Finance Quantitative

Simulation d'une gestion selon un Budget Risque
Solution

Patrick Hénaff

Version: 09 mars 2023

L'objet de ce TP est de se familiariser avec les packages de "backtesting" disponibles dans R. pour cela, on propose de reproduire une analyse réalisée avec le package "riskParityPortfolio", mais en utilisant un nouveau jeu de données, et en portant quelques modifications à l'exemple proposé.

Question 1: Calcul du portefeuille tangent.

Pour justifier la formulation utilisée dans la vignette, partons de la définition du ratio de Sharpe: le portefeuille tangent est obtenu par le programme (A):

$$
\begin{aligned}
&\max_x \quad f(x) = \frac{\mu^T x - r_f}{\sqrt{x^T \Sigma x}} \\
\text{s.t.}& \\
&\mathbf{1}^T x = 1 \\
&x >= 0
\end{aligned}
$$

Il s'agit de montrer que ce programme est équivalent au programme utilisé dans la vignette:

$$
\begin{aligned}
&\min_y \quad y^T \Sigma y \\
\text{s.t.}& \\
&\hat{\mu}^T y = 1 \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

On utilisera la formulation équivalente (B):

$$
\begin{aligned}
&\max_y \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{y^T \Sigma y}} \\
\text{s.t.}& \\
&\hat{\mu}^T y = 1 \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

Soit $y*$ la solution de (B') et $x*$ la solution de (A). Soit Ω_A et Ω_B les ensembles de solutions admissibles pour (A) et (B), respectivement. Pour montrer l'équivalence des programmes, on cherche une bijection ϕ telle que:

$$
\begin{aligned}
&x \in \Omega_A \Leftrightarrow \phi(x) \in \Omega_B \\
&x^* \in \Omega_A \;\; \text{optimal pour (A)} \Leftrightarrow \phi(x^*) \in \Omega_B \;\; \text{optimal pour (B)}
\end{aligned}
$$

Commençons par montrer les implications directes. On suppose

$$\exists\ x \mid \hat{\mu}^T x > 0$$

De ce fait, un point $x|\hat{\mu}^T x \leq 0$ ne peut pas être optimum. On peut donc sans perte de généralité restreindre les solutions admissibles à $\hat{\mu}^T x > 0$.

Soit x une solution admissible pour (A); $y = x/\hat{\mu}^T x$ est toujours défini et est admissible pour le programme (B). Soit maintenant x^* l'optimum de (A) et $\bar{y} = x/\hat{\mu}^T x^*$. On a $f(x^*) = g(\bar{y})$, avec $\bar{y}$ admissible mais pas nécessairement optimal. On en déduit que l'optimum de (B), $g(y^*)$ est supérieur à l'optimum de (A):

$$g(y^*) \geq f(x^*)$$

Procédons de même pour les réciproques. Soit y une solution admissible pour (B). Alors,

$$x = \frac{y}{\sum_j y_j}$$

est admissible pour (A). Soit maintenant y^* l'optimum de (B) et $\bar{x} = y^*/\sum y^*$. On a $g(y^*) = f(\bar{x})$, avec $\bar{x}$ admissible mais pas nécessairement optimal. On en déduit que l'optimum de (A), $f(x^*)$ est supérieur à l'optimum de (B):

$$f(x^*) \geq g(y^*)$$

Ainsi, les deux optimum sont identiques et les programmes (A) et (B) sont équivalents. La contrainte $Ax \geq b$ est traitée de manière similaire.

On note cependant que la formule programmée dans la vignette omet de prendre en compte le taux sans risque.

Question 2: Comparaison de diverses stratégies d'allocation, sans contraintes

Pour les simulations historiques, on utilise les données hebdomadaires suivantes:

```
kable(table.Stats(weekly.price), "latex", booktabs=T, caption="Univers des titres") %>%
  kable_styling(latex_options=c("scale_down", "HOLD_position"))
```

