四川师范大学学位论文独创性声明

本人声明：所呈交学位论文 <u>两类有限自动机的最小化</u>，是本人在导师 <u>莫智文 教授</u> 指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

本人承诺：已提交的学位论文电子版与论文纸本的内容一致。如因不符而引起的学术声誉上的损失由本人自负。

学位论文作者：張鋒　　　签字日期：2014年5月25日

四川师范大学学位论文版权使用授权书

本人同意所撰写学位论文的使用授权遵照学校的管理规定：

学校作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者须授权所在大学拥有学位论文的部分使用权，即：1）已获学位的研究生必须按学校规定提交印刷版和电子版学位论文，可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库供检索；2）为教学、科研和学术交流目的，学校可以将公开的学位论文或解密后的学位论文作为资料在图书馆、资料室等场所或在有关网络上供阅读、浏览。

本人授权万方数据电子出版社将本学位论文收录到《中国学位论文全文数据库》，并通过网络向社会公众提供信息服务。同意按相关规定享受相关权益。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：張鋒　　　导师签名：莫智文

签字日期：2014年5月25日　　　签字日期：2014年5月26日

两类有限自动机的最小化

应用数学

研究生 张锋 指导教师 莫智文 教授

摘要 本文定义了直觉模糊有限自动机上的直觉容许关系，同余，同态，同构. 并通过对直觉模糊有限自动机的状态集的等价划分进行了最小化讨论. 同时，给出了格值直觉模糊有限同步机及完备格上的直觉模糊有限自动机的概念，通过建立格值直觉模糊有限同步机的行为矩阵与状态划分之间的联系得到了完备格上的直觉模糊有限同步机的最小化方法.

关键词: 等价划分; 直觉模糊有限自动机; 行为矩阵; 完备格上的直觉模糊有限同步机; 最小化

Minimization for Two Types of Finite State Automata

Applied Mathematics

Postgraduate Zhang Feng **Supervisor** Mo Zhi-wen

Abstract: This article gives the concepts of intuitionistic allowed relation, Congruence, homomorphism and isomorphism relations on intuitionistic fuzzy finite state automata. This paper also gives the minimization through equivalent states dividing of the states set. Besides this article defines synchronous lattice-valued intuitionistic fuzzy finite automata and complete synchronous lattice-valued intuitionistic fuzzy finite automata. In the end, this chapter finds the minimization method through the relation of its behavior matrix and the states dividing.

Keywords: equivalent dividing; intuitionistic fuzzy finite state automata; behavior matrix; synchronous lattice-valued intuitionistic fuzzy finite automata; minimization.

目 录

引言

众所周知，在现实生活中存在许许多多的模糊概念. 我们也知道Cantor所提出的经典集合论能够描述实际生活中内涵明确的现象. 而对于模糊现象的数学描述，采用经典集合理论的方法，存在很大的困难，甚至于无法描述. 正是基于此原因，1965年Zadeh提出模糊集合理论(fuzzy sets theroy)[1]，到目前为止模糊集合理论已经广泛地应用到各个领域. 1983年Atanassov将模糊集理论进行推广，提出比经典集合理论与模糊集理论层次更高的直觉模糊集理论. 次年Atanassov又将直觉模糊集进行推广，提出了概念更广泛的格值直觉模糊集. 此后有很多人开始研究直觉模糊集的相关性质，这些为直觉模糊集的发展奠定了良好的基础.

经典自动机的研究，作为计算理论中最简单的数学模型，为汇编语言，算法设计等现代计算理论提供了可靠的形式理论. 1967年Wee在模糊集理论的基础上提出了模糊自动机理论[2]. 1969年Lee和Zadeh也给出了一种模糊有限状态自动机的定义[3]. 同时Mizumoto等人借助模糊矩阵和模糊向量的手段也提出了一种具有模糊初始状态的模糊有限自动机. 1971年Asai等人研究了Mealy型模糊有限自动机和Moore型模糊有限自动机两类模糊自动机. 近年Malik和Mordeson也引出了一种模糊有限自动机[13]. 模糊自动机研究种类繁多, 2000年程伟，莫智文对它们进行了分类[10]. 2005年李永明等在格半群意义下研究自动机理论，从而建立了更广泛的格值自动机理论[18]. 同年Jun将直觉模糊集合与自动机结合，提出了直觉模糊有限状态机的概念并对直觉模糊有限状态机的代数性质做了研究[17]. 张小伟，李永明于2008年将直觉模糊有限自动机的初始状态与接受状态都直觉化. 给出了直觉模糊识别器和直觉模糊有限自动机的相关结论[31, 36]. 随后杨京开，翁福利，舒兰等人也开始研究直觉模糊有限自动机[42, 44].

考虑到自动机对字符输入输出的关系，很多学者开始研究一种特殊的自动机—同步机(输入输出字符长度相同的自动机). 当格值直觉模糊有限自动机的格值L取值为[0,1]就成为特殊的自动机—直觉模糊有限自动机. 因此，格值直觉模糊有限自动机是直觉模糊有限自动机的推广.

由于计算科学发展的日新月异，大批学者开始顺应趋势，对数学物理联系计算机科学方面的研究越来越深入，自动机的发展应用也与实际相结合，联系越来越紧密. 最小化问题是对自动机的最小约简，它几乎是伴随着自动机理论的诞生而产生的. Santos 于 1968 年首次定义了极大-极小自动机. 随后每一种自动机的出现，都有大批数学工作者对与其等价的最小约简自动机进行自动机探索，作为自

动机理论研究的经典课题，最小化一直是学者关注的热点. 最小化的核心思想是根据自动机状态的等价划分，将状态进行等价归类，进而将自动机化简为最简，即状态的最小化. 自动机的最小化使得较复杂语言的识别，较困难的大型系统的处理更加简便，并且最小化自动机在计算结果相同的情况下，比原自动机计算的速度得到了提高.

自动机的最小化研究结果比较丰富，对于不同的自动机，其最小化方法也可能不尽相同. 最常用到的最小化方法总结起来大致有以下几种[44]:

(1) 利用输入，输出函数进行定义状态的等价(强等价，等价，弱等价)将自动机最小化.

(2) 利用有限序列机的行为映射，给出计算行为映射像的算法. 然后定义状态等价关系，基于此得到有限序列机的最小化方法.

(3) 通过状态聚类的方法将自动机最小化.

(4) 基于最大同余的商自动机将自动机最小化.

(5) 基于同态和同构的自动机及其最小化.

(6) 通过形式语言的构造，找到与原自动机相等价的最小化的自动机.

目前有很多学者对自动机的最小化理论进行研究，考虑到直觉模糊有限自动机和完备格上的格值直觉模糊同步机与之前的自动机的不同，本文在充分利用最小化思想—将自动机的状态进行归类划分的基础上建立了直觉模糊有限自动机和格值直觉模糊有限同步机的最小化的算法理论，定义了格值直觉模糊有限同步机的概念，模糊转移矩阵，行为矩阵，得到了一些自动机的最小化的基本方法.

第一章 预备知识

本章主要介绍了经典自动机的最小化方法和模糊有限自动机的最小化的相关知识.

1.1 经典自动机及其最小化

经典自动机是在经典集合理论基础上建立起来的. 集合论(Set Theory)作为现代数学的基础, 是1874年德国数学家康托(Geog Cantor)提出的, 是描述一定范围内彼此可以区分的, 确定的对象的整体. 目前集合论中的基本概念已经运用到许多领域, 如物理, 化学, 生物, 计算机等研究领域, 尤其是计算机科学的大多数基本概念和理论都采用集合论作为基础术语来进行描述.

定义 1.1.1[26] 有限自动机(Finite Automata, FA)是一五元组 $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, 其中 Q 是状态的非空有穷集合, $\forall q\in Q$ 是 M 的一个状态. Σ 是输入字母表, 所有输入字符串都是 Σ 上的字符串. δ 是状态转换函数(传递函数), 有时也被称为移动功能的状态转移函数. $\delta:Q\times\Sigma\to Q$, 对任意的 $(q,a)\in Q\times\Sigma$, $\delta(q,a)=p$, 表示自动机 M 在当前状态 q 时读入(输入)字符 a 后将状态转换成 p, 并将输入字符串上的读头向右移动一个带方格指向输入字符串的下一个字符. q_0 是启动状态或初始状态. F 是 M 的接受状态集, $F\subseteq Q$, $\forall q\in F$, q 称为 M 的终止状态.

特别指出 F 中的状态是终止状态, 并不是说 M 一旦进入这种状态就终止了, 是指 M 一旦处理完输入字符串到达这种状态时, 当前处理的字符串就是接受 M 所接受的语言. 有时也叫作终止状态.

一个有穷状态自动机等价于一个状态转换图, 不同的自动机接受的语言可能不一样.

定义 1.1.2[26] FA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, 若 $\forall q\in Q,\ a\in\Sigma$, $\delta(q,a)$ 均有确定的值, 则将这种 FA 称为确定的有穷状态自动机 (DFA).

定义 1.1.3[26] 将 δ 扩充到 δ^* 上 $\delta^*: Q\times\Sigma^*\to Q$, $\forall q\in Q$, $\omega\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$, 定义:

$$\delta^*(q,\varepsilon)=\delta(q,\varepsilon)=q,$$
$$\delta^*(q,a\omega)=\delta^*(\delta(q,a),\omega),$$
$$\delta^*(q,\omega a)=\delta^*(\delta^*(q,\omega),a).$$

引理 1 给定 DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$, $\forall\,\omega,\theta\in\Sigma^*$, $\delta^*(p,\omega\theta)=\delta^*(\delta^*(p,\omega),\theta)$.

证明: 对 $|\theta|$ 归纳:

对 $\forall\omega$ 来说, 当 $|\theta|=0$ 时, 即 $\theta=\varepsilon$, 根据 DFA 定义, $\delta(p,\varepsilon)=p$,

$$\therefore \text{左边} = \delta^*(p,\omega\theta) = \delta^*(p,\omega\varepsilon) = \delta^*(p,\omega),$$
$$\text{右边} = \delta^*(\delta^*(p,\omega),\theta) = \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\ \varepsilon\right) = \delta^*(p,\omega),$$
$$\therefore\ \delta^*(p,\omega\theta) = \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\theta\right).$$

当$|\theta| = n$时，假设原式成立. 故当$|\theta| = n+1$时，不妨设$\theta = xa$，其中$|x| = n$，$|a| = 1$.

$$\begin{aligned}\therefore\ \text{左边}\,\delta^*(p,\omega\theta) &= \delta^*(p,\omega xa)\\ &= \delta^*\left(\delta^*(p,\omega x),\ a\right)\\ &= \delta^*\left(\delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\ x\right),\ a\right)\\ &= \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),xa\right)\\ &= \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\theta\right)\\ &= \text{右边}.\end{aligned}$$

$$\therefore \delta^*(p,\omega\theta) = \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\theta\right).$$
$$\therefore \text{当}|\theta| = n+1\text{时结论也成立}.$$
$$\therefore\ \ \forall\,\omega,\ \theta\in\Sigma^*,\ \ \delta^*(p,\omega\theta) = \delta^*\left(\delta^*(p,\omega),\theta\right).$$

定义 1.1.4[26] 设给定$M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$是一$DFA$，$\forall x\in\Sigma^*$，$\delta^*: Q\times\Sigma^*\to Q$，如果$\delta^*(q_0,x)\in F$，则$x$称被$M$接受；若$\delta^*(q_0,x)\notin F$，则称$M$不接受$x$；因此可定义$M$所接受(识别)的语言为$L(M) = \{x\mid\forall x\in\Sigma^*\text{且}\,\delta^*(q_0,x)\in F\}$.

