

# Finance Quantitative

## Modèle Multi-Facteurs

Le groupe de travail

Version: 11 févr. 2023

### Modèle MV multi-factoriel

Pour remédier à la fragilité d'une matrice de covariance estimée sur des données historiques, on se propose d'explorer diverses techniques pour obtenir une estimation plus robuste, et d'observer l'effet de ces estimations sur la solution d'un modèle classique moyenne-variance.

Lire et mettre en oeuvre la méthode "modèles diagonalisables de covariance" décrite par Jacobs, Levy et Markowitz (2005). Résoudre le problème MV et comparer le résultat à celui obtenu avec une estimation directe de la matrice à partir des séries chronologiques.

Solution:

Le rendement des actifs est modélisé à l'aide de facteurs (pas nécessairement orthogonaux):

$$R_A = \mu_A + BR_F + U_A$$

La variance d'un portefeuille  $W_A$  est donc:

$$V(R_P) = V(R_A^T W_A) \tag{1}$$

$$= V((\mu_A + BR_F + U_A)^T W_A) \tag{2}$$

$$= W_A^T (F \Sigma_F F^T + D) W_A \tag{3}$$

$$= W_F^T \Sigma_F W_F + W_A^T D W_A \tag{4}$$

avec  $W_F = F^T W_A$ .

Le portefeuille tangent est la solution du problème:

$$\max \frac{\mu^T w_A - r_0}{\sqrt{w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A}}$$

s.t.

$$\mathbf{1}^T w = 1$$

$$F^T w_A - w_F = 0$$

$$Aw_A \geq b$$

$$w_A \geq 0$$

Ce problème est équivalent à:

$$\begin{aligned}
& \min w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A \\
& \text{s.t.} \\
& \hat{\mu}^T w_A = 1 \\
& F^T w_A - w_F = 0 \\
& \hat{A}^T w_A \geq 0 \\
& w_A \geq 0
\end{aligned}$$

avec  $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}]$ ,  $\hat{a}_{ij} = a_{ij} - b_i$  et  $\hat{\mu} = \mu_A - r_0$ .

## Données

On utilisera les facteurs Fama-French ainsi que des séries de cours des actions du NASDAQ.

### Facteurs Fama-French

Les facteurs mensuels du modèle classique à trois facteurs sont disponibles sur le site de K. French:

```
FF.file <- file.path(get.data.folder(), "FFdownload.rda")
if(!file.exists(FF.file)) {
  tempf <- tempfile(fileext = ".RData")
  inputlist <- c("F-F_Research_Data_Factors")
  FFdownload(output_file = FF.file, inputlist=inputlist)
}
load(FF.file)

# Fama-French 3 factors - monthly

ts.FF <- FFdownload$`x_F-F_Research_Data_Factors`$monthly$Temp2["1960-01-01/",
c("Mkt.RF", "SMB", "HML")]/100
ts.FF <- timeSeries(ts.FF, as.Date(time(ts.FF)))
```

### Historique des cours du NASDAQ

```
folder <- 'NASDAQ'
tickers <- get.tickers(folder)
ts.all <- get.all.ts(folder, tickers, dt.start = dmy('01Mar2007'), combine = TRUE)
# exclusion des titres a trop forte vol
sigma = colSds(ts.all)
idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
while(length(idx)>0) {
  ts.all <- ts.all[,-idx]
  sigma = colSds(ts.all)
  idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
}
```

