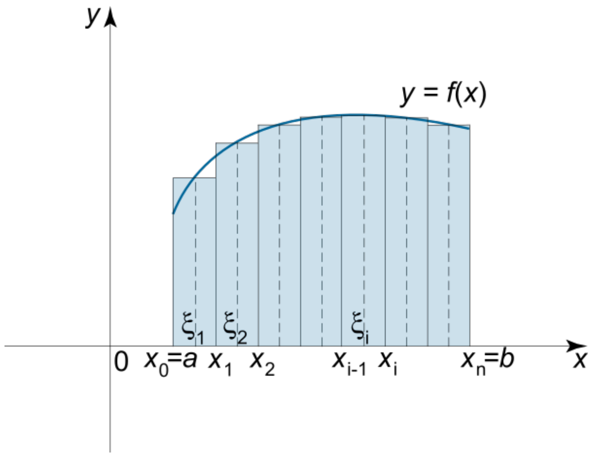


Abbildung 4.3: Approximatives Verfahren zur Berechnung von Flächen

d) Man erhält den gesuchten Flächeninhalt A als *Grenzwert* der Summen S_n, indem man die Anzahl n der Teilintervalle *gegen unendlich* wachsen lässt, so dass gleichzeitig die Breite aller Teilintervalle Δx_i und damit insbesondere auch diejenige des breitesten Teilintervalls $\Delta x = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$ *gegen Null* strebt. So erhält man

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0)}} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi) \cdot \Delta x_i.$$

Diese Vorgehensweise ist natürlich nur sinnvoll, wenn dieser Grenzwert auch tatsächlich existiert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass der Grenzwert für stetige Funktionen immer existiert und überdies unabhängig ist von der Art und Weise, wie man immer mehr Zwischenstellen einfügt.

Wir führen dieses Verfahren jetzt an einem einzigen Beispiel durch. Es zeigt sich, dass die konkrete Durchführung schon bei einer vergleichsweise einfachen Funktion sehr umständlich ist, weshalb wir dann froh sind, eine andere Art der Berechnung zu finden.

Beispiel. Gesucht ist die Fläche, die durch die Kurve der Funktion

$$f(x) = x^2$$

und die x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ begrenzt wird. Wir zerlegen das Intervall I in n gleich breite Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{2}{n}$. Als Zwischenstelle ξ_i, an der der Funktionswert $f(\xi)$ verwendet wird, wählen wir immer das rechte Ende des entsprechenden Teilintervalls $[x_{i-1}, x_i]$, also

$$\xi_k = x_k = k \cdot \Delta x = k \cdot \frac{2}{n}.$$

Damit erhalten wir als n-ten Näherungswert für die gesuchte Fläche A

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot (\Delta x)^3 = \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Unter Benützung der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

erhalten wir damit

$$S_n = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Im Limes $n \to \infty$ ergibt sich damit

$$A = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{8}{3}. \tag{4.4}$$

Definition 4.2.1. Sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion. Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta x \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_i \tag{4.5}$$

heisst, falls er existiert, *bestimmtes Integral von f über* $[a, b]$. Man schreibt dafür

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das bestimmte Integral ist also eine "unendliche" Summe von "unendlich" schmalen Streifen mit Breite $\mathrm{d}x$ und Höhe $f(x)$; diese Summe von unendlich vielen Termen ist durch einen Grenzübergang präzise definiert. Das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ ist also eine *Zahl*, während das unbestimmte Integral einer auf $[a, b]$ definierten Funktion eine *Menge von Funktionen* ist.

Wir beweisen hier nicht, dass dieser Grenzwert für stetige Funktionen existiert und unabhängig von den in der Approximation verwendeten Streifenbreiten Δx_i ist. Auch die Voraussetzung von Stetigkeit ist übertrieben, das bestimmte Integral existiert auch für viele unstetige Funktionen. Das $\int$-Symbol kann als eine Stilisierung des $\sum$-Symbols verstanden werden, und das dx-Symbol als eine infinitesimale Version des Δx-Symbols, ähnlich wie das schon in der Differentialrechnung vorgekommen ist.
Die im vorigen Beispiel benützte Methode zur Berechnung von bestimmten Integralen ist im Allgemeinen viel zu umständlich; wir werden im folgenden Abschnitt eine Methode zeigen, die die *Berechnung* bestimmter Integrale auf unbestimmte Integrale bzw. Stammfunktionen des Integranden $f(x)$ zurückführt. Die *Definition* des bestimmten Integrals hat aber nichts mit Stammfunktionen zu tun. Es kann aber Fälle geben, wo man zur Berechnung eines bestimmten Integrals trotzdem auf die Definition zurückgreifen muss. Zu diesem Zweck werden Algorithmen entwickelt, die in der Numerik diskutiert werden.

