Finance Quantitative

Modèle Multi-Facteurs
Solution

Patrick Hénaff

Version: 09 mars 2023

Modèle MV multi-factoriel

Pour remédier à la fragilité d'une matrice de covariance estimée sur des données historiques, on se propose d'explorer diverses techniques pour obtenir une estimation plus robuste, et d'observer l'effet de ces estimations sur la solution d'un modèle classique moyenne-variance.

Lire et mettre en oeuvre la méthode "modèles diagonalizables de covariance" décrite par Jacobs, Levy et Markowitz (2005). Résoudre le problème MV et comparer le résultat à celui obtenu avec une estimation directe de la matrice à partir des séries chronologiques.

Solution:

Le rendement des actifs est modélisé à l'aide de facteurs (pas nécésairement orthogonaux):

$$R_A = \mu_A + BR_F + U_A$$

La variance d'un portefeuille W_A est donc:

$$\begin{aligned}
V(R_P) &= V(R_A^T W_A) && (1)\\
&= V((\mu_A + BR_F + U_A)^T W_A) && (2)\\
&= W_A^T (F\Sigma_F F^T + D) W_A && (3)\\
&= W_F^T \Sigma_F W_F + W_A^T D W_A && (4)
\end{aligned}$$

avec $W_F = F^T W_A$.

Le portefeuille tangent est la solution du problème:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \frac{\mu^T w_A - r_0}{\sqrt{w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A}} \\
\text{s.t.} & \\
& \mathbf{1}^T w = 1 \\
& F^T w_A - w_F = 0 \\
& A w_A \geq b \\
& w_A \geq 0
\end{aligned}$$

Ce problème est équivalent à:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w_F^T \Sigma_F w_F + w_A^T D w_A \\
\text{s.t.} & \\
& \hat{\mu}^T w_A = 1 \\
& F^T w_A - w_F = 0 \\
& \hat{A}^T w_A \geq 0 \\
& w_A \geq 0
\end{aligned}
$$

avec $\hat{A} = [\hat{a}_{ij}], \hat{a}_{ij} = a_{ij} - b_i$ et $\hat{\mu} = \mu_A - r_0$.

Données

On utilisera les facteurs Fama-French ainsi que des séries de cours des actions du NASDAQ.

Facteurs Fama-French

Les facteurs mensuels du modèle classique à trois facteurs sont disponibles sur le site de K. French:

```
FF.file <- file.path(get.data.folder(), "FFdownload.rda")
if(!file.exists(FF.file)) {
  tempf <- tempfile(fileext = ".RData")
  inputlist <- c("F-F_Research_Data_Factors")
  FFdownload(output_file = FF.file, inputlist=inputlist)
}
load(FF.file)

# Fama-French 3 factors - monthly

ts.FF <- FFdownload$`x_F-F_Research_Data_Factors`$monthly$Temp2["1960-01-01/",
c("Mkt.RF","SMB","HML")]/100
ts.FF <- timeSeries(ts.FF, as.Date(time(ts.FF)))
```

Historique des cours du NASDAQ

```
folder <- 'NASDAQ'
tickers <- get.tickers(folder)
ts.all <- get.all.ts(folder, tickers, dt.start = dmy('01Mar2007'), combine = TRUE)
# exclusion des titres a trop forte vol
sigma = colSds(ts.all)
idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
while(length(idx)>0) {
ts.all <- ts.all[,-idx]
sigma = colSds(ts.all)
idx <- which((sigma-mean(sigma)) > 3*sqrt(var(sigma)))
}
```