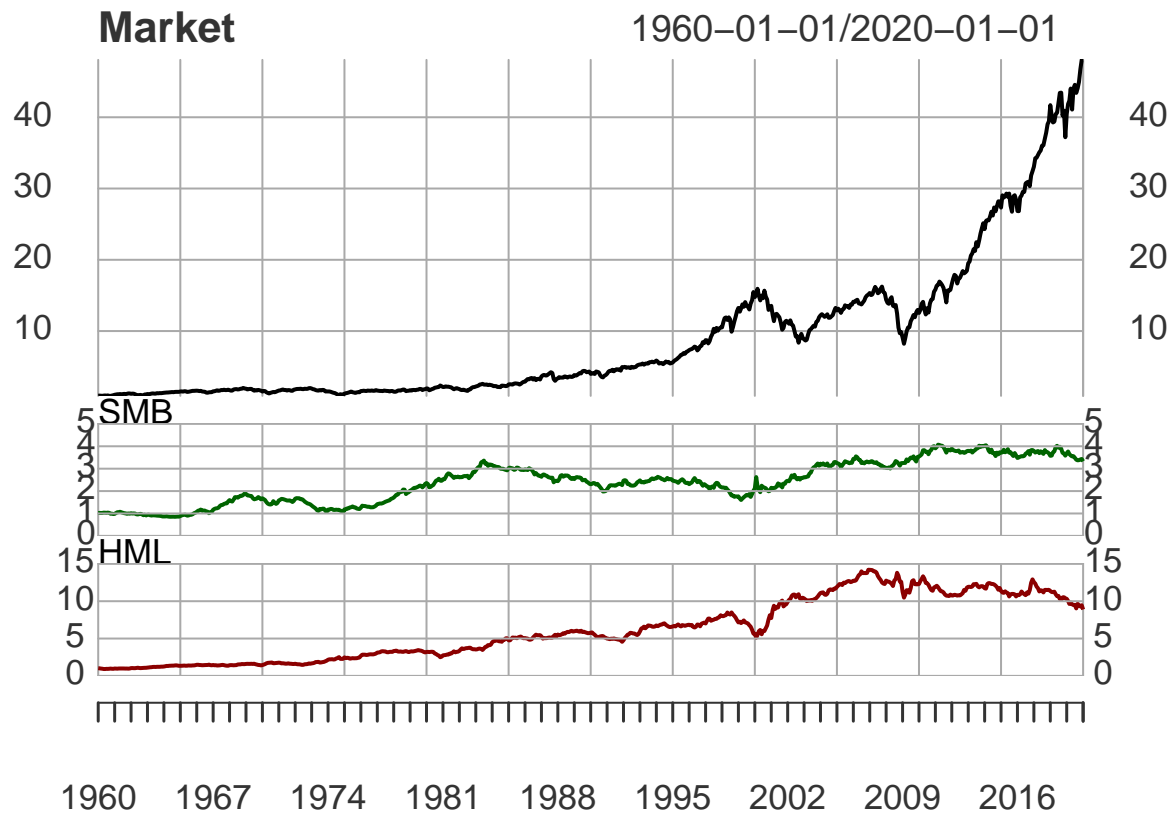


Figure 1: Facteurs Fama-French

### Taux sans risque

Le taux sans risque est obtenu du site de la Banque Fédérale.

```
# riskless rate
file.path <- file.path(get.data.folder(), "DP_LIVE_01032020211755676.csv")
tmp <- read.csv(file.path, header=TRUE, sep=";")[, c("TIME", "Value")]
dt <- ymd(paste(tmp$TIME, "-01", sep=""))
rf_rate <- timeSeries(data=tmp$Value/(100.0*12), dt)
colnames(rf_rate) <- "Rf"
```

## Modèle Moyenne-Variance avec la covariance historique.

Tous les calculs doivent se faire sur des données mensuelles.

1. Convertir les séries de rendement quotidiennes en séries mensuelles; bien vérifier ce calcul.
2. Choisir un intervalle de 36 mois et calculer la matrice de covariance. Vérifier que la matrice est positive définie, et effectuer la correction nécessaire si besoin.
3. Calculer le portefeuille tangent.

Que penser de la solution trouvée?