DFA 是 *FA* 中的一种，并不是所有的 *FA* 都是 *DFA*，还有一种 *FA*，并不是所有的$(q,a)\in Q\times\Sigma$，$\delta(q,a)$，都有一个状态与之对应，也可能存在某种情况，并不是对于所有的$(q,a)\in Q\times\Sigma,\delta(q,a)$只对应一个状态. 这两种情况的 *FA* 就是非确定有穷状态自动机 *NFA*.

定义 1.1.5[26] 不确定有穷状态自动机(*NFA*)是一个五元组$M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，其中$Q,\Sigma,q_0,F$跟 *DFA* 的定义相同. 状态转移函数(transition function)$\delta: Q\times\Sigma\to 2^Q$对任意的$(q,a)\in Q\times\Sigma$，$\delta(q,a) = \{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$表示自动机$M$在状态$q$时读入字符$a$可以选择的将状态变成$p_1,p_2,\cdots$或者$p_n$，同时将读头右移开始输入字符串中的下一个字符的开始. 有时被称为状态转移函数或移动函数.

定义 1.1.6 按照定义 1.1.5，*NFA* 中的δ扩充到δ^*上，$\delta^*: Q\times\Sigma^*\to 2^Q$，以下式子成立：

$$\delta^*(q,\varepsilon) = \delta(q,\varepsilon) = \{q\},$$
$$\delta^*(q,\omega a) = \{p\mid\exists r\in\delta^*(q,\omega),\ s.t,\ p\in\delta(r,a)\}.$$

同理 $\delta^*(q,a\omega) = \{p\mid\exists r\in\delta(q,a),\ s.t.\ p\in\delta^*(r,\omega)\}$. $\forall q\in Q$，$\omega\in\Sigma^*$，$a\in\Sigma$.

定义 1.1.7[26] 设给定$M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$是一个 *NFA*，$\forall x\in\Sigma^*$，$\delta^*: Q\times\Sigma^*$

$\to 2^Q$，若$\delta^*(q_0,x)\cap F \neq \Phi$，则称$x$被$M$接受；若$\delta^*(q_0,x)\cap F = \Phi$，则称$M$不接受$x$；因此可定义$M$所接受(识别)的语言为$L(M)=\{x \mid \forall x\in\Sigma^*,\delta^*(q_0,x)\cap F\neq\Phi\}$.

定义 1.1.8[26] 设M_1,M_2为FA（DFA或者NFA），如果$L(M_1)=L(M_2)$，则称M_1,M_2等价. 记$M_1\equiv M_2$.

定义 1.1.9[26] 设确定有穷自动机是一个五元组$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，$L\subseteq\Sigma^*$，$M$所确定的$\Sigma^*$上的关系$R_M$定义为：$xR_My \Leftrightarrow \exists q\in Q,\ s.t.\ x,y\in set(q)$.
也就是$\forall x,y\in\Sigma^*$，$xR_My\Leftrightarrow\ \delta^*(q_0,x)=\delta^*(q_0,y)$；$L$所确定的$\Sigma^*$上的右不变等价关系$R_L$为$\forall x,y\in\Sigma^*$，$xR_Ly\Leftrightarrow$ $(\forall z\in\Sigma^*$，$xz\in L\Leftrightarrow yz\in L)$.

$\forall x,y\in\Sigma^*$，x和y满足右不变等价关系关系xR_Ly，则x,y后面同时接上Σ^*上的任何字符串z，结果要么xz,yz都是L上的句子，要么xz,yz都不是L上的句子.

通过以上定义，可以推出

性质 1 $xR_My\Rightarrow xR_Ly$，反之不成立.

证明：(1) $\forall x,y\in\Sigma^*$，若xR_My，按照定义 1.1.9，$\exists\, q\in Q, s.t.\ x,y\in set(q)$
即$\delta^*(q_0,x)=\delta^*(q_0,y)=q$，

$$\begin{aligned}\forall z\in\Sigma^*,\ \delta^*(q_0,yz)\ &=\delta^*\big(\delta^*(q_0,y),z\big)=\delta^*(q,z)\\&=\delta^*\big(\delta^*(q_0,x),z\big)=\delta^*(q_0,xz),\end{aligned}$$

即$\forall z\in\Sigma^*, xz\in L\Leftrightarrow yz\in L$，所以$xR_Ly$，故有$xR_My\Rightarrow xR_Ly$.

(2) 利用反例证明：存在DFA满足：$\delta^*(q_0,x)=p_1$，$\delta^*(q_0,y)=p_2$，$p_1,p_2\in Q$且$p_1\neq p_2$，但是$\delta^*(p_1,z)\ =\delta^*(p_2,z)\ =p$. $\therefore xR_Ly$不能得到xR_My.

定义 1.1.10[26] $DFA\ M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，如果$\exists\ x\in\Sigma^*$，使得$Q$中的两个状态$p,q$满足$\delta^*(p,x)\in F$与$\delta^*(q,x)\in F$有且只有一个成立，那么我们就称$p,q$是相异的(或称可被区分的 distinguishable)，否则就称p,q是等价的，记作$p\equiv q$.

按照L所决定的右等价关系R_L的等价类来设立状态与状态间的转换是构造最小化的DFA的一种方法，而通过右等价关系R_L来求等价状态比较抽象，含有一些难以形式化的计算，要用计算机系统完成对其求解很困难，可以通过进行状态合并构造出与给定的$DFA\ M$同构且相容的DFA，则得到的就是最小的DFA. 按照这种方法，对于M中的任意两个不同的状态p,q，需要考虑从$set(p),set(q)$中取出两个便于运算的字符串x,y然后再研究$\forall z\in\Sigma^*$, xz,yz是否同时属于L，该算法非常麻烦，浪费时间，新的问题也随之而来. 换一个角度，不直接考虑M中的哪些状态可以合并在一起，从反面考虑M的那些状态不可以合并(可区分)，结果就很容易运算. 下面就对M的哪些状态不可以合并进行几点介绍：

(1) $Q-F$中的状态和F中的状态相异，不可合并；事实上设$p\in Q-F$，$f\in F$，

$x \in set(p)$, $y \in set(q)$, 则有$\delta(p,\varepsilon) \notin F$, $\delta(f,\varepsilon) \in F$, 于是$x\varepsilon \notin L$, $y\varepsilon \in L$, 所以p,f不满足R_L关系, 因此$Q-F$中的状态和F中的状态不可以合并.

(2) 通过上面一步得到的p,f不可以合并. 递归的考虑其他状态对, 若$\exists a \in \Sigma$, 满足$\delta(p_1, a) = p$, $\delta(p_2, a) = f$, 那么p_1, p_2也是可区分的, 然后递归的向前考虑其他状态对.

(3) 若$p_1, p_2 \in Q-F$, 若$\exists u \in \Sigma^*$, $s.t.\ \delta^*(p_1,u) = \delta^*(p_2,u)$, 那么$p_1, p_2$等价, p_1, p_2可合并.

DFA的极小化算法: 标记法[26]

① $\forall p,q \in (Q-F)\times F$, 标记可区分状态表中的表项$(p,q)$;/* p,q不可以合并*/

② $\forall\ p,q \in (Q-F)\times(Q-F) \cup F\times F$且$p \neq q$, 进行以下步骤:

③ 如果$\exists\, a \in \Sigma$, 可区分状态表项$(\delta(p,a), \delta(q,a))$已被标记, 然后继续标记可区分状态表条目$(p,q)$;

④ 递归的重复上述步骤.

⑤ 否则$\forall a \in \Sigma$, 如果$\delta(p,a) \neq \delta(q,a)$且$(p,q)$与$(\delta(p,a),\ \delta(q,a))$不是同一个状态对, 那么将$(p,q)$放在$(\delta(p,a),\ \delta(q,a))$的关联链表上.

定理 1.1.1[26] 按照以上极小化算法得到的DFA, 去掉不可达状态后得到的是最小的DFA.

定理 1.1.2 给定一个$DFA\ M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

(1) 按照以上状态的等价划分构造极小化自动机的方法得到的最小化的确定有限自动机是这样一个新的五元组$M_{\min} = (\{[p]: p \in Q\}, \Sigma, \delta_{\min}, [q_0], \{[q]: q \in F\})$, $[p]$表示状态p的等价类, 转移函数$\delta_{\min}([p],a) = \delta(p,a)$, $p \in Q$.

(2) NFA的最小化[25]: 可通过将两个DFA连接构造出与之等价的NFA, 利用DFA上状态集的等价关系对NFA的状态集的等价划分.

1.2 模糊集合理论基础

Zadeh提出的模糊集克服了经典集合只能描述非此即彼现象的不足, 打破了元素对集合的隶属度只能取0, 1的限制, 同时可以表达亦此亦彼的涵义, 是能够更贴切的描述现实生活中的现象, 并有别于经典集合的集合.

定义1.2.1[26] 设X是经典集合, 定义X上的模糊集$A: X \to [0,1]\ \forall x \in X$, 元素$x$隶属度可以用$A(x)$来表示, 也被称为模糊集的隶属函数.

通常情况下, 用$\mu_A(x)$表示x对模糊集A的隶属度, $0 \le \mu_A(x) \le 1$.

可见, 经典集合即模糊集隶属度$A(x)$的值域取$\{0, 1\}$的情况, 模糊集合包含了

比经典集合更多的信息，是对经典集合的扩充.

