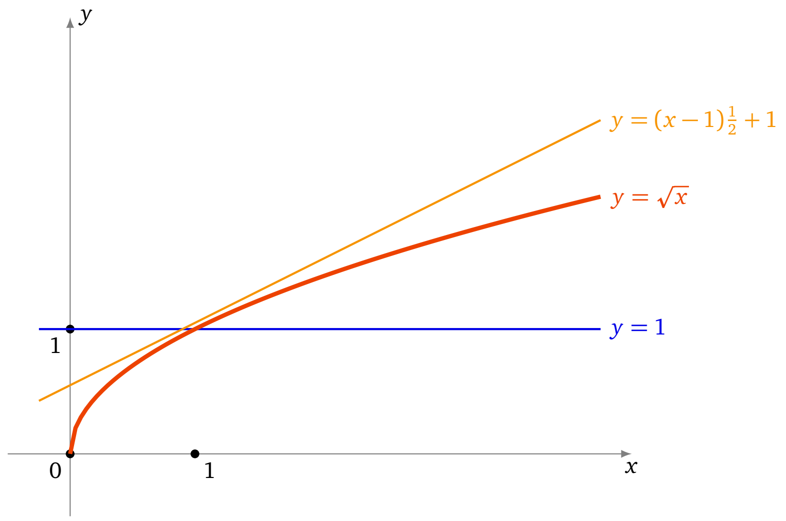
Dérivée d'une fonction

Vidéo ■ partie 1. Définition
Vidéo ■ partie 2. Calculs
Vidéo ■ partie 3. Extremum local, théorème de Rolle
Vidéo ■ partie 4. Théorème des accroissements finis
Fiche d'exercices ♦ Fonctions dérivables

Motivation

Nous souhaitons calculer $\sqrt{1,01}$ ou du moins en trouver une valeur approchée. Comme $1,01$ est proche de 1 et que $\sqrt{1}=1$ on se doute bien que $\sqrt{1,01}$ sera proche de 1. Peut-on être plus précis ? Si l'on appelle f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$, alors la fonction f est une fonction continue en $x_0=1$. La continuité nous affirme que pour x suffisamment proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. Cela revient à dire que pour x au voisinage de x_0 on approche $f(x)$ par la constante $f(x_0)$.



Nous pouvons faire mieux qu'approcher notre fonction par une droite horizontale ! Essayons avec une droite quelconque. Quelle droite se rapproche le plus du graphe de f autour de x_0 ? Elle doit passer par le point $(x_0, f(x_0))$ et doit « coller » le plus possible au graphe : c'est la tangente au graphe en x_0. Une équation de la tangente est

$$y=(x-x_0)f'(x_0)+f(x_0)$$

où $f'(x_0)$ désigne le nombre dérivé de f en x_0.
On sait que pour $f(x)=\sqrt{x}$, on a $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Une équation de la tangente en $x_0=1$ est donc $y=(x-1)\frac{1}{2}+1$. Et donc pour x proche de 1 on a $f(x)\approx(x-1)\frac{1}{2}+1$. Qu'est-ce que cela donne pour notre calcul de $\sqrt{1,01}$? On pose $x=1,01$ donc $f(x)\approx 1+\frac{1}{2}(x-1)=1+\frac{0,01}{2}=1,005$. Et c'est effectivement une très bonne de approximation de $\sqrt{0,01}=1,00498\ldots$. En posant $h=x-1$ on peut reformuler notre approximation en : $\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}h$ qui est valable pour h proche de 0.

Dans ce chapitre nous allons donc définir ce qu'est la dérivée d'une fonction et établir les formules des dérivées des fonctions usuelles. Enfin, pour connaître l'erreur des approximations, il nous faudra travailler beaucoup plus afin d'obtenir le théorème des accroissements finis.