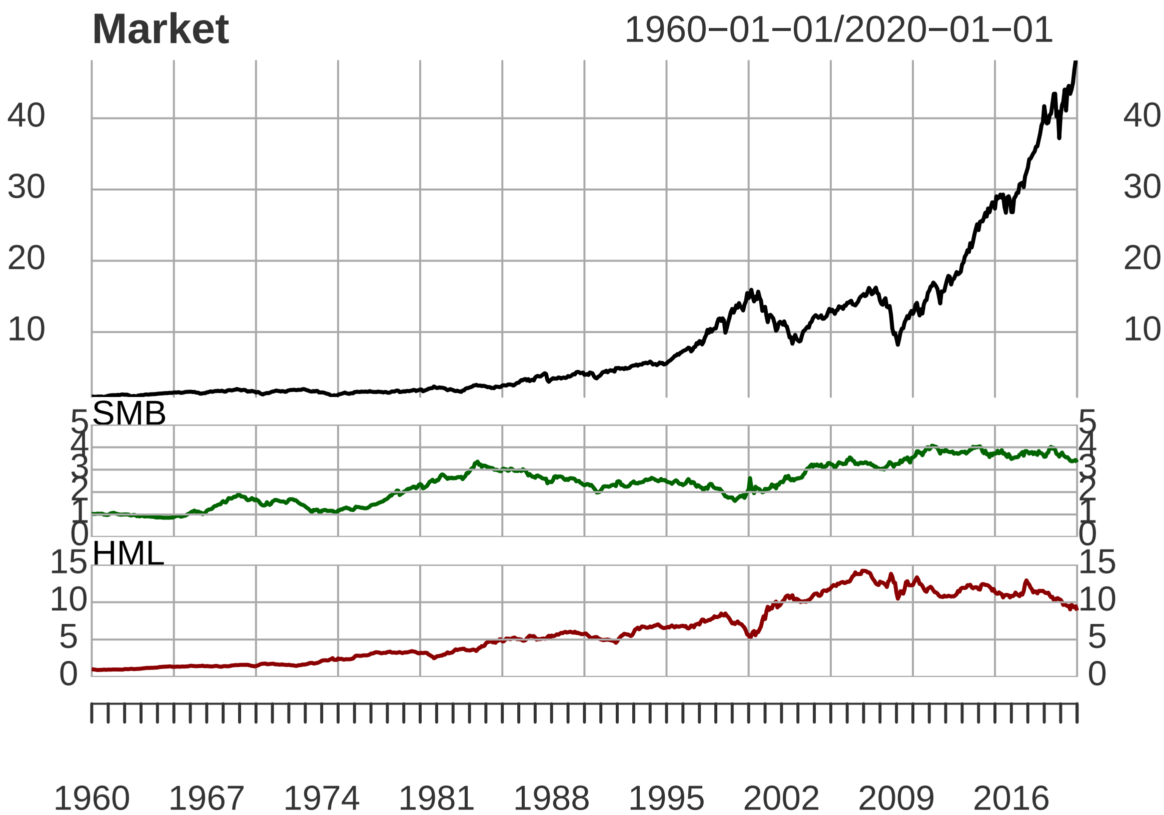

Figure 1: Facteurs Fama-French

Taux sans risque

Le taux sans risque est obtenu du site de la Banque Féderale.

```
# riskless rate
file.path <- file.path(get.data.folder(), "DP_LIVE_01032020211755676.csv")
tmp <- read.csv(file.path, header=TRUE, sep=";")[, c("TIME", "Value")]
dt <- ymd(paste(tmp$TIME, "-01", sep=""))
rf_rate <- timeSeries(data=tmp$Value/(100.0*12), dt)
colnames(rf_rate) <- "Rf"
```

Modèle Moyenne-Variance avec la covariance historique.

Tous les calculs doivent se faire sur des données mensuelles.

1. Convertir les séries de rendement quotidiennes en séries mensuelles
2. Choisir un intervalle de 36 mois et calculer la matrice de covariance. Vérifier que la matrice est positive définite, et effectuer la correction necessaire si besoin.
3. Calculer le portefeuille tangent.

Que penser de la solution trouvée?

