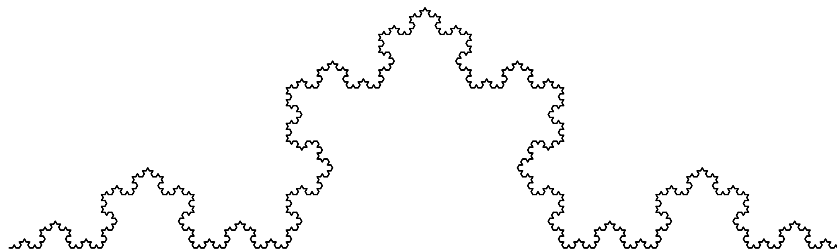


Systèmes itérés de fonctions

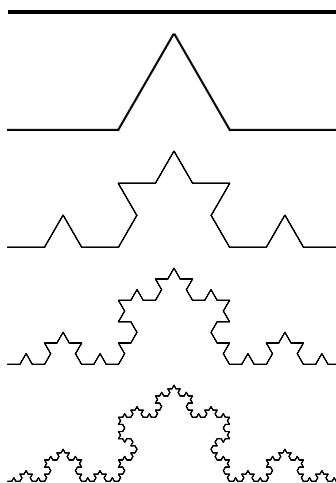
1. Introduction

Les fractales sont des objets géométriques qui présentent la particularité d'être « auto-similaires », c'est-à-dire que si l'on zoome sur certaines parties de l'objet on retrouve presque l'objet initial. Il est plus simple de prendre un exemple : le flocon de Koch.



En inspectant cette figure on s'aperçoit de cette propriété d'auto-similarité. Cela devient beaucoup plus clair si l'on sait comment cette figure a été construite.

On part d'un segment horizontal de longueur 1. Nous réduisons ce segment d'un facteur 3 et produisons 4 copies de ce petit segment. Ces 4 copies forment maintenant une dent. Partons de cette dent, effectuons une réduction d'un facteur 3, et produisons 4 petites dents... On itère le processus indéfiniment et la « limite » est notre flocon de Koch.



C'est un objet « fractal » différent des figures géométriques classiques. Il possède des propriétés surprenantes. Essayez par exemple de deviner quelle est sa longueur ? Nous calculerons aussi sa dimension : ce n'est pas une courbe (de dimension 1), ni une surface (de dimension 2) mais un objet intermédiaire ! Ce qui est aussi fascinant, c'est qu'avec des transformations extrêmement simples on arrive à fabriquer des objets d'une complexité et d'une beauté infini.

La seconde motivation de ce chapitre est la mise en pratique des transformations usuelles du plan : translations, réflexions, rotations, homothéties et plus généralement des transformations affines. L'usage des matrices facilite grandement l'usage de ces applications.

2. Topologie de \mathbb{R}^2

2.1. Distance

Nous choisissons comme distance la **distance euclidienne** : si $P(x, y)$ et $Q(x', y')$ sont deux points du plan \mathbb{R}^2 alors la distance entre P et Q est

$$\|P - Q\| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

C'est bien sûr la distance associée à la **norme euclidienne** :

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Une **isométrie** est une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui préservent les distances, c'est-à-dire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|.$$

Nous démontrerons plus loin que les translations, rotations, réflexions sont des isométries. Par contre une homothétie de rapport $k \neq +1, -1$ n'est pas une isométrie.

Pour un réel $k \geq 0$, une application f est dite **lipschitzienne de rapport k** si

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| \leq k\|P - Q\|.$$

Par exemple une isométrie est lipschitzienne de rapport 1, une homothétie de rapport $k \geq 0$ est lipschitzienne de rapport k .

Les applications dont nous aurons besoin devront réduire les distances : une application f est dite **contractante** (ou est une **contraction**) s'il existe $0 \leq k < 1$ telle que

$$\forall P, P' \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P) - f(Q)\| \leq k\|P - Q\|.$$

Autrement dit une application est contractante si et seulement si elle est lipschitzienne pour un rapport $k < 1$.

2.2. Compacts de \mathbb{R}^2

Voici des rappels.

- Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est un **fermé** si toute suite de points $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_n \in F$ (pour tout n) et $P_n \rightarrow Q$ alors $Q \in F$.
- Un ensemble $O \subset \mathbb{R}^2$ est un **ouvert** si $\mathbb{R}^2 \setminus O$ est un fermé.
- Un ensemble est **borné** s'il est inclus dans un disque. Autrement dit $B \subset \mathbb{R}^2$ est borné s'il existe un $R > 0$ tel que $B \subset D(O, R)$. On note $D(O, R)$ le disque fermé de centre O et de rayon R .
- Un ensemble sera appelé un **compact** s'il est fermé et borné.
- Exemple : les intervalles fermés et bornés de \mathbb{R} sont des compacts.

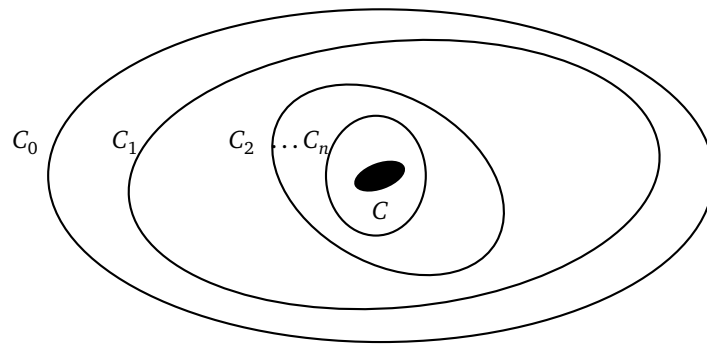
[[dessin à faire de compacts emboîtés]]

Théorème 1.

Soit $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de compacts non vide. Si $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ alors

$$C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$$

est un compact non vide.



Remarquez que vu l'emboîtement des compacts alors $C_0 \cap C_1 = C_1$, $C_0 \cap C_1 \cap C_2 = C_2, \dots$ Et donc, en d'autres mots, le théorème affirme qu'une famille de compacts emboîtés tend vers un compact.

Voici le résultat fondamental concernant les fonctions continues sur les ensembles compacts, le premier point est pour une fonctions à valeurs dans \mathbb{R} , le second point est sa version pour une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Théorème 2.

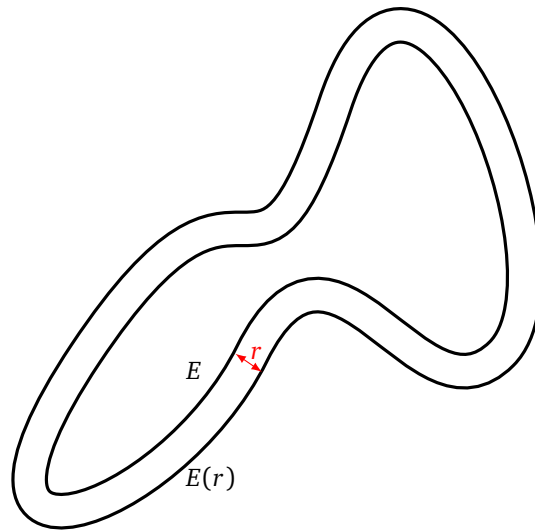
1. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit : si $C \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble compact et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue alors :
 - d'une part la fonction est bornée,
 - et d'autre part le maximum et le minimum de f sont atteints en des points de C .
2. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble compact et $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Alors $f(C)$ est un ensemble compact de \mathbb{R}^2 .

2.3. Distance de Hausdorff

Pour $E \subset \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, notons

$$E(r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - Q\| \leq r \text{ pour un } Q \in E\}$$

le *r-voisinage* de E . C'est l'ensemble des points situés dans E ou à une distance inférieure à r de E .

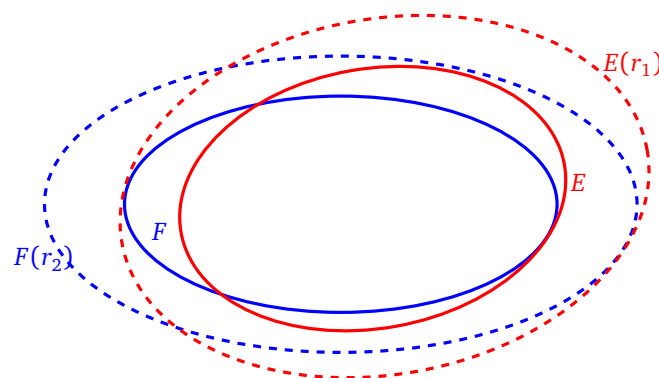


La **distance de Hausdorff** entre deux ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^2$ est

$$\text{dist}_H(E, F) = \inf \{ r \geq 0 \mid F \subset E(r) \text{ et } E \subset F(r) \}.$$

C'est donc la plus petite valeur de r telle que F est inclus dans le r -voisinage de E , et E dans le r -voisinage de F .

Sur le dessin suivant, on a trouvé le plus petit r_1 tel que $F \subset E(r_1)$ et le plus petit r_2 tel que $E \subset F(r_2)$. La distance de Hausdorff entre E et F est le minimum entre r_1 et r_2 .



Cela n'a rien à voir avec la distance usuelle entre deux ensembles (le distance la plus courte pour aller de l'un à l'autre).

Proposition 1.

