Révision : Résumé des méthodes de résolution de circuits
Corrigé

1 Pré-requis et objectif de la séance

Avant cette séance, il est préférable d'avoir lu attentivement cet énoncé et revu les chapitres du cours couvrant la théorie vue dans les 4 premières séances d'exercices en Théorie des Circuits.

Les compétences devant être développées par l'étudiant à la fin de cette séance sont en particulier :

- Analyser un circuit quelconque et combiner vos connaissances afin de sélectionner la procédure adéquate pour le résoudre
- Driller vos connaissances et savoir-faire sur les matières vues précédemment aux séances d'exercices 1 à 4, à savoir : les impédances, les circuits passifs ou réactifs à une ou plusieurs source(s) continue(s) ou alternative(s) en régime transitoire ou établi, les lois de Kirchhoff, les théorèmes de Thévenin et de superposition, l'adaptation d'impédance, le formalisme des phaseurs, etc.

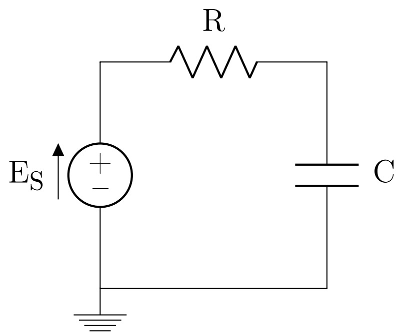
Cet énoncé étant long, vous aurez l'occasion de travailler dessus avec vos assistants à la fin des séances de laboratoire.

2 Exercices

2.1 Quel circuit pour quelle méthode ?

Résolvez algébriquement chacun des circuits ci-dessous, c'est-à-dire déterminez tous les courants et tensions à tout instant.

Question 1. *Résoudre ce circuit où* $E_S = 10V$.

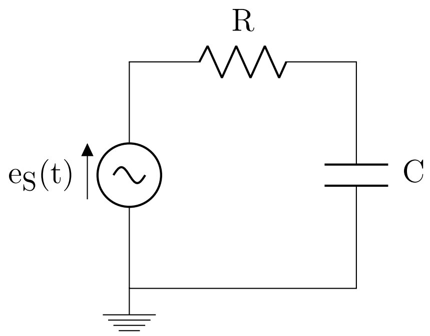


Réponse :
Circuit en régime établi avec source de tension continue.
$E_S = V_R + V_C$
La capacité se comporte comme un circuit ouvert : $I = C\frac{dV_C}{dt} = 0$.
Donc :

$$V_R = 0$$

$$V_C = E_S = 10V$$

Question 2. *Résoudre ce circuit où* $e_S(t) = 10V\sin(\omega t + \phi)$.



Réponse :

Circuit en régime établi avec source de tension sinusoïdale ⇒ utilisation des phaseurs.

$$\underline{E_S} = \underline{V_R} + \underline{V_C} = (R + \frac{1}{j\omega C})\underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\underline{E_S} = \frac{10\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{10\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

$$\underline{V_R} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\underline{E_S} = \frac{10\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))}$$

$$\Rightarrow v_R(t) = \frac{10\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

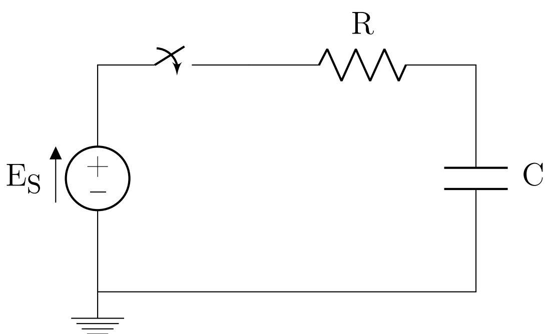
$$\underline{V_C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{E_S} = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi - \mathrm{arctg}(\omega RC))}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

Question 3. *Résoudre ce circuit (*$E_S = 10V$*, capa déchargée avant* $t = 0s$*) lorsque :*

(a) On ferme l'interrupteur en $t = 0s$*.*

(b) On ferme l'interrupteur en $t = 0s$*, puis on l'ouvre en* $t = \frac{T}{2}$*, puis on le referme en* $t = T$*. On suppose la constante de temps* τ *du circuit beaucoup plus faible que* $\frac{T}{2}$*.*



Réponse :
Circuit en régime transitoire puis établi avec source de tension continue

(a) $t \in [0, \frac{T}{2}[$: première charge du condensateur

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = E_S$$

SGEH : $v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}}$
SPEnH : $v_C = E_S$

$$v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}} + E_S$$

CI : $v_C(0) = 0 \Rightarrow A = -E_S$

$$v_C(t) = E_S(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$$

$$v_R(t) = E - v_C(t) = E_S e^{\frac{-t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{E_S}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

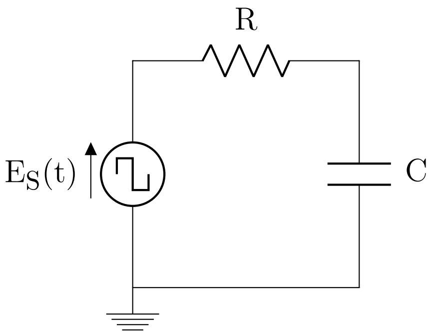
(b) $t > \frac{T}{2}$: le condensateur ne peut se décharger (source de tension idéale) et donc :

$$v_C = E$$

$$v_R = 0$$

$$i = 0$$

Question 4. *Résoudre ce circuit où* $E_S(t) = 10V \ \forall t \in [kT; kT + \frac{T}{2}]$ ou $-10V \ \forall t \in [kT + \frac{T}{2}; kT + T]$ $(k \in \Re)$. *On suppose la constante de temps* τ *du circuit beaucoup plus faible que la demi-période de* $E_S(t)$.



Réponse :
1) $\forall t \in [kT; kT + \frac{T}{2}]$

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 10V$$

SGEH : $v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}}$
SPEnH : $v_C = 10V$

$$v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}} + 10V$$

CI : $v_C(kT^-) = v_C(kT^+) = v_C(t \in [kT + \frac{T}{2}; kT + T]) = -10V \Rightarrow A = -20$

$$\Rightarrow v_C(t) = -20e^{\frac{-t}{RC}} + 10V$$
$$\Rightarrow v_R(t) = E - v_C(t) = 20e^{\frac{-t}{RC}}$$
$$\Rightarrow i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{20}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

2) $\forall t \in [kT + \frac{T}{2}; kT + T]$

$$RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = -10V$$

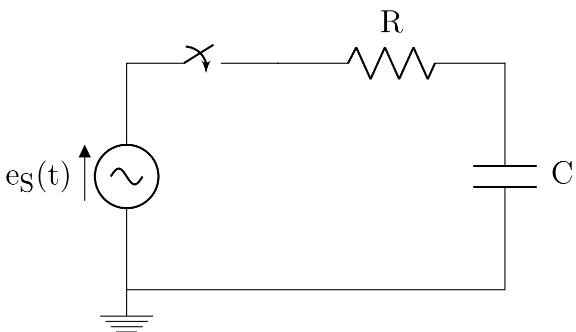
SGEH : $v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}}$
SPEnH : $v_C = -10V$

$$v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}} - 10V$$

CI : $v_C(kT + \frac{T}{2}^-) = v_C(kT + \frac{T}{2}^+) = v_C(t \in [kT; kT + +\frac{T}{2}]) = 10V \Rightarrow A = 20$

$$\Rightarrow v_C(t) = 20e^{\frac{-t}{RC}} - 10V$$
$$\Rightarrow v_R(t) = E - v_C(t) = -20e^{\frac{-t}{RC}}$$
$$\Rightarrow i(t) = \frac{v_R(t)}{R} = \frac{-20}{R}e^{\frac{-t}{RC}}$$