1. Dérivée

1.1. Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 1.
f est ***dérivable en*** x_0 si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Définition 2.
f est ***dérivable sur*** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 1.
La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

Exemple 2.
Montrons que la dérivée de $f(x) = \sin x$ est $f'(x) = \cos x$. Nous allons utiliser les deux assertions suivantes :

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}.$$

Remarquons déjà que la première assertion prouve $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sin x}{x} \to 1$ et donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 1$. Pour x_0 quelconque on écrit :

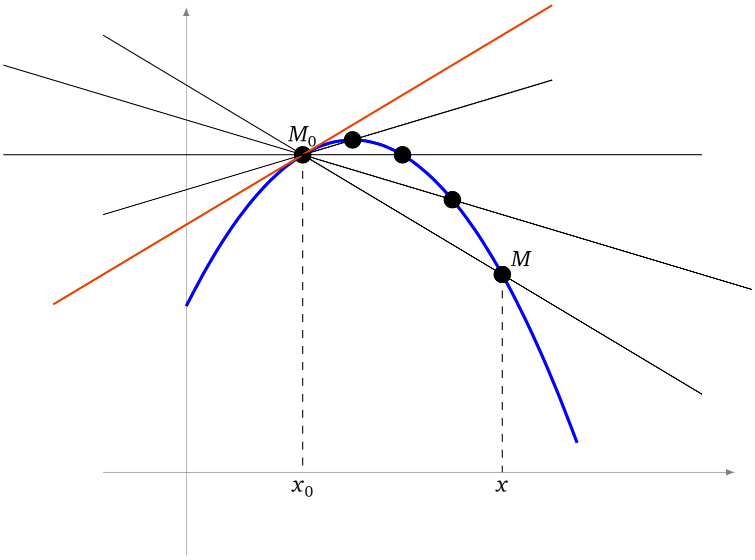
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}.$$

Lorsque $x \to x_0$ alors d'une part $\cos \frac{x+x_0}{2} \to \cos x_0$ et d'autre part en posant $u = \frac{x-x_0}{2}$ alors $u \to 0$ et on a $\frac{\sin u}{u} \to 1$. Ainsi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \cos x_0$ et donc $f'(x) = \cos x$.

1.2. Tangente

La droite qui passe par les points distincts $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. À la limite on trouve que le coefficient directeur de la tangente est $f'(x_0)$. Une équation de la ***tangente*** au point $(x_0, f(x_0))$ est donc :

$$\boxed{y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$$



1.3. Autres écritures de la dérivée

Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en x_0.

Proposition 1.

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
- *f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ avec*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x).$$

Démonstration. Il s'agit juste de reformuler la définition de $f'(x_0)$. Par exemple, après division par $x - x_0$, la deuxième écriture devient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \epsilon(x).$$

□

Proposition 2.
Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est aussi continue en ce point. Voici une démonstration concise : partant de l'écriture alternative donnée dans la proposition 1, nous écrivons

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)\ell}_{\to 0} + \underbrace{(x - x_0)\epsilon(x)}_{\to 0}.$$

Donc $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$ et ainsi f est continue en x_0.

On reprend cette démonstration sans utiliser les limites mais uniquement la définition de continuité et dérivabilité : fixons $\epsilon' > 0$ et écrivons $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\ell + (x - x_0)\epsilon(x)$ grâce à la proposition 1, où $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et $\ell = f'(x_0)$. Choisissons $\delta > 0$ de sorte qu'il vérifie tous les points suivants :

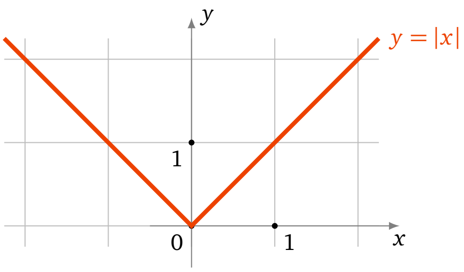
- $\delta \leqslant 1$,
- $\delta|\ell| < \epsilon'$,
- si $|x - x_0| < \delta$ alors $|\epsilon(x)| < \epsilon'$ (c'est possible car $\epsilon(x) \to 0$).

Alors l'égalité ci-dessus devient :

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(x_0)\right| &= \left|(x-x_0)\ell+(x-x_0)\epsilon(x)\right| \\ &\leqslant |x-x_0|\cdot|\ell|+|x-x_0|\cdot|\epsilon(x)| \\ &\leqslant \delta|\ell| \quad + \quad \delta\epsilon' \qquad \text{pour } |x-x_0|<\delta \\ &\leqslant \epsilon'+\epsilon'=2\epsilon'\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que si $|x-x_0|<\delta$ alors $\left|f(x)-f(x_0)\right|<2\epsilon'$, ce qui exprime exactement que f est continue en x_0. □

Remarque.
La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x)=|x|$ en $x_0=0$ vérifie :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}+1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite (qui vaut $+1$), une limite à gauche (qui vaut -1) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x=0$.
Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Mini-exercices.