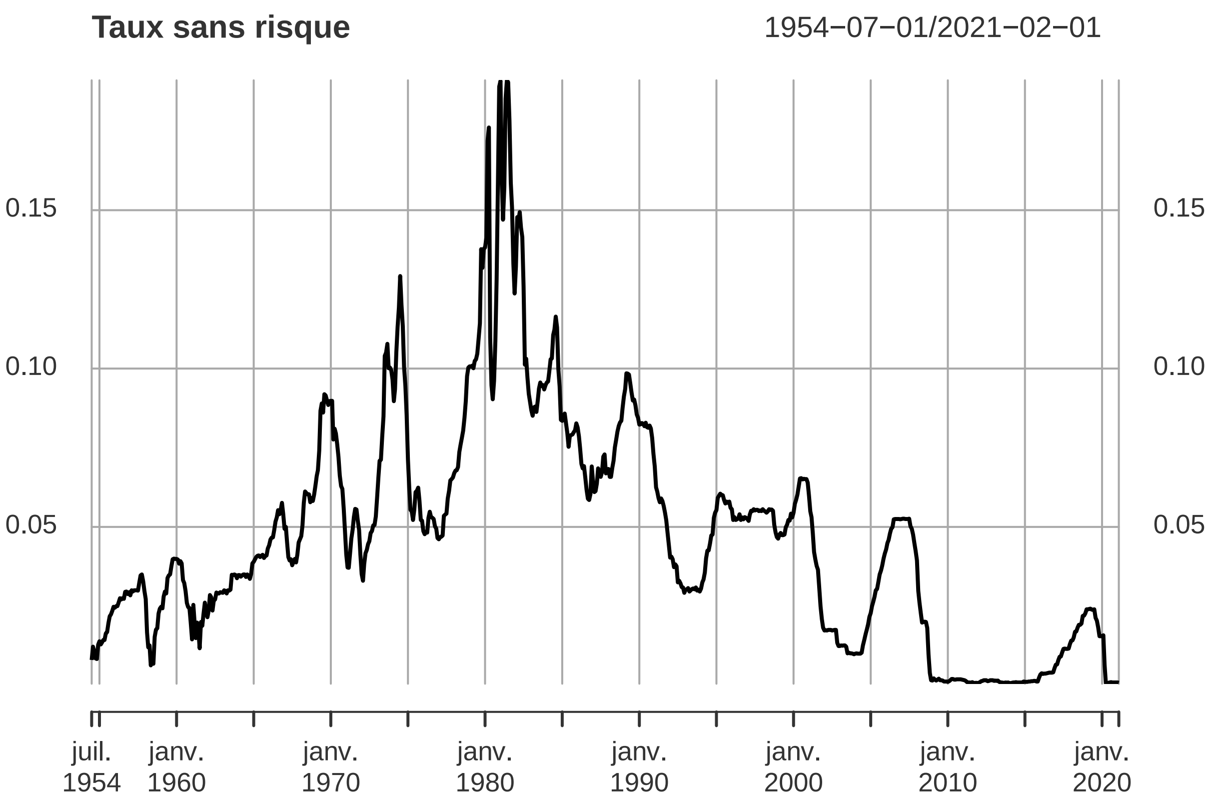
Table 1: Univers des titres

	AAPL	AMZN	MSFT	F	SPY	QQQ	XOM	MMM	HD	PG	KO
Observations	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000	689.0000
NAs	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Minimum	10.2094	36.8500	11.7996	1.0051	55.1512	23.5565	37.1800	31.2938	13.5836	32.2933	12.3453
Quartile 1	29.9834	128.4800	21.9238	7.0259	107.1197	44.3947	57.0451	63.3971	26.3548	46.6420	18.8458
Median	70.2753	290.7400	29.3809	9.2035	147.3649	70.5024	67.5788	96.9677	65.8971	63.5077	31.8386
Arithmetic Mean	87.1592	558.9481	46.8900	8.6425	163.6098	88.8091	64.7968	111.4220	83.4299	64.2893	30.6808
Geometric Mean	62.0908	314.0693	37.1182	8.0986	149.6094	75.3320	63.9544	98.6814	60.1462	61.2838	28.5428
Quartile 3	117.9341	780.3700	57.0261	10.6602	206.3276	115.3672	72.8074	158.7457	124.2659	76.1486	38.8152
Maximum	324.9500	2134.8701	184.8451	13.2321	337.6000	234.6400	83.1940	241.5468	243.7095	126.7000	59.6072
SE Mean	2.5750	22.4671	1.4012	0.1063	2.6465	1.9653	0.3880	2.0509	2.4443	0.7973	0.4302
LCL Mean (0.95)	82.1033	514.8357	44.1388	8.4337	158.4136	84.9503	64.0350	107.3952	78.6307	62.7237	29.8361
UCL Mean (0.95)	92.2151	603.0604	49.6411	8.8512	168.8059	92.6678	65.5586	115.4489	88.2291	65.8548	31.5256
Variance	4568.6761	347787.9827	1352.7912	7.7881	4825.6745	2661.2349	103.7271	2898.1643	4116.4849	438.0434	127.5418
Stdev	67.5920	589.7355	36.7803	2.7907	69.4671	51.5872	10.1846	53.8346	64.1598	20.9295	11.2934
Skewness	1.0528	1.2462	1.5829	-0.7248	0.5801	0.8009	-0.4524	0.4323	0.7484	0.9909	0.1632
Kurtosis	0.7008	0.1682	1.6820	-0.0898	-0.8028	-0.4783	-0.8327	-1.1675	-0.6871	0.6718	-0.8465