Question 5. *Résoudre ce circuit où* $e_S(t) = 10V\sin(\omega t + \phi)$*. On ferme l'interrupteur au temps* $t = 0$*.*



Réponse :
Circuit en régime transitoire + établi avec source de tension sinusoïdale.
Grâce aux exercices précédents :
SGEH : $v_C = Ae^{\frac{-t}{RC}}$
SPEnH : $v_C = \frac{10}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t + \phi - \text{arctg}(\omega RC))$

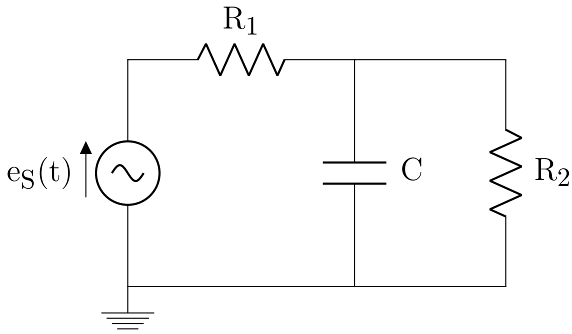
$$\Rightarrow v_C(t) = Ae^{\frac{-t}{RC}} + \frac{10}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t + \phi - \text{arctg}(\omega RC))$$

CI : $v_C(0) = v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0 \Rightarrow A = \frac{10}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\phi + \text{arctg}(\omega RC))$

$$v_C(t) = \frac{10}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t + \phi - \text{arctg}(\omega RC)) + \frac{10}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\phi + \text{arctg}(\omega RC))e^{\frac{-t}{RC}}$$

Il faut ensuite trouver $i(t) = \frac{v_R(t)}{R}$ et $v_R(t) = e_S(t) - v_C(t)$.

Question 6. *Résoudre ce circuit où* $e_S(t) = 10V\sin(\omega t + \phi)$.



Réponse :

Circuit en régime établi avec source de tension sinusoïdale.

Idem que le circuit de la question 2 sauf qu'il faut définir $Z_{eq} = Z_{R_2}//Z_C = \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1+j\omega CR_2}$.

$$\underline{V}_C = \underline{V}_{R_2} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq}+R_1}\underline{E}_S = \frac{\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}}{\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}+R_1}\underline{E}_S = \frac{R_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\underline{E}_S$$

$$\underline{V}_{R_1} = \frac{R_1}{Z_{eq}+R_1}\underline{E}_S = \frac{R_1}{\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}+R_1}\underline{E}_S = \frac{R_1+j\omega CR_1R_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\underline{E}_S$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_S}{R_1+Z_{eq}} = \frac{\underline{E}_S}{R_1+\frac{R_2}{1+j\omega CR_2}} = \frac{1+j\omega CR_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\underline{E}_S$$

$$\underline{I}_C = j\omega C\underline{V}_C = \frac{j\omega CR_2}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\underline{E}_S$$

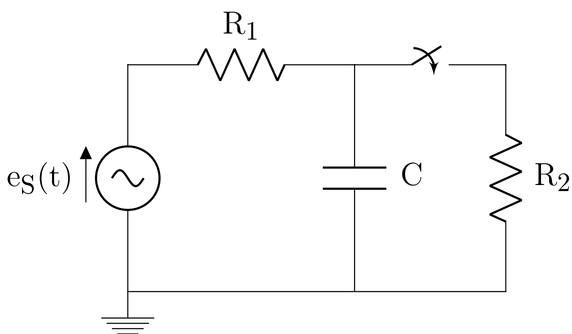
$$\underline{I}_{R_2} = \frac{\underline{V}_{R_2}}{R_2} = \frac{1}{R_1+R_2+j\omega CR_1R_2}\underline{E}_S$$

Il faut ensuite passer du domaine fréquentiel au domaine temporel :

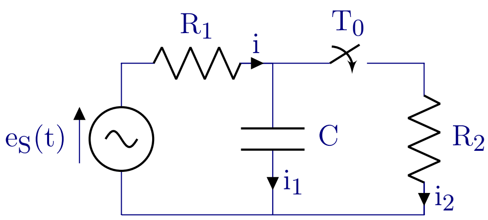
$$v_C(t) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega CR_1R_2)^2}}10\sin(\omega t+\phi-\mathrm{arctg}(\frac{\omega CR_1R_2}{R_1+R_2}))$$

Faire de même pour les autres grandeurs du circuit.

Question 7. *Résoudre ce circuit où* $e_S(t) = 10V\sin(\omega t + \phi)$. *On ferme l'interrupteur au temps* $t = 0$.



Réponse :
Même circuit que celui de l'exercice 2.6 du TP2, sauf que la source n'est pas continue mais sinusoïdale.
Le terme transitoire (SGEH) sera donc de la même forme A, mais pas le terme de régime permanent (SPEnH).



Avant qu'on ne ferme l'interrupteur, la situation est identique à la question 2 de cet exercice :

$$\underline{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\underline{E}_S = \frac{10\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))} \Rightarrow i(t) = \frac{10\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

$$\Rightarrow v_{R_1}(t) = R_1 i(t) = \frac{10\omega R_1 C}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C)^2}} \sin(\omega t + \phi + 90^o - \mathrm{arctg}(\omega R_1 C))$$

$$\underline{V}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{E}_S = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi - \mathrm{arctg}(\omega RC))} \Rightarrow v_C(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi - \mathrm{arctg}(\omega RC))$$

Pour savoir comment évoluent ces grandeurs pour tout temps t, il nous faut résoudre une équation différentielle.
Partons tout d'abord des équations de mailles :

$$e_S = v_{R_1} + v_{R_2} = R_1 i + R_2 i_2$$
$$v_C = v_{R_2}$$
$$i = i_1 + i_2$$

Et les équations constitutives :

$$i_1 = C\frac{dv_C}{dt}$$
$$v_{R_2} = R_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{v_{R_2}}{R_2} = \frac{v_C}{R_2}$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante :

$$e_S = R_1 i_1 + R_1 i_2 + R_2 i_2 = R_1 C\frac{dv_C}{dt} + (R_1 + R_2)\frac{v_C}{R_2}$$

Nous allons commencer par calculer la solution générale de l'équation homogène (SGEH) :

$$P(s) = 0 \Leftrightarrow R_1 Cs + \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} = \frac{-1}{\tau}$$

$$\Rightarrow v_{C_g}(t) = Ae^{st} = Ae^{\frac{-t}{\tau}} = Ae^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}t}$$

où A est une constante

Cette SGEH est donc bien la même que lorsque nous avions résolu ce circuit avec une source de tension continue.