定义1.2.2

(1)[31] X 的模糊子集 A 的支撑集，又称之为 A 的支集，记作：

$$\operatorname{supp} A=\{x\in X \mid A(x)>0\}.$$

(2)[16] 对于 $\forall\lambda\in[0,1]$，模糊集 $A\in\mathscr{F}(X)$的截集 A_λ 的定义为：

$$A_\lambda=\{x \mid A(x)>\lambda, x\in X\}.$$

(3)[16] 设 $A\in\mathscr{F}(X)$，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，$A_\lambda\overset{d}{=}\{x \mid A(x)\geq\lambda\}$，记称 A_λ 为 A 的 λ-截集或割集，又记 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\overset{d}{=}\{x \mid A(x)>\lambda\}$，称 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$ 为 A 的 λ-强截集. 我们把 λ 叫作置信水平. 截集具有以下性质：

$$(A\cup B)_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda,\quad (A\cap B)_\lambda=A_\lambda\cap B_\lambda,$$

$$(A\cup B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cup B_{\underset{\cdot}{\lambda}},\quad (A\cap B)_{\underset{\cdot}{\lambda}}=A_{\underset{\cdot}{\lambda}}\cap B_{\underset{\cdot}{\lambda}}.$$

定义1.2.3 [16]

设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，称 A 包含 B ($A\subseteq B$)，当且仅当 $\forall x\in X$，恒有 $\mu_A(x)\geq\mu_B(x)$.

设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，称 A,B 相等 ($A=B$)，当且仅当 $\forall x\in X$，恒有 $\mu_A(x)=\mu_B(x)$.

设 $A,B\in\mathscr{F}(X)$，A 真包含 B ($A\subset B$) 时，$\forall x\in X$，恒有 $\mu_A(x)\geq\mu_B(x)$ 且 $\exists x_0\in X$，$s.t.\ \mu_A(x_0)>\mu_B(x_0)$.

定义 $A^C: A\to[0,1]$ 为 $\forall x\in X$，$A^C(x)=1-A(x)$，则 $A^C\in\mathscr{F}(X)$，称 A^C 为 A 的补.

在定义了 $\mathscr{F}(X)$上的代数运算交，并，补 ($\cup$, $\cap$, ^{c}) 之后，显然，$(\mathscr{F}(X),\cup,\cap,{}^c)$ 构成了一个代数系统，这个代数系统是一个软代数，也是优软代数，它具有以下性质：①幂等律，②结合律，③交换律，④吸收律，⑤分配律，⑥复原律 $(A^C)^C=A$，

⑦ 两极律 $A\cup X=X$，$A\cap X=A$; $A\cup\Phi=A$, $A\cap\Phi=\Phi$，

⑧ De Morgan定律 $(A\cup B)^C=A^C\cup B^C$，$(A\cap B)^C=A^C\cap B^C$.

在模糊集中，由于 $\mu_A(x)$ 的取值在[0, 1]之间，当 $0<\mu_A(x)<1$ 时补余律不成立，这是模糊集合与经典集合的一个差别. 因为 $\mu_A(x)\wedge(1-\mu_A(x))>0$，$\mu_A(x)\vee(1-\mu_A(x))<1$，所以 $A\cup A^C\neq X$，$A\cap A^C\neq\Phi$.

1.3 模糊有限状态自动机的最小化

定义 1.3.1[30] 用一个五元组 $M=(Q,\Sigma,\delta,\widetilde{S},\widetilde{F})$ 来定义模糊有限状态自动机

FFA，其中:Q 是一个非空有限状态集; Σ 是 M 的非空有限输入字符集; $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ 是状态转移函数; $\widetilde{S}$ 是 Q 的模糊子集，例如，$\widetilde{S}:Q\to[0,1]$ 为初始模糊状态; $\widetilde{F}$ 为结束模糊状态，是 Q 的模糊子集，$\widetilde{F}:Q\to[0,1]$.

特别地，状态转换函数 $\delta:Q\times\Sigma\to Q$ 可以扩展为 $\delta^*:Q\times\Sigma^*\to Q$，$\forall q\in Q$，$u,v\in\Sigma^*$，$a\in\Sigma$，有以下式子成立:

$$\delta^*(q,\varepsilon)=\delta(q,\varepsilon)=q,$$
$$\delta^*(q,ua)=\delta(\delta^*(q,u),a),$$
$$\delta^*(q,uv)=\delta^*(\delta^*(q,u),v).$$

定义 1.3.2[30] 设 $M=(Q,\Sigma,\delta,\widetilde{S},\widetilde{F})$ 是一个 FFA，则 M 所接受的模糊语言为:

$$FL(M)=\bigvee_{q\in Q}\left(\widetilde{S}(q)\wedge\widetilde{F}(\delta^*(q,u))\right),\ u\in\Sigma^*.$$

定义 1.3.3[30] $CFFA$ 是仅有单个初始状态的 FFA：$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$，其可接受的模糊语言为 $FL(M)=\{(\omega,F(\delta^*(q_0,\omega)))|\ \omega\in\Sigma^*\}$.

显然 $CFFA$ 是一种特殊形式的 FFA，对于任意给出的一个 FFA $M=(Q,\Sigma,\delta,S,F)$，都可以构造出唯一一个 $CFFA$ $M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,F_1)$，$s.t.\ FL(M)=FL(M_1)$.

$CFFA$ 的构造方法如下[30]:

① 将 M 分解为 $CFFA$ $M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,F_1)$ 的集合，其中 $q_0\in\mathrm{supp}(S)$.

② 令 $q_0=[q_1,q_2,\cdots,q_n]$，其中 $q_i\in\mathrm{supp}(S)$. $i=1,2,\cdots,n$

③ 令 $Q_1=T=\{q_0\}$

④ While T 非空, do 在 T 中任意取一元素 $[q_1,q_2,\cdots,q_n]$，令 $T_1=T-[q_1,q_2,\cdots,q_n]$. For $\forall a\in\Sigma$ do, $\delta_1([q_1,q_2,\cdots,q_n],a)=[p_1,p_2,\cdots,p_m]$ 当且仅当

$$\bigcup_{k=1}^{n}\delta_1(q_k,a)=[p_1,p_2,\cdots,p_m],$$

令 $T_2=T_1\cup\{[p_1,p_2,\cdots,p_m]\}$，$Q_2=Q_1\cup\{[p_1,p_2,\cdots,p_m]\}$，$\forall[p_1,p_2,\cdots,p_m]\in Q_2$，有

$$F_1([p_1,p_2,\cdots,p_m])=\bigvee_{k=1}^{m}\bigvee_{q\in\mathrm{supp}(S)_q}F_q(p_k).$$

定理 1.3.1[30] 对于任给的一个模糊有限自动机 $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\widetilde{F})$，都可以构造出唯一一个最小的 $CFFA$ $M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,F_1)$，$s.t.\ FL(M)=FL(M_1)$.

以上算法给出了通过 FFA 构造具有单个初始状态的 $CFFA$ 的步骤，但由于这

些系统太过复杂，模糊自动机的简化就尤其重要，因此模糊自动机的最小化就应运而生. 下面给出模糊有限自动机的状态等价定理.

定理 1.3.2[30] 状态 p,q 为 $CFFA\ M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,\widetilde{F}_1)$ 的两个状态，若存在 $p,q\in\widetilde{F}_1$ 且 $\mu(p)=\mu(q)$，则判断 p,q 等价的方法有

(1) 对 $\forall x\in\Sigma^+$，若 $\widetilde{F}_1(\delta_1(p,x))=\widetilde{F}_1(\delta_1(q,x))$，则 p,q 等价.

若存在 $p_i,p_j\notin\widetilde{F}$，$\widetilde{F}(\delta_1(p_i,x))\in\{p,q\}$，$\widetilde{F}(\delta_1(p_j,x))\in\{p,q\}$，则 p_i,p_j 等价.

(2) $\forall x\in\Sigma^*$，若 $\widetilde{F}_1(\delta_1(p,x))=\widetilde{F}_1(\delta_1(q,x))$，则 p,q 等价.

(3) 否则 p,q 不等价，是可区分的.

对于任意给出的 $FFA\ M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\widetilde{F})$ 已经可以构造出等价的具有单个初始状态的 $CFFA\ \ M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,\widetilde{F}_1)$，要想构造出最简化的模糊有限自动机还必须对 M_1 进行最小化，构造出唯一一个最小的 $CFFA\ M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,q_{00},\widetilde{F}_2)$，s.t. $FL(M)=FL(M_1)=FL(M_2)$，下面给出 M_2 求解的过程.

① 根据以上算法构造与 $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\widetilde{F})$ 等价的具有只含单个初始状态的 $CFFA\ M_1=(Q_1,\Sigma_1,\delta_1,q_0,\widetilde{F}_1)$，将 Q_1 中所有状态进行编号 $Q_1=\{q_{11},q_{12},\cdots,q_{1n}\}$.

② 其中 $\forall q_{1i},q_{1j}\in Q_1(i<j)$ 或者 $\forall(q_{1i},q_{1j})\in\widetilde{F}_1\times(Q_1-\widetilde{F}_1)$；如果 $\widetilde{F}_1(q_{1i})\neq\widetilde{F}_1(q_{1j})$ 且 $d(\widetilde{F}_1(q_{1i}))\neq d(\widetilde{F}_1(q_{1j}))$，则标记为 $\forall q_{1i},q_{1j}\in Q_1(i<j)$ (q_{1i},q_{1j}) 不等价，是可区分的.

③ $\forall(q_{1i},q_{1j})(i<j)$，若 (q_{1i},q_{1j}) 没有按以上步骤被标记，如果 $\exists a\in\Sigma$，s.t.状态对 $(\delta_1(q_{1i},a),\ \delta_1(q_{1j},a))$ 被标记，那么 (q_{1i},q_{1j}) 也被标记，即 q_{1i},q_{1j} 也可被区分.

按照此种方法归纳所有 (q_{1i},q_{1j}) 列表上还未被标记的可区分(相异)对，并且标记所有其他已标记列表上的可区分对.

否则，对于输入字母表 Σ 中的每个输入字符 a，有 $\delta_1(q_{1i},a)\neq\delta_1(q_{1j},a)$，则将 (q_{1i},q_{1j}) 放入 $(\delta_1(q_{1i},a),\ \delta_1(q_{1j},a))$ 的列表中.

④ 前三步构造了相异对，等价集的构造方法如下:

对 $i=1,2,\cdots,n$；$j=i+1,i+2,\cdots,n$；如果 (q_{1i},q_{1j}) 没有被标记，那么 q_{1j} 包含在 q_{1i} 的等价集 $[q_{1i}]$ 中.

⑤ 按照以上四步得到 $CFFA$，其中:

$$\begin{cases} Q_2=\{[q_{1i}]\mid q_{1i}\in Q_1\} \\ \delta_2([q_{1i}],a)=[\delta_1(q_{1i},a)] \\ q_{00}=[q_0] \\ \widetilde{F}_2([q_{1i}])=\widetilde{F}_1(q_{1i}) \end{cases}.$$

定理 1.3.3[30] 根据以上算法构造出的 $M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,q_{00},\widetilde{F}_2)$ 是约简的模糊有限自动机，消去 M_2 的不可达状态得到最小化的 $CFFA$.

第二章 直觉模糊有限自动机的最小化

直觉模糊有限自动机已经有很多学者对其研究, 本章第一节简单介绍了直觉模糊有限自动机的基本概念和相关性质, 第二节运用在引言中总结的自动机的最小化的最基本的方法, 通过对直觉模糊有限自动机的状态集进行等价划分, 进而对直觉模糊有限自动机进行最小化.