Le taux sans risque annualisé est fourni à une périodicité mensuelle:

```r
tmp <- read.csv("../GP/data/FEDFUNDS.csv", header=TRUE, sep=",")
rf_rate <- xts(tmp$FEDFUNDS/100.0, date(tmp$DATE))
colnames(rf_rate) <- "Rf"

# fonction pour interpoler la valeur correspondant à une date
get.rf <- function(dt) {
 approx(x=index(rf_rate), y=rf_rate, xout=dt, rule=2)$y
}
```



En suivant l'exemple donné dans la vignette "Risk Parity Portfolio", effectuer une simulation des stratégies suivantes, et commentez les résultats.

- $1/N$
- Portefeuille tangent
- Portefeuille "risk parity"

```r
# define portfolios to be backtested
# risk parity portfolio
risk_parity <- function(dataset, ...) {
  prices <- dataset$adjusted
  log_returns <- diff(log(prices))[-1]
  return(riskParityPortfolio(cov(log_returns))$w)
}
```

```r
bt <- portfolioBacktest(list("uniform" = one_over_n,
"risk parity portfolio" = risk_parity,
"tangency portfolio"    = max_sharpe_ratio_rf),
                       list(list(adjusted=weekly.price)),
```

```
                    lookback = 12*4,
                     optimize_every = 3*4, rebalance_every = 3*4,
                     show_progress_bar = FALSE)
```

Résumé des performances des trois styles de gestion:

Table 2: Simulation des stratégies sans contraintes

	uniform	risk parity portfolio	tangency portfolio
Sharpe ratio	1.568	1.491	1.281
max drawdown	0.453	0.427	0.569
annual return	0.652	0.566	0.612
annual volatility	0.416	0.379	0.477
Sortino ratio	2.236	2.075	1.847
downside deviation	0.292	0.273	0.344
Sterling ratio	1.439	1.325	1.075
Omega ratio	1.333	1.314	1.272
VaR (0.95)	0.041	0.036	0.044
CVaR (0.95)	0.061	0.056	0.072
rebalancing period	11.870	11.870	11.870
turnover	0.005	0.009	0.078
ROT (bps)	5411.111	2830.470	344.512
cpu time	0.011	0.003	0.003
failure rate	0.000	0.000	0.000

```
## Warning: `position_stack()` requires non-overlapping x intervals
```

```
## Warning: `position_stack()` requires non-overlapping x intervals
## `position_stack()` requires non-overlapping x intervals
```

Question 3: Comparaison de diverses stratégies d'allocation, avec contraintes de diversification

Ajoutez les contraintes suivantes aux portefeuilles "risk parity" et "tangent", et exécutez les simulations de gestion. Comparez ces résultats aux simulations de la question 2.

$$
\begin{aligned}
w_i &\leq 25\% \quad i = 1, \ldots, n \\
w_{AAPL} + w_{MSFT} + w_{AMZN} &\leq 40\%
\end{aligned}
$$

```
rep.row<-function(x,n){
  matrix(rep(x,each=n),nrow=n)
}

max_sharpe_ratio_rf_plus <- function(dataset, ...) {
    N = length(tickers)
```

