

Finance Quantitative

Modèle de Treynor Black
Solution

Patrick Hénaff

Version: 06 mars 2023

```
library(xts)
library(hornpa)
library(lubridate)
library(xtable)
library(quantmod)
library(PerformanceAnalytics)
library(TTR)
library(lubridate)
library(roll)
library(Hmisc)
library(nFactors)
library(kableExtra)
library(broom)

get.src.folder <- function() {
  path.expand("../GP/src")
}

get.data.folder <- function() {
  path.expand("../GP/data")
}

source(file.path(get.src.folder(), 'utils.R'))
source(file.path(get.src.folder(), 'FileUtils.R'))
```

Données

Séries de rendement quotidien pour 11 valeurs:

```
monthly.ret.file <- file.path(get.data.folder(), "monthly.ret.rda")
load(monthly.ret.file)
```

Pour l'indice de marché, on utilise VT, un ETF "World Market":

```

VT.series.file <- file.path(get.data.folder(), "ret.VT.rda")

if(!file.exists(VT.series.file)) {

  sym <- "VT"
  world.index <- Ad(getSymbols(sym, auto.assign=FALSE))
  world.index.ret <- monthlyReturn(world.index)
  colnames(world.index.ret) <- "Market"
  save(world.index.ret, file=VT.series.file)
} else {
  load(VT.series.file)
}

```

Rendement moyen:

```

monthly.ret <- merge.xts(monthly.ret, world.index.ret, join="inner")
kable(colMeans(monthly.ret), "latex", escape=FALSE, col.names=c("$r$"), caption="Average monthly return")

```

Table 1: Average monthly return

| | r |
|--------|-----------|
| AAPL | 0.0220532 |
| AMZN | 0.0271364 |
| MSFT | 0.0169185 |
| F | 0.0139604 |
| SPY | 0.0086184 |
| QQQ | 0.0126927 |
| XOM | 0.0012265 |
| MMM | 0.0090297 |
| HD | 0.0191698 |
| PG | 0.0080793 |
| KO | 0.0096675 |
| Market | 0.0063881 |

Matrice de covariance des rendements:

```

kable(cov(monthly.ret), "latex", booktabs=T) %>%
kable_styling(latex_options="scale_down")

```

taux sans risque

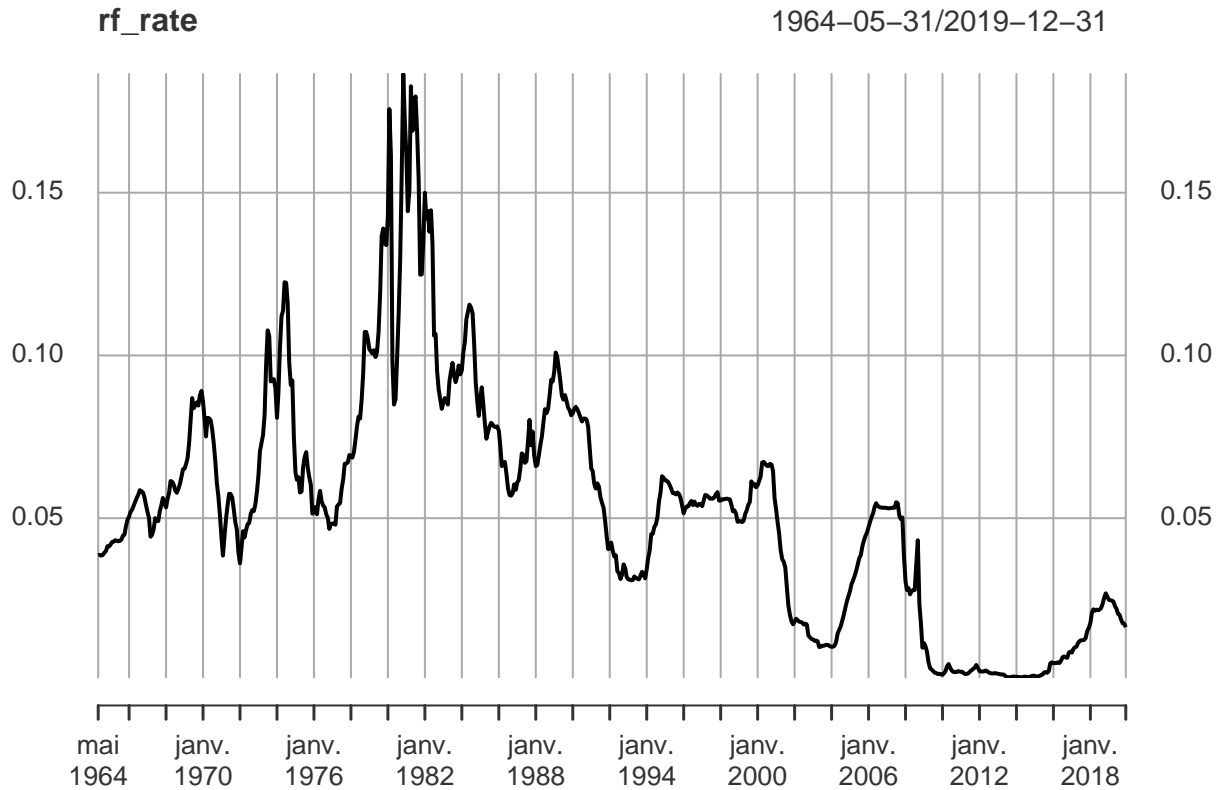
Le taux sans risque mensuel (annualisé) est obtenu de la Réserve Fédérale US.