2.1 直觉模糊集的基本概念及相关性质

定义2.1.1[31] X是非空集合, X上的模糊集函数为$\mu,\nu:X\to[0,1]$, X上的直觉模糊集$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$(简称$IFS\ A$)其中函数$\mu_A:X\to[0,1]$和$\nu_A:X\to[0,1]$分别表示$X$中的元素$x$对$A$的隶属度和非隶属度, 且对$\forall x\in X$, 满足$0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$. 通常将直觉模糊集$A$简记为$A=(\mu_A,\nu_A)$.

在经典模糊集中$\mu_A(x)+\nu_A(x)$=1. 显然, 每一个普通的模糊集A对应一个直觉模糊集$A=\{\langle x,\mu_A(x),1-\mu_A(x)\rangle|x\in X\}$. 即任意$X$上的$IFS\ A=(\mu_A,\nu_A)$, 当$\forall x\in X$有$\nu_A(x)=1-\mu_A(x)$, 即$\mu_A(x)+\nu_A(x)=1$, A成为一个经典模糊集. 因此, 直觉模糊集是在经典模糊集的基础上进行推广. 用$IF(X)$表示非空集合X上的所有直觉模糊子集的全体.

定义 2.1.2[31] 直觉模糊集作为一种特殊的集合类, 集合之间的运算: 并, 交, 补与序关系有如下定义, 设$A,B\in IF(X)$,

(1) $A=B\Leftrightarrow(\forall x\in X)\left(\mu_A(x)=\mu_B(x),\ \nu_A(x)=\nu_B(x)\right)$,

(2) $A^c=\left\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\middle|x\in X\right\}$,

(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow(\forall x\in X)\left(\mu_A(x)\le\mu_B(x),\nu_A(x)\ge\nu_B(x)\right)$,

(4) $A\supseteq B\Leftrightarrow(\forall x\in X)\left(\mu_A(x)\ge\mu_B(x),\nu_A(x)\le\nu_B(x)\right)$,

(5) $A\bigcup B=\left\{\left\langle x,\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\min\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\right\rangle\middle|x\in X\right\}$,

(6) $A\bigcap B=\left\{\left\langle x,\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\max\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\right\rangle\middle|x\in X\right\}$,

(7) $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\left\{\left\langle x,\bigvee\limits_{i\in I}\mu_{A_i}(x),\bigwedge\limits_{i\in I}\nu_{A_i}(x)\right\rangle\middle|x\in X\right\}$,

$$(8)\quad \bigcap_{i\in I} A_i = \left\{ \left\langle x, \bigwedge_{i\in I}\mu_{A_i}(x), \bigvee_{i\in I}\nu_{A_i}(x) \right\rangle \middle| x \in X \right\}.$$

2.2 直觉模糊有限自动机的最小化

经典自动机的隶属度是{0,1}的确定值，推广到模糊有限自动机的研究，又将隶属度的取值扩大到[0,1]这样一个区间，模糊隶属度可以取在0,1之间很多值，现在随着研究的深入，需要把自动机与(格值)直觉模糊集连接起来，下面我们就对直觉模糊集上的有限自动机进行研究.

张小伟，李永明等人对直觉模糊自动机的研究已经做了很多的工作，下面我将在此基础上对直觉模糊有限自动机的概念性质进行相应的完善与探讨.

定义 2.2.1[31, 36] 直觉模糊有限自动机(intuitionistic fuzzy finite state automata)(简记 IFA)是一个五元组 $M=(Q,X,A,B,C)$，其中

① Q 是 M 的状态的非空有穷集合.

② X 是 M 的非空有穷输入字符的集合.

③ A 是 $Q\times X\times Q\to[0,1]$ 的一个直觉模糊集 (IFS)，A 叫作 M 的直觉模糊转移函数，表示为 $A=(\mu_A,\nu_A)$，其中 $\mu_A:Q\times X\times Q\to[0,1]$； $\nu_A:Q\times X\times Q\to[0,1]$.

④ $B:Q\to[0,1]$ 的一个直觉模糊集 (IFS)，是 M 的初始状态的直觉模糊子集，表示为 $B=(\mu_B,\nu_B)$，其中 $\mu_B:Q\to[0,1]$； $\nu_B:Q\to[0,1]$.

⑤ $C:Q\to[0,1]$ 的一个直觉模糊子集 (IFS)，称终止状态的直觉模糊子集. 表示为 $C=(\mu_C,\nu_C)$，其中 $\mu_C:Q\to[0,1]$； $\nu_C:Q\to[0,1]$.

以上隶属度与非隶属度满足 $0\le\mu+\nu\le1$，Λ 表示空字符串集，$\forall x\in X^*$, $|x|$ 表示字符串 x 的长度，X^* 表示 X 上所有有穷长度字符串的集合，IFA 接受的语言是直觉模糊语言.

复杂的自动机识别复杂的字符串，要想研究 IFA 所识别的语言我们还要对 IFA 上的定义进行扩充.

定义 2.2.2 一个 IFA 记作 $M=(Q,X,A,B,C)$，将 M 的直觉模糊转移函数

$A=(\mu_A,\nu_A)$ 扩充为 $A^*=(\mu_{A^*},\nu_{A^*})$，$\mu_{A^*}:Q\times X\times Q\to[0,1]$， $\nu_{A^*}:Q\times X\times Q\to[0,1]$，

$$\forall a\in X,\ x\in X^*,\ p,q\in Q,$$

$$\mu_{A^*}(p,\Lambda,q)=\begin{cases}0 & p\neq q\\ 1 & p=q\end{cases},\quad \nu_{A^*}(p,\Lambda,q)=\begin{cases}1 & p\neq q\\ 0 & p=q\end{cases},$$

$$\mu_{A^*}(p,xa,q)=\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_A(r,a,q)\right],$$

$$\nu_{A^*}(p,xa,q)=\wedge_{r\in Q}\left[\nu_{A^*}(p,x,r)\vee\nu_A(r,a,q)\right].$$

通过以上定义和扩充还可以得到以下的延伸定理

定理 2.2.1 如果$M=(Q,X,A,B,C)$是一个直觉模糊有限状态自动机，那么任意的$p,q\in Q$，$x,y\in X^*$有以下结论成立[44]:

$$\mu_{A^*}(p,xy,q)=\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,y,q)\right],$$

$$\nu_{A^*}(p,xy,q)=\wedge_{r\in Q}\left[\nu_{A^*}(p,x,r)\vee\nu_{A^*}(r,y,q)\right].$$

证明: 用数学归纳法对字符串y的长度$|y|$进行归纳总结.

(1) 当$|y|=0$时，即$y=\Lambda$时，由定义 2.2.2,

① 左边 $\mu_{A^*}(p,xy,q)=\mu_{A^*}(p,x\Lambda,q)=\mu_{A^*}(p,x,q)$.

右边 $\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,y,q)\right]$

$=\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,\Lambda,q)\right]\quad\left(r=q,\mu_{A^*}(r,\Lambda,q)=1\right)$

$=\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,q)\wedge 1\right]$

$=\mu_{A^*}(p,x,q)$.

$\therefore\ \mu_{A^*}(p,xy,q)=\vee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,y,q)\right]$.

② 左边$\nu_{A^*}(p,xy,q)=\nu_{A^*}(p,x\Lambda,q)=\nu_{A^*}(p,x,q)$.

右边 $\wedge_{r\in Q}\left[\nu_{A^*}(p,x,r)\vee\nu_{A^*}(r,y,q)\right]$.

$=\wedge_{r\in Q}\left[\nu_{A^*}(p,x,r)\vee\nu_{A^*}(r,\Lambda,q)\right]\quad\left(r=q,\nu_{A^*}(r,\Lambda,q)=0\right)$

$$=\nu_{A^*}(p,x,q)\vee 0$$

$$=\nu_{A^*}(p,x,q).$$

$$\therefore\ \nu_{A^*}(p,xy,q)=\underset{r\in Q}{\wedge}\left[\nu_{A^*}(p,x,r)\vee\nu_{A^*}(r,y,q)\right].$$

$\therefore |y|=0$ 时定理成立.

(2) $|y|=n$ 时，假设结论成立，此时令 $y_1=ya$，$a\in X$，$|y_1|=n+1$，

$$\begin{aligned}\mu_{A^*}(p,xy_1,q)&=\vee\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,y_1,q)\right]\\&=\vee\left[\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\mu_{A^*}(r,ya,q)\right]\\&=\underset{r\in Q}{\vee}\left\{\mu_{A^*}(p,x,r)\wedge\left(\underset{r_1\in Q}{\vee}\left[\mu_{A^*}(r,y,r_1)\wedge\mu_A(r_1,a,q)\right]\right)\right\}\\&=\underset{r_2\in Q}{\vee}\left[\mu_{A^*}(p,x,r_2)\wedge\mu_A(r_2,y_1,q)\right]\end{aligned}$$

同理 $\nu_{A^*}(p,xy_1,q)=\underset{r_2\in Q}{\wedge}\left[\nu_{A^*}(p,x,r_2)\vee\nu_{A^*}(r_2,y_1,q)\right]$，所以当 $|y_1|=n+1$ 时结论也成立.

综上，$\forall\ p,q\in Q$，$x,y\in X^*$ 结论都是成立的.

下面本文简单研究直觉模糊有限自动机的直觉容许关系，同余，同态，同构.

定义 2.2.3 直觉模糊有限状态自动机 $M=(Q,X,A,B,C)$，"≡"是 Q 上的一个等价关系，$\forall x\in X$，$q,t_1\in Q$ 且满足 $\mu_A(q,x,t_1)>0$, $\nu_A(q,x,t_1)<1$，$\exists t_2\in Q$, $t_2\equiv t_1, s.t.$ $\mu_A(q,x,t_2)>\mu_A(q,x,t_1)$, $\nu_A(q,x,t_2)<\nu_A(q,x,t_1)$，则称"≡"为直觉容许关系.

定义 2.2.4 直觉模糊有限状态自动机 $M=(Q,X,A,B,C)$，$\forall q\in Q$，用 $[q]$ 表示状态集 Q 中状态的 q 等价类，"≡"为直觉容许关系，令 $Q_m=Q/_{\equiv}=\{[q]\mid q\in Q\}$，定义 $Q_m\times X\times Q_m$ 上的 $A=(\mu_{\tilde{A}},\nu_{\tilde{A}})$，若满足：$\forall p\in Q$ 有

$$\mu_{\tilde{A}}([q],x,[p])=\underset{p\in[p]}{\vee}\mu_A(q,x,p),$$

$$\nu_{\tilde{A}}([q],x,[p])=\underset{p\in[p]}{\wedge}\nu_A(q,x,p).$$

这样一个条件成立的关系"≡"为同余关系.