1. Montrer que la fonction $f(x)=x^3$ est dérivable en tout point $x_0\in\mathbb{R}$ et que $f'(x_0)=3x_0^2$.
2. Montrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ est dérivable en tout point $x_0>0$ et que $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.
3. Montrer que la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ (qui est continue en $x_0=0$) n'est pas dérivable en $x_0=0$.
4. Calculer l'équation de la tangente (T_0) à la courbe d'équation $y=x^3-x^2-x$ au point d'abscisse $x_0=2$. Calculer x_1 afin que la tangente (T_1) au point d'abscisse x_1 soit parallèle à (T_0).
5. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

2. Calcul des dérivées

2.1. Somme, produit,...

Proposition 3.
Soient $f,g:I\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x\in I$:

- $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$
- $(\lambda f)'(x)=\lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé*
- $(f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si $f(x)\neq 0$)*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si $g(x)\neq 0$)*

Remarque.
Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$\boxed{(f+g)' = f'+g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \times g)' = f'g + fg'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Démonstration. Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.
Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\ &\xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$ la fonction $f \times g$ est dérivable sur I de dérivée $f'g + fg'$. □

2.2. Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau de gauche est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable. Le tableau de droite est celui des compositions (voir paragraphe suivant), u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque.

- Notez que les formules pour x^n, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ et x^α sont aussi des conséquences de la dérivée de l'exponentielle. Par exemple $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et donc
$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln x}) = \alpha \frac{1}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$
- Si vous devez dériver une fonction avec un exposant dépendant de x il faut absolument repasser à la forme exponentielle. Par exemple si $f(x) = 2^x$ alors on réécrit d'abord $f(x) = e^{x \ln 2}$ pour pouvoir calculer $f'(x) = \ln 2 \cdot e^{x \ln 2} = \ln 2 \cdot 2^x$.

2.3. Composition

Proposition 4.
Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x de dérivée :

$$\boxed{\big(g \circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)}$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle ci-dessus pour le produit en écrivant cette fois :

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0} = \frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{f(x)-f(x_0)} \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} g'\big(f(x_0)\big)\times f'(x_0).$$

□

Exemple 3.
Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$. Nous avons $g(x)=\ln(x)$ avec $g'(x)=\frac{1}{x}$; et $f(x)=1+x^2$ avec $f'(x)=2x$. Alors la dérivée de $\ln(1+x^2)=g\circ f(x)$ est

$$\big(g\circ f\big)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x) = g'\big(1+x^2\big)\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Corollaire 1.
Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

Démonstration. Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Soit $y_0 \in J$ et $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Le taux d'accroissement de g en y_0 est :

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{g(y)-x_0}{f\big(g(y)\big)-f(x_0)}$$

Lorsque $y \to y_0$ alors $g(y)\to g(y_0)=x_0$ et donc ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{f'(x_0)}$. Ainsi $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$. □

Remarque.
Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité

$$f\big(g(x)\big) = x$$

où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.
En effet à droite la dérivée de x est 1 ; à gauche la dérivée de $f\big(g(x)\big) = f\circ g(x)$ est $f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$. L'égalité $f\big(g(x)\big)=x$ conduit donc à l'égalité des dérivées :

$$f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) = 1.$$

Mais $g = f^{-1}$ donc

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}.$$

Exemple 4.
Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x+\exp(x)$. Étudions f en détail.
Tout d'abord :