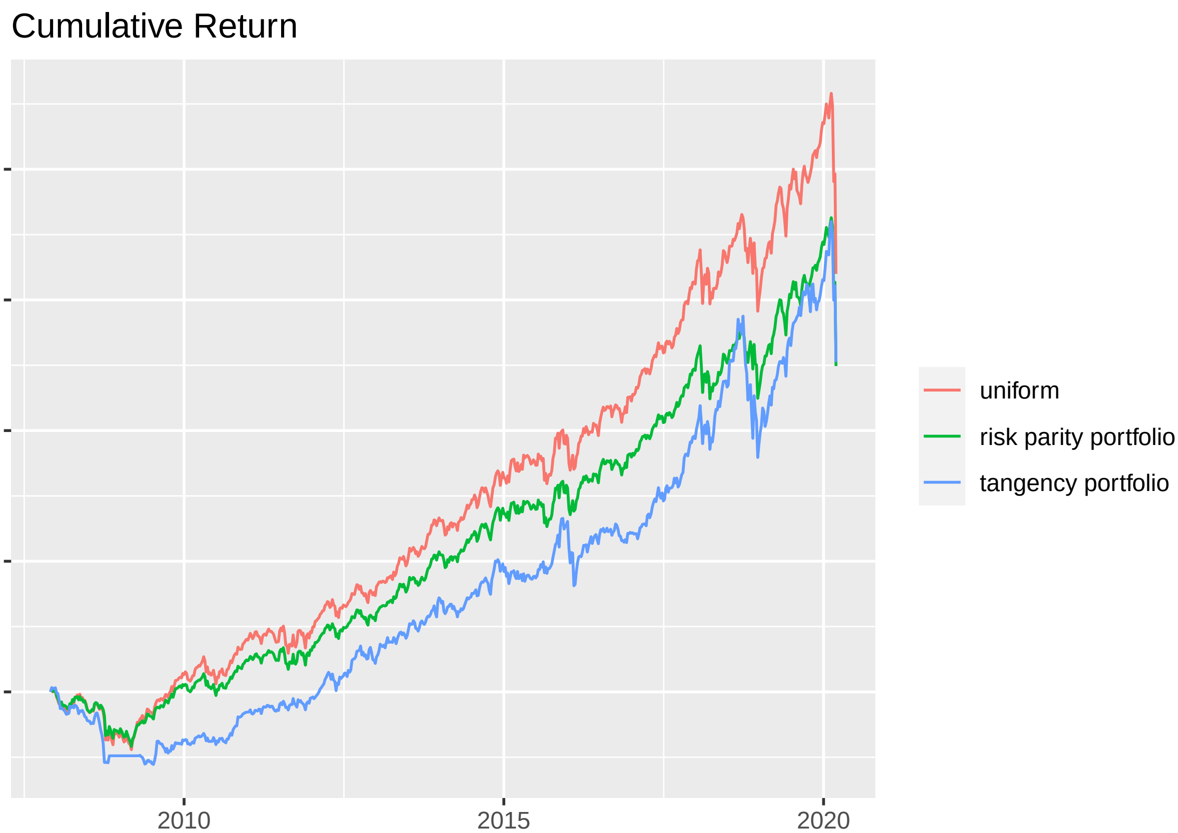


Figure 1: Rendement cumulé

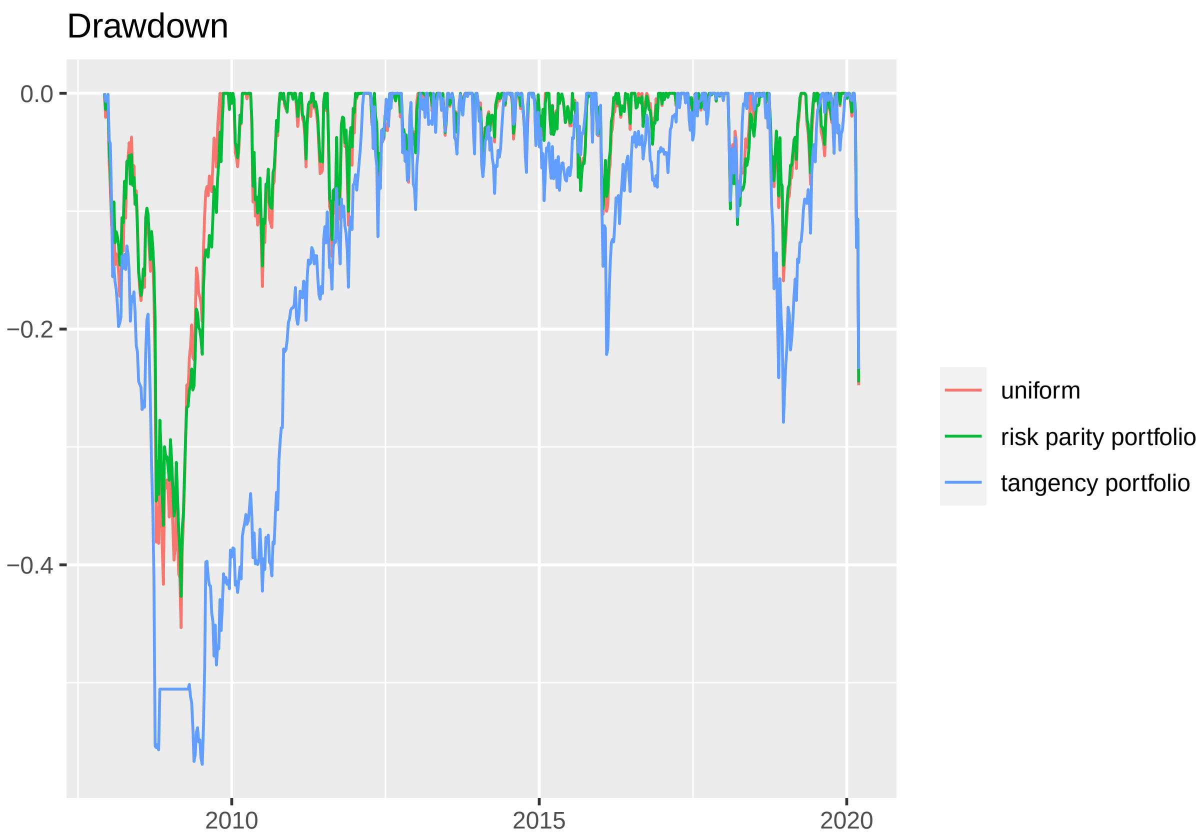


Figure 2: Pertes par rapport au plus haut.