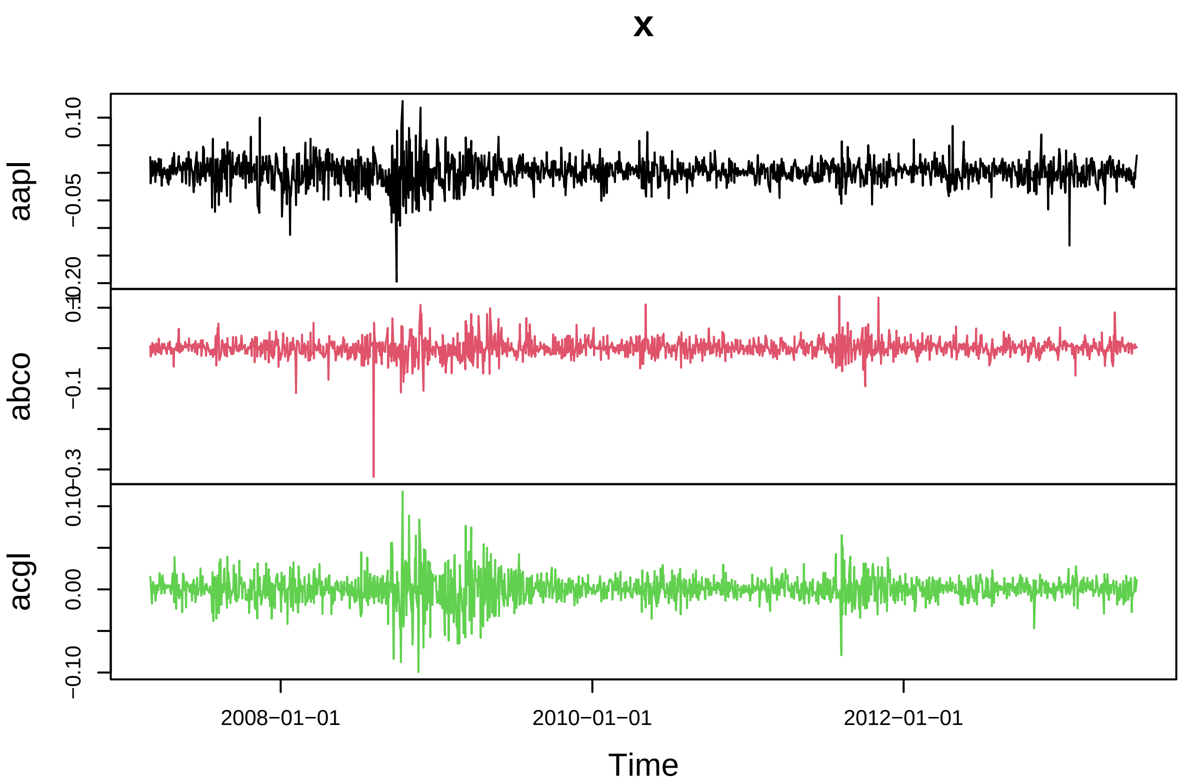

Figure 2: Rendements quotidiens de titres du NASDAQ

Solution

Calcul du rendement mensuel. La série de taux sans risque mensuel est alignée avec les séries de rendement des titres.

```
ts.all.monthly <- apply.monthly(ts.all[,1], FUN=sum)
for(i in 2:ncol(ts.all)) {
  tmp <- apply.monthly(ts.all[,i], FUN=sum)
  ts.all.monthly <- cbind(ts.all.monthly, tmp)
}
tmp <- floor_date(ymd(time(ts.all.monthly)), 'month')
time(ts.all.monthly) = as.timeDate(tmp)
ts.all.A <- removeNA(merge(ts.all.monthly, rf_rate))
asset.cols <- head(colnames(ts.all.A), -1)
nb.assets <- length(asset.cols)
```

Selection de l'intervalle de calcul: 3 ans de données mensuelles.

```
nb.obs = 12*3
dt.start <- dmy("01Aug2009")
idx.start <- closest.index(ts.all.A, dt.start)
idx <- seq(idx.start, length.out=nb.obs)

ts.r.A <- ts.all.A[idx, asset.cols]
riskfree.r <- ts.all.A[idx, "Rf"]
```

On calcule les termes du programme quadratique, en prenant soin de rendre Σ positive définite si nécéssaire.

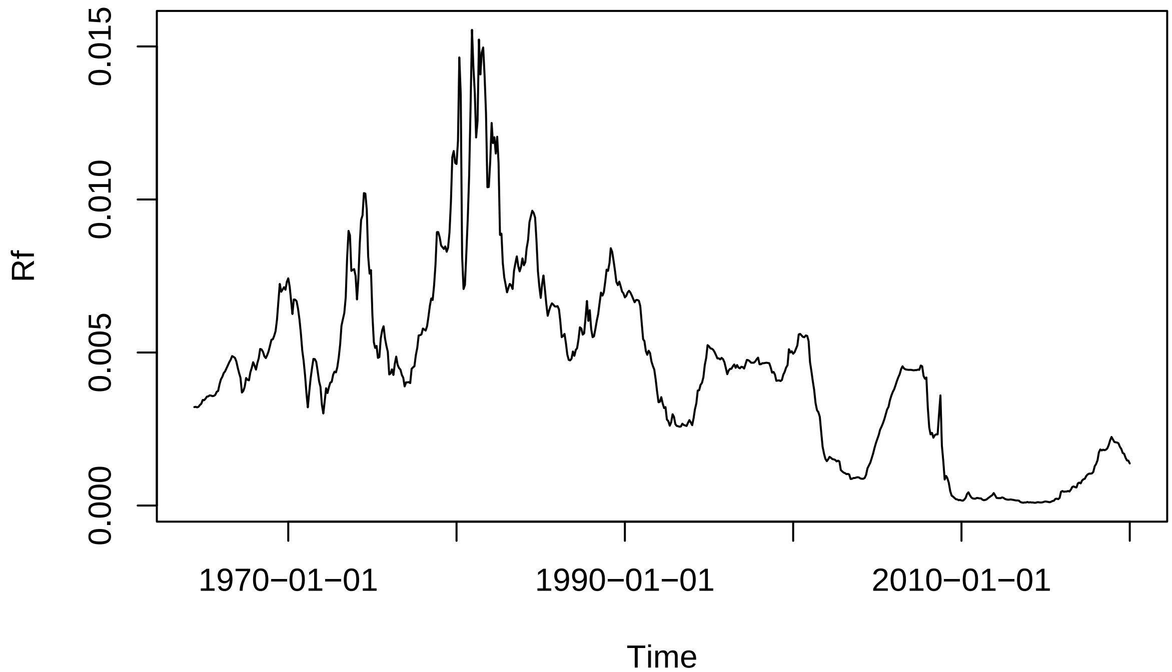

Figure 3: Taux court-terme mensuel des emprunts d'état

```
mu.hat <- colMeans(ts.r.A[, asset.cols]) - rep(as.numeric(last(riskfree.r)), nb.assets)
cov.A = cov(ts.r.A[, asset.cols], method='pearson')

if(!is.positive.definite(cov.A)) {
  cov.A <- make.positive.definite(cov.A, 0.0000001)
}


# w > 0
A = diag(nb.assets)
b.0 <- rep(0, nb.assets)

# \mu^T w = 1
A <- cbind(mu.hat, A)
b.0 <- c(1, b.0)

sol = solve.QP(Dmat = cov.A, dvec = rep(0, nrow(cov.A)) ,
                      Amat=A, bvec=b.0, meq=1)
```