Sur l'ensemble \mathcal{C} de tous les compacts de \mathbb{R}^2 , dist_H définit une distance, c'est-à-dire :

1. $\text{dist}_H(E, F) = 0$ si et seulement si $E = F$ (avec E, F deux ensembles compacts)
2. $\text{dist}_H(E, F) = \text{dist}_H(F, E)$
3. $\text{dist}_H(E, G) \leq \text{dist}_H(E, F) + \text{dist}_H(F, G)$

Démonstration. Pour la première propriété : si $E = F$ alors $E \subset F(0)$ ($F(0) = F$ est le 0-voisinage de F) et $F \subset E(0)$ donc $\text{dist}_H(E, F) = 0$. Réciproquement supposons que $E \neq F$ et montrons $\text{dist}_H(E, F) > 0$. Comme $E \neq F$ supposons par exemple qu'il existe $P \in F$ et $P \notin E$. Si l'on note r la distance entre P et E (ici il s'agit de la distance usuelle entre un point et un ensemble $d(P, E) = \inf\{\|P - Q\| \mid Q \in E\}$). Alors $P \notin E(\frac{r}{2})$ et donc $\text{dist}_H(E, F) > \frac{r}{2} > 0$.

La deuxième propriété est évidente, la troisième se déduit de l'inégalité triangulaire pour la distance entre deux points (voir les exercices). \square

3. Attracteur

Soient $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ des fonctions, $i = 1, \dots, \ell$. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Rappelons que l'**image directe** de E par f_i est

$$f_i(E) = \{f_i(x, y) \mid (x, y) \in E\}.$$

Nous allons généraliser cette notion à une famille de fonctions. L'**image directe** de la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ est :

$$\mathbf{f}(E) = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(E).$$

Si E est une partie compacte et que les f_i sont continues alors $f_i(E)$ et $\mathbf{f}(E)$ sont aussi des parties compactes de \mathbb{R}^2 . On note $f_i^2(E) = f_i(f_i(E))$, $f_i^3(E) = f_i(f_i(f_i(E)))$, ... Et plus généralement $f_i^{k+1}(E) = f_i(f_i^k(E))$. De même pour notre famille, on définit par récurrence $\mathbf{f}^{k+1}(E) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^k(E))$.

3.1. Le théorème d'attraction

Théorème 3.

Soit $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, \ell$ une famille de contractions. Il existe un unique compact non vide $C \subset \mathbb{R}^2$ qui est invariant par la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$:

$$C = \mathbf{f}(C),$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{f}\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(C)\right) = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(C).$$

De plus pour toute partie compacte non vide $E \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\mathbf{f}(E) \subset E$ (c'est-à-dire $f_i(E) \subset E$, $i = 1, \dots, \ell$) alors la suite des itérés $\mathbf{f}^k(E)$ converge vers C :

$$C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(E).$$

L'ensemble C obtenu est l'**attracteur** de la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$.

[[dessin avec les premières itérations ???]]

Remarque.

- La première partie de ce théorème est un résultat théorique d'existence et d'unicité, la seconde partie est un résultat pratique qui permet de calculer l'attracteur.
- Remarquer que, comme les ensembles $\mathbf{f}^k(E)$ vont être emboîtés, alors prendre cette intersection infinie n'est juste qu'une façon rigoureuse d'écrire la limite de $\mathbf{f}^k(E)$ quand $k \rightarrow +\infty$.
- Si l'on considère une famille composée d'une seule fonction contractante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors on sait que notre fonction admet un unique point fixe $c \in \mathbb{R}$. Notre attracteur est ici $C = \{c\}$. De plus c s'obtient comme la limite d'une suite récurrente : partant de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_k) définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers c .

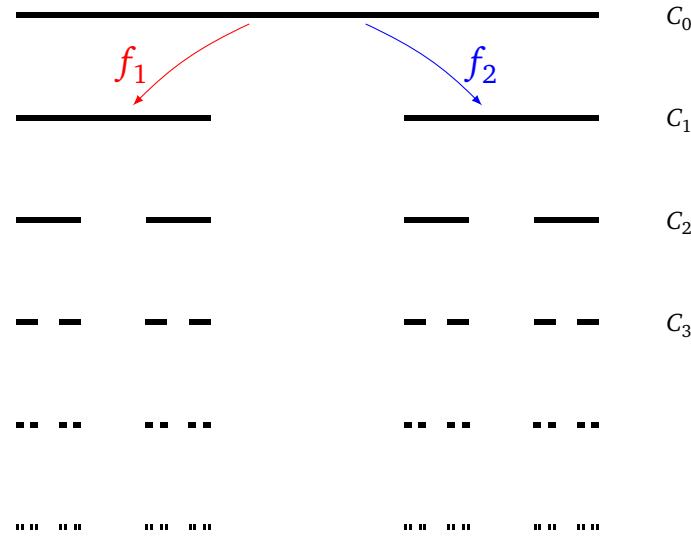
- Si les f_i ne sont pas des contractions le théorème n'est plus valide. Par exemple imaginez que les f_i soient des translations.

3.2. L'ensemble de Cantor

Nous illustrons ce théorème par un exemple simple, non pas du plan, mais de la droite. Considérons les deux fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x.$$

La famille $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ est constituée d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} contractantes (elles sont toutes deux lipschitziennes de rapport $k = \frac{1}{3}$).



Soit C_0 le segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ alors $f_1(C_0) = [0, \frac{1}{3}]$ et $f_2(C_0) = [\frac{2}{3}, 1]$. Donc $C_1 = \mathbf{f}(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Noter que $\mathbf{f}(C_0) \subset C_0$. Au cran suivant : $f_1(C_1) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ et $f_2(C_1) = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$. Donc $C_2 = \mathbf{f}(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1)$ est l'union de 4 segments. On itère le processus : $C_n = \mathbf{f}(C_{n-1})$ est l'union de 2^n segments, chaque segment étant de longueur $\frac{1}{3^n}$.

Une autre façon de décrire le processus est, qu'à chaque étape, on divise chaque segment en trois et on retire celui du milieu. L'attracteur C obtenu est l'**ensemble de Cantor**, appelé aussi joliment les **poussières de Cantor**. L'ensemble obtenu n'est pas vide, il est même non dénombrable !

3.3. Preuve

Existence de l'attracteur. Comme les f_i sont des contractions, il existe un disque fermé $D = D(O, r)$ (centré à l'origine de rayon r assez grand) tel que $f_i(D) \subset D$ pour tout $i = 1, \dots, \ell$. En d'autres termes $\mathbf{f}(D) \subset D$. En composant par \mathbf{f} , cela implique $\mathbf{f}(\mathbf{f}(D)) \subset \mathbf{f}(D)$, donc $\mathbf{f}^2(D) \subset \mathbf{f}^1(D)$ et par récurrence $\mathbf{f}^{k+1}(D) \subset \mathbf{f}^k(D)$.

L'ensemble de départ D est un fermé borné de \mathbb{R}^2 donc un compact. Les applications f_i sont contractantes donc continues, ainsi les $f_i(D)$ sont des compacts et $\mathbf{f}(D)$ également, de même pour $\mathbf{f}^k(D)$. Donc $(\mathbf{f}^k(D))_k$ est une suite de compact non vide, décroissante pour l'inclusion. Alors $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(D)$ est un ensemble compact non vide. Noter encore une fois que, comme les ensembles $\mathbf{f}^k(D)$ sont emboîtés, prendre cette intersection infinie n'est juste qu'une façon rigoureuse d'écrire la limite de $\mathbf{f}^k(D)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Comme à chaque étape $\mathbf{f}(\mathbf{f}^k(D)) \subset \mathbf{f}^k(D)$ alors $\mathbf{f}(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(D)) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^{k+1}(D) = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \mathbf{f}^k(D) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(D) = C$ donc $\mathbf{f}(C) = C$.

Ce que nous venons de faire pour le disque D fonctionne pour n'importe quelle partie compacte non vide E tel que $\mathbf{f}(E) \subset E$. Nous avons donc aussi prouvé la seconde partie du théorème.

Unicité. Nous allons utiliser la distance de Hausdorff introduite plus haut (paragraphe 2.3). Si f_i est contractante de rapport $k_i < 1$ alors pour deux compacts $C, C' \subset \mathbb{R}^2$ nous avons $\text{dist}_H(f_i(C), f_i(C')) \leq k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$ (voir les exercices). Donc $\text{dist}_H(\mathbf{f}(C), \mathbf{f}(C')) \leq \max_{i=1, \dots, \ell} k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$.

Supposons que C et C' soient deux compacts invariants : $\mathbf{f}(C) = C$ et $\mathbf{f}(C') = C'$. Alors $\text{dist}_H(C, C') \leq \max_{i=1, \dots, \ell} k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$. Comme $\max k_i < 1$ alors $\text{dist}_H(C, C') = 0$ et par la proposition 1 alors $C = C'$.

4. Isométries, similitudes

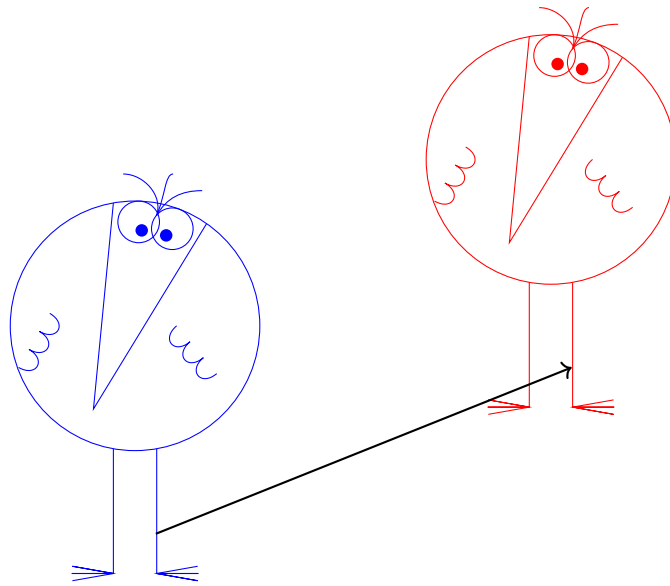
Nous allons étudier quelques transformations élémentaires du plan.