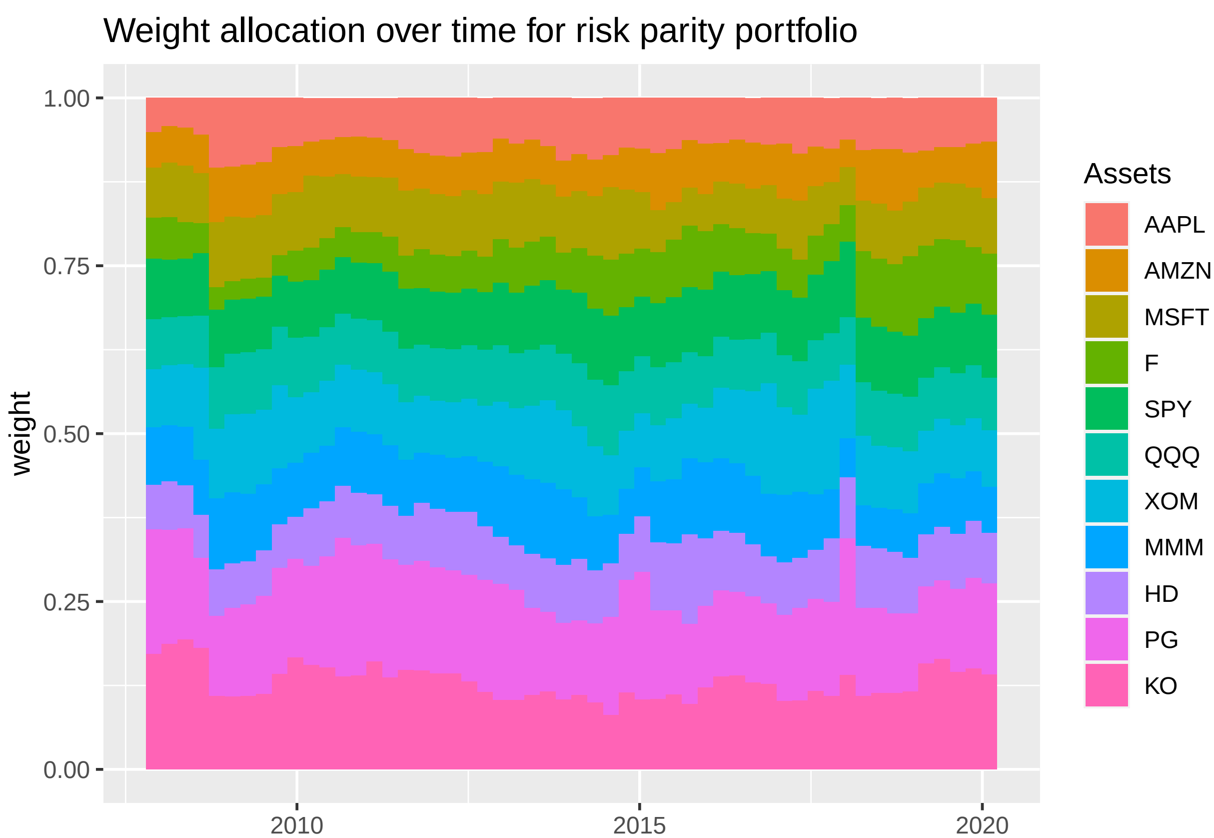


Figure 3: Allocation Risk Parity

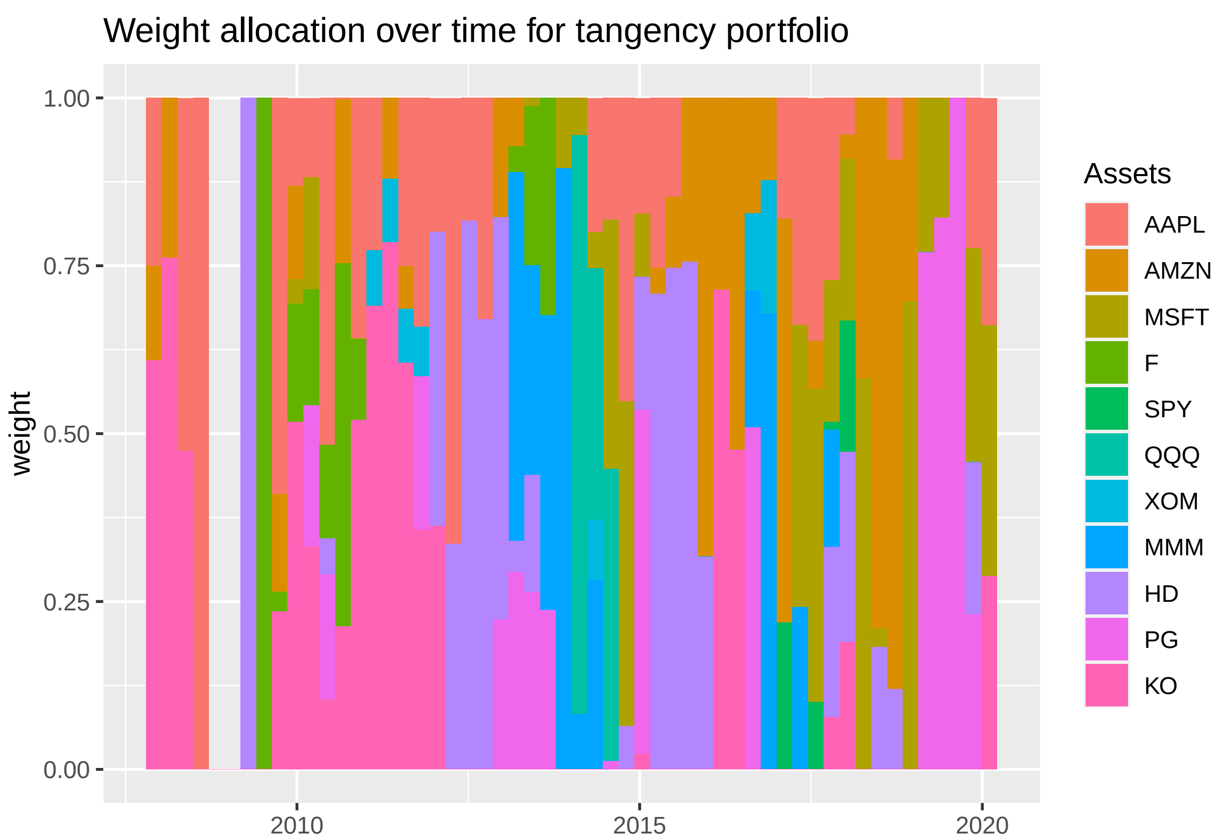


Figure 4: Allocation du portefeuille tangent

```r
    ub = 0.25
    techno <- c("AAPL", "AMZN", "MSFT")
    ub.techno <- .4
    prices <- dataset$adjusted
    log_returns <- diff(log(prices))[-1]
    N <- ncol(prices)
    Sigma <- cov(log_returns)
    mu <- colMeans(log_returns)
    # interpolate risk-free rate
    r.f <- get.rf(last(index(log_returns)))/12
    Dmat <- 2 * Sigma
    # w>0
    A.diag <- diag(N)
    # w techno
    A.techno <- as.numeric(tickers %in% techno)
    mu.hat <- mu-r.f
    if (all(mu.hat <= 1e-8))
        return(rep(0, N))
    Amat.0 <- mu.hat
    Amat.1 <- cbind(A.diag,
              -A.diag,
              -A.techno)
    bvec <- c(rep(0, N), rep(-ub, N), -ub.techno)
    Amat.1 <- Amat.1 - rep.row(bvec, N)
    bvec <- c(1, rep(0, 2*N+1))
    Amat <- cbind(Amat.0, Amat.1)
    dvec <- rep(0, N)

    # program may not be feasible because of linear constraints
    w <- tryCatch(
  {res <- solve.QP(Dmat = Dmat, dvec = dvec, Amat = Amat, bvec = bvec, meq = 1)
    w <- zapsmall(res$solution)
    w <- w/sum(w)
    names(w) <- tickers
    w
  },
  error=function(cond) {
    w <- rep(0,N)
    names(w) <- tickers
    w
  }
)
}
```