引理 1 将定义 2.2.4 的直觉模糊有限自动机的同余关系扩充:

$$Q_m \times X^* \times Q_m \to [0,1],\quad \widetilde{A}^* = (\mu_{\widetilde{A}^*}, \nu_{\widetilde{A}^*}),\ \forall \theta \in X^*,\ q, p \in Q,$$

$$\mu_{\widetilde{A}^*}([q],\theta,[p]) = \vee_{p\in[p]} \mu_{A^*}(q,\theta,p),$$

$$\nu_{\widetilde{A}^*}([q],\theta,[p]) = \wedge_{p\in[p]} \nu_{A^*}(q,\theta,p).$$

定理 2.2.2 M 的同余关系"≡"决定的直觉模糊有限自动机 $M/_{\equiv} = (Q/_{\equiv}, X, \widetilde{A})$ 与原直觉模糊有限自动机 $M = (Q, X, A)$ 等价.

证明:

要证 $M/_{\equiv} = (Q/_{\equiv}, X, \widetilde{A}) \equiv M$，即证 $f_{M/_{\equiv}} = f_M$，即 $(\mu_{f_{M/_{\equiv}}}, \nu_{f_{M/_{\equiv}}}) = (\mu_{f_M}, \nu_{f_M})$.

$\forall q, p \in Q, \exists r \in Q,\ r \in [q],\ s.t.$

$$\vee_{q\in[q]} \mu_A(p,x,q) = \mu_A(p,x,r);$$

$$\wedge_{q\in[q]} \nu_A(p,x,q) = \nu_A(p,x,r).$$

$$\begin{aligned}
\mu_{f_{M/_{\equiv}}} &= \vee_{p,r\in Q} \{\mu_B([p]) \wedge \mu_{\widetilde{A}}([p],x,[q]) \wedge \mu_C([q])\} \\
&= \vee_{p,r\in Q} \left\{\mu_B([p]) \wedge \left(\vee_{q\in Q} \mu_A(p,x,q)\right) \wedge \mu_C([q])\right\} \\
&= \vee_{p,r\in Q} \{\mu_B(p) \wedge \mu_A(p,x,r) \wedge \mu_C(q)\} \\
&= \mu_{f_M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_{f_{M/_{\equiv}}} &= \wedge_{p,r\in Q} \{\nu_B([p]) \vee \nu_{\widetilde{A}}([p],x,[q]) \vee \nu_C([q])\} \\
&= \wedge_{p,r\in Q} \left\{\nu_B([p]) \vee \left(\wedge_{q\in Q} \nu_A(p,x,q)\right) \vee \nu_C([q])\right\} \\
&= \wedge_{p,r\in Q} \{\nu_B(p) \vee (\nu_A(p,x,r)) \vee \nu_C(q)\} \\
&= \nu_{f_M}
\end{aligned}$$

$$\therefore f_{M/_{\equiv}} = f_M,\quad M/_{\equiv} = (Q/_{\equiv}, X, \widetilde{A}) \equiv M.$$

定义 2.2.5 两个直觉模糊有限自动机 $M_1=(Q_1,X,A_1,B,C)$ 和 $M_2=(Q_2,X,A_2,B,C)$，定义映射 $\varphi: M_1\to M_2$，$\forall p,q\in Q_1$，$x\in X$ 满足:

$$\mu_{A_2}(\varphi(p),x,\varphi(q))=\bigvee_{r\in Q_1}\{\mu_{A_1}(p,x,r)\mid \varphi(r)=\varphi(q)\},$$

$$\nu_{A_2}(\varphi(p),x,\varphi(q))=\bigwedge_{r\in Q_1}\{\nu_{A_1}(p,x,r)\mid \varphi(r)=\varphi(q)\}$$

则称 φ 是 M_1 到 M_2 的同态映射；若 φ 是满的，则 φ 为满同态；若 φ 既单又满，则称 φ 为同构映射，此时 $M_1\cong M_2$.

自动机等价指它们接受的语言相同，故有以下结论：给定两个 $IFA: M_1,M_2$，若 $f_{M_1}=f_{M_2}$，那么 M_1,M_2 等价，即 $M_1\equiv M_2$. 那么 IFA 接受的语言如何定义呢?

定义 2.2.6[31, 36] IFA $M=(Q,X,A,B,C)$ 它所识别的直觉模糊语言定义为:

$$f_M=(\mu_{f_M},\nu_{f_M})=B\circ A_x^{*}\circ C,\ \ \mu_{f_M},\nu_{f_M}: X^{*}\to[0,1],$$

$$\mu_{f_M}(x)=\bigvee_{p,q\in Q}[\mu_B(p)\wedge\mu_{A^{*}}(p,x,q)\wedge\mu_C(q)],$$

$$\nu_{f_M}(x)=\bigwedge_{p,q\in Q}[\nu_B(p)\vee\nu_{A^{*}}(p,x,q)\vee\nu_C(q)].$$

由定义 2.2.6，直觉模糊有限自动机在模糊有限自动机的基础上增加了对非隶属度的要求，对其最小化将会更加复杂，不仅要考虑隶属度的变化，同时也要兼顾非隶属度的改变. 如果在模糊有限自动机的基础上同时考虑非隶属度的变化先对其进行单化初始状态再进行最小化，在构造单个初始状态的正规的直觉模糊有限自动机的过程中相对比较麻烦，下面本文运用合并等价状态的方法对其最小化.只要定义出直觉模糊有限自动机的任意两个状态等价的条件，那么其最小化的理论也就出来了.

根据模糊有限自动机状态等价，总结出直觉模糊有限自动机的状态等价定理.

定理 2.2.3 任意两个直觉模糊有限自动机 $M_1=(Q_1,X,A_1,B_1,C_1)$ 和 $M_2=(Q_2,X,A_2,B_2,C_2)$，$M_1\equiv M_2 \Leftrightarrow f_{M_1}=f_{M_2} \Leftrightarrow (\mu_{f_{M_1}},\nu_{f_{M_1}})=(\mu_{f_{M_2}},\nu_{f_{M_2}})$.

定义 2.2.7 给定直觉模糊有限自动机 $M=(Q,X,A,B,C)$，$\forall p,q\in Q$

$$p \equiv q \Leftrightarrow \forall x \in X^*, \forall r \in Q,$$

$$\mu_{A^*}(p,x,r) = \mu_{A^*}(q,x,r), \quad \nu_{A^*}(p,x,r) = \nu_{A^*}(q,x,r);$$

$$\mu_B(p) = \mu_B(q), \quad \nu_B(p) = \nu_B(q);$$

$$\mu_C(p) = \mu_C(q), \nu_C(p) = \nu_C(q).$$

否则 p,q 不等价，是可区分的.

下面给出对 *IFA* 细化分类后状态的等价划分方法:

引理 2　设 $M = (Q,X,A,B,C)$ 是一个 *IFA*，其可识别的直觉模糊语言是 $f_M = (\mu_{f_M}, \nu_{f_M}) \in IF(X^*)$，那么:

(1) 当 *IFA* 具有单个分明初始状态和分明终止状态为 $M_1 = (Q,X,A,q_0,F)$ 时，其可接受的直觉模糊语言 $f_{M_1} = (\mu_{f_{M_1}}, \nu_{f_{M_1}}) \in IF(X^*)$ 定义为: $\forall x \in X^*$,

$$\mu_{f_{M_1}}(x) = \bigvee_{p \in F} \mu_{A^*}(q_0,x,p),$$
$$\nu_{f_{M_1}}(x) = \bigwedge_{p \in F} \nu_{A^*}(q_0,x,p).$$

其状态划分方法为:

$$\forall p,q \in Q, x \in X^*, q \equiv p \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{A^*}(q_0,x,q) = \mu_{A^*}(q_0,x,p) \\ \nu_{A^*}(q_0,x,q) = \nu_{A^*}(q_0,x,p) \end{cases}.$$

否则 p,q 是可区分的.

(2) 当 *IFA* 具有单个分明初始状态为 $M_2 = (Q,X,A,q_0,C)$，其可接受的直觉模糊语言 $f_{M_2} = (\mu_{f_{M_2}}, \nu_{f_{M_2}}) \in IF(X^*)$ 定义为: $\forall x \in X^*$,

$$\mu_{f_{M_2}}(x) = \bigvee_{q,p \in Q} \left[\mu_{A^*}(q_0,x,p) \wedge \mu_C(p)\right],$$
$$\nu_{f_{M_2}}(x) = \bigwedge_{q,p \in Q} \left[\nu_{A^*}(q_0,x,p) \vee \nu_C(p)\right].$$

其状态划分方法为:

$$\forall p,q \in Q, x \in X^*, q \equiv p \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{A^*}(q_0,x,q) = \mu_{A^*}(q_0,x,p) \\ \nu_{A^*}(q_0,x,q) = \nu_{A^*}(q_0,x,p) \\ \mu_C(q) = \mu_C(p) \\ \nu_C(q) = \nu_C(p) \end{cases}.$$

否则 p,q 是可区分的.

(3) 当 IFA 具有分明的终止状态为 $M_3 = (Q,X,A,B,F)$ 时，其可接受的直觉模糊语言 $f_{M_3} = (\mu_{f_{M_3}}, \nu_{f_{M_3}}) \in IF(X^*)$ 定义为：$\forall x \in X^*$，

$$\mu_{f_{M_3}}(x) = \bigvee_{q \in Q, p \in F} \left[\mu_B(q) \wedge \mu_{A^*}(q,x,p)\right],$$

$$\nu_{f_{M_3}}(x) = \bigwedge_{q \in Q, p \in F} \left[\nu_B(q) \vee \nu_{A^*}(q,x,p)\right].$$

其状态划分方法为:

$$\forall p,q,r \in Q,\ x \in X^*,\ q \equiv p \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{A^*}(q,x,r) = \mu_{A^*}(p,x,r) \\ \nu_{A^*}(q,x,r) = \nu_{A^*}(p,x,r) \\ \mu_B(q) = \mu_B(p) \\ \nu_B(q) = \nu_B(p) \end{cases}.$$

否则 p,q 是可区分的.

(4) 当 IFA 为一般的直觉模糊有限自动机表示为 $M_4 = (Q,X,A,B,C)$ 时，则其可接受的直觉模糊语言 $f_{M_4} = (\mu_{f_{M_4}}, \nu_{f_{M_4}}) \in IF(X^*)$ 定义为：$\forall x \in X^*$，

$$\mu_{f_{M_4}}(x) = \bigvee_{q,p \in Q} \left[\mu_B(q) \wedge \mu_{A^*}(q,x,p) \wedge \mu_C(p)\right],$$

$$\nu_{f_{M_4}}(x) = \bigwedge_{q,p \in Q} \left[\nu_B(q) \vee \nu_{A^*}(q,x,p) \vee \nu_C(p)\right].$$

此时的状态划分如定义 2.2.7:

$$\forall p,q\in Q,\ p\equiv q \quad \Leftrightarrow \forall x\in X^*,\ \forall r\in Q,\begin{cases}\mu_{A^*}(q,x,r)=\mu_{A^*}(p,x,r)\\ \nu_{A^*}(q,x,r)=\nu_{A^*}(p,x,r)\\ \mu_B(q)=\mu_B(p)\\ \nu_B(q)=\nu_B(p)\\ \mu_C(q)=\mu_C(p)\\ \nu_C(q)=\nu_C(p)\end{cases}.$$

否则 p,q 是可区分的.