On ne garde que les poids significativement positifs.

```
w.tol <- 2.5/100
w = sol$solution / sum(sol$solution)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

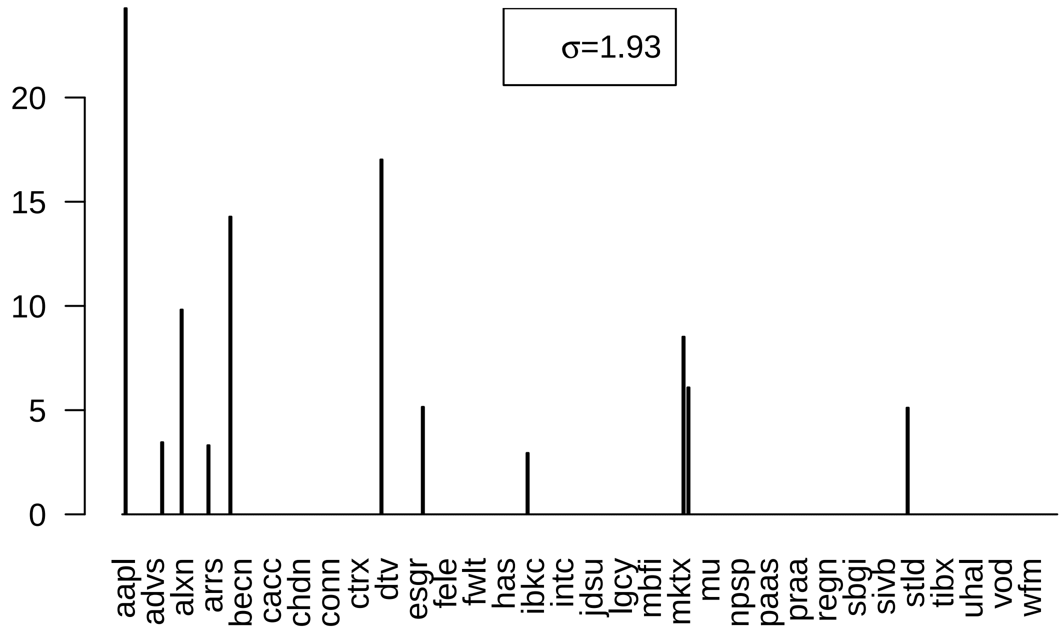

Figure 4: Portefeuille Tangent (covariance historique)

On observe que le portefeuille est concentré sur un petit nombre de titres.

Modèle Moyenne-Variance avec des facteurs statistiques

On se propose d'utiliser des facteurs issus d'une ACP pour modéliser la covariance entre les titres. En pratique, on utilisera le modèle "Diagonizable Model of Covariance" décrit par Jacobs, Levy & Markowitz (2005).

Avec les données selectionnées précédement,

1. Calculer une ACP et identifier les facteurs qui semblent significatifs.
2. Construire les séries chronologiques $R_F(t)$.
3. Calculer la matrice B en estimant par regression les coefficients β_{ik} de l'équation

$$R_i(t) = \mu_i + \sum_k \beta_{ik} R_{F_k}(t) + U_i(t)$$

4. Calculer les matrices de covariance des facteurs et des termes d'erreur.
5. Formuler et résoudre le programme quadratique dont la solution est le portefeuille tangent.

Comparer cette solution à la solution précédente.

Solution

Calcul des composantes principales et regression des rendements sur les facteurs.

```
res.pca <- prcomp(ts.r.A[, asset.cols], scale=TRUE)
nb.factors <- 3
# Rendement des facteurs: rotation des séries initiales
```

```r
f.ret <- timeSeries(data=res.pca$x[,1:nb.factors], time(ts.r.A))

# Calcul des \beta

w = lapply(seq_len(nb.assets),function(i) {lm(ts.r.A[,i] ~ f.ret)})

beta <- matrix(0, ncol=ncol(f.ret), nrow=nb.assets)
alpha <- rep(0, nb.assets)
cov.U.ACP <- rep(0, nb.assets)
for(i in seq_len(nb.assets)) {
  beta[i,] = tail(w[[i]]$coefficients,-1)
  alpha[i] = w[[i]]$coefficients[1]
  cov.U.ACP[i] = var(w[[i]]$residuals)
}

cov.diag = c(cov.U.ACP, colVars(f.ret))
cov.FM = diag(cov.diag)
```

On peut maintenant former le programme quadratique

```r
A <- rbind(beta, -diag(nb.factors))
A <- cbind(A, c(mu.hat, rep(0, nb.factors)))
b.0 <- c(rep(0, nb.factors), 1)
sol <- solve.QP(Dmat=cov.FM, dvec=rep(0, nrow(cov.FM)), Amat=A, bvec=b.0, meq=ncol(A))
```

```r
w.tol <- 2.5/100
w <- head(sol$solution, nb.assets)
w = w/sum(w)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

A titre de curiosité, on compare ci-dessous l'évolution d'AAPL et du premier facteur issu de l'ACP. Sans surprise, une entreprise à très forte capitalisation telle que AAPL suit globalement l'indice de marché.