Vérification des deux allocations, en utilisant l'ensemble des données:

Table 3: Allocation avec contraintes de diversification

	Tangent	Risk Parity
AAPL	0.170	0.079
AMZN	0.230	0.070
MSFT	0.000	0.089
F	0.000	0.049
SPY	0.000	0.090
QQQ	0.000	0.087
XOM	0.000	0.099
MMM	0.000	0.094
HD	0.198	0.079
PG	0.152	0.138
KO	0.250	0.127

```r
bt <- portfolioBacktest(
  list("uniform" = one_over_n,
       "risk parity portfolio" = risk_parity_plus,
       "tangency portfolio" = max_sharpe_ratio_rf_plus),
  list(list(adjusted=weekly.price)),
  lookback = 12*4,
  optimize_every = 3*4, rebalance_every = 3*4,
  show_progress_bar = FALSE)
```

```r
kable(backtestSummary(bt)$performance, "latex", booktabs=T, digits=3,
      caption="Simulation des stratégies avec contraintes de diversification") %>%
  kable_styling(latex_options = "HOLD_position")
```

Table 4: Simulation des stratégies avec contraintes de diversification

	uniform	risk parity portfolio	tangency portfolio
Sharpe ratio	1.568	1.491	1.964
max drawdown	0.453	0.427	0.237
annual return	0.652	0.566	0.688
annual volatility	0.416	0.379	0.351
Sortino ratio	2.236	2.075	2.980
downside deviation	0.292	0.273	0.255
Sterling ratio	1.439	1.325	2.901
Omega ratio	1.333	1.314	1.422
VaR (0.95)	0.041	0.036	0.034
CVaR (0.95)	0.061	0.056	0.054
rebalancing period	11.870	11.870	12.327
turnover	0.005	0.009	0.045
ROT (bps)	5411.111	2830.470	660.357
cpu time	0.002	0.003	0.003
failure rate	0.000	0.000	0.000

On note que le portefeuille tangent n'est pas investi durant la crise de 2008-2009 car les espérances de rendement des actifs risqués sont toutes négatives. Il n'y a pas de solution qui satisfasse les contraintes

$$\begin{aligned} w^T \mu &\geq r_f \\ A^T w &\geq b \\ w &\geq 0 \end{aligned}$$

Les contraintes de diversification améliorent sensiblement les performances du portefeuille tangent, mai sont sans effet sur le portefeuille "risk parity" qui était déjà naturellement diversifié.