引理 3 任给直觉模糊有限状态自动机 $M=(Q,X,A,B,C)$，根据引理 1 对其状态进行划分，将不可区分的状态合并成一个状态，可区分的状态不变，得到一个含新的状态集的直觉模糊有限自动机 $M_1=(Q_1,X,A_1,B_1,C_1)=M/_{\equiv}$ 是约简的自动机.

最小化是通过状态的等价划分对原自动机状态的最大约简，得到的最小化自动机与原自动机识别相同的语言，并且计算速度得到了提高.

定理 2.2.3 按照以上算法构造出的约简直觉模糊有限自动机 $M/_{\equiv}$ 消去不可达状态后，得到最小化直觉模糊有限自动机.

第三章 格值直觉模糊有限同步机的最小化

本章将格值直觉模糊有限自动机与同步机结合来研究格值直觉模糊有限同步机. 首先引入格值直觉模糊集和格值直觉模糊有限自动机的知识, 然后定义格值直觉模糊有限同步机的概念, 再建立行为矩阵状态划分之间的联系, 进而研究格值直觉模糊有限同步机的最小化.

3.1 格值直觉模糊集理论基础定义

定义3.1.1[16] 设$(L,\le)$是一个偏序集, 则对任意的$\alpha,\beta\in L$, $\{\alpha,\beta\}$的上下确界$\sup\{\alpha,\beta\}$和$\inf\{\alpha,\beta\}$均存在, 则称$(L,\le)$为一个格, 记作$(L,\vee,\wedge)$, 简称L.

特别记$\alpha\vee\beta=\sup\{\alpha,\beta\}$, $\alpha\wedge\beta=\inf\{\alpha,\beta\}$.

若对格L的任意子集T, $\vee T=\underset{\alpha\in T}{\vee}\alpha$, $\wedge T=\underset{\alpha\in T}{\wedge}\alpha$都存在, 则称$L$为一个完备格. 即完备格$L$一定有上下确界$\sup L$和$\inf L$, 分别记为1和0来表示.

定义 3.1.2[16] 在任意格L中, 满足:

① $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)\ \forall a,b,c\in L$,

② $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\ \forall a,b,c\in L$.

两个等价的分配恒等式的格L叫做一个分配格.

性质 3.1.1[16] 在任意格$(L,\le)$中, 对$\forall a,b,c\in L$, 有

① 幂等律 $a\wedge a=a,\ a\vee a=a$,

② 交换律 $a\wedge b=b\wedge a,\ a\vee b=b\vee a$,

③ 结合律 $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$,

④ 吸收律 $a\wedge(a\vee b)=a=a\vee(a\wedge b)$.

性质 3.1.2[16] 在任意格L中, 元素的交, 并运算具有保序性. 即对$\forall a,b,c\in L$, 若$a\le b$, 则$a\wedge c\le b\wedge c$, $a\vee c\le b\vee c$.

定义 3.1.3[40] 设L是格, $\vee$和$\wedge$分别是L的上下确界运算, 1 和 0 是L的泛界, "$\cdot$"为L上的二元乘法运算, 且$(L,\cdot,e)$为有单位元e的半群, 若满足:

① $\forall a,b\in L,\ a\le b\Rightarrow\forall x\in L, a\cdot x\le b\cdot x$, 且 $x\cdot a\le x\cdot b$, 则 L 称为序半群.

② $\forall a,b,c\in L,\ a\cdot(b\vee c)=(a\cdot b)\vee(a\cdot c)$, 且 $(b\vee c)\cdot a=(b\cdot a)\vee(c\cdot a)$, 则称 L

为格半群.

定义 3.1.4[46] $':L\to L$ 称为格 L 上的逆序对偶对应，若对 $\forall\ a,b\in L$，$a\le b$ 时，有 $a'\ge b'$ 且 $a''=a$. 最小元与最大元之间的对应关系表示为 $0'=1$，$1'=0$.

定理 3.1.2[46] De Morgan 定律在具有逆序对偶对应的完备格 L 上是成立的. 即对 $\{a_i|i\in I\}\subset L$，有 $\left(\vee_{i\in I} a_i\right)'=\wedge_{i\in I} a_i',\left(\wedge_{i\in I} a_i\right)'=\vee_{i\in I} a_i'$.

定义 3.1.5[46] 逆序对偶对应的完备格 L 上的一个非空集合 X 上的一个格值直觉模糊集 A 定义为 $A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle|x\in X\}$,

其中 X 上的元素 x 对集合 A 的隶属度和非隶属度用 $\mu_A:X\to L$，$\nu_A:X\to L$ 来表示. 对 $\forall x\in X$，满足 $\mu_A(x)\le(\nu_A(x))'$

格值直觉模糊集可以简记为 $A=(\mu_A,\nu_A)$.

可见，直觉模糊集是 $L=[0,1]$ 时的一种特殊形式，集合 X 上的所有格值直觉模糊子集的全体记 $LIF(X)$.

定义 3.1.6[31, 36] 如果对于 $\forall\ x\in X$，总有 $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$，$\nu_A(x)\ge\nu_B(x)$. 这种包含关系记为 $A\subseteq B$.

格值直觉模糊集的三个运算按以下方式定义.

定义 3.1.7[31, 36] 设 $A,B\in LIF(X)$ 则相关集合的运算定义如下

(1) A,B 的并集定义为

$$A\cup B=\left\{\left\langle x,\sup\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\inf\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\right\rangle\middle|x\in X\right\},$$

(2) A,B 的交集定义为

$$A\cap B=\left\{\left\langle x,\inf\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\sup\{\nu_A(x),\nu_B(x)\}\right\rangle\middle|x\in X\right\},$$

(3) A 的补集定义为

$$A^c=\left\{\langle x,\nu_A(x),\mu_A(x)\rangle\middle|x\in X\right\}.$$

3.2 格值直觉模糊有限自动机及其所识别的语言

定义 3.2.1[45] 一个格值直觉模糊有限自动机(Lattice-valued Intuitionistic Fuzzy Automata)(简记 $LIFA$)是一个五元组 $M=(Q,X,A,B,C)$

其中

① Q是M非空的状态的有穷集合.

② X是M输入字符的非空有穷的集合.

③ $A=(\mu_A,\nu_A)$是$Q\times X\times Q\to L$的一个格值直觉模糊集($LIFS$)，叫作M的直觉模糊转移函数，$':L\to L$，满足$\mu_A(x)\le(\nu_A(x))'$.

④ $B:Q\to L$的一个格值直觉模糊集($LIFS$)，B叫作M的初始状态的直觉模糊子集，表示为$B=(\mu_B,\nu_B)$，其中$\mu_B,\nu_B:Q\to L$.

⑤ $C:Q\to L$是$LIFS$，C叫作终止状态的直觉模糊子集. 表示为$C=(\mu_C,\nu_C)$，其中$\mu_C,\nu_C:Q\to L$.

对比定义 2.2.1 与 3.2.1 有其相似之处，当$L=[0,1]$时，格值直觉模糊有限自动机就是直觉模糊有限自动机.

定义 3.2.2[46] 若$M=(Q,X,A,B,C)$是$LIFA$，定义一个$Q\times X^*\times Q$上的格值直觉模糊集$A^*=(\mu_{A^*},\nu_{A^*})$为：对$\forall q,p\in Q$，$x\in X^*$, $a\in X$，

$$\mu_{A^*}(q,\Lambda,p)=\begin{cases}1 & q=p\\ 0 & q\ne p\end{cases},\qquad \nu_{A^*}(q,\Lambda,p)=\begin{cases}0 & q=p\\ 1 & q\ne p\end{cases},$$

$$\mu_{A^*}(q,xa,p)=\bigvee_{r\in Q}\left[\mu_{A^*}(q,x,r)\wedge\mu_A(r,a,p)\right],$$

$$\nu_{A^*}(q,xa,p)=\bigwedge_{r\in Q}\left[\nu_{A^*}(q,x,r)\vee\nu_A(r,a,p)\right].$$

定义 3.2.3[46] 设给定的五元组$M=(Q,X,A,B,C)$是一个$LIFA$，则其识别或接受的格值直觉模糊语言$f_M=(\mu_{f_M},\nu_{f_M})\in LIF(X^*)$记为：$\forall x\in X^*$，

$$\mu_{f_M}(x)=\bigvee_{q,p\in Q}\left[\mu_B(q)\wedge\mu_{A^*}(q,x,p)\wedge\mu_C(p)\right],$$

$$\nu_{f_M}(x)=\bigwedge_{q,p\in Q}\left[\nu_B(q)\vee\nu_{A^*}(q,x,p)\vee\nu_C(p)\right].$$

定义 3.2.4 对于$\forall\ f\in LIF(X^*)$，我们把f称为X上的格值直觉模糊语言.

3.3 格值直觉模糊有限同步机的最小化

同步机是指输入输出字符长度相等的自动机，根据同步机的概念，本文将其与直觉和格值直觉模糊集结合起来.

定义 3.3.1[47] 直觉模糊同步机是一个四元组$M=(Q,X,Y,A)$，其中Q表示非

空有限状态集，X,Y 分别表示 M 的有限输入字符表和有限输出字符表，

$A=(\mu_A,\nu_A)$ 表示 $Q\times X\times Q\times Y$ 上的直觉模糊子集，$\mu_A,\nu_A:Q\times X\times Q\times Y\to[0,1]$，

$\forall x\in X$，$y\in Y$. 满足 $0<\bigvee\limits_{y\in Y}\bigvee\limits_{q\in Q}\mu_A(p,x,q,y)$，$\bigwedge\limits_{y\in Y}\bigwedge\limits_{q\in Q}\nu_A(p,x,q,y)\le 1$.

这里的 $\mu_A(p,x,q,y)$，$\nu_A(p,x,q,y)$ 分别指 M 在状态 p 下，输入字符 x 到达状态 q，并且同时输出字符 y 的可能程度和不可能程度.

定义 3.3.2 格值直觉模糊有限同步机(输入输出字符长度相等)是一个四元组 $M=(Q,X,Y,A)$，Q,X,Y 分别表示 M 的非空有限状态集, 有限输入, 输出字符集, $A=(\mu_A,\nu_A)$ 表示 $Q\times X\times Q\times Y$ 上的格值直觉模糊子集，$\mu_A,\nu_A:Q\times X\times Q\times Y\to L$，$\forall x\in X,y\in Y$.