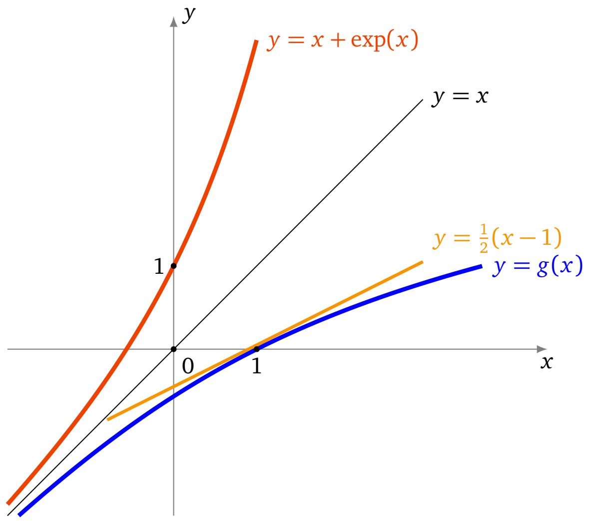
1. f est dérivable car f est la somme de deux fonctions dérivables. En particulier f est continue.
2. f est strictement croissante car f est la somme de deux fonctions strictement croissante.
3. f est une bijection car $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
4. $f'(x) = 1+\exp(x)$ ne s'annule jamais (pour tout $x\in\mathbb{R}$).

Notons $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Même si on ne sait pas a priori exprimer g, on peut malgré tout connaître des informations sur cette fonction : par le corollaire ci-dessus g est dérivable et l'on calcule g' en dérivant l'égalité $f\big(g(x)\big)=x$. Ce qui donne $f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)=1$ et donc ici

$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)} = \frac{1}{1+\exp\big(g(x)\big)}.$$

Pour cette fonction f particulière on peut préciser davantage : comme $f\big(g(x)\big) = x$ alors $g(x) + \exp\big(g(x)\big) = x$ donc $\exp\big(g(x)\big) = x - g(x)$. Cela conduit à :

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x - g(x)}.$$



Par exemple $f(0) = 1$ donc $g(1) = 0$ et donc $g'(1) = \frac{1}{2}$. Autrement dit $\big(f^{-1}\big)'(1) = \frac{1}{2}$. L'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point d'abscisse $x_0 = 1$ est donc $y = \frac{1}{2}(x-1)$.

2.4. Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la ***dérivée seconde*** de f. Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)'$$

Si la ***dérivée n-ième*** $f^{(n)}$ existe on dit que f est ***n fois dérivable***.

Théorème 1 (Formule de Leibniz)**.**

$$\boxed{\big(f \cdot g\big)^{(n)} = f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots + \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} + \cdots + f \cdot g^{(n)}}$$

Autrement dit :

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$

La démonstration est similaire à celle de la formule du binôme de Newton et les coefficients que l'on obtient sont les mêmes.

Exemple 5.

- Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$.
- Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

Exemple 6.

Calculons les dérivées n-ème de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$ pour tout $n \geqslant 0$. Notons $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x)$,..., $f^{(k)}(x) = \exp(x)$. Notons $g(x) = x^2 + 1$ alors $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$ et pour $k \geqslant 3$, $g^{(k)}(x) = 0$.
Appliquons la formule de Leibniz :

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) +$$
$$+ \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \cdots$$

On remplace $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ et on sait que $g^{(3)}(x) = 0$, $g^{(4)}(x) = 0,\ldots$ Donc cette somme ne contient que les trois premiers termes :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x)\cdot(x^2+1) + \binom{n}{1}\exp(x)\cdot 2x + \binom{n}{2}\exp(x)\cdot 2.$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \exp(x)\cdot\left(x^2 + 2nx + n(n-1) + 1\right).$$

Mini-exercices.

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = x\ln x$, $f_2(x) = \sin\frac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$, $f_4(x) = \left(\ln(\frac{1+x}{1-x})\right)^{\frac{1}{3}}$, $f_5(x) = x^x$, $f_6(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.
2. On note $\Delta(f) = \frac{f'}{f}$. Calculer $\Delta(f \times g)$.
3. Soit $f :]1,+\infty[\to]-1,+\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection. Notons $g = f^{-1}$. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.
4. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(1+x)$.
5. Calculer les dérivées successives de $f(x) = \ln(x)\cdot x^3$.