Nous allons ensuite calculer une solution particulière de l'équation non-homogène (SPEnH). Il s'agit de la solution en régime permanent sinusoïdal. Il faut donc utiliser les phaseurs. Ceci correspond à la question 6 de cet exercice mais nous proposons ci-dessous une méthode alternative.

$$\underline{E}_S = \underline{V}_{R_1} + \underline{V}_C$$

$$\underline{V}_C = \underline{V}_{R_2}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Avec les équations constitutives :

$$\underline{I}_1 = j\omega C \underline{V}_C$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_{R_2}}{R_2} = \frac{\underline{V}_C}{R_2}$$

On obtient :

$$\underline{E}_S = \underline{V}_{R_1} + \underline{V}_{R_2} = \underline{V}_{R_1} + \underline{V}_C = R_1\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_2 + \underline{V}_C = (j\omega R_1 C + \frac{R_1}{R_2} + 1)\underline{V}_C$$

$$\Rightarrow \underline{V}_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}\underline{E}_S$$

$$\Rightarrow v_{C_p}(t) = \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}} E_S \sin(\omega t + \phi - \text{arctg}(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}))$$

La solution générale de l'équation non-homogène est la somme des SGEH et SPEnH

$$v_C(t) = v_{C_g}(t) + v_{C_p}(t) = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} + \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}} E_S \sin(\omega t + \phi - \text{arctg}(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}))$$

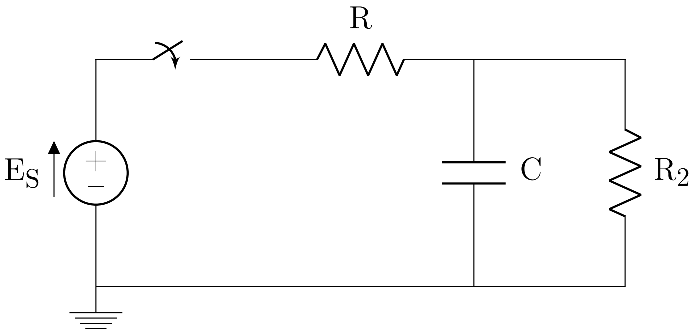
Il reste à déterminer la constante A par la condition initiale. Par la loi de continuité de la tension aux bornes d'un condensateur (loi court terme), on a :

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = \frac{E_S}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\sin(\phi - \text{arctg}(\omega RC))$$

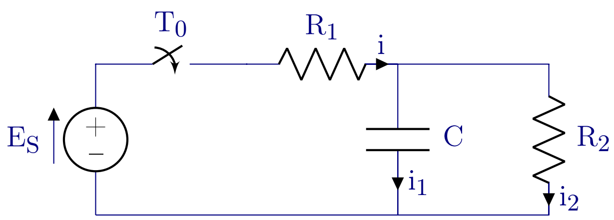
$$\Rightarrow A = \frac{E_S}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\phi - \text{arctg}(\omega RC)) - \frac{R_2}{\sqrt{(R_1+R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}} E_S \sin(\phi - \text{arctg}(\frac{\omega R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}))$$

Une fois l'expression $v_C(t)$ déterminée, il est aisé de trouver les autres grandeurs du circuit : $v_{R_2}(t) = v_C(t)$, $i_2(t) = \frac{v_{R_2}(t)}{R_2}$, $i_1 = C\frac{dv_C}{dt}$, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $v_{R_1}(t) = R_1 i(t)$.

Question 8. *Résoudre ce circuit où* $E_S = 10V$. *On ferme l'interrupteur au temps* $t = 0$ *et le condensateur n'est pas chargé avant ce temps.*



Réponse :
Similaire au circuit de l'exercice 2.6 du TP2. La source de tension est bien continue, mais l'interrupteur ne se situe pas au même endroit.
La principale différence étant de considérer comme C.I. $v_C(0) = 0$ (et non $= E_S$).



Comme précédemment les lois de Kirchhoff et les équations constitutives nous mènent à l'équation différentielle suivante :

$$E_S = R_1 C \frac{dv_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_C$$

La solution générale de l'équation homogène (SGEH) est une nouvelle fois :

$$v_{C_g}(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}$$

où A est une constante

E la solution particulière de l'équation non-homogène (SPEnH) :

$$v_{C_p} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_S$$

La solution générale de l'équation non-homogène est la somme des SGEH et SPEnH

$$v_C(t) = v_{C_g}(t) + v_{C_p} = Ae^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_S$$

Il faut maintenant déterminer la valeur de la constante A. Nous savons que

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0$$

$$\Rightarrow A = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} E_S$$

Et donc :

$$v_C(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_S (1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2} t})$$

On peut alors trouver les autres grandeurs par les équations de base :

$$v_{R_2}(t) = R_2 i_2(t)$$

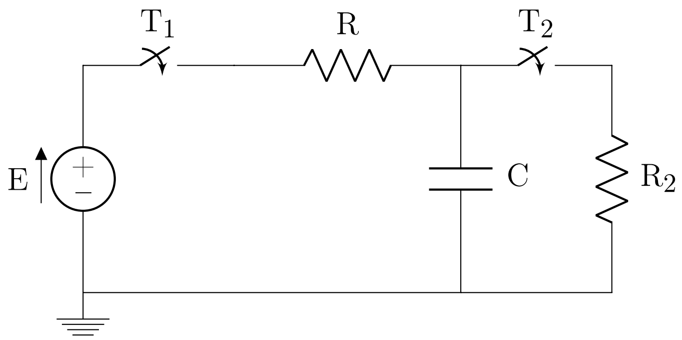
$$v_C(t) = v_{R_2}(t)$$

$$i_1(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$v_{R_1}(t) = R_1 i(t)$$

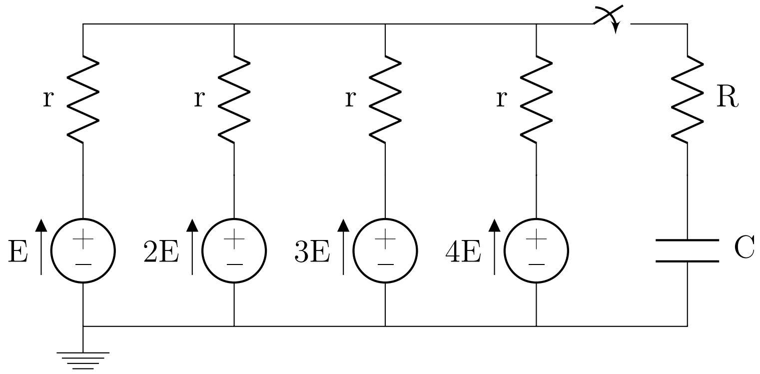
Question 9. *Résoudre ce circuit où* $E_S = 10V$. *On ferme le premier interrupteur au temps* $t = T_1$*, puis le second au temps* $t = T_2$.
On supposera le temps $T_2 - T_1$ *bien plus grands que les constantes de temps de ce circuit.*



Réponse :
Avant T_2, c'est le même circuit que la question 3 de cet exercice : $v_C(t) = E_S(1 - e^{\frac{-t}{RC}})$.
Après T_2, c'est le même exercice que le 2.6 du TP2.