定义 3.3.3 给定格值直觉模糊同步机 $M=(Q,X,Y,A)$，将 $A=(\mu_A,\nu_A)$ 从 $Q\times X\times Q\times Y$ 扩张到 $Q\times X^*\times Q\times Y^*$ 上，记作 $A^*=(\mu_{A^*},\nu_{A^*})$，

$$\mu_{A^*},\nu_{A^*}:Q\times X^*\times Q\times Y^*\to L,$$

$$\forall q,p\in Q,\quad \forall\, x=x_1x_2\cdots x_n\in X,\ y=y_1y_2\cdots y_n\in Y,$$

$$\mu_{A^*}(q,x,p,y)=\begin{cases}0 & x=y=\varepsilon,q\ne p\\ 1 & x=y=\varepsilon,q=p\\ a & |x|=|y|\ne 0\end{cases}$$

$$\nu_{A^*}(q,x,p,y)=\begin{cases}1 & x=y=\varepsilon,q\ne p\\ 0 & x=y=\varepsilon,q=p\\ b & |x|=|y|\ne 0\end{cases}$$

$$a=\bigvee_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\in Q}\{\mu_A(q,x_1,r_1,y_1)\wedge\mu_A(r_1,x_2,r_2,y_2)\wedge\cdots\wedge\mu_A(r_{n-1},x_n,p,y_n)\},$$

$$b=\bigwedge_{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1}\in Q}\{\nu_A(q,x_1,r_1,y_1)\vee\nu_A(r_1,x_2,r_2,y_2)\vee\cdots\vee\nu_A(r_{n-1},x_n,p,y_n)\}.$$

注

(1) 格值直觉模糊同步机要求输入输出字符串长度相等. 当 $|x|\ne|y|$ 时,

$$\mu_{A^*}(q,x,p,y)=0,\ \nu_{A^*}(q,x,p,y)=1.$$

(2) 为了计算方便, 以后我们把 A 叫作 M 的直觉模糊状态转移-输出矩阵,

记作 $A=\{A(x\mid y)\mid A(x\mid y)=(m_{pq}(x\mid y)), x\in X, y\in Y;\ p,q\in Q;\ m_{pq}(x\mid y)\in L\}$.

(3) A 中的元素 $m_{pq}(x\mid y)$ 表示自动机 M 在当前状态 p 时输入字符 x，到达状态 q 同时输出字符 y 的程度，并称 $m_{pq}(x\mid y)$ 为 M 的转移-输出函数. 由此可见，格值直觉模糊同步机的状态行为是由它的转移-输出矩阵决定的.

(4) 对相关知识点进行扩充：X^*,Y^* 表示 X,Y 上的所有有限长度的字符串的集合，$\forall x\in X^*, y\in Y^*$，$|x|$ 表示字符串 x 的长度，$|Q|$ 表示状态集 Q 中所含的状态数. 记 $\forall(X\mid Y)^*=\{(x\mid y)\mid x\in X^*, y\in Y^*, |x|=|y|\}$ 表示长度相同的字符对的集合.

下面定义相应的扩张的转移输出矩阵：

定义 3.3.4 $M=(Q,X,Y,A)$ 是一个格值直觉模糊有限同步机.

$\forall(x\mid y)\in(X\mid Y), (u\mid v)\in(X\mid Y)^*$，则下面两个式子成立：

(1) $A(\Lambda\mid\Lambda)=U$，$U=(\delta_{ij})_{|Q|\times|Q|}$ 是单位矩阵；即当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=e$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{ij}=0$.

(2) $A(ux\mid vy)$ 是 $|Q|\times|Q|$ 阶矩阵，$A(ux\mid vy)=A(u\mid v)\cdot A(x\mid y)$.

同样扩张有以下定理

定理 3.3.1 $M=(Q,X,Y,A)$ 是一个格值直觉模糊有限同步机.
$\forall(u\mid v),(r\mid s)\in(X\mid Y)^*$，有 $A(ur\mid vs)=A(u\mid v)\cdot A(r\mid s)$.
可按照数学归纳法利用以上定义对 $|r|=|s|=n$ 的长度进行归纳证明.

定义 3.3.5 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{jk})_{n\times p}$ 是两个格值直觉模糊矩阵，$a_{ij}, b_{jk}\in L$.

(1) 矩阵的乘积：$C=(c_{ik})_{m\times p}=A\cdot B=(\bigvee_k a_{ij}\cdot b_{jk})_{m\times p}$.

(2) 若 $\vee\{a_{ij}\mid j=1,2,\cdots,n\}>0\ (i=1,2,\cdots,m)$，则称格值直觉模糊矩阵 A 是完备的.

例 1 设 $L=\{0,a_1,a_2,a_3,1\}$，其中 $0<a_1<a_2<a_3<1$，"$\cdot$"为格半群的乘法运算，

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

那么 $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_1\cdot 0\vee a_2\cdot a_1 & a_1\cdot a_1\vee a_2\cdot a_2 \\ a_3\cdot 0\vee a_2\cdot a_2 & a_3\cdot a_1\vee a_3\cdot a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2\cdot a_1 & a_2\cdot a_2 \\ a_2\cdot a_2 & a_3\cdot a_2 \end{pmatrix}$.

例 2 $A=\begin{pmatrix}0 & a_1\\ a_2 & 0\end{pmatrix}$ 是完备的，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_2 & 0\end{pmatrix}$是不完备. 在例 1 中

$a_1,a_2\in L,\ a_1\neq 0,\ a_2\neq 0.$

$A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & a_1\\ a_1 & a_2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}a_2\bullet a_1 & a_2\bullet a_2\\ a_2\bullet a_2 & a_3\bullet a_2\end{pmatrix}$都是完备的.

性质1 两个完备的格值直觉模糊矩阵的乘积仍为完备的格值直觉模糊矩阵.

证明:

$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{jk})_{n\times p}$是两个完备的格值直觉 模糊矩阵，

$C=(c_{ik})_{m\times p}=A\cdot B$ 是A,B的乘积矩阵.

要证$C=(c_{ik})=A\cdot B$是完备的格值直觉模糊矩阵

就是要证$\forall i=1,2,\cdots,m$满足$\underset{k}{\vee}\{c_{ik}\}>0$. 下面对其验证

$$\underset{k}{\vee}\{c_{ik}\}=c_{i1}\vee c_{i2}\vee\cdots\vee c_{ip}$$

$$\begin{aligned}
&=(a_{i1}b_{11}\vee a_{i2}b_{21}\vee\cdots\vee a_{in}b_{n1})\vee(a_{i1}b_{12}\vee a_{i2}b_{22}\vee\cdots\vee a_{in}b_{n2})\vee\\
&\quad\cdots\vee(a_{i1}b_{1p}\vee a_{i2}b_{2p}\vee\cdots\vee a_{in}b_{np})\\
&=(a_{i1}b_{11}\vee a_{i1}b_{12}\vee\cdots\vee a_{i1}b_{1p})\vee(a_{i2}b_{21}\vee a_{i2}b_{22}\vee\cdots\vee a_{i2}b_{2p})\vee\\
&\quad\cdots\vee(a_{in}b_{n1}\vee a_{in}b_{n2}\vee\cdots\vee a_{in}b_{np})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=a_{i1}(b_{11}\vee b_{12}\vee\cdots\vee b_{1p})\vee a_{i2}(b_{21}\vee b_{22}\vee\cdots\vee b_{2p})\vee\\
&\quad\cdots\vee a_{in}(b_{n1}\vee b_{n2}\vee\cdots\vee b_{np})\\
&>0
\end{aligned}$$

$\therefore\ C=(c_{ij})_{m\times p}=A\cdot B$是完备的.

定理 3.3.2 $M=(Q,X,Y,A)$是一格值直觉模糊有限同步机，若它的转移-输出矩阵A是完备的格值直觉模糊矩阵，那么称M是完备的格值直觉模糊有限同步机.

定义 3.3.6 设$M=(Q,X,Y,A)$是完备的格值直觉模糊有限同步机，

$\forall(u\mid v)\in(X\mid Y)^*$，定义$T(u\mid v)=(t_p(u\mid v))_{|Q|\times 1}=\begin{cases}E & (u\mid v)=(\Lambda\mid\Lambda)\\ A(u\mid v) & (u\mid v)\neq(\Lambda\mid\Lambda)\end{cases}$.

其中，E是所有元素都为e的$|Q|\times 1$矩阵.

假设用T表示所有按字典序排列的长度不大于$|u|=|v|$的并以$T(u\mid v)$为列的矩阵.(依次记作$T_{1|1}$，$T_{1|2},\cdots,T_{1|m},\cdots,T_{m|n}$)，$T$就称作$M$的输入-输出行为矩阵.

在T中用$T_0,T_1,\cdots,T_l$表示所有输入输出字符串$u,v,|u|=|v|\le l$的所有列组成的矩阵，关系$T_0\subset T_1\subset\cdots\subset T_l\subset\cdots$成立，$T$是一个$|Q|$行可数列矩阵.

要进行最小化就要对状态进行划分，下面我们介绍最小化的依据.

定义 3.3.7 T和T'分别是$M=(Q,X,Y,A)$, $M'=(Q',X,Y,A')$的行为矩阵.

① T和T'中q和q'所在的行相同，则状态q和q'是等价的，记$q\equiv q'$；

T和T'中q和q'所在的行不同，状态q和q'不等价.

② 任意的$l>0$，q和q'是l-等价的，就是T_l和T_l'中q和q'所在的行相同.

根据上面定义我们可以得出：如果M和M'是等价的自动机，则$\forall q\in Q,\exists q'\in Q'$, $s.t,\ q'\equiv q$且$\forall q'\in Q',\exists q\in Q,\ s.t, q\equiv q'$.

定义 3.3.8 $M=(Q,X,Y,A)$是一个完备的格值直觉模糊同步机，如果Q中的所有状态两两均可区分，那么称M是最小化的. 按照定义 3.2.6，若M的输入输出行为矩阵T中的所有行两两均不相同，那么M是最小化的.

定理 3.3.3 $M=(Q,X,Y,A)$是一个完备的格值直觉模糊同步机，那么一定存在一个最小化的完备的格值直觉模糊同步机M'使得$M'\equiv M$.

证明：设T是M的输入输出行为矩阵:

(1) 如果T中所有行两两均不相同，那么M本身就是最小化的.

(2) 如果T中有相同的行，那么相同的行所代表的状态是等价的，可将状态划分成一个等价类$Q/_{\equiv}$，得到的以等价类$Q/_{\equiv}$为状态集的$M/_{\equiv}$就是最小化的自动机.