4.1. Transformations élémentaires

Translation.

Notons $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ un élément de \mathbb{R}^2 . La **translation de vecteur** $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$



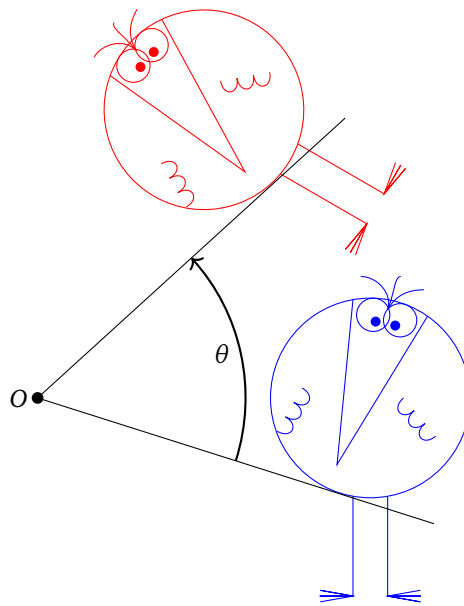
Rotation.

La **rotation** de centre l'origine et d'angle θ est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix}.$$

À ce point, il est plus facile d'utiliser l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



On notera M_θ la matrice de la rotation d'angle θ :

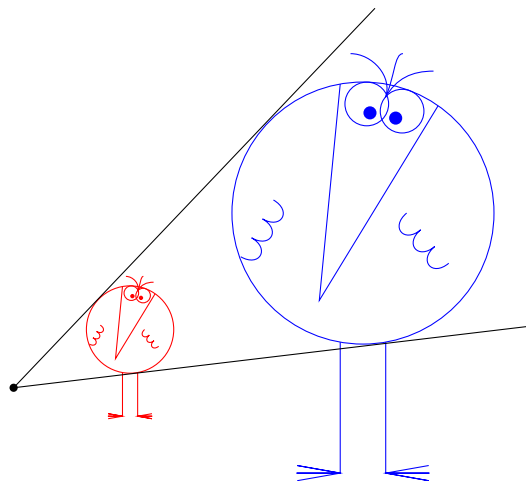
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Homothétie.

L'**homothétie** de centre l'origine et de rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Notez que $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ peut aussi s'écrire $k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Réflexion.

Nous commençons par regarder la réflexion par rapport à l'axe des abscisses, c'est l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par

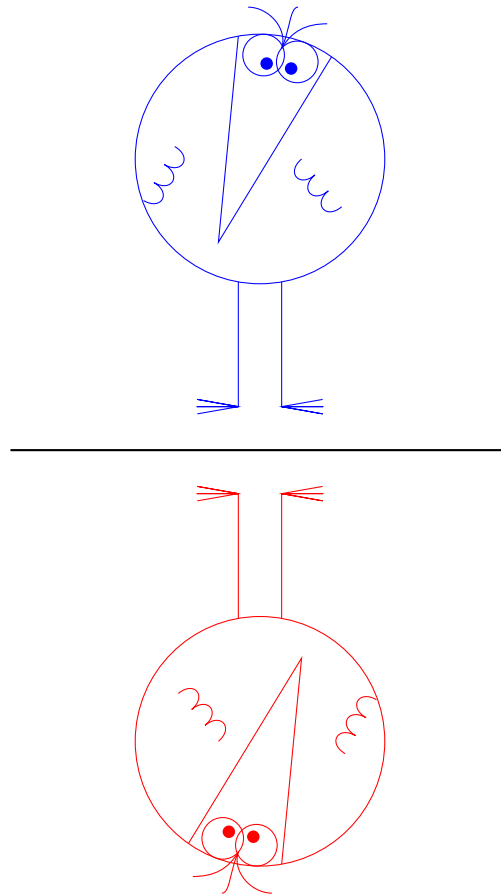
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

En termes de matrice l'écriture est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Plus généralement l'expression d'une réflexion par rapport à un axe passant par l'origine est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



4.2. Similitude

À partir des ces transformations élémentaires nous pouvons en inventer de nouvelles. Ce qui est remarquable c'est qu'en composant un nombre quelconque de translations, rotations, homothéties, réflexions, la fonction qui en résulte en l'une de deux suivantes :

Similitude directe.

C'est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est donc la composée d'une homothétie, d'une rotation, d'une translation.

Similitude indirecte.

C'est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est la composée d'une homothétie, d'une rotation, d'une réflexion et d'une translation.

Ce qui va nous intéresser ici c'est la chose suivante :

Proposition 2.

1. Les translations, rotations, réflexions conservent les distances (ce sont des isométries),
2. Une homothétie de rapport k multiplie les distances d'un facteur $|k|$.
3. Une similitude est contractante si et seulement si son rapport vérifie $0 < k < 1$.
4. La composition de similitudes contractantes est une similitude contractante.

Démonstration.

1. • Si f est une translation de vecteur (e, f) , notons $P(x, y)$ et $Q(x', y')$ deux points du plan. $f(P) - f(Q) = f(x, y) - f(x', y') = (x + e, y + f) - (x' + e, y' + f) = (x, y) - (x', y') = P - Q$ donc en particulier pour les distances $\|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$. Ce qui en fait une isométrie.
- Pour montrer qu'une application linéaire f est une isométrie il suffit de montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(x, y)\| = \|(x, y)\|. \quad (1)$$

C'est-à-dire que l'on regarde seulement la distance entre les points et l'origine. En effet si (1) est vraie, alors pour tout $(x, y), (x', y')$ nous obtenons $\|f(x, y) - f(x', y')\| = \|f(x - x', y - y')\| = \|(x - x', y - y')\| = \|(x, y) - (x', y')\|$ (la linéarité joue un rôle essentiel).

Appliquons ceci à une rotation d'angle θ , $f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$. Donc $\|f(x, y)\|^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$. (On utilise que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.)

- Pour une réflexion les calculs sont similaires.
2. On peut supposer que le centre de l'homothétie est à l'origine. L'expression de f est alors $f(x, y) = (kx, ky)$ et donc $\|f(x, y)\| = |k| \cdot \|(x, y)\|$.
 3. Une similitude de rapport $k > 0$ est la composition d'isométrie et d'une homothétie de rapport k . Elle est donc contractante si et seulement si l'homothétie l'est.
 4. Ce point découle du fait qu'une similitude de rapport k composée avec une similitude de rapport k' est une similitude de rapport $k \cdot k'$.

□

Proposition 3.

L'ensemble des similitudes (directes ou indirectes) forme un groupe pour la composition.

Démonstration. À faire en exercice !

□

5. Exemples à partir de similitudes

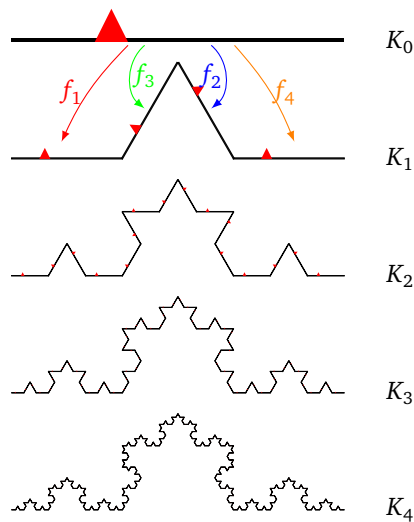
Nous avons déjà vu l'ensemble de Cantor. Reprenons maintenant l'exemple introductif à ce chapitre.

5.1. Le flocon de Koch

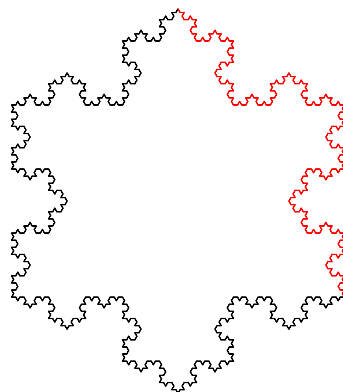
Soient les transformations affines suivantes :

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} M_{\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} M_{-\frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} & f_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ce sont toutes des similitudes de rapports $\frac{1}{3}$. Rappelons que $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ . Chacune des ces transformations envoie le segment $K_0 = [0, 1] \times \{0\}$ sur un petit segment. (Le petit triangle rouge sert seulement ici à distinguer le « haut » du « bas », on a représenté K_0, \dots, K_4 .)



K_1 est donc la figure composée d'une seule « dent ». L'attracteur obtenu en itérant le processus indéfiniment est le flocon de Koch. En fait pour obtenir un vrai flocon il faut réunir trois attracteurs.