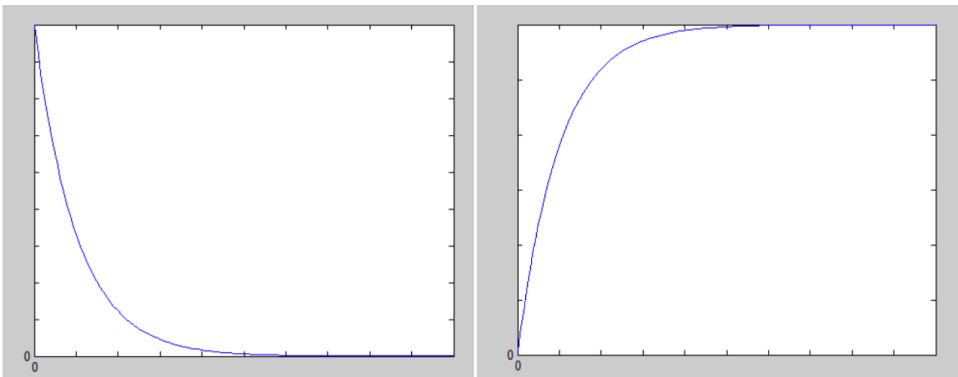
2.2 Question de l'Examen de Janvier 2013

Soit le circuit suivant



Où E = 20V, r = 4Ω, R = 1Ω et 0, 1F.
Avant t = 0, l'interrupteur est ouvert. On ferme l'interrupteur à l'instant t = 0. La charge initiale de la capacité est nulle.

Après une prise de mesure, on a relevé les deux courbes suivantes où l'axe des abscisses est le temps [s] (une graduation vaut 0, 2s) et l'axe des ordonnées est le courant [A] ou la tension [V].



Question 10. *Identifiez l'élément du schéma (source(s), capacité, resistance(s)) auquel se rapportent ces deux graphes.*
Identifiez la grandeur (tension(s) ou courant(s)) présente sur l'ordonnée pour chaque courbe.

Réponse :
Elément : La capacité

A droite :
Il s'agit de la tension aux bornes du condensateur $v_C(t)$.

Vérification numérique après résolution de la Question 1.4. :
$v_C(t) = \frac{5E}{2}(1 - \exp(-\frac{t}{C(R+r/4)})) = 50(1 - \exp(-\frac{t}{0{,}2}))[V]$ avec une tension initiale $v_C(0-) = v_C(0+) = 0V$ et une tension de régime $v_C(\infty) = 50V$

A gauche :
Il s'agit de l'intensité de courant $i(t)$ traversant le condensateur.

Vérification numérique après résolution de la Question 1.4. :
$i(t) = \frac{10E}{4R+r}\exp(-\frac{t}{C(R+r/4)}) = 25\exp(-\frac{t}{0{,}2})[A]$ avec $i(0-) = 0A$, $i(0+) = 25A$ et $i(\infty) = 0A$.

Question 11. *Sur base de ce graphique, déterminer la valeur de la constante de temps τ du circuit.*

Réponse :
La constante de temps τ est par définition le temps nécessaire à la tension aux bornes du condensateur pour atteindre 63% de sa valeur de régime :

$$v_C(\tau) = v_C(\infty)(1 - \exp(-1)) \cong 0,63 v_C(\infty)$$

Graphiquement, il suffit de tracer une ligne horizontale passant par $0,63 \times 50 = 31,5V$.
L'intersection avec le graphique de $v_C(t)$ donne $\tau = 0,2s$.

Il était également possible d'utiliser la méthode graphique de la tangente à l'origine (moins précis).

Vérification numérique après résolution :

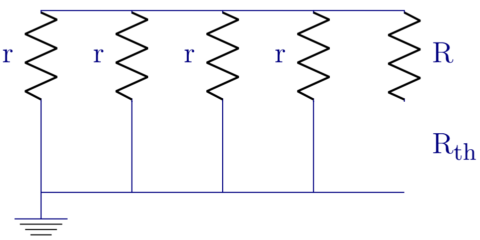
$$\tau = C(R + \frac{r}{4}) = 0,1.(1 + \frac{4}{4}) = 0,2s$$

Question 12. *Déterminez les paramètres R_{th} et V_{th} de l'équivalent de Thévenin du circuit vu aux bornes du condensateur.*

Réponse :

$\boxed{R_{th}}$

Pour trouver la résistance équivalente de Thévenin, il faut court-circuiter les sources du circuit. (1 point)

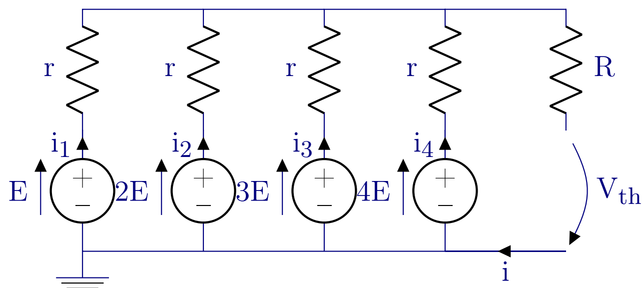


Par les propriétés de la mise en parallèle et de la mise en série de résistances (2 points) :

$$R_{th} = R + (r//r//r//r) = R + \frac{r}{4}$$

$\boxed{V_{th}}$

Pour trouver la tension équivalente de Thévenin, on doit résoudre le circuit à vide (remplacer le condensateur par un circuit ouvert). Le courant passant dans la branche de droite est alors nul et il n'y a pas de chute de potentiel dans la résistance R ($V_R = Ri = 0$). (1 point)



Résolution 1 - Lois de Kirchhoff : (1 point méthode + 3 points résolution)

Soit $i_k(t)$ le courant passant dans la $k^{\text{ième}}$ branche (de gauche à droite).

La mise en parallèle des cinq branches nous permet d'égaler les tensions :

$$V_{th} = E - ri_1 = 2E - ri_2 = 3E - ri_3 = 4E - ri_4$$

Par la loi des noeuds, on a donc :
$i(t) = \sum_{k=1}^{4}(i_k(t)) = 0$
$\Leftrightarrow i_1 + i_1 + \frac{E}{r} + i_1 + \frac{2E}{r} + i_1 + \frac{3E}{r} = 4i_1 + 6\frac{E}{r} = 0$
$\Leftrightarrow i_1 = -\frac{3}{2}\frac{E}{r}$

Et donc finalement :

$$V_{th} = E - ri_1 = \frac{5}{2}E$$

Résolution 2 - Théorème de superposition : (1 point méthode + 3 points résolution)

Soit $E_i (i = 1, 2, 3, 4)$ les 4 sources et V_{th_i} les contributions de chacune d'elle à la tension de Thévenin.

On annule donc toutes les sources sauf E_i pour les 4 cas $(i = 1, 2, 3, 4)$, on calcule chacune des contributions puis on les somme pour avoir V_{th}.

Remarque :
Beaucoup d'entre vous ne se sont pas rendu compte que les 4 branches contenant les sources sont en parallèle et donc permutables. Cela engendre le même développement analytique pour chacune des branches !