Modèle Moyenne-Variance avec les facteurs Fama-French

On procède de la même manière que précédement, en substituant les 3 facteurs Fama-French aux facteurs statistiques. Noter que la matrice de covariance des facteurs n'est plus diagonale.

Solution

On aligne les séries de facteurs avec les rendements des titres.

```r
tmp <- removeNA(merge(ts.all.monthly, ts.FF))
ts.merged <- removeNA(merge(tmp, rf_rate))
```

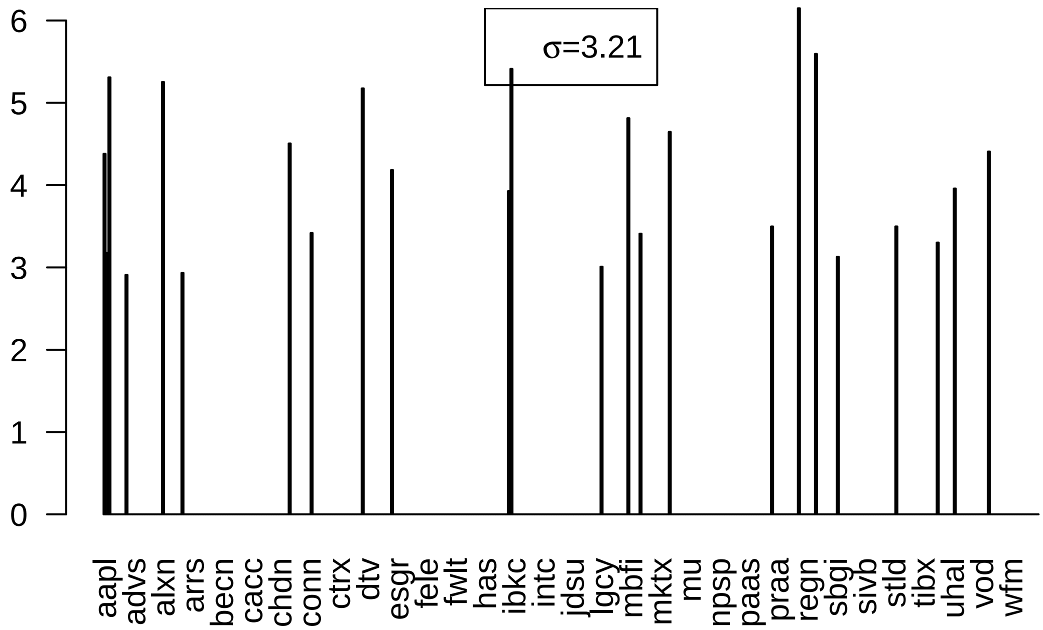

Figure 5: Portefeuille Tangent (covariance selon facteurs ACP). L'allocation est beaucoup plus diversifiée qu'en utilisant la covariance historique

Selection de l'intervalle de calcul: 3 ans de données mensuelles.

```
nb.obs = 12*3
dt.start <- dmy("01Aug2009")
idx.start <- closest.index(ts.all.A, dt.start)
idx <- seq(idx.start, length.out=nb.obs)

ts.r.A <- ts.merged[idx, asset.cols]
riskfree.r <- ts.merged[idx, "Rf"]
f.ret <- ts.merged[idx,colnames(ts.FF)]
nb.factors = ncol(f.ret)
```

```
# Calcul des \beta

w = lapply(seq_len(nb.assets),function(i) {lm(ts.r.A[,i] ~ f.ret)})

beta <- matrix(0, ncol=ncol(f.ret), nrow=nb.assets)
row.names(beta) <- asset.cols
alpha <- rep(0, nb.assets)
cov.U.FF <- rep(0, nb.assets)
names(alpha) = asset.cols
names(cov.U.FF) <- asset.cols
for(i in seq_len(nb.assets)) {
  beta[i,] = tail(w[[i]]$coefficients,-1)
  alpha[i] = w[[i]]$coefficients[1]
  cov.U.FF[i] = var(w[[i]]$residuals)
}

cov.F = cov(f.ret)
cov.FU.1 <- cbind(diag(cov.U.FF), matrix(0, nrow=nb.assets, ncol=nb.factors))
```