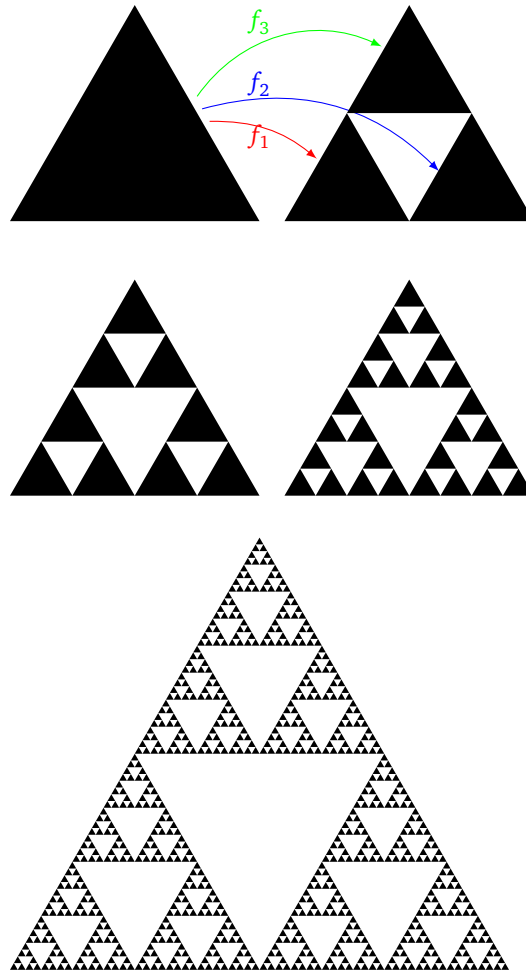


5.2. Le triangle de Sierpinski

On part de S_0 le triangle équilatéral dont les sommets sont $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. On considère 3 transformations affines :

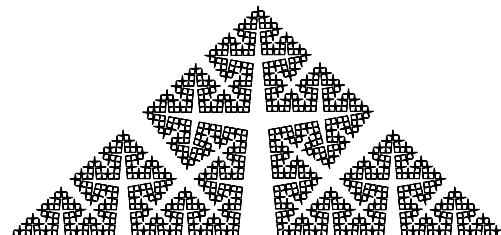
$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

Chacune des transformations f_i est la composition d'une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une translation. À la première étape, chacune envoie donc le grand triangle équilatéral S_0 sur un triangle plus petit. Géométriquement on retire des triangles au centre de chaque plus gros triangles. On a représenté S_0 , S_1 , S_2 , S_3 et S_6 . Ce qui donne une bonne idée de l'attracteur, appelé le **triangle de Sierpinski**.



5.3. D'autres fractales

Il est possible de construire bien d'autres figures, voici par exemple le flocon de Koch à 85° . Il y a aussi le tapis de Sierpinski et en trois dimensions l'éponge de Sierpinski... À vous d'en découvrir d'autres !



6. Transformations affines

6.1. Définition

Une *transformation affine* du plan est une application de \mathbb{R}^2 dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques.

En d'autres termes, à un point (x, y) du plan on associe le point (x', y') défini par

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

En fait une transformation affine f est la composée d'une transformation linéaire g et d'une translation t : $f = t \circ g$. Ici la transformation linéaire est l'application :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6.2. Exemples

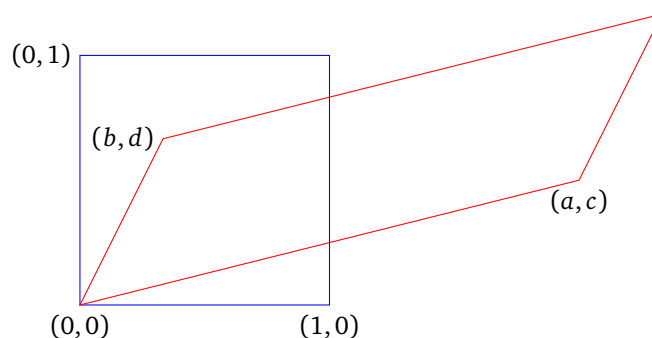
Bien sûr les translations, rotations, réflexions, homothéties et similitudes sont des transformations affines. Mais voici des nouveaux exemples.

Exemple général

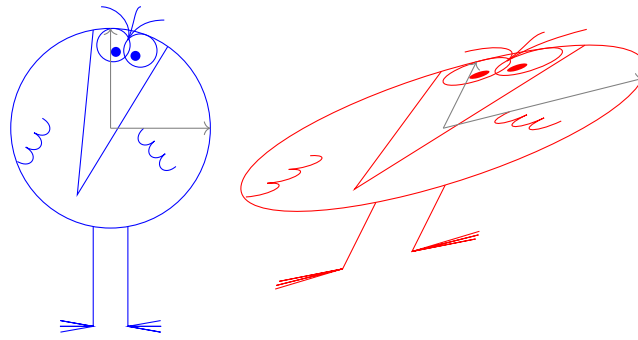
Oublions la translation et concentrons-nous sur l'application f définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous avons $f(0, 0) = (0, 0)$, $f(1, 0) = (a, c)$, $f(0, 1) = (b, d)$. En termes de vecteurs nous avons juste écrit que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ était le premier vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, alors que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le second vecteur colonne $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. L'image du carré unitaire est donc un parallélogramme.

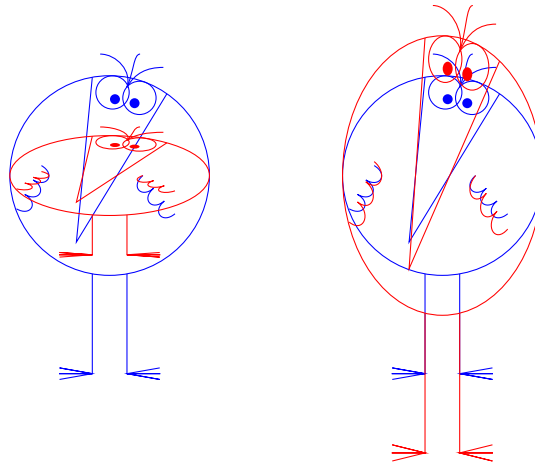


Remarquez que sur ce dessin un côté vertical du carré est envoyé sur un petit côté du parallélogramme et un côté horizontal sur un grand côté. Ni les longueurs, ni les proportions ne sont conservées. Voici notre personnage et sa déformation :



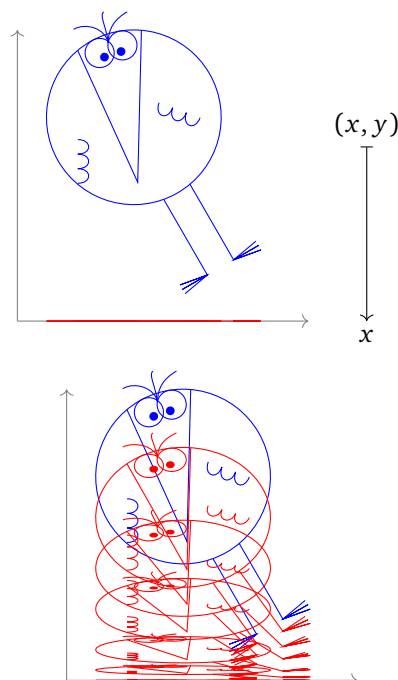
Dilatation ou contraction suivant l'axe vertical.

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ et $e = f = 0$. Cette application dilate (si $k > 1$) ou contracte (si $0 < k < 1$) la figure verticalement.



Projection sur un axe.

Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e = f = 0$. La transformation affine est alors la projection $(x, y) \mapsto x$. Ce n'est bien sûr pas une application bijective. En particulier beaucoup d'information est perdue au cours de cette transformation : on ne peut pas retrouver l'ensemble de départ en connaissant l'ensemble image et la projection ! Cette projection est la limite, lorsque $k \rightarrow 0$, des contractions verticales du paragraphe précédent.



6.3. Propriétés

Proposition 4.

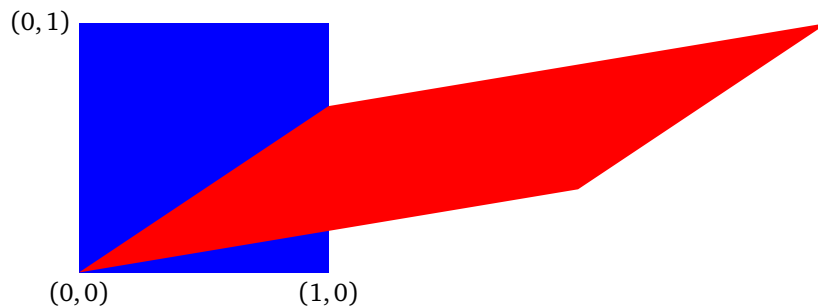
1. Une transformation affine est une bijection si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, autrement dit si et seulement si $\det M = ad - bc \neq 0$.
2. Une transformation affine bijective conserve le parallélisme.
3. Soit f est une transformation affine. Si $F = f(E)$ alors les aires vérifient : $\mathcal{A}(F) = |\det M| \times \mathcal{A}(E)$.

Nous admettons ce résultat.

Remarque.

En particulier si $|\det M| = 1$ alors la transformation affine envoie une surface sur une surface de même aire.

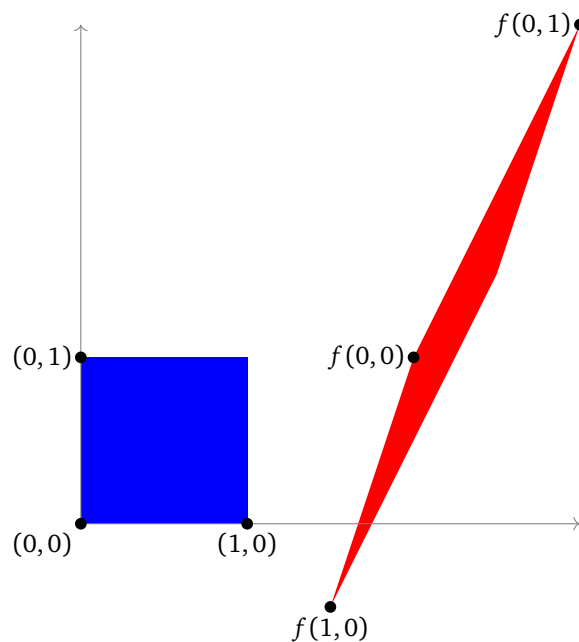
Par exemple prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ qui est de déterminant 1. La transformation affine associée conserve les aires. Par contre cette transformation ne conserve pas les distances.