Bemerkung. Die Integrationsvariable kann beliebig umbenannt werden, es gilt also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung. Wir haben am Anfang des Abschnitts die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ genannt; das bestimmte Integral ist aber auch für Funktionen definiert, die diese Voraussetzung nicht erfüllen, nur kann man dann $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nicht mehr direkt als Flächeninhalt der Fläche unter der Kurve von $f(x)$ interpretieren.

4.3 Unbestimmtes und bestimmtes Integral

Wie wir gesehen haben, lässt sich das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

als Flächeninhalt der zwischen der x-Achse, der Funktionskurve $y = f(x)$ sowie den Geraden $x = a$ und $x = b$ liegenden Fläche interpretieren. Wir halten nun die untere Grenze a fest und variieren die obere Grenze, d.h. wir ersetzen die obere Grenze mit einer Variablen x und erhalten auf diese Weise eine neue Funktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Diese Funktion nennt man die *Integralfunktion* oder *Flächenfunktion* zu f zur unteren Grenze a.

Beispiel. Wir bestimmen die Integralfunktion $F_a(x)$ für die Funktion $f(x) = x$ für eine fixierte untere Grenze $a > 0$ (für $x > a$). Man beachte, dass wir diese Integralfunktion noch

ohne den unten erwähnten Hauptsatz bestimmen, sondern allein aufgrund geometrischer Überlegungen.
Das Flächenstück zwischen der Funktionskurve $y = x$, der x-Achse und den vertikalen Geraden bei fixiertem a und beliebigem $x > a$ ist ein Trapez. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist durch $A = \frac{(b+c)\cdot h}{2}$ gegeben, wobei b und c, bzw. h, die Seitenlängen der beiden parallelen Seiten des Trapezes, bzw. seine Höhe sind. In unserem Beispiel gilt $b = x$, $c = a$ und $h = x - a$, also ergibt sich

$$A = \frac{(b+c)\cdot h}{2} = \frac{(x+a)(x-a)}{2} = \frac{x^2 - a^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2 \tag{4.6}$$

Die gesuchte Flächenfunktion ist also $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$, und es ist sofort ersichtlich, dass dies eine Stammfunktion der Funktionskurve $y = x$ ist, die die Fläche oben begrenzt. Man beachte nochmals, dass wir dies auf rein geometrischem Weg und ohne Anwendung von Satz 4.3.1 gefunden haben.

Je nach Anfangswert a erhält man also verschiedene Integralfunktionen, die sich aber alle nur um eine additive Konstante unterscheiden, und deren Ableitungen $F_a'(x)$ immer die Ausgangsfunktion $f(x)$ an der Stelle x ergeben. Unabhängig von a gilt also $F_a'(x) = f(x)$. Diese Beobachtung trifft für jede Ausgangsfunktion $f(x)$ zu.

Satz 4.3.1 (Erster Hauptsatz der Integralrechnung)**.** Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion. Dann ist die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ differenzierbar, und es gilt

$$F_a'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).$$

D.h. die Integralfunktion $F_a(x)$ von $f(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$.