3. Extremum local, théorème de Rolle

3.1. Extremum local

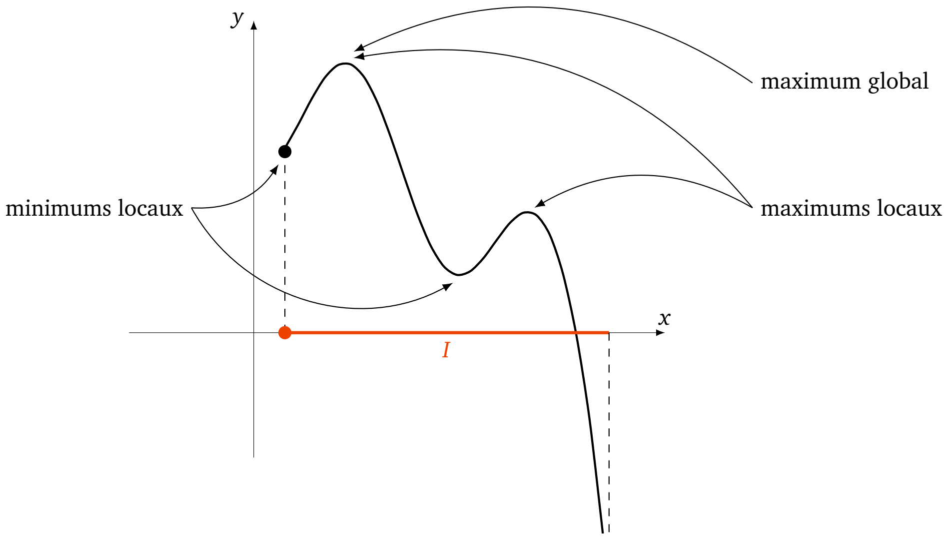
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 3.

- On dit que x_0 est un ***point critique*** de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un ***maximum local en x_0*** (resp. un ***minimum local en x_0***) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

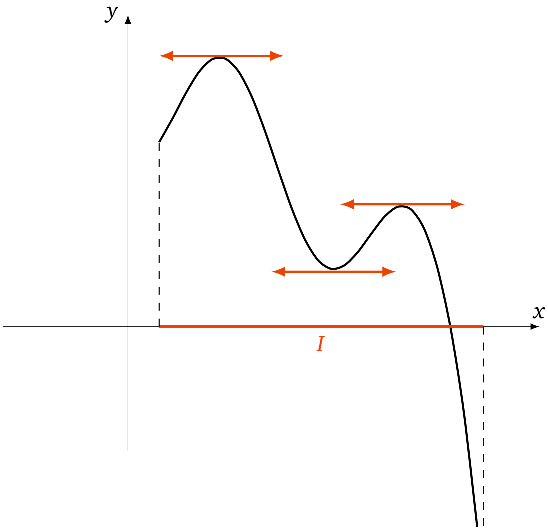
  (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).
- On dit que f admet un ***extremum local en x_0*** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.



Dire que f a un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un ***maximum global*** en x_0 si pour toutes les autres valeurs $f(x)$, $x \in I$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ (on ne regarde donc pas seulement les $f(x)$ pour x proche de x_0). Bien sûr un maximum global est aussi un maximum local, mais la réciproque est fausse.

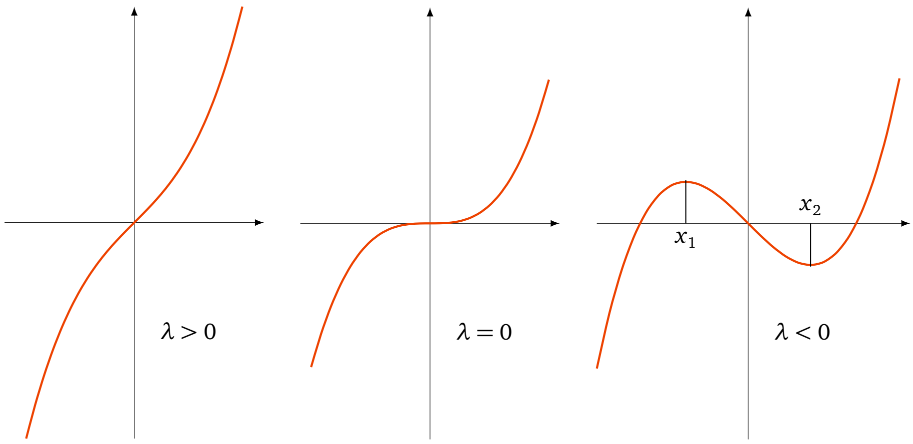
Théorème 2.
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.