Il n'y a pas de lien évident entre les aires et les distances. Soit

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voici une transformation qui divise les aires par 2 (car $\det M = \frac{1}{2}$) mais certaines distances sont multipliées par 2 (par exemple le segment qui va de $(0,0)$ à $(0,1)$) et d'autres sont réduites (le segment qui va de $(0,0)$ à $(1,0)$ aura une image de longueur $\frac{3}{4}$).



Voici une propriété qui caractérise les transformations affines contractantes, donc importantes pour nos attracteurs.

Proposition 5.

Une transformation affine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, est contractante si et seulement si

$$\begin{cases} a^2 + c^2 < 1 \\ b^2 + d^2 < 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (ad - bc)^2 < 1 \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

Démonstration. Tout d'abord la translation de vecteur $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ étant une isométrie il suffit de prouver que l'application f définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est contractante. Comme f est une application linéaire, c'est équivalent à prouver qu'il existe $0 \leq k < 1$ tel que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$.

Remarquons tout d'abord que si f est contractante alors $\|f(1, 0)\| < \|(1, 0)\|$ et donc que $\|(a, c)\| < 1$, c'est-à-dire $a^2 + c^2 < 1$. De même $\|f(0, 1)\| < \|(0, 1)\|$ conduit à $b^2 + d^2 < 1$.

Nous allons montrer que le système (\mathcal{S}) est équivalent à ce que

$$\|f(x, y)\| < \|(x, y)\| \quad (2)$$

pour tout vecteur non nul. C'est plus faible que le résultat souhaité. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Si $x = 0$ alors $f(x, y) = f(0, y) = y \cdot f(0, 1) = y(b, d)$. Donc $\|f(0, y)\| = \|(0, y)\| \cdot \|(b, d)\|$. Donc si (2) est vérifié alors $b^2 + d^2 < 1$ et réciproquement si (\mathcal{S}) est vraie alors (2) est vérifié pour $(0, y)$.

Prenons maintenant (x, y) avec $y \neq 0$. Alors $f(x, y) = x \cdot f(1, \frac{y}{x})$ et donc $\|f(x, y)\| < \|(x, y)\|$ si et seulement si $\|f(1, t)\| < \|(1, t)\|$ avec $t = \frac{y}{x}$. Comparons la norme de $f(1, t) = (a + tb, c + td)$ avec celle de $(1, t)$. Soit $S(t) = \|f(1, t)\|^2 - \|(1, t)\|^2$. Alors $S(t) = \|(a + tb, c + td)\|^2 - \|(1, t)\|^2 = (b^2 + d^2 - 1)t^2 + 2(ab + cd)t + a^2 + c^2 - 1$. Nous souhaitons savoir à quelles conditions $S(t)$ est négative pour tout t . Remarquons que $S(t)$ est négative pour t grand si et seulement si $b^2 + d^2 < 1$ et que pour $t = 0$, $S(0) < 0$ si et seulement si $a^2 + c^2 < 1$. $S(t)$ est une équation du second degré en t , son graphe est une parabole et seul le cas où la parabole est dirigée vers le bas nous intéresse (le coefficient dominant est négatif). En calculant $S'(t) = 2(b^2 + d^2 - 1)t + 2(ab + cd)$, on trouve que le maximum de la parabole est atteint en $t_0 = -\frac{ab+cd}{b^2+d^2-1}$ où $S(t_0) = -\frac{(ab+cd)^2}{b^2+d^2-1} + a^2 + c^2 - 1$. Donc $S(t)$ est tout le temps négative si et seulement si $S(t_0) < 0$, c'est-à-dire si $(a^2 + c^2 - 1)(b^2 + d^2 - 1) > (ab + cd)^2$ (attention $b^2 + d^2 - 1$ est négatif). En développant, cette condition est équivalente à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1 - (ad - bc)^2$.

Mis à part les vecteurs du type $(0, 1)$ ou $(1, 0)$ (traités à part) nous avons montré que le système (\mathcal{S}) est équivalent à ce que $\|f(x, y)\| < \|(x, y)\|$.

Nous avons presque ce que nous souhaitions, cependant pour être contractante il faut trouver un $k < 1$ tel que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$. Cela ne découle pas immédiatement de l'inégalité stricte précédente. (C'est assez subtile, réfléchissez-y !) Nous allons nous en sortir par un argument de compacité. Soit \mathcal{C} le cercle unité, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Supposons que f vérifie l'inégalité (2), en particulier f est une application continue. L'application $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x, y) = \|f(x, y)\|$ est aussi continue. N est donc une fonction continue sur le compact \mathcal{C} , N est donc une fonction bornée qui atteint ses bornes et donc en particulier son maximum. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ un point où N atteint son maximum et notons $N(x_0, y_0) = k$ ce maximum. On sait par l'équation (2) que $N(x_0, y_0) = \|f(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\|$ et donc $k < 1$ (car $x_0^2 + y_0^2 = 1$).

Maintenant k étant le maximum de N , pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$ nous avons $N(x, y) \leq k$ autrement dit $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$ (car $\|(x, y)\| = 1$). Enfin pour un point non nul $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque alors $\frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y)$ est un point de \mathcal{C} et par linéarité de f on en déduit que $\|f(x, y)\| \leq k\|(x, y)\|$. Et donc f est contractante. \square

7. Exemples à partir des transformations affines

Jusqu'ici les exemples que nous avons vus étaient assez géométriques, mais avec les transformations affines, en quelques équations on crée des figures qui ont un premier abord très complexes.

7.1. La fougère de Barnsley



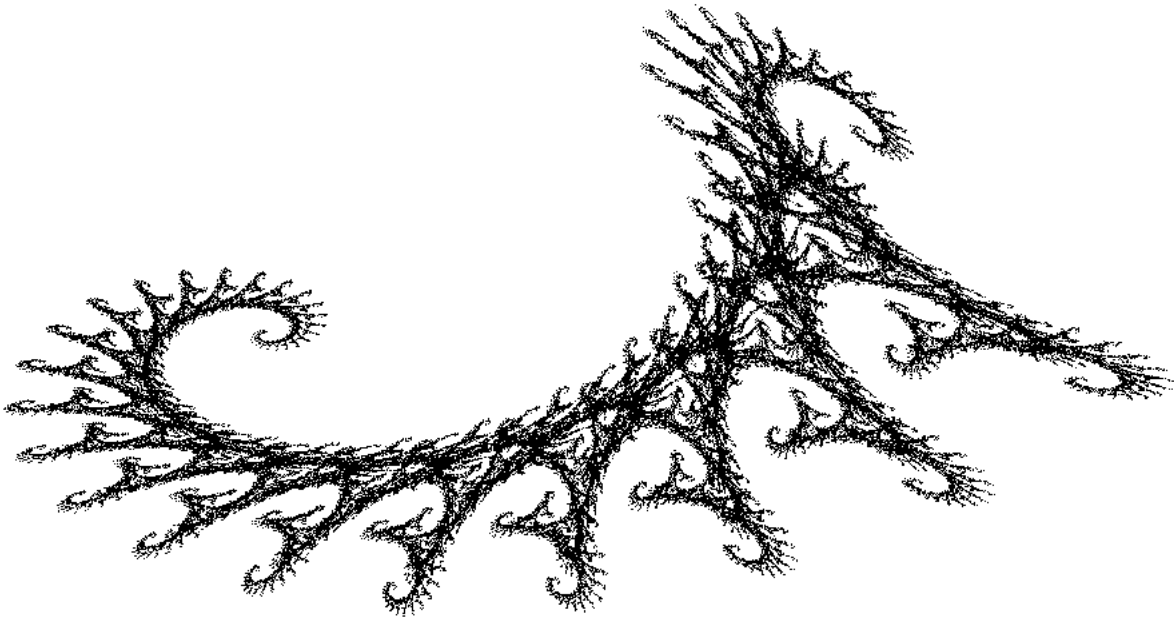
	a	b	c	d	e	f
f_1	0	0	0	0.16	0	0
f_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6
f_3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6
f_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44

Voici une explication de chacune des transformations.

- La première transformation f_1 est une projection composée avec une homothétie d'un petit rapport. Elle envoie toute la fougère sur la base de la tige (la portion verticale).
- La seconde transformation f_2 transforme la fougère en la partie supérieure de la fougère (tout sauf les branches droite et gauche les plus basses).
- La transformation f_3 envoie la fougère sur la branche basse de droite.
- La transformation f_4 envoie la fougère sur la branche basse de gauche.

7.2. L'hippocampe

Avec seulement deux transformations, on construit déjà des objets fascinants. Voici un exemple de courbe qui n'est pas s'en rappeler un hippocampe.

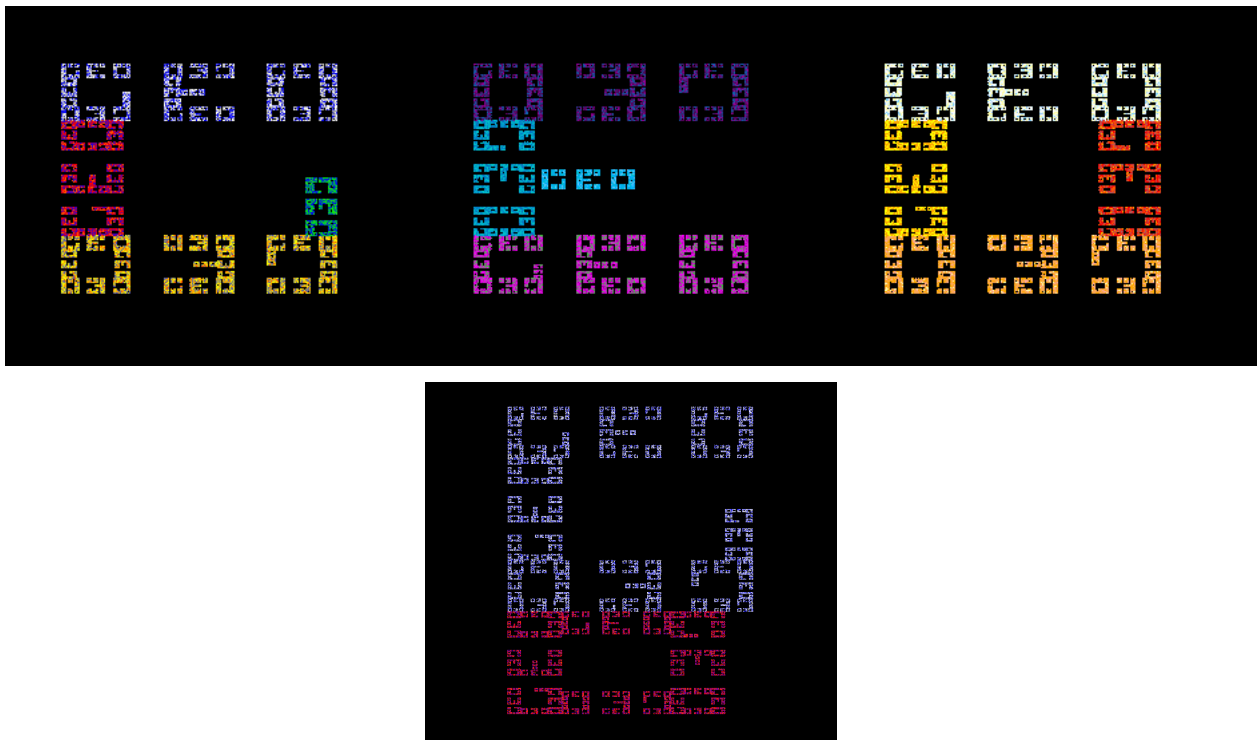


Les transformations sont :

	a	b	c	d	e	f
f_1	0.82	0.28	-0.21	0.86	-1.88	0.11
f_2	0.88	0.52	0.46	-0.37	0.78	8.09

7.3. Vive la géométrie

Enfin avec un peu de patience et 12 transformations (que nous vous laissons le soin de retrouver) vous pouvez exprimer votre passion pour la géométrie à l'infini !



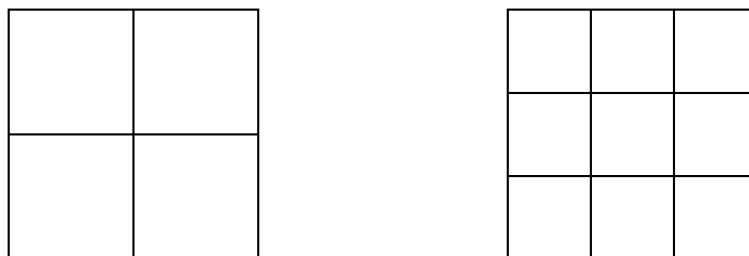
La seconde image est un zoom du coin supérieur gauche.

8. Dimension de Hausdorff

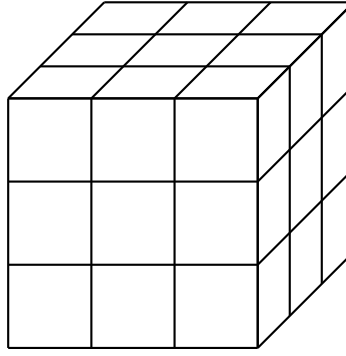
8.1. Définition

Il serait dommage de ne pas parler de dimension d'un ensemble fractal. Nous allons définir de façon intuitive la notion de dimension. On doit retrouver que la dimension d'un segment est 1, d'un carré est 2 et d'un cube est 3.

Prenons l'exemple d'un carré, si on le réduit d'un facteur $m = 2$ alors il faut $\ell = 4 = m^2$ petits carrés pour reconstituer le carré initial. L'exposant 2 est la dimension de la figure du carré plein. Remarquez que si on décide de réduire notre carré initial d'un facteur $m = 3$, alors $\ell = 9 = m^2$. On retrouve le même exposant $d = 2$.



Prenons un cube, si on le réduit d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 8 = m^3$ petits cubes pour reconstituer le cube initial. Si on réduit notre cube initial d'un facteur m il faut $\ell = m^3$ petits cubes. La dimension est l'exposant $d = 3$.



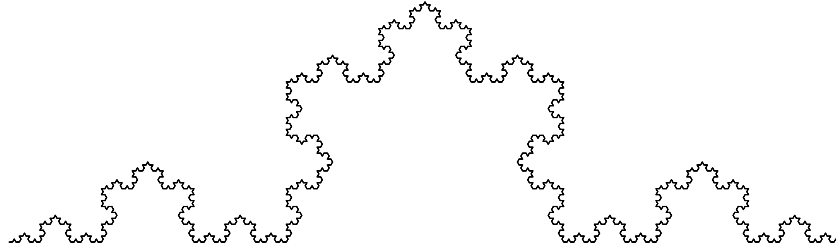
Pour un segment, si on le réduit d'un facteur m alors on retrouve $\ell = m^1$ petits segments, la dimension est donc $d = 1$.

Nous définissons la **dimension de Hausdorff** d'un ensemble E comme étant le réel $d > 0$ vérifiant :

$$\ell = m^d$$

tel qu'après une réduction d'un facteur m , il faut ℓ objets réduits pour reconstituer l'ensemble initial. Nous noterons ce réel d par $\dim_H E$.

Nous allons calculer notre première dimension fractale : prenons l'exemple du flocon de Koch :



après réduction d'un facteur $m = 3$ (les contractions sont de rapport $\frac{1}{3}$) il faut $\ell = 4$ ensembles réduits pour reconstituer le flocon. Donc la dimension du flocon est le réel d tel que $4 = 3^d$. En prenant le logarithme on obtient $\ln 4 = d \cdot \ln 3$ et donc $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. La dimension de Hausdorff du flocon de Koch est donc $d = 1,2628 \dots$. C'est donc « plus gros » qu'une courbe de dimension 1 mais « plus petit » qu'une surface de dimension 2. Si on reformule ceci à l'aide de notre famille d'itération $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ alors chacune est une contraction de rapport $k = \frac{1}{3}$ (donc le facteur de réduction est $m = 3$) on trouve la relation

$$\ell \cdot k^d = 1$$

avec $\ell = 4$ le nombre de fonctions dans notre famille.

8.2. Dimension pour un système itéré de fonctions

Nous allons énoncer un théorème qui permet de calculer la dimension de Hausdorff d'un attracteur obtenu pour un certain type de système itéré de fonctions $\mathbf{f} = \{f_i\}$. Les fonctions considérées sont ici des similitudes et l'on note $0 < k_i < 1$ le réel tel que

$$\|f_i(P) - f_i(Q)\| = k_i \|P - Q\|.$$

Il nous faut en plus un **condition de non-recouvrement** : on suppose qu'il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(O) \subset O$ et tel que $f_i(O)$ et $f_j(O)$ soient disjoints (si $i \neq j$).

Théorème 4.

Soit $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1, \dots, \ell}$ une famille de similitudes de rapport k_i , vérifiant la condition de non-recouvrement alors la dimension de Hausdorff est le réel $d > 0$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{\ell} k_i^d = 1.$$

[[Admis]]

Premier exemple (en dimension 1) : l'ensemble de Cantor C . $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$. Les transformations sont bien des similitudes de rapports $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$. Si l'on prend $O =]0, 1[$ (un ouvert de \mathbb{R}) alors $f_1(O) =]0, \frac{1}{3}[$, $f_2(O) =]\frac{2}{3}, 1[$. La condition de non-recouvrement est vérifiée car $f_1(O) \cup f_2(O) \subset O$ et $f_1(O) \cap f_2(O) = \emptyset$. Nous cherchons donc d tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1.$$

Cela revient à l'équation $2 = 3^d$ ou encore $\ln 2 = d \ln 3$ et donc

$$\dim_H C = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

La dimension de l'ensemble de Cantor vaut donc environ 0,6309...

Deuxième exemple : le triangle de Sierpinski S . Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des similitudes de rapport $k_i = \frac{1}{2}$. Pour la condition de non-recouvrement on prend O le triangle ouvert. Le théorème nous donne alors la dimension de Hausdorff

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1.$$

Et donc $\dim_H S = \frac{\ln 3}{\ln 2}$.

Bien sûr on aurait pu calculer la dimension directement à partir de la définition : après une réduction d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 3$ triangles réduits pour reconstituer le triangle initial, donc la dimension d vérifie $3 = 2^d$.

9. Le théorème du collage et le jeu du chaos

9.1. Le théorème du collage

Vu le caractère « chaotique » de certaines figures il est important d'avoir un résultat qui affirme que nos attracteurs sont stables pour l'unicité : si l'on prend un ensemble E qui est proche de $f(E)$ alors en fait E est proche de l'attracteur C .

Proposition 6.

Soit $\mathbf{f} = \{f_i\}$ une famille de contractions de rapports $k_i < k < 1$. Soit C l'attracteur de la famille \mathbf{f} . Alors pour tout compact non vide $E \subset \mathbb{R}^2$

$$\text{dist}_H(E, C) \leq \frac{1}{1-k} \text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(E, C) &\leq \text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + \text{dist}_H(\mathbf{f}(E), C) \quad \text{par l'inégalité triangulaire.} \\ &= \text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + \text{dist}_H(\mathbf{f}(E), \mathbf{f}(C)) \quad \text{car } \mathbf{f}(C) = C \\ &= \text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + k \cdot \text{dist}_H(E, C) \quad \text{car } \mathbf{f} \text{ est une famille de contractions.} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Enfin quelles sont les figures que l'on peut représenter par des attracteurs ? Réponses : toutes ! La proposition suivante, appelée le théorème de collage, affirme que pour n'importe quelle partie compacte E , on peut trouver une famille de contractions dont l'attracteur C approxime E .

Théorème 5 (du collage).

Soit E une partie non vide et compacte de \mathbb{R}^2 . Pour chaque $\epsilon > 0$ il existe une famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$ de contractions

ayant pour attracteur un ensemble C tel que

$$\text{dist}_H(E, C) < \epsilon.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous recouvrons notre compact E par un nombre fini de disques D_1, \dots, D_ℓ , chacun de rayon $\frac{\epsilon}{4}$ et dont les centres appartiennent à E . Pour chaque disque D_i nous fixons et notons f_i une contraction de rapport $k_i < \frac{1}{2}$, telle que $f_i(E) \subset D_i$.

Nous allons calculer la distance de Hausdorff entre E et $\mathbf{f}(E)$ pour appliquer la proposition 6. Pour calculer la distance de Hausdorff, nous montrons deux inclusions. Pour la première inclusion, comme $f_i(E) \subset D_i$ alors $\mathbf{f}(E) = \bigcup_i f_i(E) \subset \bigcup_i D_i \subset E(\frac{\epsilon}{4})$, où $E(\frac{\epsilon}{4})$ est le $\frac{\epsilon}{4}$ -voisinage de E . Pour l'autre inclusion, nous avons $D_i \subset (f_i(E))(\frac{\epsilon}{2})$ (car D_i est de rayon $\frac{\epsilon}{4}$ et $f_i(E) \subset D_i$). [[dessin]] Donc $E \subset \bigcup_i D_i \subset \bigcup_i (f_i(E))(\frac{\epsilon}{2}) = \mathbf{f}(E)(\frac{\epsilon}{2})$. Donc $\text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) \leq \frac{\epsilon}{2}$, nous appliquons alors la proposition 6 (avec $k = \frac{1}{2}$) pour en déduire $\text{dist}_H(E, C) < \epsilon$. \square

Au début de la preuve nous avons implicitement utiliser le théorème suivant sur les compacts.

Théorème 6.

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Si on a un recouvrement de C par des disques ouverts alors on peut en extraire un recouvrement fini.

Nous l'avons appliqué de la façon suivante : pour chaque $P \in C$ on considère le disque D_P centré en P et de rayon r (ici r était $\epsilon/4$). Alors on a bien un recouvrement de C par tous les disques $D_P : C \subset \bigcup_{P \in C} D_P$. Le théorème nous affirme que, parmi tous ces disques, un nombre fini est suffisant. Donc il existe des points P_1, \dots, P_ℓ tels que $C \subset \bigcup_{i=1, \dots, \ell} D_{P_i}$.

9.2. Le jeu du chaos

Comment en partant d'un seul point, choisit au hasard, peut-on tracer l'attracteur de n'importe quel système itéré de fonctions ?

Soit P_0 un point quelconque de \mathbb{R}^2 . Notons $E_0 = \{P_0\}$, puis $E_1 = \mathbf{f}(E_0) = \{f_1(P_0), \dots, f_\ell(P_0)\}$, et de façon générale $E_j = \mathbf{f}^j(E_0)$. On pose alors

$$E = \bigcup_{j \geq 0} E_j.$$

Alors on calcule que

$$\mathbf{f}(E) = \mathbf{f}\left(\bigcup_{j \geq 0} E_j\right) = \bigcup_{j \geq 0} \mathbf{f}(E_j) = \bigcup_{j \geq 0} E_{j+1} = \bigcup_{j \geq 1} E_j$$

En particulier $\mathbf{f}(E) \subset E$ et on montrerait par récurrence que

$$\mathbf{f}^k(E) = \bigcup_{j \geq k} E_j$$

Le théorème 3 prouve alors que $\mathbf{f}^k(E)$ tend vers l'attracteur C . Autrement dit, en prenant l'union de E_j avec des j assez grands, on approche l'attracteur.

La façon la plus efficace de tracer un attracteur à l'aide d'un ordinateur est alors la suivante, appelée « jeu du chaos » : partant d'un point quelconque $P_0 \in \mathbb{R}^2$, on construit une suite de points par récurrence. Si P_k est construit, alors on choisit aléatoirement l'une des transformations f_i de la famille \mathbf{f} et on définit $P_{k+1} = f_i(P_k)$. On laisse de côté les premiers points (disons les 100 premiers qui peuvent être « loin » de l'attracteur) et on trace les points suivants : ces points sont des éléments très proches de l'attracteur et en traçant suffisamment de points ils représentent tout l'attracteur.

La proposition 6 explique aussi que les calculs numériques (et donc approchés) des ordinateurs sont justifiés.

Algorithme « jeu du chaos ».

Entrée : une famille $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1,\dots,\ell}$ de contractions.

Sortie : un tracé approché de l'attracteur.

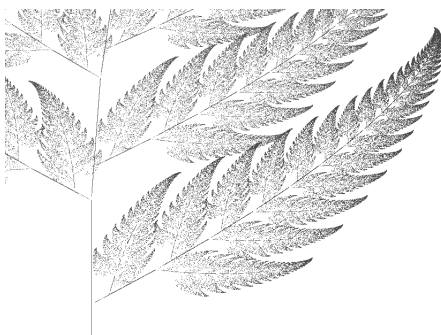
- Fixer $P_0 \in \mathbb{R}^2$ au hasard.
- Pour $k \in \{0, \dots, N_{\max}\}$:
 - on choisit au hasard $i \in \{1, \dots, \ell\}$,
 - on pose $P_{k+1} = f_i(P_k)$,
 - à partir de $k \geq N_{\min}$ on affiche ce point.

N_{\max} représente le nombre de points à calculer (par exemple $N_{\max} = 10\,000$). N_{\min} est une constante (par exemple $N_{\min} = 100$) qui permet de ne pas tracer les tous premiers points qui peuvent être loin de l'attracteur.

En plus pour optimiser les calculs on ne choisit pas les transformations f_i de façon équiprobable mais avec une probabilité p_i . Cette probabilité p_i correspond à la surface couverte par $f_i(C)$ par rapport à celle couverte par C . Voici les probabilités pour la fougère de Barnsley, par exemple la transformation f_1 qui correspond à un bout de la tige n'est choisie que dans 1% des cas, alors que la transformation f_2 est choisie dans 85% des cas...

	a	b	c	d	e	f	p
f_1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
f_2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
f_3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
f_4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

C'est avec cette méthode qu'a été tracée la fougère de Barnsley dont voici un zoom.



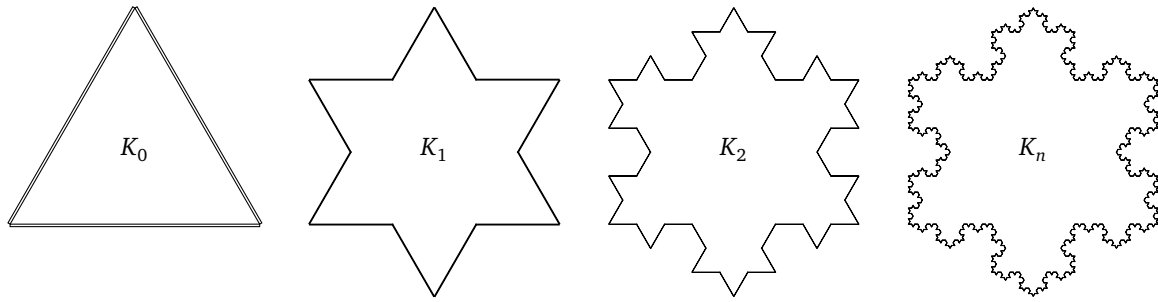
10. Exercices

10.1. Le flocon de Koch

Exercice 1 (Flocon de Koch).

K_0 est un triangle équilatéral, chaque côté étant de longueur 1. K_n désigne la n -ème étape dans la construction du flocon de Koch.

1. Calculer la longueur de la courbe K_n .
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par K_n .
3. Quelle est la longueur et la surface du flocon de Koch (la limite de K_n) ?



10.2. Topologie de \mathbb{R}^2

Exercice 2 (Distance de Hausdorff).

1. Dessiner, pour différentes valeurs de $r > 0$, les r -voisinages d'un carré, d'un carré plein, d'un cercle, d'un disque
2. Montrer que pour tout ensemble $E : E(r)(r') = E(r + r')$.
3. Calculer $\text{dist}_H(E, F)$ dans chacun des cas suivants :
 - (a) E est le cercle de rayon 1 centré à l'origine, F est le disque de rayon 1 centré à l'origine.
 - (b) E est le carré de côté de longueur 1 centré à l'origine, F le cercle de rayon R centré à l'origine. Quel cercle approche le mieux le carré ?
 - (c) $E = K_n, F = K_{n+1}$ où les K_i sont les itérations conduisant au flocon de Koch.
4. Montrer que la distance de Hausdorff dist_H vérifie l'inégalité triangulaire.
5. Montrer que si C, C' sont deux compacts de \mathbb{R}^2 et que f est une application k -contractante alors $\text{dist}_H(f(C), f(C')) \leq k \cdot \text{dist}_H(C, C')$.

Exercice 3 (L'ensemble de Cantor).

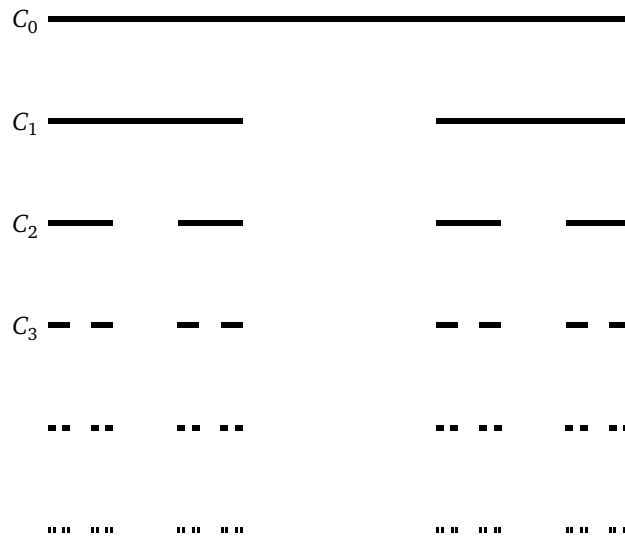
Soit l'ensemble de Cantor C obtenu en itérant le processus suivant. On divise l'intervalle $C_0 = [0, 1]$ en trois intervalles, on retire l'intervalle central pour obtenir $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On obtient C_2 en retirant l'intervalle central de chacun des intervalles de C_1, \dots

Par définition $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$.

1. Calculer la somme des longueurs de intervalles de C_n .
2. Montrer que C est un compact.
3. Montrer que C est d'intérieur vide : si $x, x' \in C$ alors il existe $y \notin C$ tel que $y \in [x, x']$.
4. Montrer que $x \in C$ si, et seulement si, il admet une écriture en base 3 ne contenant que des 0 et des 2 :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}, \quad a_n \in \{0, 2\}.$$

5. Montrer que C n'est pas un ensemble dénombrable.



10.3. Isométries, similitudes, transformations affines

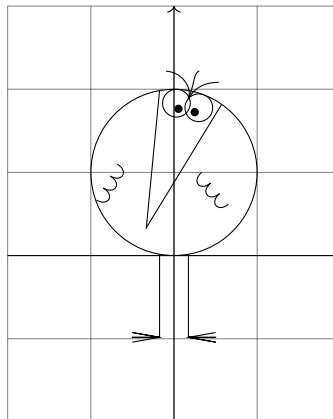
Exercice 4.

1. Expliciter deux isométries f, g telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient distinctes.
2. Montrer qu'une similitude directe d'angle θ et de rapport k composée avec une similitude directe d'angle θ' et de rapport k' est une similitude d'angle $\theta + \theta'$ et de rapport $k \cdot k'$.
3. Montrer que l'ensemble des similitudes directes forme un groupe pour la composition.

Exercice 5.

Dessiner l'image des shadoks par chacune des transformations

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

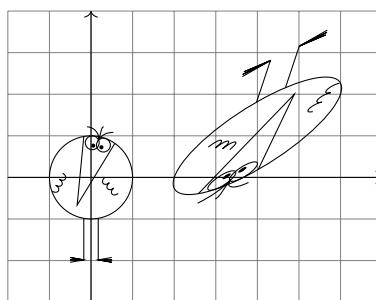
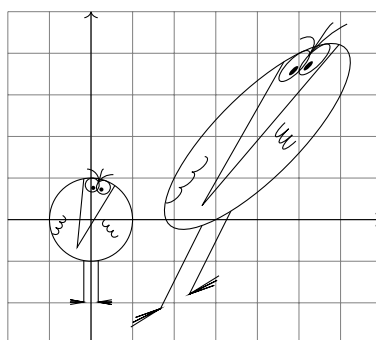
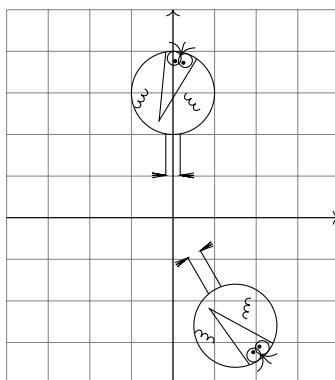
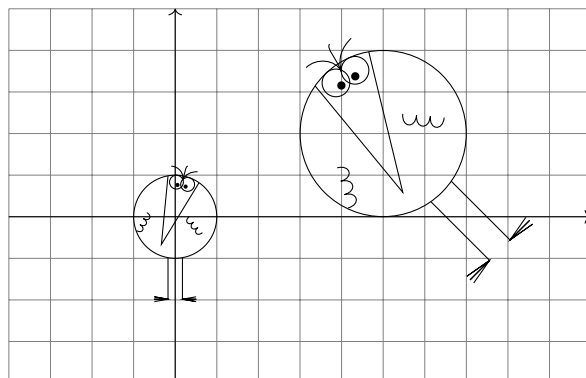


Avec

1. $a = \sqrt{3}, b = -1, c = 1, d = \sqrt{3}, e = -4, f = 0$.
2. $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = 0, d = 1, e = 3, f = 0$.
3. $a = 3, b = -1, c = -2, d = -1, e = -2, f = 1$.

Exercice 6.

Quelles sont les transformations affines qui envoient le shadok debout sur l'autre ?

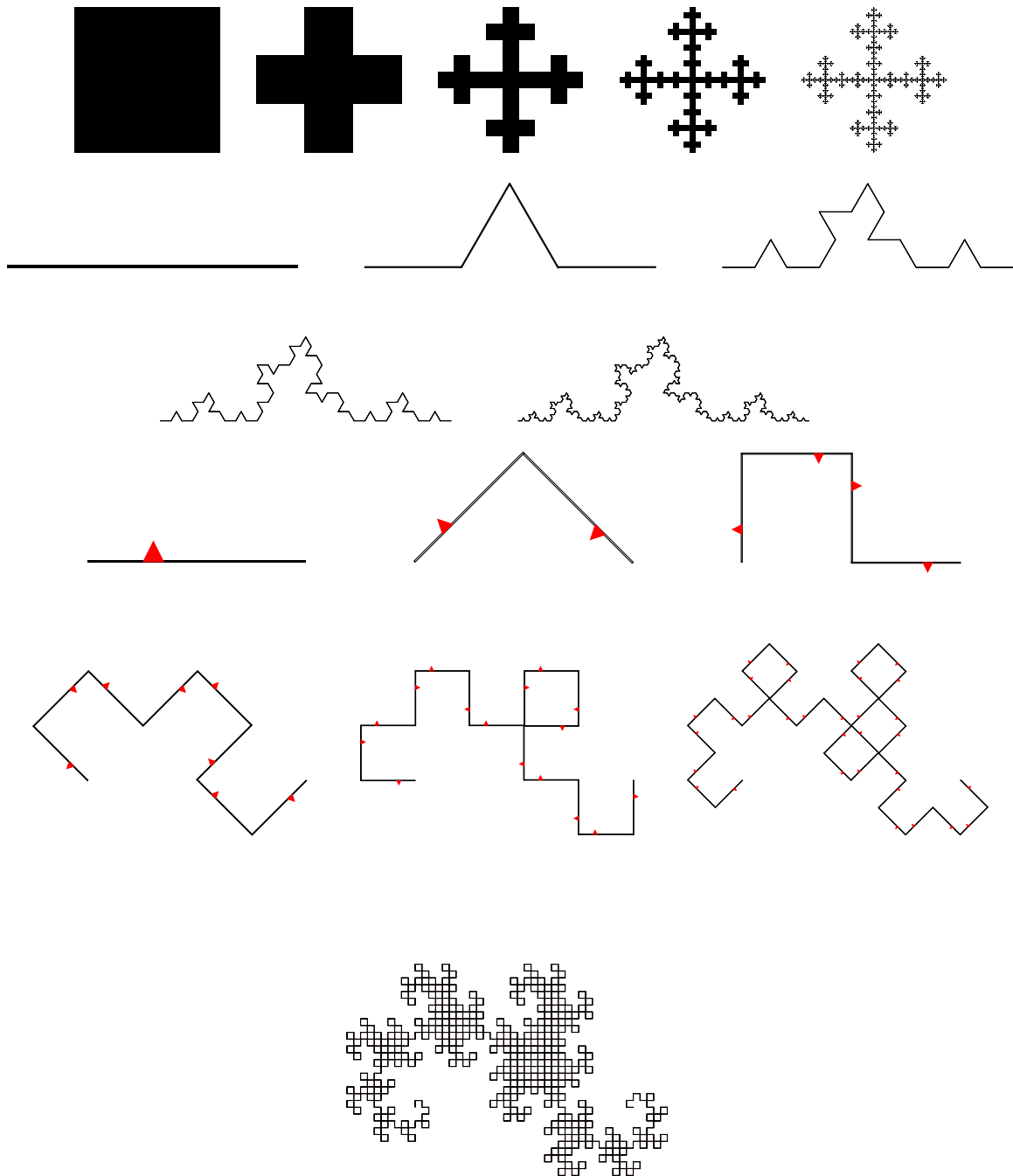


10.4. Attracteurs

Exercice 7.

Trouver les transformations affines permettant de générer ces fractales :

1. L'arbre de Cayley (partir d'un carré le diviser en 9, n'en garder que 5, il y a 5 transformations).
2. Le faux flocon de Koch.
3. La courbe du dragon



Exercice 8 (Enigme).

Quel est l'attracteur correspondant à ces deux premières étapes ?



10.5. Dimension de Hausdorff et théorème du collage

Exercice 9 (Dimension de Hausdorff).

Calculer, lorsque c'est possible, la dimension de Hausdorff de chacun des attracteurs de cette fiche d'exercices.

Exercice 10 (À l'infini).

Calculer le système de fonctions permettant de dessiner la fractale composée des trois premières lettres de votre prénom.

Bibliographie (an anglais) : Kenneth Falconer *Fractal Geometry*, 1990, John Wiley & Sons.