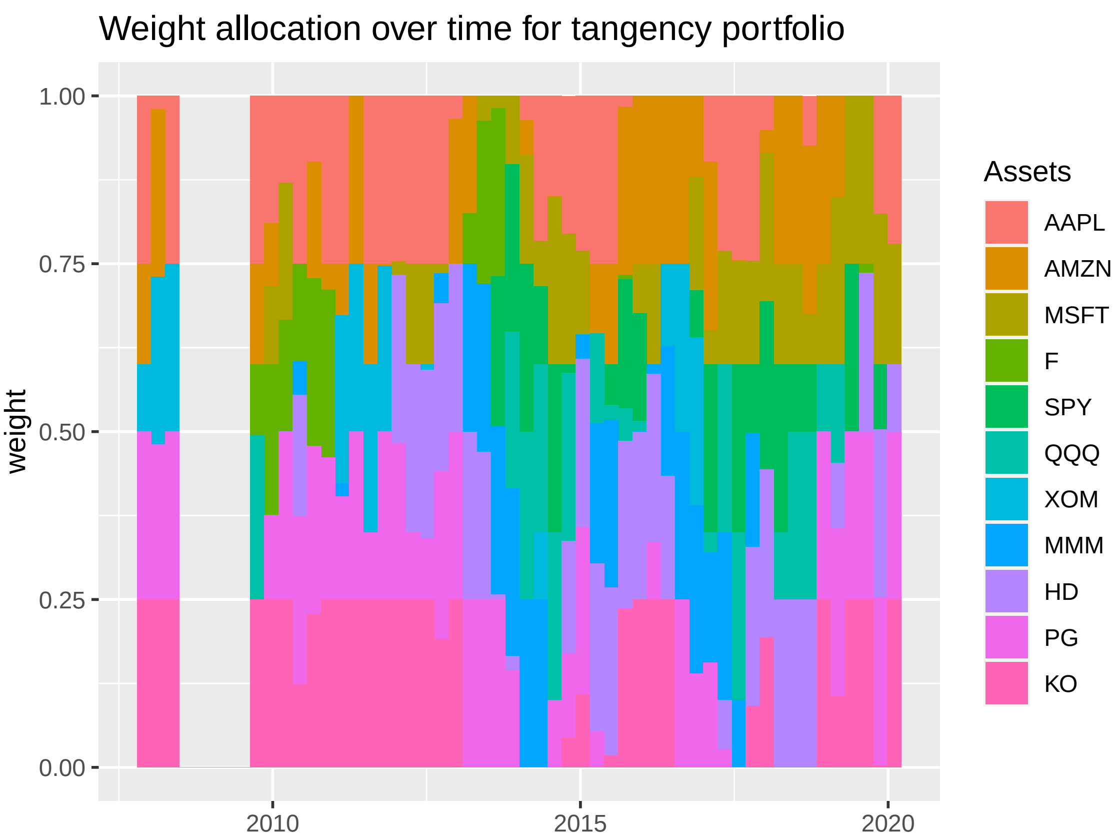


Figure 5: Composition du portefeuille tangent avec contraintes de diversification

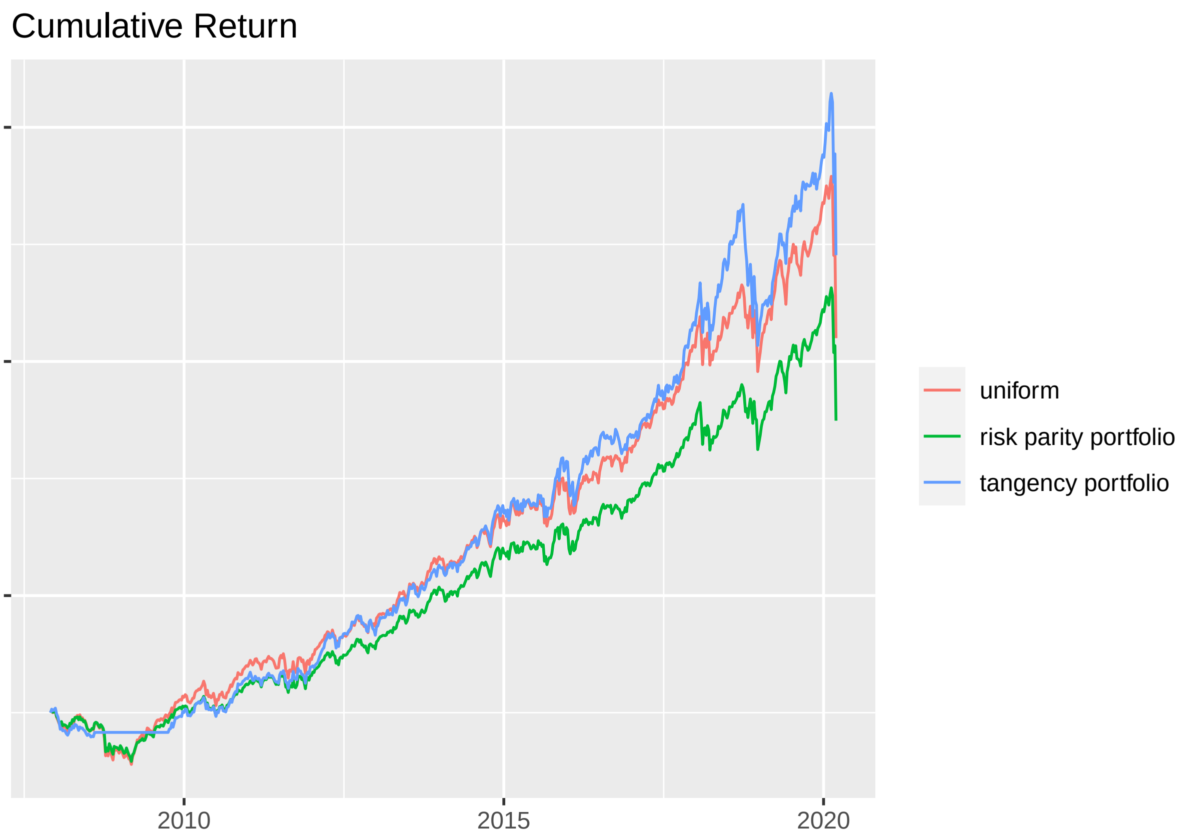


Figure 6: Rendement cumulé avec contraintes de diversification