一般的，我们在求行为矩阵的过程中只需要计算到T_i的等价类集合$|Q/_{\equiv_i}|=|Q|$或$i=|L|^{|Q|}$为止.

例 3 $M=(Q,X,Y,A)$是一个完备的格值直觉模糊有限同步机，

$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$, $X=\{x_1\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, $L=\{0,a_1,a_2,e,1\}$, $0<a_1<a_2<e<1$,

e是L的单位元. $M(\mathrm{x}_1|\mathrm{y}_1)=\begin{pmatrix} e & 0 & a_1\\ e & a_2 & 0\\ a_1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $M(\mathrm{x}_1|\mathrm{y}_2)=\begin{pmatrix} 0 & e & a_1\\ a_2 & 0 & e\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}$.

$$\text{那么 } T_{1/1}=\begin{pmatrix} e\\ e\\ a_1\end{pmatrix},\ T_{1/2}=\begin{pmatrix} e\\ e\\ a_2\end{pmatrix},\qquad \text{则 } T_1=\begin{pmatrix} e & e & a_1\\ e & e & 0\\ e & a_1 & a_2\end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } T_1 \text{ 得到 } Q/_{\equiv_1}=\{\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\}\}.$$

$$T_{11/11}=\begin{pmatrix}e\\e\\a_1\end{pmatrix},\ T_{11/12}=\begin{pmatrix}e\\e\\a_2\end{pmatrix},\ T_{11/21}=\begin{pmatrix}e\\a_2\\a_2\bullet a_1\end{pmatrix},\ T_{11/22}=\begin{pmatrix}e\\a_2\\{a_2}^2\end{pmatrix}.$$

于是 $T_2=\begin{pmatrix}e & e & e & e & e & e & e\\ e & e & e & e & e & a_2 & a_2\\ e & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2\bullet a_1 & {a_2}^2\end{pmatrix}.$

T_2 得到划分 $Q/_{\equiv_2}=\{\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\}\}$；此时 $Q/_{\equiv_2}=3=|Q|$ 运算结束，

$Q/_{\equiv}=Q/_{\equiv_2}=\{\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\}\}$，那么 $M=(Q,X,Y,A)$ 就是最小的.

通过计算行为矩阵我们已经找到了自动机约简的方法，如果约简后的自动机的所有状态均是可区分的，那么所得到的约简的完备格值直觉模糊同步机就是最小化的.

结论和展望

本文定义了直觉模糊有限自动机上的同余, 同态, 同构关系, 给出了直觉模糊有限自动机的状态等价划分的方法, 提出了(完备的)格值直觉模糊有限同步机的概念, 其行为矩阵的计算及状态划分的方法, 给出了完备格上的直觉模糊有限同步机的最小化方法, 进而对复杂的自动机系统进行了简化.

最小化方法有多种:

1) 本文只给出了直觉模糊有限自动机的状态的等价定义进行约简. 在以后的学习中, 还可以尝试用同态, 同构, 同余的商自动机进行最小化.

2) 张晓伟在 Intuitionistic Fuzzy Recognizers and Intuitionistic Fuzzy Finite Automata 中指出对任意一个直觉模糊有限自动机 $M=(Q,X,A,B,C)$ 都能找到一个具有单个分明初始状态的确定直觉模糊有限自动机 $M_1=(Q_1,X,A_1,q_0,C_1)$ 和一个具有分明终止状态集的 *DIFA* $M_2=(Q_2,X,A_2,B,F)$, $F\subseteq Q_2$ 与原 *IFA* $M=(Q,X,A,B,C)$ 等价, 并给出了相关证明. 如果已经找到与原 *IFA* 等价的 $M_1=(Q_1,X,A_1,q_0,C_1)$, 是否可以在此基础上用不同方法对 M_1 进行最小化是以后工作可以思考的问题.

3) 格值直觉模糊同步机的性质, 乘积, 覆盖及传递关系以及行为特征等方面还可以做继续研究.

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets[J]. Information and Control, 1965,8(3):338-353.

[2] Wee W G. On generalizations of adaptive algorithm and application of the fuzzy sets concept to pattern classification[D]. Purdue University, 1967.

[3] Lee E T, Zadeh L A. Note on fuzzy languages[J]. Information Sciences, 1969,1(4):421-434.

[4] 张禾瑞. 近世代数基础修订版[M]. 北京: 高等教育出版社, 1978.

[5] Hopcroft J E, Ullman J D. Introduction to automata theory, languages and computation. Publishing Company of Addison-Wesley, 1979.

[6] 赵正迈. 关于确定有穷自动机最小化算法的标注[J]. 河海大学学报自然科学版, 1990,18(1):104-106.

[7] 莫智文, 舒兰. Fuzzy 有限自动机语言的运算封闭性[J]. 四川师范大学学报自然科学版, 1993,16(6):7-10.

[8] Burillo P, Bustince H. Intuitionistic fuzzy relations[J]. Mathware & Soft Computing, 1995,2(2):5-38.

[9] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996,79(3):403-405.

[10] Cheng W, Mo Z W. A kind of classification of fuzzy finite automata[J]. BUSEFAL, 2000, 84:51-55.

[11] 柏明强, 莫智文. 两类 Fuzzy 自动机的等价性[J]. 四川师范大学学报自然科学版, 2001, 24(2):114-116.

[12] 王艳平, 盖如栋. 直觉模糊集合的基本定理[J]. 辽宁工程技术大学学报自然科学版, 2001,20(5):607-608.

[13] Mordeson J N, Malik D S. Fuzzy automata and languages: theory and applications[M]. London: CRC, 2002.

[14] Mo Z W, Peng J Y. Fuzzy minimal automaton and reduced fuzzy automata[J]. 四川师范大学学报自然科学版, 2002,25(6):585-587.

[15] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学原理及应用第三版[M]. 华南理工大学出版社, 2004.

[16] 罗承忠, 北京师范大学数学科学学院. 模糊集引论第二版[M]. 北京:北京师范大学出版社, 2005.

[17] Jun Y B. Intuitionistic fuzzy finite state machines[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2005,17(1-3):109-120.

[18] 李平, 李永明. 几类格值自动机的关系[J]. 模糊系统与数学, 2005,19(3):96-100.

[19] 雷英杰，王宝树，苗启广. 直觉模糊关系及其合成运算[J]. 系统工程理论与实践，2005,2(2):113-118.

[20] 徐红. 对确定有限自动机最小化算法的改进[J]. 桂林航天工业高等专科学校学报，2005,10(4):14-16.

[21] 韩光辉. 有限自动机的最小化理论[J]. 江汉大学学报自然科学版，2005,33(4):14-16.

[22] 雷红轩，李永明. 同步格值自动机的约简和最小化算法[J]. 计算机工程与应用，2006,42(6):57-60.

[23] 雷红轩，盛莉. 格值有限自动机等价判定算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(22).

[24] 冯甄玲. 一类格值自动机的最小化[J]. 计算机工程与应用，2007,43(34):65-70.

[25] 李翰芳，许道云. 非确定型有穷自动机的最小化[J]. 吉林大学学报理学版，2007,45(4):582-588.

[26] 蒋宗礼，姜守旭. 形式语言与自动机理论(第二版)[M]. 清华大学出版社，2007.

[27] 张诗静，舒兰. 具有输出字符功能的模糊有限自动机的最小化问题[J]. 模糊系统与数学，2007,21(5):103-106.

[28] Li Y M, Pedryez W. Minimization of lattice finite automata and its application to the decomposition of lattice language[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007,158(13):1423-1436.

[29] 钟祥贵，易忠，邓培民. (r,t)阶存贮拟线性有限自动机的极小化[J]. Computer Engineering and Applications, 2008,44(11):68-70.

[30] 张婧，张苗苗. 模糊有限自动机的最小化算法优化[J]. 同济大学计算机应用，2008,28(12):3065-3067.

[31] 张小伟. 直觉模糊有限自动机的语言及乘积研究[D]. 陕西师范大学硕士毕业论文，2008.

[32] 张坤，刘欣颖，亓静. 对*DFA*最小化算法等价性问题的探讨与改进[J]. Science and Technology Information, 2008,(31):77-79.

[33] 张诗静，舒兰. 基于词计算的Fuzzy有限自动机的最小化[J]. 西南科技大学学报，2009,24(1):82-84.

[34] 刘军，莫智文. 格值有限自动机的乘积[J]. 高校应用数学学报，2009,24(1):121-126.

[35] 汪洋，莫智文. 基于模糊字符串的Mealy格值有限自动机及其最小化[J]. 模糊系统与数学，2009,23(3):50-55.

[36] Zhang X W, Li Y M. Intuitionistic fuzzy recognizers and intuitionist finite automata[J]. Soft Comput., 2009,13:611-616.

[37] Wu L H, Qiu D W. Automata theory based on reduced lattice-valued logic: reduction and minimization[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010,161(12):1635-1656.

[38] 李斌, 舒兰. 确定型格值有限自动机的最小化[J]. 计算机工程与应用, 2010,46(32):52-54.

[39] 张瑞明. 格值树自动机的最小化[D]. 陕西师范大学硕士毕业论文, 2011.

[40] 雷红轩, 俸卫. 基于格半群的有限自动机的同态[J]. J. of Math.(PRC), 2011,31(6):1074-1078.

[41] 翁福利, 舒兰, 王泽文. 直觉模糊有限自动机的一些行为特征[J]. 江南大学学报自然科学版, 2012,11(3):351-354.

[42] Stamenković A, Ćirić M. Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2012,199(16):1-27.

[43] 翁福利, 舒兰, 王泽文. 直觉模糊有限自动机的乘积[J]. 模糊系统与数学, 2012,26(4):84-88.

[44] 张坤. 两类格值有限自动机的性质及其最小化问题[D]. 四川师范大学硕士学位论文, 2012.

[45] 杨京开, 陈秀红. 直觉模糊有限状态机的子系统[J]. 计算机工程与应用, 2012,48(25):52-56.

[46] 杨莉. 几类直觉模糊自动机的关系与格值直觉模糊有限自动机的乘积研究[D]. 四川师范大学硕士学位论文, 2013.

[47] 王拥兵, 张丽霞. 直觉模糊同步机与最小化[J]. 计算机工程与应用, 2013,49(1):50-52.

致谢

四川师范大学是一个充满热情的学校, 在三年的研究生学习和生活中, 老师和同学们给了我极大的关心和帮助. 回首三年的求学历程, 对那些引导我, 帮助我, 激励我的人, 我心中充满了感激, 在此一一表示感谢:

感谢导师莫智文教授的谆谆教诲和亲切关怀!

感谢莫老师团队所有兄弟姐妹的亲切, 友善和关心!

感谢川师数软学院领导和老师们对我学科课程的培养!

感谢师兄柏明强, 师姐杨莉给予我学术的指导和帮助!

感谢父母及家人给予我理解, 帮助和支持!

感谢母校的栽培!