Exemple 7.
Étudions les extremums de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. La dérivée est $f'_\lambda(x) = 3x^2 + \lambda$. Si x_0 est un extremum local alors $f'_\lambda(x_0) = 0$.

- Si $\lambda > 0$ alors $f'_\lambda(x) > 0$ et ne s'annule jamais il n'y a pas de points critiques donc pas non plus d'extremums. En anticipant sur la suite : f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $\lambda = 0$ alors $f'_\lambda(x) = 3x^2$. Le seul point critique est $x_0 = 0$. Mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local. En effet si $x < 0$, $f_0(x) < 0 = f_0(0)$ et si $x > 0$, $f_0(x) > 0 = f_0(0)$.
- Si $\lambda < 0$ alors $f'_\lambda(x) = 3x^2 - |\lambda| = 3\big(x + \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\big)\big(x - \sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}\big)$. Il y a deux points critiques $x_1 = -\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$ et $x_2 = +\sqrt{\frac{|\lambda|}{3}}$. En anticipant sur la suite : $f'_\lambda(x) > 0$ sur $]-\infty, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$ et $f'_\lambda(x) < 0$ sur $]x_1, x_2[$; maintenant f_λ est croissante sur $]-\infty, x_1[$, puis décroissante sur $]x_1, x_2[$, donc x_1 est un maximum local. D'autre part f_λ est décroissante sur $]x_1, x_2[$ puis croissante sur $]x_2, +\infty[$ donc x_2 est un minimum local.

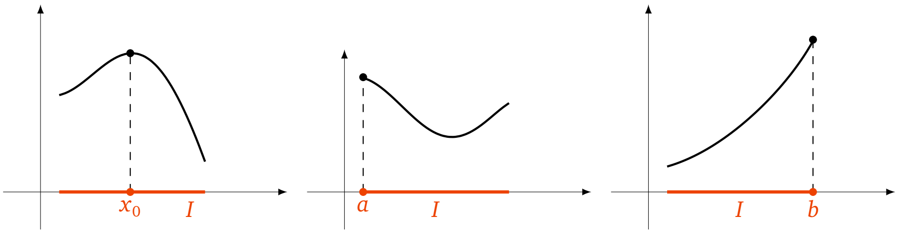


Remarque.

1. La réciproque du théorème 2 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.
2. L'intervalle du théorème 2 est ouvert. Pour le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités. Par exemple si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable qui admet un extremum en x_0, alors on est dans l'une des situations suivantes :
   - $x_0 = a$,

- $x_0 = b$,
- $x_0 \in]a, b[$ et dans ce cas on a bien $f'(x_0) = 0$ par le théorème 2.

Aux extrémités on ne peut rien dire pour $f'(a)$ et $f'(b)$, comme le montre les différents maximums sur les dessins suivants.



3. Pour déterminer $\max_{[a,b]} f$ et $\min_{[a,b]} f$ (où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable) il faut comparer les valeurs de f aux différents points critiques et en a et en b.

Preuve du théorème. Supposons que x_0 soit un maximum local de f, soit donc J l'intervalle ouvert de la définition contenant x_0 tel que pour tout $x \in I \cap J$ on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x < x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ et $x - x_0 < 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$.
- Pour $x \in I \cap J$ tel que $x > x_0$ on a $f(x) - f(x_0) \leqslant 0$ et $x - x_0 > 0$ donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$ et donc à la limite $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$.

Or f est dérivable en x_0 donc

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

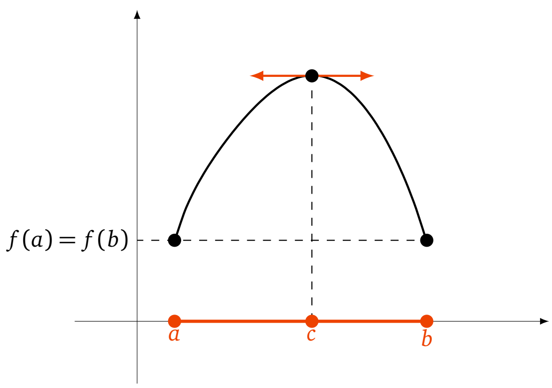
La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est que $f'(x_0) = 0$. □

3.2. Théorème de Rolle

Théorème 3 (Théorème de Rolle).
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que

- *f est continue sur $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur $]a, b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Démonstration. Tout d'abord, si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient. Sinon il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x_0) > f(a)$. Alors f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[a, b]$, donc elle admet un maximum en un point $c \in [a, b]$. Mais $f(c) \geqslant f(x_0) > f(a)$ donc $c \neq a$. De même comme $f(a) = f(b)$ alors $c \neq b$. Ainsi $c \in]a, b[$. En c, f est donc dérivable et admet un maximum (local) donc $f'(c) = 0$. □

Exemple 8.
Soit $P(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$ un polynôme ayant n racines réelles différentes : $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$.