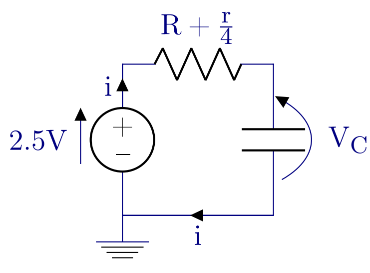
En utilisant la propriété de mise en parallèle des 3 résistances r des 3 branches sans source, on obtient le diviseur résistif respectant l'équation :

$$V_{th_i} = \frac{\frac{r}{3}}{\frac{r}{3} + r} * E_i = \frac{E_i}{4}$$

Et donc :

$$V_{th} = \sum_{i=1}^{4} V_{th_i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{E_i}{4} = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4} = \frac{E + 2E + 3E + 4E}{4} = \frac{5}{2}E$$

Le circuit complet (équivalent de Thévenin + capa) peut donc être représenté par un circuit RC comme suit :



Question 13. *Maintenant, résolvez le circuit analytiquement (méthode au choix) afin de déterminer la tension* $v_C(t)$ *aux bornes du condensateur ainsi que l'intensité de courant* $i(t)$ *le traversant pour tout temps* $t \geq 0$.

Réponse :

Remarque :
Vous avez été nombreux a utiliser les phaseurs pour résoudre ce circuit. Pour rappel, les phaseurs dévoilent toute leur utilité lorsqu'on est dans une situation en régime permanent avec sollicitation(s) sinusoïdale(s). Ici, on cherche à trouver les solutions de régime permanent mais aussi du transitoire ! De plus, les sources de tension ici sont en continu. On a donc un $\omega = 0\text{rad/s}$!

METHODE 1 (utiliser l'équivalent de Thévenin de la question précédente)

L'équivalent de Thévenin trouvé précédemment nous donne l'équation de maille : (1 point)

$$V_{th} = R_{th}i + v_C \Leftrightarrow \frac{5}{2}E = (R + \frac{r}{4})i + v_C$$

La loi du condensateur étant $i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$ (1 point), on obtient l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{4R + r}{4}C\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{5E}{2}$$

Solution générale de l'équation homogène $\frac{4R+r}{4}C\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$: (2 points)

$$\frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{C(R + \frac{r}{4})}dt$$

Puis on intègre :

$$\int \frac{dv_C}{v_C} = -\frac{1}{C(R + \frac{r}{4})}\int dt \Leftrightarrow \ln(v_C) = -\frac{1}{C(R + \frac{r}{4})}t + \text{constante}$$

$$\Leftrightarrow v_{C_g}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{C(R + \frac{r}{4})}\right)$$

Solution particulière de l'équation non-homogène $\frac{4R+r}{4}C\frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{5E}{2}$: (2 points)
Il s'agit de la solution de régime, donc $\frac{dv_c}{dt} = 0$ (circuit ouvert) et :

$$v_{C_p} = \frac{5E}{2}$$

Solution générale de l'équation non-homogène :

$$v_C(t) = v_{C_g}(t) + v_{C_p} = K\exp\left(-\frac{t}{C(R + \frac{r}{4})}\right) + \frac{5E}{2}$$

La charge initiale nulle et la loi de continuité en tension d'un condensateur nous donnent (1 point) :

$$v_C(0+) = v_C(0-) = 0$$

Ce qui permet de déterminer la constante d'intégration K :

$$v_C(0) = K + \frac{5E}{2} = 0 \Leftrightarrow K = -\frac{5E}{2}$$

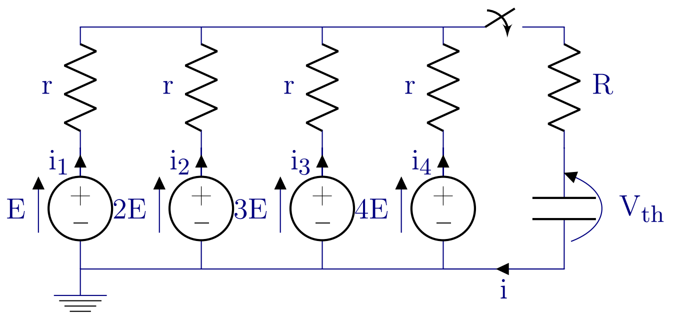
Réponses finales : (1 point)

$$\Rightarrow \boxed{v_C(t) = \frac{5E}{2}(1 - \exp(-\frac{t}{C(R+\frac{r}{4})}))}$$

Pour le courant, on a $i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt}$:

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{10E}{4R+r}\exp(-\frac{t}{C(R+\frac{r}{4})})}$$

METHODE 2 (en cas d'échec à la question précédente)



Soit $i_k(t)$ le courant passant dans la $k^{ième}$ branche (de gauche à droite) tel que le courant passant dans le condensateur $i(t) = \sum_{k=1}^{4}(i_k(t))$ par la loi des noeuds.

La mise en parallèle des cinq branches nous permet d'égaler les tensions :

$$E - ri_1 = 2E - ri_2 = 3E - ri_3 = 4E - ri_4 = v_c + Ri$$

Et donc, on a :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_1 + i_1 + \frac{E}{r} + i_1 + \frac{2E}{r} + i_1 + \frac{3E}{r} = 4i_1 + 6\frac{E}{r}$$

En inversant l'équation :

$$i_1 = \frac{i}{4} - \frac{3}{2}\frac{E}{r}$$

De plus :

$$v_C + Ri = E - ri_1 \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

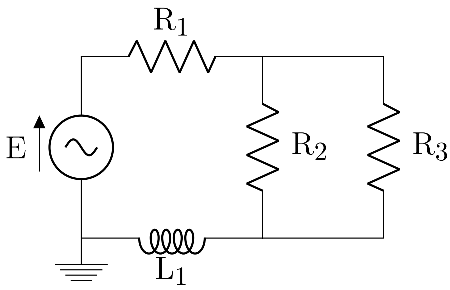
Donc :

$$v_C + Ri = E - r\frac{i}{4} - \frac{3}{2}E$$

$$\Leftrightarrow \frac{4R+r}{4}C\frac{dv_C}{dt} + v_C = \frac{5E}{2}$$

Et on retombe bien sur l'équation différentielle vue précédemment.

2.3 Question de l'Examen de Janvier 2013



Soit le circuit représenté ci-dessus dont les paramètres sont :

— $\underline{E} = 5\mathrm{V} \times e^{j\phi}$ (on considère donc le courant comme référence, c'est-à-dire $\underline{I} = I \times e^{j0^o}$)

— $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ et $R_3 = 1,25\Omega$

— $L_1 = 9,55\mathrm{mH} = \frac{30}{\pi}\mathrm{mH}$

— $f = 50\mathrm{Hz}$

Question 14. *Que vaut le module du courant circulant dans* L_1 *?*

Réponse :

$$Z_{tot} = R_1 + R_2//R_3 + j\omega L_1 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + j\omega L_1$$

$$= 3 + \frac{5 \times 1,25}{5 + 1,25} + j2\pi 50 \times \frac{30}{\pi} = 4 + j3 = \sqrt{4^2 + 3^2} \times e^{\arctan(\frac{3}{4})} = 5 \times e^{j36,9^o}$$

Question 15. *Que vaut le déphasage* ϕ *entre la tension* $\underline{E}$ *et le courant débité par la source ?*

Réponse :

Comme on a trouvé :

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{Z_{tot}} = 1\mathrm{A}e^{j(\phi - 36,9^o)}$$

On en déduit que $\phi = 36,9^o$ tel que :

$$\underline{I} = I \times e^{j0^o} = 1\mathrm{A}$$

Autre méthode :

$$Z_{tot} = \frac{\underline{E}}{\underline{I}} \Rightarrow \phi = \phi_E - \phi_I = \mathrm{Arg}(Z_{tot}) = \arctan(\frac{\omega L_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}) = \arctan(\frac{3}{4}) = 36,9^o$$