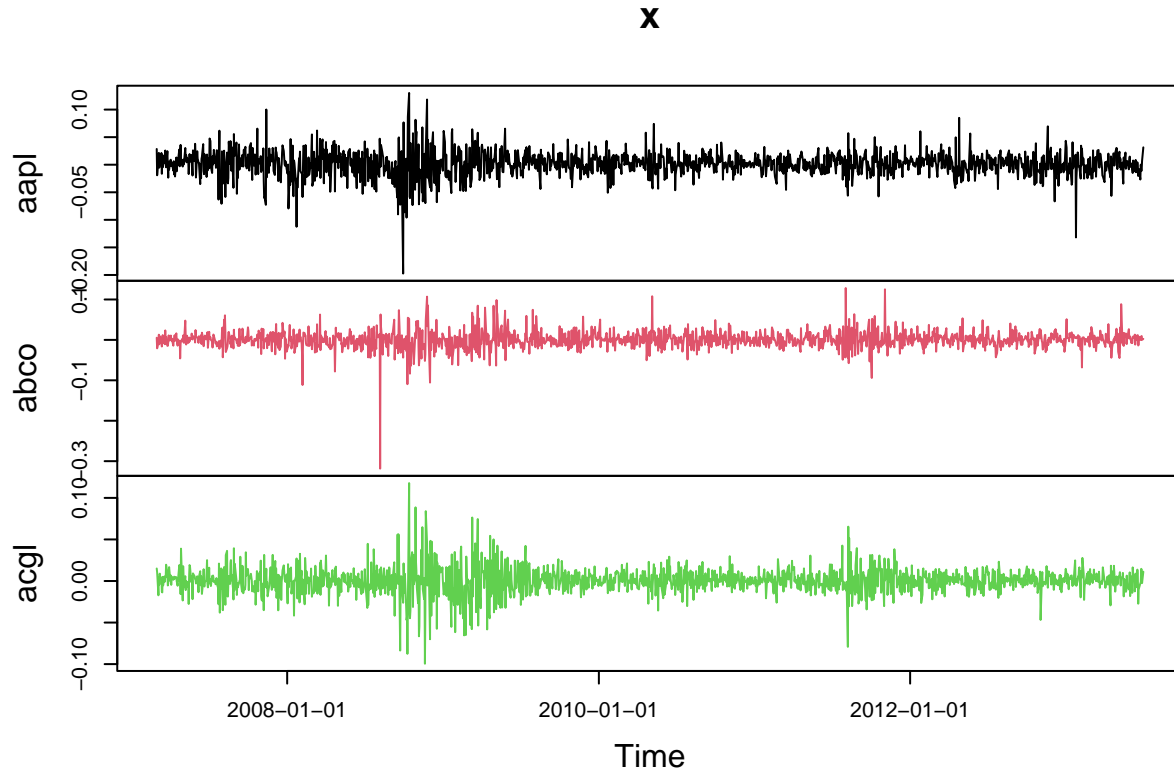


Figure 2: Rendements quotidiens de titres du NASDAQ

## Modèle Moyenne-Variance avec des facteurs statistiques

On se propose d'utiliser des facteurs issus d'une ACP pour modéliser la covariance entre les titres. En pratique, on utilisera le modèle "Diagonalizable Model of Covariance" décrit par Jacobs, Levy & Markowitz (2005).

Avec les données sélectionnées précédemment,

1. Calculer une ACP et identifier les facteurs qui semblent significatifs.
2. Construire les séries chronologiques  $R_F(t)$ .
3. Calculer la matrice  $B$  en estimant par regression les coefficients  $\beta_{ik}$  de l'équation

$$R_i(t) = \mu_i + \sum_k \beta_{ik} R_{F_k}(t) + U_i(t)$$

4. Calculer les matrices de covariance des facteurs et des termes d'erreur.
5. Formuler et résoudre le programme quadratique dont la solution est le portefeuille tangent.

Comparer cette solution à la solution précédente.

## Modèle Moyenne-Variance avec les facteurs Fama-French

On procède de la même manière que précédemment, en substituant les 3 facteurs Fama-French aux facteurs statistiques. Noter que la matrice de covariance des facteurs n'est plus diagonale.

1. Comparer la solution à la solution précédente.
2. Comparer le premier facteur issu de l'ACP au facteur "marché de Fama-French.

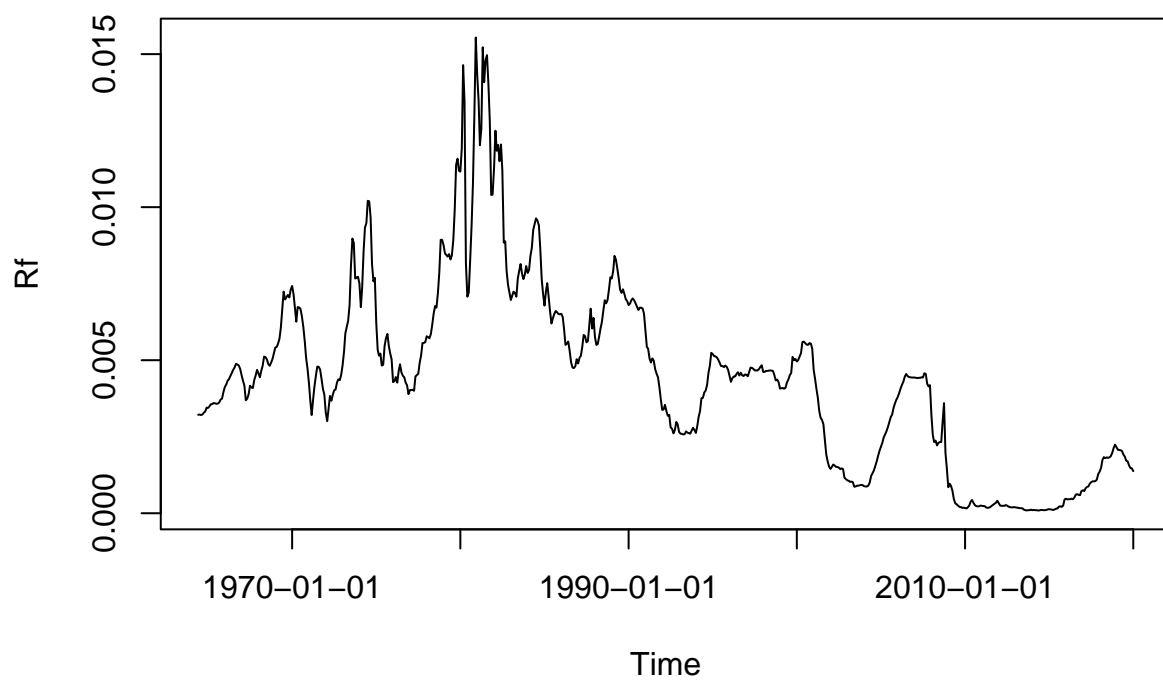


Figure 3: Taux court-terme mensuel des emprunts d'état