Beweis. Nach Definition der Ableitung gilt

$$F_a'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F_a(x+\Delta x) - F_a(x)}{\Delta x}.$$

Der Zähler des letzten Ausdrucks beschreibt den Flächeninhalt ΔF_a des Streifens im Teilintervall $[x, x + \Delta x]$ unter der Kurve von f. Also gilt

$$m \cdot \Delta x \leq \Delta F_a(x) \leq M \cdot \Delta x,$$

wobei m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktionswerte von f auf $[x, x+\Delta x]$ bezeichnen. Dividiert man diese Ungleichung durch Δx, so erhält man

$$m \leq \frac{F_a(x+\Delta x) - F_a(x)}{\Delta x} \leq M.$$

Lässt man jetzt Δx gegen Null gehen, d.h. im Limes $\Delta x \to 0$, so streben sowohl m als auch M gegen den Funktionswert $f(x)$, da f stetig ist und das das Intervall $[x, x+\Delta x]$ zur

Stelle x zusammenschrumpft; der Term in der Mitte der Ungleichungskette strebt gegen $F_a'(x)$. Im Limes $\Delta x \to 0$ gilt also

$$f(x) \leq F_a'(x) \leq f(x).$$

Dies ist nur möglich, wenn überall Gleichheit herrscht, d.h. es muss

$$f(x) = F_a'(x)$$

gelten.

Der erste Hauptsatz der Integralrechnung besagt also, dass jede Integralfunktion

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. Wir möchten jetzt diese Aussage unabhängig von der unteren Grenze a machen und betrachten deshalb eine beliebige Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$. Bekanntlich unterscheiden sich zwei Stammfunktionen der gleichen Funktion nur durch eine Konstante C, d.h. es muss gelten

$$F_a(x) = F(x) + C. \tag{4.7}$$

Um C zu bestimmen, benützen wir, dass $F_a(a) = 0$ gelten muss. Wenn wir also $x = a$ in (4.7) einsetzen, ergibt sich $0 = F(a) + C$ und damit $C = -F(a)$. Erneut eingesetzt in (4.7), diesmal wieder für beliebige x, erhalten wir

$$F_a(x) = F(x) - F(a). \tag{4.8}$$

Wenn wir nun $x = b$ in (4.8) setzen, erhalten wir eine Formel, um ein bestimmtes Integral, d.h. z.B. einen Flächeninhalt, mit Hilfe des unbestimmten Integrals, d.h. mittels einer Stammfunktion des Integranden, zu berechnen:

Satz 4.3.2 (Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung)**.** Sei $f(x)$ eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, und sei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a). \tag{4.9}$$

Bemerkung. Für die Differenz $F(b) - F(a)$ werden auch die Schreibweisen $F(x)|_a^b$ oder $[F(x)]_a^b$ verwendet.

Bemerkung. Die Aussagen der beiden Hauptsätze der Integralrechnung, Satz 4.3.1 und Satz 4.3.2, hängen nicht von der Voraussetzung $f(x) \geq 0$ auf $I = [a, b]$ ab. Falls diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, ist aber das bestimmte Integral nicht mehr gleich der Fläche unter der Funktionskurve von $f(x)$. Falls die Voraussetzung $a \leq b$ nicht erfüllt ist, kann man das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ immer noch mit der Formel (4.9) berechnen, erhält aber dann im Allgemeinen ebenfalls nicht die Fläche unter der Funktionskurve.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir wissen schon aus einer mühsamen Rechnung, siehe (4.4), dass die Fläche, die durch die Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ und die x-Achse im Intervall $I = [0, 2]$ begrenzt wird, den Flächeninhalt $A = \frac{8}{3}$ hat. Mit Satz 4.3.2 können wir dieses Resultat nun viel einfacher erhalten: Wir wählen von $f(x) = x^2$ eine Stammfunktion, z.B.

$$F(x) = \frac{x^3}{3}$$

und erhalten

$$A = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = \frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{3}$$

also dasselbe Resultat wie bei der Berechnung via die Definition des bestimmten Integrals.

Beispiel (Fortsetzung)**.** Wir berechnen das bestimmte Integral

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Auch diese Fragestellung haben wir schon geometrisch erörtert, siehe (4.6). Mit Satz 4.3.2 erhalten wir nun, nach der Wahl einer Stammfunktionvon $f(x) = x$, z.B. $F(x) = \frac{x^2}{2}$,