Question 16. *Calculer les phaseurs de chacune dans 5 tensions suivantes :* $\underline{\mathrm{E}}$, $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_1}$, $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_2}$, $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_3}$ *et* $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}_1}$ *?*

Réponse :

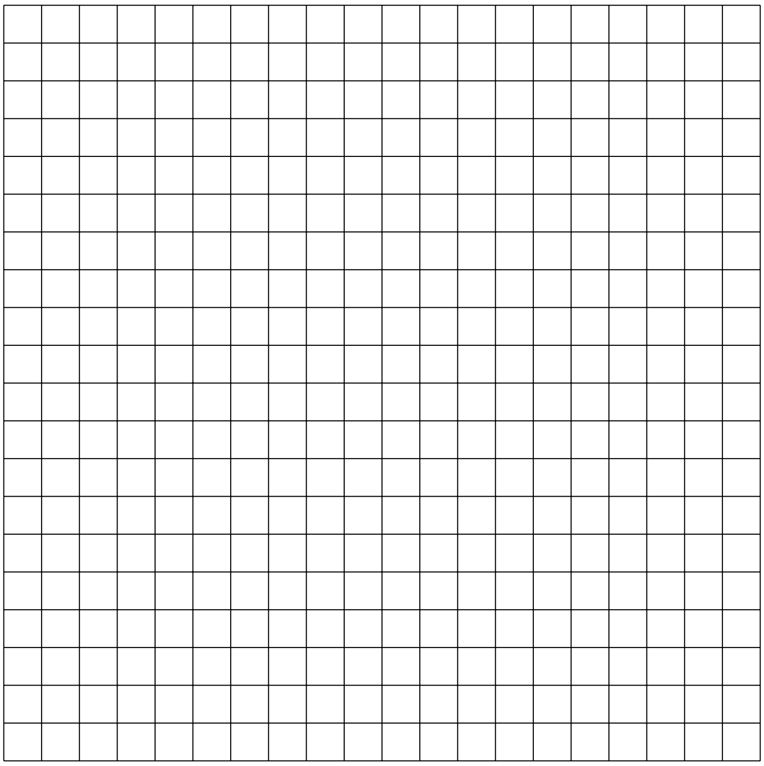
$$\underline{\mathrm{E}} = \mathrm{Z}_{\mathrm{tot}}\underline{\mathrm{I}} = 5\mathrm{V} \times \mathrm{e}^{36,9^{\mathrm{o}}}$$

$$\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_1} = \mathrm{R}_1\underline{\mathrm{I}} = 3\mathrm{V}$$

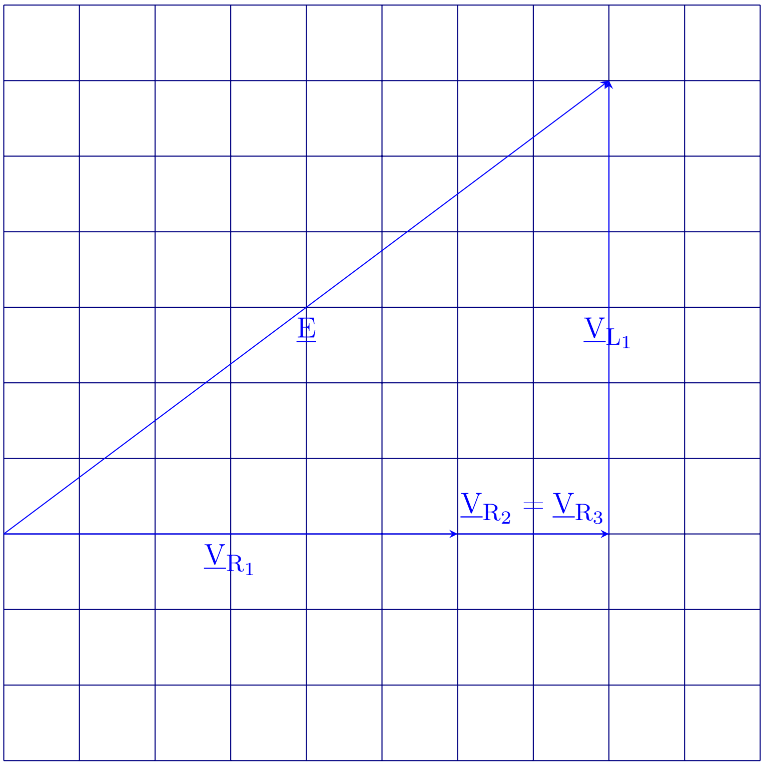
$$\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_2} = \underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_3} = \frac{\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3}{\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3}\underline{\mathrm{I}} = 4\mathrm{V}$$

$$\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{L}_1} = \mathrm{j}\omega\mathrm{L}_1\underline{\mathrm{I}} = \mathrm{j}3 = 3\mathrm{V} \times \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^{\mathrm{o}}}$$

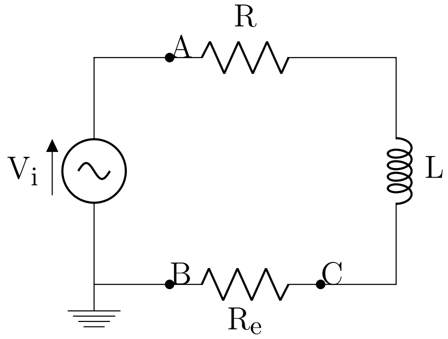
Question 17. *Dessiner le diagramme des phaseurs des 5 tensions présentés dans le circuit en utilisant la tension* $\underline{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}_2}$ *comme référence.*
Proposer un diagramme cohérent si vous n'avez pas su calculer les différentes tensions.



Réponse :



2.4 Question de l'Examen d'Août 2014



Avec $R = 2\Omega$, $R_e = 1\Omega$, $L = 5,5mH$ et $f = 50Hz$.

Question 18. *En utilisant la tension* $\underline{V}_{CB} = 1V * e^{j0^o}$ *comme référence, donner l'expression des phaseurs* $\underline{V}_{AB}$ *et* $\underline{V}_{AC}$.

Réponse :
On trouve $\underline{I}$ grâce à $\underline{V}_{CB}$ qui est donné :

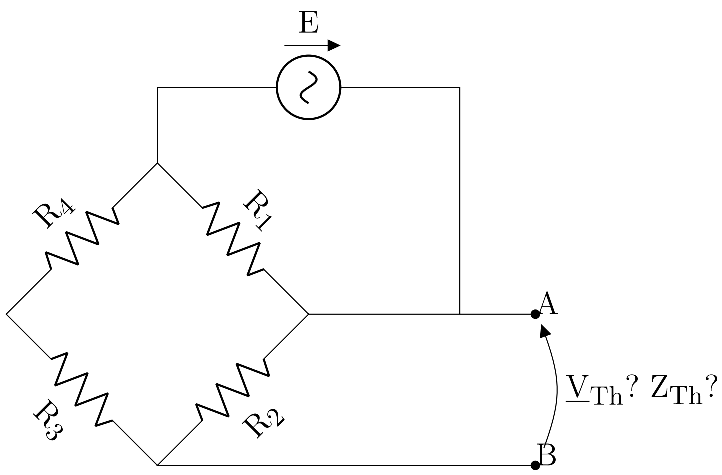
$$\underline{I} = \frac{\underline{V}_{CB}}{R_e} = 1A * e^{j0^o}$$