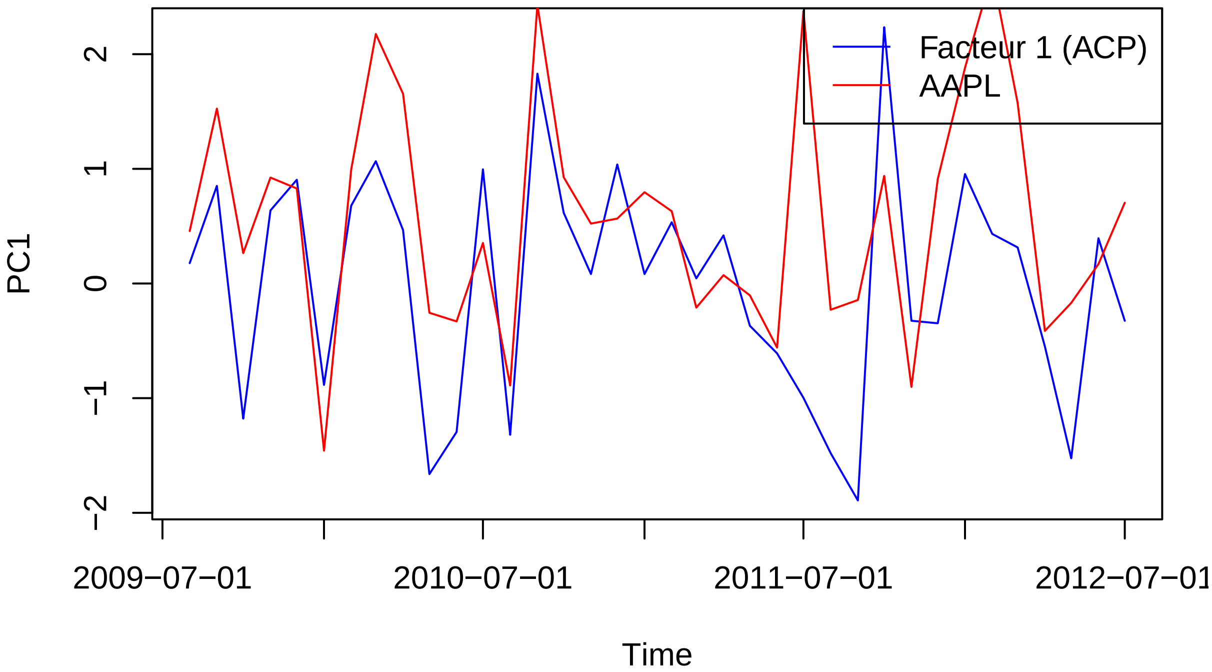

Figure 6: Rendement du facteur 1 et d'AAPL

```
cov.FU.2 <- cbind(matrix(0, nrow=nb.factors, ncol=nb.assets), cov.F)
cov.FU <- rbind(cov.FU.1, cov.FU.2)
```

On peut maintenant former le programme quadratique

```
A <- rbind(beta, -diag(nb.factors))
A <- cbind(A, c(mu.hat, rep(0, nb.factors)))
b.0 <- c(rep(0, nb.factors), 1)
sol <- solve.QP(Dmat=cov.FU, dvec=rep(0, nrow(cov.FU)), Amat=A, bvec=b.0, meq=ncol(A))
```

```
w.tol <- 2.5/100
w = head(sol$solution, nb.assets)
w = w/sum(w)
w[w < w.tol] = 0
w = w/sum(w)
names(w) = asset.cols
nb.assets <- length(asset.cols)
w <- as.matrix(w, ncol=1)
risk <- round(100*sqrt(t(w) %*% cov.A %*% w),2)
```

Pour évaluer les mérites respectifs des facteurs issus de l'ACP et des facteurs FF, on représente ci-dessous la correspondance entre les résidus des regressions des rendements sur les deux types de facteurs. Les résultats sont globalement comparables.

Comme précédement, on observe que le titre AAPL est globalement cohérent avec les mouvements du premier facteur de FF.

Finalement, on note une cohérence remarquable entre le facteur 1 issu de l'ACP et le facteur "marché" de Fama-French.

