Finance Quantitative

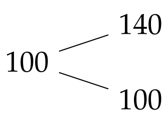
Exercise APT
Solution

Patrick Hénaff

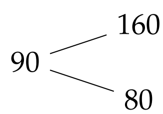
Version: 19 févr. 2023

Une économie comporte 2 actifs risqués et un au actif sans risque. Il y a un facteur de risque dans cette économie, qu'on nommera "cycle économique". Ce facteur prend la valeur $+\frac{1}{2}$ si l'économie est en croissance, et $-\frac{1}{2}$ si elle est en recession. La probabilité de chaque scenario est 0.5.

Les deux actifs risqués arrivent à maturité dans un an. Leur valeur à terme selon l'état de l'économie est résumé dans les graphiques ci-dessous.



Titre A



Titre B

```r
B <- matrix(c(140,100,160,80), nrow=2)
P.0 <- matrix(c(100,90), nrow=2)
```

1 Projection des titres sur les facteurs

Calculez le β de chaque titre par rapport au facteur de risque. En pratique, on estimerait ces parametres par regression, mais ici avec seulement deux observations, il suffit de résoudre un système de deux équations linéaires.

On estime le modèle:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{f,t} + \epsilon_{i,t}$$

avec:

$R_{i,t}$ rendement du titre i

$R_{f,t}$ rendement du facteur

```r
# rendement attendu des titres selon les réalisations du facteur de risque
P.0.mat <- t(matrix(rep(P.0,2), nrow=2))
R <- (B-P.0.mat) / P.0.mat

# valeur du facteur selon les realisations
f <- matrix(c(1/2, -1/2), nrow=2)

# regression des rendements sur le facteur. Ici, il s'agit d'une
# équation
X <- cbind(c(1,1), f)
coef <- solve(X, R)

row.names(coef) <- c('$\\alpha$', '$\\beta$')
```

	A	B
α	0.2	0.3333333
β	0.4	0.8888889

2 Prime de risque

Calculez la prime de risque du facteur "cycle économique" et le taux sans risque. Comme dans la question précédente, on estimerait en pratique ces paramètres par régression mais ici, il suffit de résoudre un système linéaire à deux inconnues.

```r
beta <- coef[2,]
alpha <- coef[1,]
X <- cbind(c(1,1), beta)
lambdas <- solve(X, matrix(alpha, nrow=2))
```

3 Taux sans risque

En utilisant le principe d'absence d'arbitrage, calculez le taux sans risque d'une autre manière que dans la question précédente.

```r
B <- matrix(c(140,100,160,80), nrow=2)
Fixed.CF <- matrix(c(100,100), nrow=2)
w.risk.free <- solve(B, Fixed.CF)
P.0 <- matrix(c(100,90), nrow=2)
P.risk.free <- t(P.0) %*% w.risk.free

# market-implied risk-free rate
r.f <- (Fixed.CF[1]-P.risk.free)/P.risk.free
```

4 Probabilités risque-neutres

Calculez les probabilités risque-neutres des scenarios et le prix d'état (prix d'Arrow-Debreu) associé à chaque scénario.

```
# prix d'etats
w.state.prices = solve(B, diag(2))
P.state <- t(P.0) %*% w.state.prices
# probabilités risque neutres
prob <- P.state * rep(1+r.f,2)
```