Connaissant le courant et les impédances, par la loi d'Ohm :

$$\underline{V}_{AB} = (R + R_e + j\omega L)\underline{I} = (R + R_e + j\omega L)\frac{\underline{V}_{CB}}{R_e} = 3 + j2\pi 50 * 5,5 * 10^{-3} = 3 + j\sqrt{3}$$

$$\underline{V}_{AC} = (R + j\omega L)\frac{\underline{V}_{CB}}{R_e} = 2 + j2\pi 50 * 5,5 * 10^{-3} = 2 + j\sqrt{3}$$

2.5 Question 7



Soit le circuit représenté ci-dessus dont deux nœuds ont été nommés A et B pour la clarté de l'énoncé et dont les paramètres sont donnés ci-dessous :

- $\underline{E} = 6V.e^{j0°}$
- $R_1 = 5\Omega, R_2 = 4\Omega, R_3 = 6\Omega, R_4 = 10\Omega$

Question 19. *Calculer l'équivalent de Thévenin vu par l'accès AB.*

Réponse :
La source $\underline{V}_{Th}$ se calcule en trouvant la tension à l'accès AB à vide.
Il suffit de calculer le diviseur d'impédance :

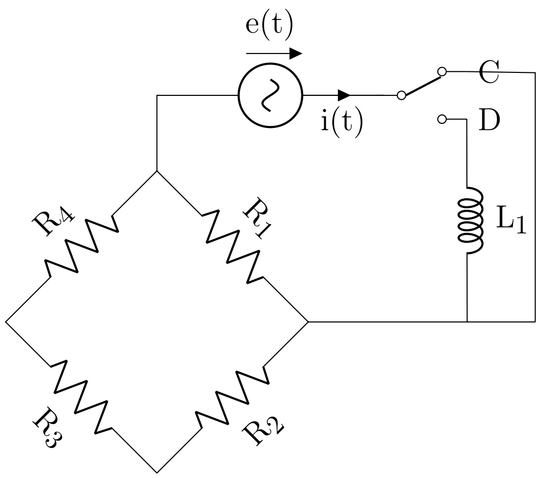
$$V_{AB} = V_{Th} = \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4} V_i = \frac{6}{5} V$$

$$V_{Th}$$

Z_{Th} se calcule en court-circuitant la source. On a :

$$Z_{Th} = R_2 // (R_3 + R_4) = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{A}{R_3 + R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \frac{16}{5}$$

$$Z_{Th} = \frac{16}{5} = 3,2V$$



Soit le circuit ci-dessus repris de la question 1, pour lequel : $L_1 = 6,37\text{mH} = \frac{20}{\pi}\text{mH}$ et $f = 50\text{Hz}$.

— Avant l'instant $t_1 = 0$, la source $e(t) = 0\text{V}$ et l'interrupteur est connecté à la borne C.

— Au temps $t_1 = 0$, on active la source $e(t) = 6\text{V}\sin(\omega t)$ et l'interrupteur reste connecté à C.

— Au temps $t_2 = 100\text{ms}$, l'interrupteur passe (de manière instantanée) de la borne C à la borne D.

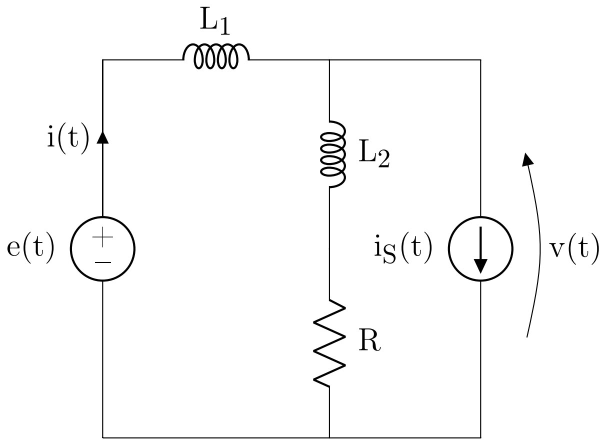
Question 20. *Calculer le courant* $i(t)$ *délivré par la source* $e(t)$ *pour tout temps* t*.*

Réponse :

1. de t_1 à t_2, il n'y a que des résistances, donc pas de transitoire. On calcule la résistance équivalente du montage :
$$R = R_1//(R_2 + R_3 + R_4) = 4\Omega$$
Et donc,
$$i(t \in [t_1; t_2]) = \frac{3}{2}\sin(\omega t)$$
2. en $t \geq t_2$. On devra connaitre les conditions de $i(t_2)$. Facile car $\sin(\omega t_2) = 0$.
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} \Rightarrow i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + i_P$$
$$\underline{I}_P = \frac{\underline{E}}{R + j\omega L} \Rightarrow i_P(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t - \theta)$$
avec
$$\theta = \arctan(\frac{\omega L}{R})$$
Avec les conditions initiales, on obtient :
$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}(\sin(\omega t - \theta) - e^{-\frac{R}{L}t}\sin(\theta))$$

En conclusion :
$$i(t) = 1,5\text{A}\sin(\omega t) \text{ pour } t \in [0; 100\text{ms}]$$
$$i(t) = 2\sqrt{5}\text{A}[\sin(\omega t - 26,6^{circ}) + \sin(26,6^{circ})e^{-2t}]) \text{ pour } t \in [100\text{ms}; \infty]$$

2.6 Question de l'Examen d'Août 2014



Soit le circuit représenté ci-dessus comportant :

- Une source de tension $e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t)$
  avec $E_0 = 3V$, $E_1 = 5V$ et $\omega_1 = 1000 \text{rad/s}$;
- Une source de courant $i_s(t) = I_s \sin(\omega_2 t + \phi)$
  avec $I_S = 1A$, $\omega_2 = 2000 \text{rad/s}$ et $\phi = 30°$;
- $R = 1\Omega$, $L_1 = 2mH$, $L_2 = 1mH$.

On cherche à déterminer la tension $v(t)$ en régime établi.

Question 21. *Quelles vont être les étapes de votre démarche afin de résoudre ce circuit et de trouver la tension* $v(t)$ *en régime établi ?*
Détaillez votre démarche sans recourir aux équations.

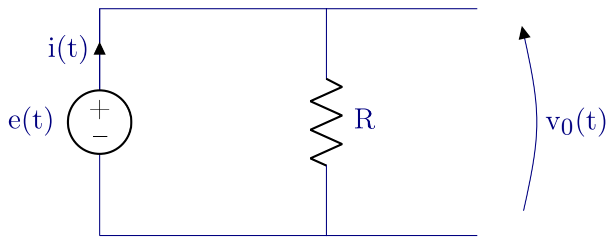
Réponse :

- **Définir les courants et tensions** sur le schéma **en respectant les conventions** générateur/récepteur
- Utiliser le **principe de superposition** : **pour chacun des 3 cas** ($\omega = 0$, $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$) :
  - **Simplification du schéma**
    Inductance = court-circuit en continu, source de tension nulle = court-circuit, source de courant nulle = circuit ouvert.
  - **Exprimer les grandeurs en phaseurs** car nous cherchons la tension de régime
  - **Equations de Kirchhoff**
    Loi des mailles : La somme algébrique des tensions aux bornes des branches constituant une maille est nulle.
    Loi des noeuds : La somme algébrique des courants quittant un noeud est nulle.
  - **Résolution de l'équation/du système d'équations** par les méthodes algébriques classiques.
  - Exprimer le résultat **dans le domaine temporel**.
- Effectuer la **superposition**, c'est-à-dire sommer les 3 réponses temporelles.