| | AAPL | AMZN | MSFT | F | SPY | QQQ | XOM | MMM | HD | PG | KO | Market |
|--------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| AAPL | 0.0067861 | 0.0029132 | 0.0023909 | 0.0034726 | 0.0020525 | 0.0030696 | 0.0008125 | 0.0019703 | 0.0017385 | 0.0007716 | 0.0007773 | 0.0019879 |
| AMZN | 0.0029132 | 0.0081477 | 0.0025052 | 0.0026818 | 0.0019708 | 0.0029000 | 0.0008198 | 0.0013520 | 0.0018658 | 0.0001333 | 0.0011566 | 0.0020887 |
| MSFT | 0.0023909 | 0.0025052 | 0.0041486 | 0.0034082 | 0.0018237 | 0.0022291 | 0.0010236 | 0.0014625 | 0.0016284 | 0.0007682 | 0.0010500 | 0.0019091 |
| F | 0.0034726 | 0.0026818 | 0.0034082 | 0.0228940 | 0.0033899 | 0.0035843 | 0.0013655 | 0.0039663 | 0.0034734 | 0.0018252 | 0.0017233 | 0.0037993 |
| SPY | 0.0020525 | 0.0019708 | 0.0018237 | 0.0033899 | 0.0018541 | 0.0019954 | 0.0012216 | 0.0018248 | 0.0017008 | 0.0008786 | 0.0009489 | 0.0019549 |
| QQQ | 0.0030696 | 0.0029000 | 0.0022291 | 0.0035843 | 0.0019954 | 0.0025283 | 0.0009971 | 0.0018315 | 0.0018600 | 0.0007702 | 0.0008702 | 0.0020805 |
| XOM | 0.0008125 | 0.0008198 | 0.0010236 | 0.0013655 | 0.0012216 | 0.0009971 | 0.0024359 | 0.0015475 | 0.0011221 | 0.0006220 | 0.0007314 | 0.0012568 |
| MMM | 0.0019703 | 0.0013520 | 0.0014625 | 0.0039663 | 0.0018248 | 0.0018315 | 0.0015475 | 0.0033789 | 0.0018843 | 0.0010283 | 0.0008990 | 0.0018143 |
| HD | 0.0017385 | 0.0018658 | 0.0016284 | 0.0034734 | 0.0017008 | 0.0018600 | 0.0011221 | 0.0018843 | 0.0034615 | 0.0008112 | 0.0007124 | 0.0015536 |
| PG | 0.0007716 | 0.0001333 | 0.0007682 | 0.0018252 | 0.0008786 | 0.0007702 | 0.0006220 | 0.0010283 | 0.0008112 | 0.0018438 | 0.0008778 | 0.0008302 |
| KO | 0.0007773 | 0.0011566 | 0.0010500 | 0.0017233 | 0.0009489 | 0.0008702 | 0.0007314 | 0.0008990 | 0.0007124 | 0.0008778 | 0.0020062 | 0.0010466 |
| Market | 0.0019879 | 0.0020887 | 0.0019091 | 0.0037993 | 0.0019549 | 0.0020805 | 0.0012568 | 0.0018143 | 0.0015536 | 0.0008302 | 0.0010466 | 0.0023080 |

```

taux.sans.risque.csv <- file.path(get.data.folder(), "DP_LIVE_01032020211755676.csv")
tmp <- read.csv(taux.sans.risque.csv, header=TRUE, sep=";")[, c("TIME", "Value")]
dt <- ymd(paste(tmp$TIME, "-01", sep=""))-1
rf_rate <- xts(tmp$Value/100.0, dt)