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Beispiel. Wir berechnen die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$: Eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ist $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, also erhalten wir

$$\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

b) $\displaystyle\int_1^3 (24t^2 + 15t)\,\mathrm{d}t$: Eine Stammfunktion von $f(t) = 24t^2 + 15t$ ist $F(t) = 8t^3 + \frac{15}{2}t^2$, also erhalten wir

$$\int_1^3 (24t^2 + 15t)\,\mathrm{d}t = \left.\left(8t^3 + \frac{15}{2}t^2\right)\right|_1^3 = \frac{567}{2} - \frac{31}{2} = 268$$

Beispiel. Wir berechnen den Flächeninhalt unter der Sinuskurve in der ersten Halbperiode, d.h. im Intervall $[0, \pi]$. Eine Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist $F(x) = -\cos(x)$, also ergibt sich

$$A = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = (-\cos(x))|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

Satz 4.3.3. Bei bestimmten Integralen gelten folgende Rechenregeln:

a) Vertauschung der Integrationsgrenzen:

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Identische Integrationsgrenzen:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

c) Zerlegung des Integrationsbereichs:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.10}$$

Beweis. Diese Regeln können unmittelbar nachgeprüft werden durch Einsetzen in die Formel (4.9) des 2. Hauptsatzes des Integralrechnung. Um z.B. (4.10) zu beweisen, betrachten wir beide Seiten der behaupteten Formel: Es ergibt sich mit (4.9)

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(c) - F(a)$$

und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a),$$

also zweimal dasselbe.

Beispiel. Wir berechnen $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ -x+2 & (x > 1) \end{cases}$$

Da die Funktion auf den verschiedenen Teilen des Integrationsbereichs durch verschiedene Ausdrücke definiert ist, empfiehlt es sich, die Formel (4.10) anzuwenden und als Trennstelle den Übergangspunkt von der einen zur anderen Formel zu verwenden. Mit (4.10) für $a = 0$, $c = 2$ und $b = 1$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 -x+2\,\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\right|_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Flächeninhalte bei beliebigen stetigen Funktionen Bisher haben wir $f(x) \geq 0$ vorausgesetzt, d.h. die Flächen, deren Inhalt zu berechnen war, lagen stets oberhalb der x-Achse. Wenn wir diese Voraussetzung fallenlassen, so müssen wir die Nullstellen der Funktion $f(x)$ bestimmen, bevor wir Satz 4.3.2 anwenden können.

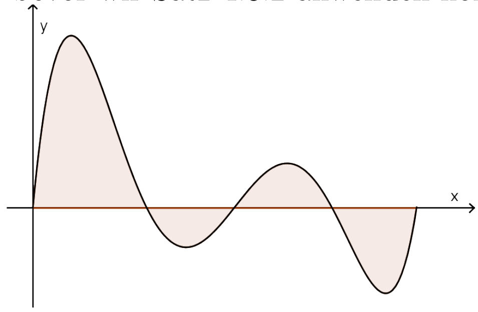


Abbildung 4.4: Flächenberechnung bei Funktionen mit wechselnden Vorzeichen

In jedem Teilbereich muss das bestimmte Integral separat berechnet werden, und anschliessend die Beträge aller Resultate aufaddiert werden: Die Resultate der Integration in den Bereichen mit negativen Funktionswerten sind negativ, aber als Flächeninhalte müssen sie natürlich trotzdem positiv gezählt werden.

Beispiel. Wir bestimmen die Fläche zwischen der Funktionskurve der Funktion $f(x) = x^2 - 3$ und der x-Achse im Intervall $[0, 2]$. Es ist $f(0) = -3$ und $f(2) = 1$, also liegt die gesuchte Fläche teilweise unterhalb und teilweise oberhalb der x-Achse.
Zunächst bestimmen wir die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 3$ im genannten Intervall: die einzige Nullstelle in diesem Bereich ist $x_0 = \sqrt{3}$. Die gesuchte Fläche ist also

$$\begin{aligned}
A &= \left| \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)\, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2 - 3)\, \mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \left(\frac{x^3}{3} - 3x \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - 3x \right) \Big|_{\sqrt{3}}^2 \right| \\
&= \left| -2\sqrt{3} \right| + \left| -\frac{10}{3} + 2\sqrt{3} \right| \\
&\approx 3.464 + 0.131 \\
&= 3.595
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen gehen wir in solchen Situationen also folgendermassen vor:

- Wir berechnen die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $f(x)$ im Intervall $[a, b]$.
- Wir berechnen das bestimmte Integral über alle Teilintervalle einzeln und nehmen jeweils die Beträge davon, um allfällige falsche Vorzeichen auszugleichen:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(t)\, \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, \mathrm{d}t \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(t)\, \mathrm{d}t \right| \tag{4.11}$$

Ohne die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ kann die Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ also unter Umständen ein Ergebnis liefern, das nicht der Fläche zwischen der Funktionskurve und der x-Achse entspricht. Man hat in einem solchen Fall nicht das Integral falsch berechnet, aber das Integral entspricht dann nicht dem Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse.