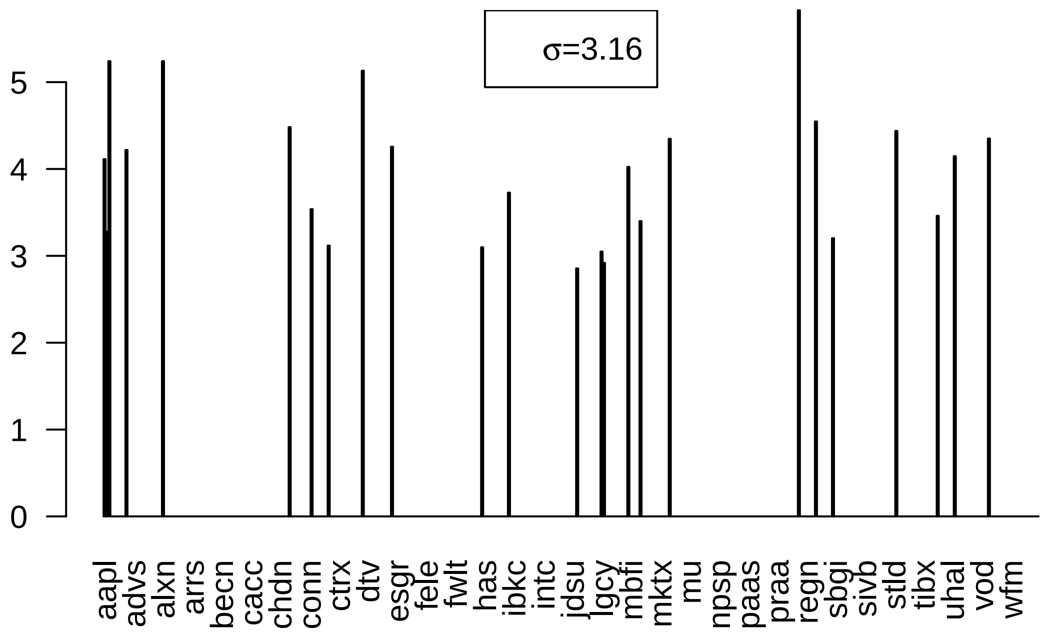

Figure 7: Portefeuille Tangent (covariance selon facteur F-F). On obtient la même diversification qu'avec une matrice de covariance issue de l'ACP

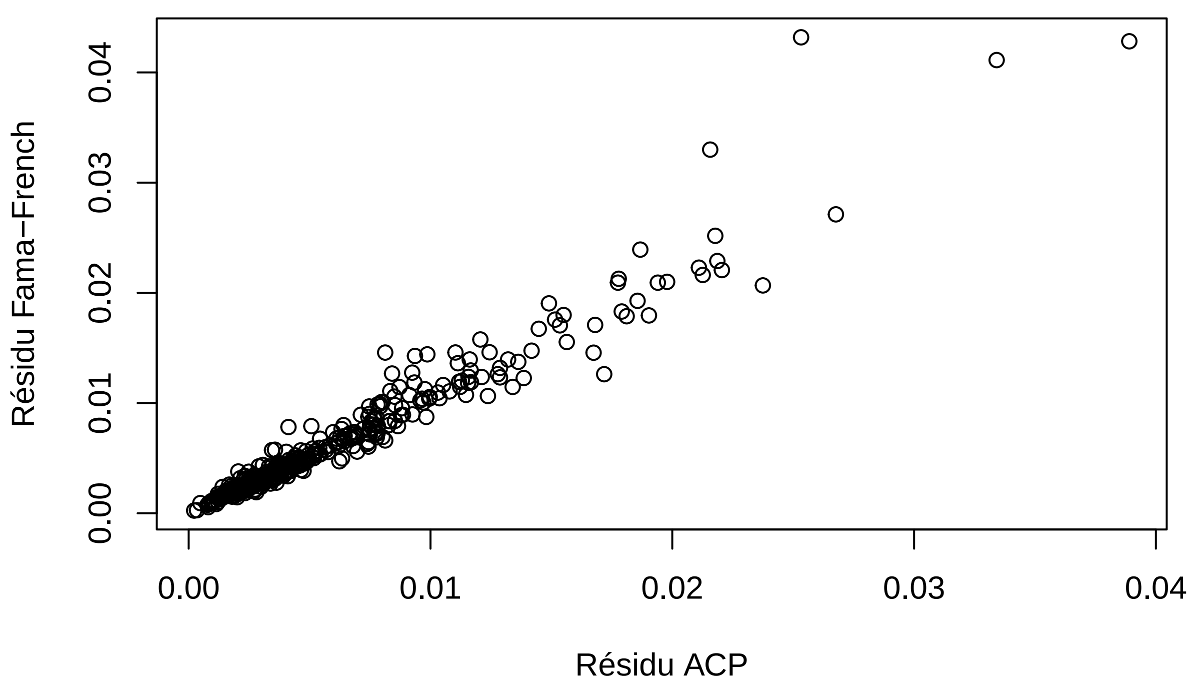

Figure 8: Résidus des modèles FF et ACP. Chaque point représent un titre, avec en abscisse le résidu du modèle ACP, et en ordonnée le résidu du modèle FF. On observe une cohérence entre les deux modèles