```



```

##                AAPL                AMZN                MSFT                F                SPY
## 2008-06-30 -0.11290069 -0.10156825 -0.02860143 -0.292647079 -0.083575759
## 2008-07-31 -0.05070466  0.04104724 -0.06506746 -0.002079304 -0.008985578
## 2008-09-30 -0.32955848 -0.09961634 -0.02198624  0.165918802 -0.094173681
## 2008-10-31 -0.05340487 -0.21330401 -0.16335732 -0.578846139 -0.165186687
## 2008-12-31 -0.07899032  0.20093672 -0.03857552 -0.148698828  0.009796723
## 2009-03-31  0.17702424  0.13350827  0.13746188  0.314999474  0.083310627
##                QQQ                XOM                MMM                HD                PG
## 2008-06-30 -0.09615030 -0.007097684 -0.10275897 -0.136855504 -0.079333799
## 2008-07-31  0.00642039 -0.087370994  0.01149577  0.017506396  0.083531745
## 2008-09-30 -0.15576296 -0.029371125 -0.04594999 -0.037367436 -0.001146315

```

```
## 2008-10-31 -0.15471594 -0.045583125 -0.05870276 -0.088837478 -0.067977481
## 2008-12-31  0.02277380 -0.003992837 -0.14029598  0.006785848 -0.039316221
## 2009-03-31  0.10316511  0.002945407  0.09370851  0.141905895 -0.022420454
##
##           KO           Market           Rf
## 2008-06-30 -0.080159854 -0.0008065077  0.0023250000
## 2008-07-31 -0.009234303 -0.0268471854  0.0023250000
## 2008-09-30  0.030105361 -0.0910820596  0.0036000000
## 2008-10-31 -0.166793449 -0.2143686201  0.0019666667
## 2008-12-31 -0.034136711  0.0541143392  0.0008500000
## 2009-03-31  0.098898124  0.0883459620  0.0007416667
```

Estimation d'un modèle à un facteur

Choisir une période de 48 mois. A partir des exemples présentés en cours, estimer le modèle:

$$R_i(t) - R_f(t) = \alpha + \beta(R_M(t) - R_f(t)) + \epsilon(t)$$

en utilisant la fonction `lm`. Utilisez la fonction `kable` de `knitr` pour produire une présentation soignée des résultats.

```
nb.obs <- 48
Assets <- c("AAPL", "AMZN", "MSFT", "F", "XOM", "MMM", "HD", "PG", "KO")
r.set <- monthly.ret.2[1:nb.obs,]
r.set$SPY <- NULL
r.set$QQQ <- NULL
# Excess return
excess.r <- r.set[, c(Assets, "Market")]
for(i in seq_along(ncol(excess.r))) {
  excess.r[,i] <- excess.r[,i] - r.set$Rf
}

sigma2.M <- as.numeric(var(excess.r$Market))
r.M <- mean(excess.r$Market)

res <- data.frame(alpha=double(), beta=double(), sigma.e=double(), asset=character())

for(A in Assets) {
  tmp <- lm(paste(A, " ~ Market"), data=excess.r)
  alpha <- tmp$coefficients["(Intercept)"]
  beta <- tmp$coefficients["Market"]
  sigma.e <- glance(tmp)$sigma
  p.value <- tidy(tmp)$p.value[1]
  if(alpha>0) res <- rbind(res, list(alpha=alpha, beta=beta, sigma.e=sigma.e, p.value=p.value, asset=A))
}
rownames(res) <- res$asset
res$Mean <- apply(excess.r[, rownames(res)], 2, mean)
res$Sd <- apply(excess.r[, rownames(res)], 2, sd)

res$asset <- NULL
```

| | α | β | σ_e | $Pr(> t)$ |
|------|-----------|-----------|------------|-------------|
| AAPL | 0.0070516 | 0.9410955 | 0.0818077 | 0.5599770 |
| AMZN | 0.0160117 | 0.9205405 | 0.0764936 | 0.1606683 |
| MSFT | 0.0007420 | 0.6855290 | 0.0555355 | 0.9278776 |
| F | 0.0097772 | 2.2831124 | 0.1917387 | 0.7299182 |
| MMM | 0.0119003 | 0.7225732 | 0.0484812 | 0.1013119 |
| HD | 0.0194094 | 0.7118749 | 0.0516044 | 0.0137477 |
| PG | 0.0028729 | 0.2927801 | 0.0425845 | 0.6480080 |
| KO | 0.0009564 | 0.4006184 | 0.0447764 | 0.8849566 |

```
res_disp <- res[, c("alpha", "beta", "sigma.e", "p.value")]
colnames(res_disp) <- c("$\\alpha$", "$\\beta$", "$\\sigma_e$", "$Pr(>|t|)$")
kable(res_disp, "latex", booktabs=T, escape=FALSE) %>% kable_styling(latex_options="striped")
```