Fläche zwischen zwei Funktionskurven Wir betrachten nun die Aufgabe, die Fläche zwischen zwei Funktionskurven $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[a, b]$ zu berechnen. Falls im ganzen Integrationsbereich die Voraussetzung $f(x) \geq g(x)$ erfüllt ist, genügt es, die Differenzfunktion $f(x) - g(x)$ über $[a, b]$ zu integrieren. Ansonsten müssen wegen des möglicherweise wechselnden Vorzeichens von $f(x) - g(x)$ zuerst die Nullstellen von $f(x) - g(x)$ ermittelt werden und dann eine Formel ähnlich wie (4.11) verwendet werden. Im einzelnen gehen wir folgendermassen vor:

- Wir berechnen die Nullstellen x_1, x_2, $\ldots$, x_n von $f(x) - g(x)$ im Intervall $[a, b]$.
- Wir berechnen das bestimmte Integral über alle Teilintervalle einzeln und nehmen jeweils die Beträge davon, um allfällige falsche Vorzeichen auszugleichen:

$$A = \left| \int_a^{x_1} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} (f(t) - g(t))\,\mathrm{d}t \right|$$

Beispiel. Wir bestimmen die Fläche zwischen den Kurven der Funktionen $f(x) = x - x^3$ und $g(x) = x^3$ im Intervall $[-1, 1]$. Eine Skizze veranschaulicht die Situation:

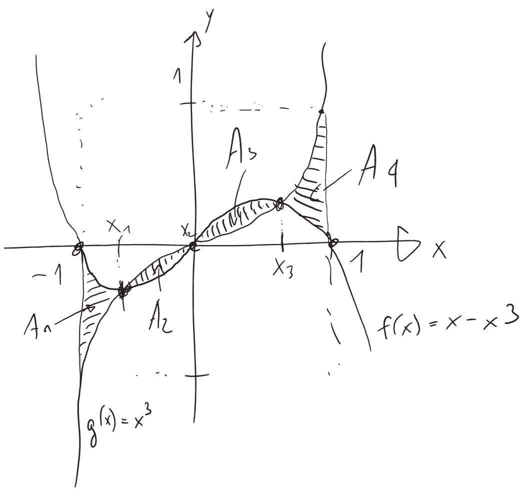


Abbildung 4.5: Flächenberechnung bei Funktionen mit wechselnden Vorzeichen

Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die gesuchte Gesamtfläche lässt sich also als $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ schreiben. Aufgrund der Symmetrie der Situation ($f(x)$ und $g(x)$ sind beide ungerade Funktionen) ist es klar, dass $A_1 = A_4$ und $A_2 = A_3$ gilt. Es genügt also, A_3 und A_4 zu berechnen.

- Berechnung von A_3:

$$A_3 = \left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x - 2x^3)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right| = \frac{1}{8}$$

- Berechnung von A_4:

$$A_3 = \left| \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} (x - 2x^3)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} \right| = \frac{1}{8}$$

Es stellt sich also heraus, dass A_3 und A_4 den gleichen Flächeninhalt haben, und damit erhalten wir für die gesuchte Gesamtfläche

$$A = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Danksagung

Einige Teile des Skripts und viele Übungsaufgaben wurden von Samuel Beer, Heidi Gebauer, Ines Stassen Böhlen und Christoph Zaugg übernommen. Ich bedanke mich bei all diesen Kolleginnen und Kollegen herzlich für die Zusammenarbeit.

Literaturverzeichnis

[1] LOTHAR PAPULA, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1. 14. Auflage, Springer Vieweg Verlag, 2014.