

# Finance Quantitative

Exo: Formule de Breeden-Litzenberger

Version: 06 mars 2023

On se propose de calculer la distribution empirique de  $S_T$  à partir de la volatilité implicite des options.

La courbe de volatilité est donnée par un polynôme du second degré. La volatilité de “Black-Scholes” est la volatilité à l’argent, réputée indépendante du strike.

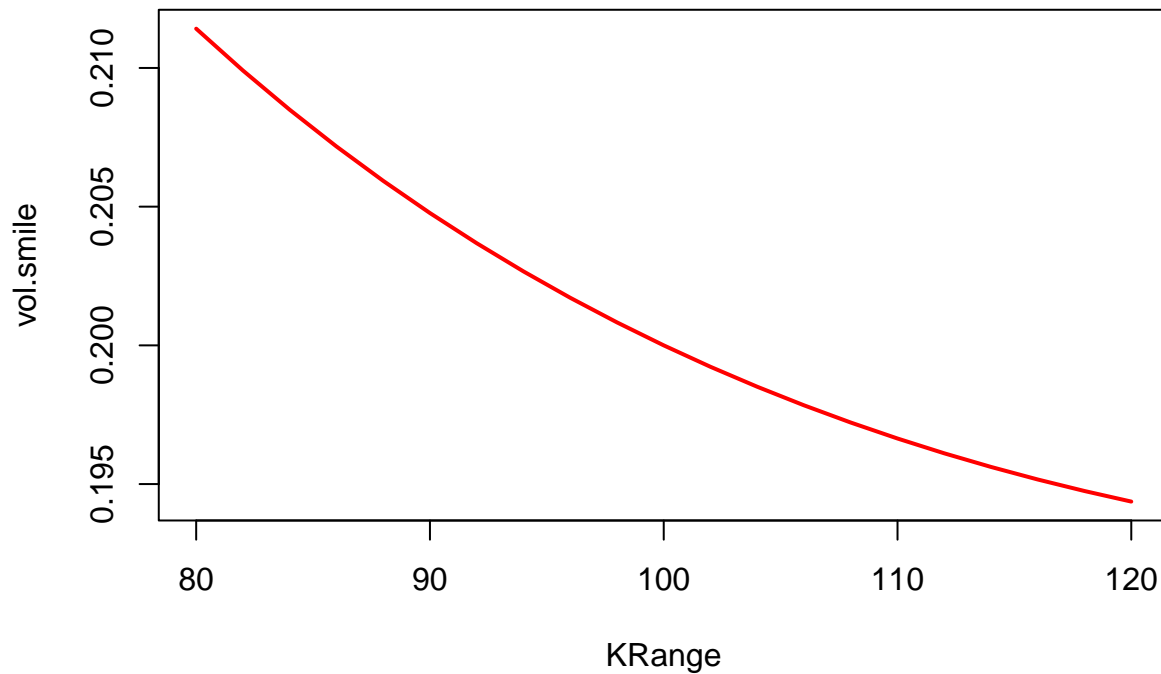
```
## quadratic smile coefficients
a1 <- -.40/10
a2 <- .5/10

## BS volatility function
bsVol <- function(K) {
  rep(sigma, length(K))
}

## Volatility with smile
smileVol <- function(K) {
  sigma + a1*log(K/S) + a2*log(K/S)^2
}
```

## Smile de volatilité

```
KRange <- seq(80, 120, by=2)
vol.smile <- sapply(KRange, smileVol)
plot(KRange, vol.smile, type="l", col="red", lwd=2)
```



Densité de  $S_T$

```
# Call avec smile de volatilité
call.sm <- function(K) {
  tmp <- GBSOption(TypeFlag="c", S, X=K,Time=T,
                    r=r, b=b, sigma=smileVol(K))
  tmp@price
}
# test
print(paste("Call 90: ", round(call.sm(90),3)))
```

```
## [1] "Call 90: 13.746"
```

```
## [1] 0.9999726
```

Calculer la densité  $p(S_T)$  en utilisant la formule de Breeden-Litzenberger.

### Valorisation de call digitaux strike=140

Valoriser un call digital en dehors de l'argent, en utilisant la distribution lognormale (Black-Scholes) et la distribution implicite dérivée du smile.

```
K.digital <- 140
digital.payoff <- function(S) {
  ifelse(S>K.digital,1,0)
}

# Prix Digital - Distribution implicite
```

```
tmp <- sapply(KRange, digital.payoff)
P.digital <- exp(-r*T)*sum(tmp*p.K)
print(paste("Prix digital: ", K.digital, round(P.digital,3)))
```

```
## [1] "Prix digital: 140 0.03"
```

## Prix digital - Black-Scholes $N(d1)$

```
d1 <- (log(S/K.digital) + (r+sigma**2/2)*T)/(sigma*sqrt(T))
P.digital.BS <- pnorm(d1)*exp(-r*T)
print(paste("Prix digital BS: ", round(P.digital.BS,2)))
```

```
## [1] "Prix digital BS: 0.06"
```