1. *Montrons que P' a $n-1$ racines distinctes.*
   On considère P comme une fonction polynomiale $x\mapsto P(x)$. P est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $P(\alpha_1)=0=P(\alpha_2)$ alors par le théorème de Rolle il existe $c_1\in]\alpha_1,\alpha_2[$ tel que $P'(c_1)=0$. Plus généralement, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, comme $P(\alpha_k)=0=P(\alpha_{k+1})$ alors le théorème de Rolle implique l'existence de $c_k\in]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ tel que $P'(c_k)=0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines de P' : $c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$. Comme P' est un polynôme de degré $n-1$, toutes ses racines sont réelles et distinctes.
2. *Montrons que $P+P'$ a $n-1$ racines distinctes.*
   L'astuce consiste à considérer la fonction auxiliaire $f(x)=P(x)\exp x$. f est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. f s'annule comme P en $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. La dérivée de f est $f'(x)=\big(P(x)+P'(x)\big)\exp x$. Donc par le théorème de Rolle, pour chaque $1\leqslant k\leqslant n-1$, comme $f(\alpha_k)=0=f(\alpha_{k+1})$ alors il existe $\gamma_k\in]\alpha_k,\alpha_{k+1}[$ tel que $f'(\gamma_k)=0$. Mais comme la fonction exponentielle ne s'annule jamais alors $(P+P')(\gamma_k)=0$. Nous avons bien trouvé $n-1$ racines distinctes de $P+P'$: $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_{n-1}$.
3. *Déduisons-en que $P+P'$ a toutes ses racines réelles.*
   $P+P'$ est un polynôme à coefficients réels qui admet $n-1$ racines réelles. Donc $(P+P')(X)=(X-\gamma_1)\cdots(X-\gamma_{n-1})Q(X)$ où $Q(x)=X-\gamma_n$ est un polynôme de degré 1. Comme $P+P'$ est à coefficients réels et que les γ_i sont aussi réels, ainsi $\gamma_n\in\mathbb{R}$. Ainsi on a obtenu une n-ème racine réelle γ_n (pas nécessairement distincte des autres γ_i).

Mini-exercices.

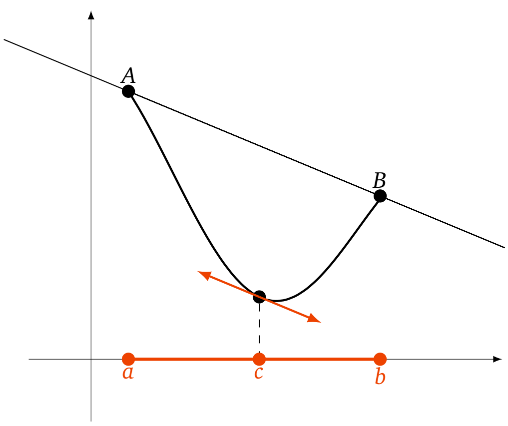
1. Dessiner le graphe de fonctions vérifiant : f_1 admet deux minimums locaux et un maximum local ; f_2 admet un minimum local qui n'est pas global et un maximum local qui est global ; f_3 admet une infinité d'extremums locaux ; f_4 n'admet aucun extremum local.
2. Calculer en quel point la fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ admet un extremum local.
3. Soit $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0)=f(1)=f(2)=0$. Montrer qu'il existe c_1,c_2 tels que $f'(c_1)=0$ et $f'(c_2)=0$. Montrer qu'il existe c_3 tel que $f''(c_3)=0$.
4. Montrer que chacune des trois hypothèses du théorème de Rolle est nécessaire.