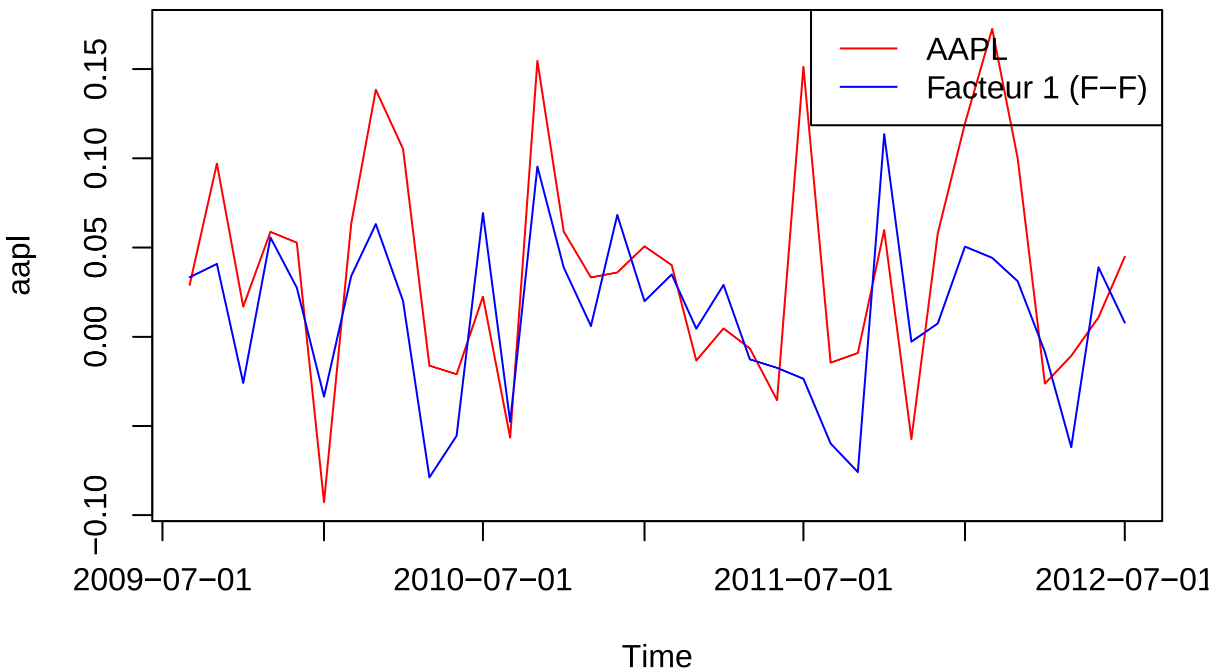

Figure 9: Rendement du facteur Marché de F-F et d'AAPL

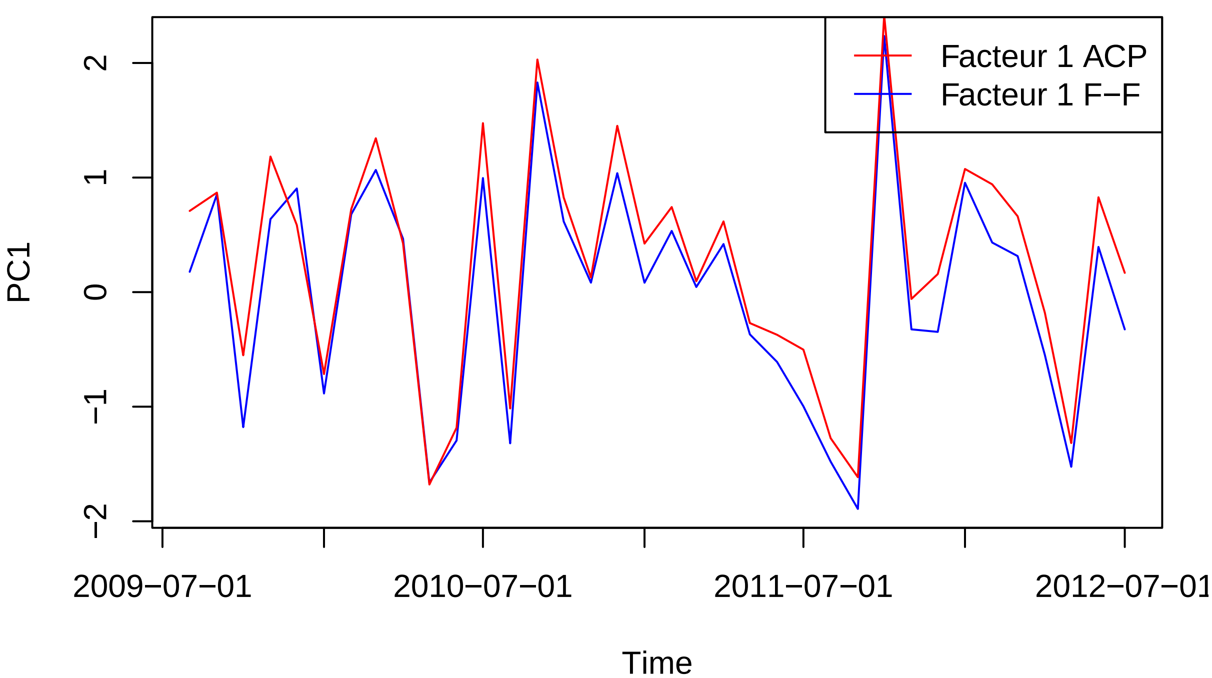

Figure 10: Facteur 1 statistique et facteur marché de Fama-French