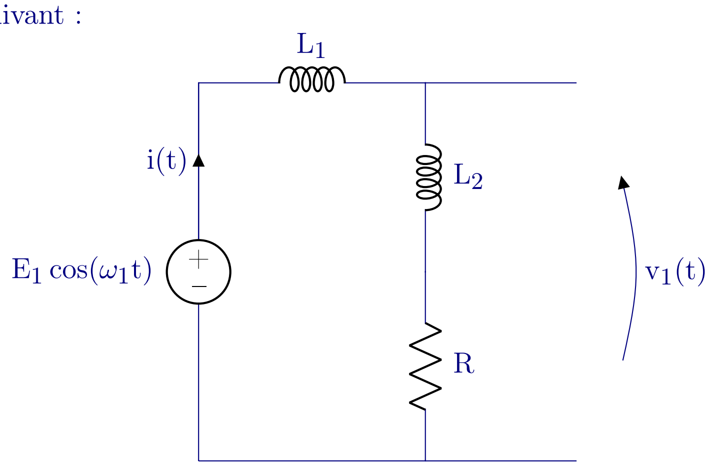
Question 22. *Déterminer la tension* $\mathrm{v(t)}$ *en régime établi.*
Pour vos calculs *: Ne pas déterminer les valeurs des arctangentes (laisser sous la forme* $\arctan \mathrm{x}$*) et utiliser si besoin les approximations suivantes :* $\sqrt{185} \approx 14$ *et* $\frac{4}{37} \approx 0,1$.

Réponse :
Puisque le circuit comporte 3 sources de pulsations différentes, l'utilisation du théorème de superposition est nécessaire.

$\boxed{\omega = 0\mathrm{rad/s}}$
En régime continu, les inductances se comportent comme des courts-circuits. En ne gardant que la source de tension $\mathrm{E_0}$ et en annulant les deux autres sources, on obtient en phaseurs : $\mathrm{v_0 = RI = E_0 = 3V}$



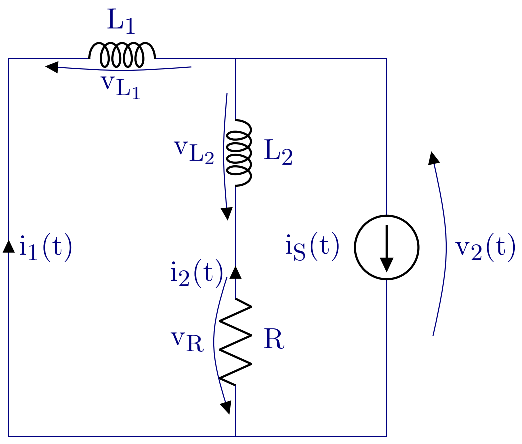
$\boxed{\omega = \omega_1 = 1000\mathrm{rad/s}}$
En ne gardant que la source de tension $\mathrm{E_1 \cos(\omega_1 t)}$ et en annulant les deux autres sources, on obtient le circuit suivant :



Ce diviseur impédant donne l'expression suivante :
$\underline{\mathrm{V}}_1 = \frac{\mathrm{R+j\omega_1 L_2}}{\mathrm{R+j\omega_1(L_1+L_2)}}\underline{\mathrm{E}}_1$
$\underline{\mathrm{V}}_1 = \frac{1+\mathrm{j}}{1+3\mathrm{j}}\underline{\mathrm{E}}_1 = \frac{4-2\mathrm{j}}{10}\underline{\mathrm{E}}_1 = \frac{2-\mathrm{j}}{5}\underline{\mathrm{E}}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\exp(-\mathrm{j}\arctan\frac{1}{2})\mathrm{E}_1\exp(\mathrm{j}0°) = \sqrt{5}\exp(-\mathrm{j}\arctan\frac{1}{2})$

Et donc, dans le domaine temporel :
$\mathrm{v_1(t)} = \sqrt{5}\cos(1000\mathrm{t} - \arctan\frac{1}{2})$

$\boxed{\omega = \omega_2 = 2000\mathrm{rad/s}}$
En ne gardant que la source de courant $\mathrm{i_s(t) = I_s \sin(\omega_2 t + \phi)}$ et en annulant les deux autres sources, on obtient le système de trois équations à trois inconnues suivant (2 équations de maille et 1 équation de noeud) :



$$\underline{V}_{L_1} = \underline{V}_R + \underline{V}_{L_2}$$
$$\underline{V}_2 = -(\underline{V}_R + \underline{V}_{L_2})$$
$$\underline{I}_s = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

Donc, $\underline{V}_2 = -\underline{V}_{L_1} = -j\omega_2 L_1 \underline{I}_1$ et il nous suffit de trouver $\underline{I}_1$ en fonction de $\underline{I}_S$.

$$\underline{V}_{L_1} = \underline{V}_R + \underline{V}_{L_2}$$
$$\Rightarrow j\omega_2 L_1 \underline{I}_1 = (R + j\omega_2 L_2)\underline{I}_2 = (R + j\omega_2 L_2)(\underline{I}_S - \underline{I}_1)$$
$$\Rightarrow (R + j\omega_2(L_1 + L_2))\underline{I}_1 = (R + j\omega_2 L_2)\underline{I}_S$$
$$\Rightarrow \underline{I}_1 = \frac{R + j\omega_2 L_2}{R + j\omega_2(L_1 + L_2)}\underline{I}_S$$
$$\Rightarrow \underline{V}_2 = -\underline{V}_{L_1} = -j\omega_2 L_1 \underline{I}_1 = -j\omega_2 L_1 \frac{R + j\omega_2 L_2}{R + j\omega_2(L_1 + L_2)}\underline{I}_S$$

Numériquement :

$$\underline{V}_2 = -4j\frac{1+2j}{1+6j}\underline{I}_S = 4\frac{(2-j)}{1+6j}\underline{I}_S = 4\frac{(2-j)(1-6j)}{1^2+6^2}\underline{I}_S = -4\frac{4+13j}{37}\underline{I}_S$$

Avec le phaseur $\underline{I}_s = I_s e^{j\phi} = 1Ae^{j30^\circ}$, on obtient :

$$\underline{V}_2 = -\frac{4}{37}\sqrt{4^2+13^2}e^{(j(30^\circ + \arctan\frac{13}{4}))} = -\frac{4}{37}\sqrt{185}e^{(j(30^\circ + \arctan 3{,}25)} \approx -1{,}4e^{(j(30^\circ + \arctan 3{,}25)}$$

Et donc, dans le domaine temporel :

$$v_2(t) = -1{,}4\sin(2000t + 30^\circ + \arctan 3{,}25)$$

Par le théorème de superposition, on a la solution finale $v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t)$:

$$v(t) = 3 + \sqrt{5}\cos(1000t - \arctan\frac{1}{2}) - 1{,}4\sin(2000t + 30^\circ + \arctan 3{,}25)$$