Détermination du portefeuille actif

On rappelle que le poids de chaque titre dans le portefeuille actif est proportionnel au ratio $\alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)$:

$$w_i = \frac{\alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)}{\sum_i \alpha_i/\sigma^2(\epsilon_i)}$$

Calculer les poids des actifs dans le portefeuille actif. Justifier votre choix d'inclure ou d'exclure tel ou tel instrument.

Seul HD a un α significatif, on décide néanmoins de retenir quelques titres avec des α élevés (AMZN, MMM et HD), ce qui donne le portefeuille actif suivant:

```
res.selected <- res[c("AMZN", "MMM", "HD"),]
w <- res.selected$alpha / res.selected$sigma.e^2
w <- w / sum(w)
names(w) <- rownames(res.selected)
```

Table 2: Poids dans le portefeuille actif, après sélection

| | w_i |
|------|-----------|
| AMZN | 0.1813664 |
| MMM | 0.3355667 |
| HD | 0.4830669 |

Calculez les valeurs suivantes concernant le portefeuille actif:

R_A Excess de rendement

α_A alpha du portefeuille actif

β_A beta du portefeuille actif

σ_A écart-type du portefeuille actif

Les caractéristiques du portefeuille actif sont:

```
alpha.A <- sum(w * res.selected$alpha)
beta.A <- sum(w * res.selected$beta)
R.A <- alpha.A + beta.A * r.M
sigma2.e.A <- sum(w * res.selected$sigma.e^2)
sigma2.A <- beta.A^2 * sigma2.M + sigma2.e.A
```

| α_A | β_A | R_A | $\sigma^2(e)_A$ | σ_A^2 |
|------------|-----------|-----------|-----------------|--------------|
| 0.0162734 | 0.7533098 | 0.0247485 | 0.0031364 | 0.0052624 |

Détermination de la pondération entre le portefeuille actif et le portefeuille de marché.

On rappelle l'allocation de richesse au portefeuille actif:

$$w_A = \frac{\alpha_A \sigma_M^2}{\alpha_A \sigma_M^2 (1 - \beta_A) + R_M \sigma_A^2}$$

Avec:

$$R_A = \alpha_A + \beta_A R_M$$

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma^2(\epsilon_A)$$

```
w.A <- alpha.A * sigma2.M / (alpha.A * sigma2.M*(1-beta.A) + r.M * sigma2.A)
w.M <- 1-w.A
names(w.M) <- "Market"
w <- round(c(w * w.A, w.M),3)
```

L'allocation entre les titres du portefeuille actif et le portefeuille de marché est finalement:

| | weight |
|--------|--------|
| AMZN | 0.149 |
| MMM | 0.276 |
| HD | 0.397 |
| Market | 0.179 |

On note que le modèle accorde une grande importance au portefeuille actif, alors que la fiabilité des α est faible. Ceci est un biais connu du modèle de Treynor-Black.

Capital Allocation Line

Calculez l'espérance de rendement et le risque de quelques portefeuilles situés sur la "Capital Allocation Line" qui joint l'actif sans risque et le portefeuille risqué. Placez sur un diagramme "rendement/risque": le portefeuille risqué, le portefeuille actif et le portefeuille de marché.

```

plot(Mean ~ Sd, data=res, xlim=c(0, 0.4), ylim=c(0, .05), xlab=expression(sigma),
     ylab="Excess Return", cex=.5, bty="n", cex.lab=1)
with(res, text(Mean ~ Sd, labels=row.names(res), pos=4, cex=0.5, col="blue"))

points(sigma.port, R.port, cex=.5, col="red")
text(sigma.port, R.port, labels="P", pos=2, col="red")

points(sqrt(sigma2.M), r.M, cex=.5, col="green")
text(sqrt(sigma2.M), r.M, labels="M", pos=2, col="green")

points(sqrt(sigma2.A), R.A, cex=.5, col="black")
text(sqrt(sigma2.A), R.A, labels="A", pos=2, col="black")

rf_last <- as.numeric(last(rf_rate/12))
abline(rf_last, R.port/sigma.port, col="red", lty=2, lwd=2)

```