4. Théorème des accroissements finis

4.1. Théorème des accroissements finis

Théorème 4 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)}$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A=(a,f(a))$ et $B=(b,f(b))$.

Démonstration. Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x-a)$. Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) = f(a)$. Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

4.2. Fonction croissante et dérivée

Corollaire 2.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

1. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est croissante ;*
2. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est décroissante ;*
3. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ *est constante ;*
4. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement croissante ;*
5. $\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ *est strictement décroissante.*

Remarque.
La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration. Prouvons par exemple (1).
Sens $\Longrightarrow$. Supposons d'abord la dérivée positive. Soient $x, y \in]a,b[$ avec $x \leqslant y$. Alors par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. Mais $f'(c) \geqslant 0$ et $x - y \leqslant 0$ donc $f(x) - f(y) \leqslant 0$. Cela implique que $f(x) \leqslant f(y)$. Ceci étant vrai pour tout x, y alors f est croissante.

Sens $\Longleftarrow$. Réciproquement, supposons que f est croissante. Fixons $x \in]a,b[$. Pour tout $y > x$ nous avons $y - x > 0$ et $f(y) - f(x) \geqslant 0$, ainsi le taux d'accroissement vérifie $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. À la limite, quand $y \to x$, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée de f en x et donc $f'(x) \geqslant 0$. □

4.3. Inégalité des accroissements finis

Corollaire 3 (Inégalité des accroissements finis)**.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ alors

$$\boxed{\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x-y|}$$

Démonstration. Fixons $x, y \in I$, il existe alors $c \in]x,y[$ ou $]y,x[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$ et comme $|f'(c)| \leqslant M$ alors $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M|x-y|$. □

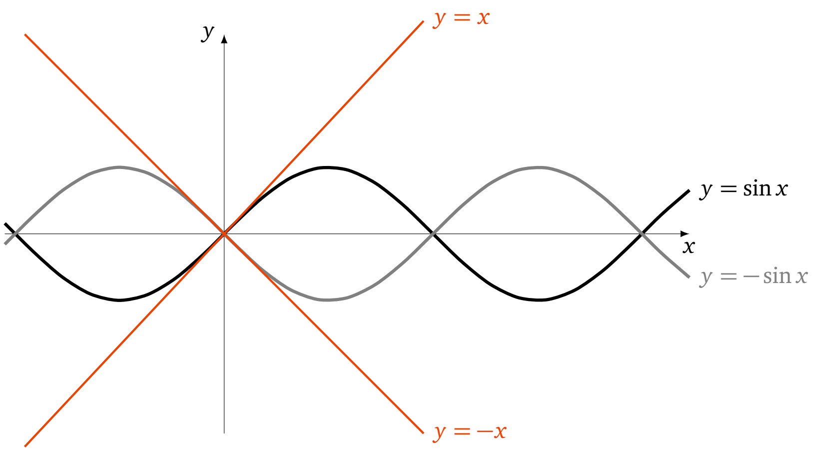
Exemple 9.
Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$$

ce qui est particulièrement intéressant pour x proche de 0.



4.4. Règle de l'Hospital

Corollaire 4 (Règle de l'Hospital).
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que
- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Si} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \textit{alors} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Démonstration. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x)$. Alors
- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$,
- h est dérivable sur $]a, x_0[$,
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

Donc par le théorème de Rolle il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(c_a) = 0$. Or $h'(x) = g(a)f'(x) - f(a)g'(x)$ donc $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \ell.$$

□

Exemple 10.
Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :
- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,
- Prenons $I =]0, 1]$, $x_0 = 1$, alors g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 3.$$

Mini-exercices.
1. Soit $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$. Étudier la fonction f. Tracer son graphe. Montrer que f admet un minimum local et un maximum local.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leqslant \sqrt{101} \leqslant 10 + \frac{1}{20}$.
3. Appliquer le théorème des accroissements finis pour montrer que $\ln(1 + x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ (pour tout $x > 0$).

4. Soit $f(x) = e^x$. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$?
5. Appliquer la règle de l'Hospital pour calculer les limites suivantes (quand $x \to 0$) : $\frac{x}{(1+x)^n - 1}$; $\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$; $\frac{1-\cos x}{\tan x}$; $\frac{x - \sin x}{x^3}$.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri