Électricité et électronique
TP1b : Circuits réactifs en régime sinusoïdal permanent
Corrigé

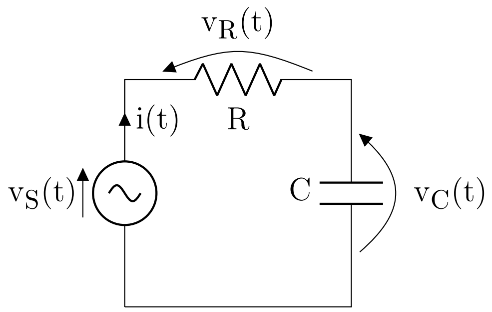
Pré-requis :

Avant la séance, vous aurez lu attentivement cet énoncé. Vous aurez par ailleurs relu les slides des 2 premiers cours, ainsi que les chapitres et sections suivants :

1. Chapitre 5 - Résoudre un circuit : procédure de base et accélérateur
   (a) Vocabulaire lié aux circuits
   (b) Lois de Kirchhoff
   (c) Procédure canonique en 6 étapes
   (d) Illustration : diviseur résistif
   (e) Équivalences série et parallèle
2. Chapitre 7 - Résoudre un circuit réactif dans le domaine fréquentiel
   (a) Analyse fréquentielle : circuits linéaires en régime sinusoïdal
   (b) Caractérisation des fonctions périodiques
   (c) Phaseurs
   (d) Impédances et admittances

1 Exercice 1

Sur le circuit suivant, excité par une tension sinusoïdale, on a mesuré l'amplitude des tensions $v_S(t)$ et $v_R(t)$. Cela donne respectivement 500mV et 300mV.



Question 1.1.

On demande d'en déduire l'amplitude de la tension $v_C(t)$.

Réponse :
On pourrait penser que l'amplitude de $v_C(t)$ est la différence des deux : $\widehat{V}_C = \widehat{V}_S - \widehat{V}_R = 500\text{mV} - 300\text{mV} = 200\text{mV}$.
Ce n'est pas le cas ! En effet les deux sinusoïdes n'ont pas la même phase : comme on le verra à l'exercice suivant, la tension $v_C(t)$ est en retard de 90° sur la tension $v_R(t)$, qui est elle en phase avec le courant. Ceci nous permet d'emblée poser un point important : on ne peut pas sommer les amplitudes des tensions ou des courants ! En revanche, on peut sommer les équations temporelles ou les phaseurs qui leur correspond.
On s'aperçoit que l'on obtient un triangle rectangle, et que donc $\widehat{V}_C = \sqrt{\widehat{V}_S^2 - \widehat{V}_R^2} = 400\text{mv}$.
Par ailleurs la phase de $v_S(t)$ est donnée par $\Phi = -\text{atan}(\frac{\widehat{V}_C}{\widehat{V}_R})$.

Question 1.2.

Repartez du même circuit. On donne cette fois le courant parcourant la boucle : $i(t) = 10^{-3} \times \cos(2,5 \times 10^4 t)$ [A]. Vous savez également que $R = 300\Omega$ et que $C = 100\text{nF}$. En vous basant sur les lois des dipôles, trouvez la variation temporelle de Vs. On demande une réponse de la forme $v_S(t) = A \times \cos(\omega t + \Phi)$ [V].

Réponse :
Méthode 1 : résolution dans le domaine temporel
Par définition :

$$v_R(t) = Ri(t) = 0,3 \times \cos(2,5 \times 10^4 t) \text{ [V]}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{10^{-3}}{2,5 \times 10^4 C}\sin(2,5 \times 10^4 t) = 0,4 \times \sin(2,5 \times 10^4 t) \text{ [V]}$$

Question 1.2 suite.

On a :

$$v_S(t) = 0,3 \times \cos(2,5 \times 10^4 t) + 0,4 \ \times \sin(2,5 \times 10^4 t)$$

D'après les formules de Simpson :

$$\cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b) = \cos(a + b)$$

$$\Rightarrow A \times (\cos(\omega t) \times \cos(\Phi)) - \sin(\omega t) \times \sin(\Phi)) = A \times \cos(\omega t + \Phi)$$

On en tire $A \times \cos(\Phi) = 0,3V$ et $A \times \sin(\Phi) = -0,4V$, soit encore

$$A = \widehat{V}_S = \sqrt{(0,3V)^2 + (0,4V)^2} = 0,5V$$

$$\Phi_{V_S} = -\text{atan}(\frac{0,4V}{0,3V}) = -53^o = -0,93\text{rad}$$

$$\Rightarrow v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(2,5 \times 10^4 t + \Phi_{V_S})$$

Méthode 2 : résolution dans le domaine fréquentiel (phaseurs)

$$\underline{V}_S = \underline{V}_R + \underline{V}_C = Z_R\underline{I} + Z_C\underline{I} = (R + \frac{1}{j\omega C})\underline{I} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} \times \underline{I}$$

$$= \frac{|1 + j\omega RC|}{|j\omega C|} e^{j(\text{atan}(\frac{\omega RC}{1}) - \text{atan}(\frac{\omega C}{0}))} |\underline{I}| e^{j\Phi_I}$$

$$\Rightarrow \widehat{V}_S = |\underline{V}_S| = \frac{|1 + j\omega RC|}{|j\omega C|} |I| = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{\omega C} |I| = \frac{\sqrt{1 + (0,75)^2}}{2,5 \times 10^{-3}} \times 10^{-3} = 0,5V$$

$$\Rightarrow \Phi_{V_S} = \text{Arg}(\underline{V}_S) = \text{atan}(\frac{\omega RC}{1}) - \text{atan}(\frac{\omega C}{0}) + \Phi_I = \text{atan}(0,75) - 90 + 0$$

$$= 37 - 90 = -53 = -0,93\text{rad}$$

Cela donne donc bien les mêmes valeurs que celles obtenues dans le domaine temporel :

$$\Rightarrow v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(2,5 \times 10^4 t + \Phi_{V_S})$$

Question 1.3.

Comparez vos réponses des points 1 et 2. Qu'en concluez vous ?

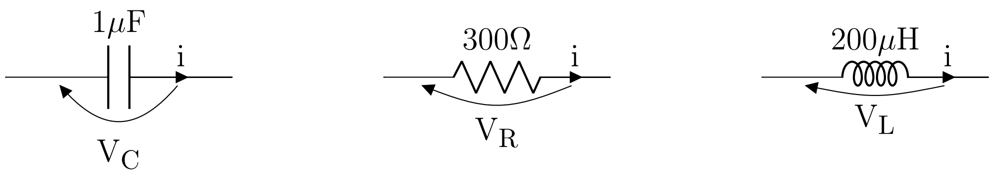
Réponse :

On constate que les réponses sont identiques. En revanche le raisonnement tenu pour les phaseurs est manifestement plus simple. Ces derniers permettent par ailleurs une représentation simple et condensée ne faisant plus apparaître le temps.

Et c'est normal : lorsque l'on excite un circuit linéaire par une sinusoïde, toutes les tensions et courants seront aussi des sinusoïdes d'amplitude et de phase diverses, mais de même fréquence. De ce fait il n'est pas la peine d'alourdir les calculs : l'amplitude et la phase suffisent pour décrire entièrement un signal.

2 Exercice 2

Voici 3 dipôles :



Question 2.1.

On fait passer un courant de 20mA d'amplitude et d'une fréquence de 1591Hz dans ces dipôles. Pour chacun d'entre eux, calculez le phaseur de la tension à ses bornes, tracez ce dernier dans le plan complexe et déduisez-en l'impédance du dipôle.

Réponse :
Le courant est de la forme $i(t) = \widehat{I}\cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f$, et son phaseur est

$$\underline{I} = |\underline{I}|e^{jArg(\underline{I})} = \widehat{I}e^{j\Phi_I} = 20 \times 10^{-3}e^{j0} = 20 \times 10^{-3}\ [A]$$

Prenons, $i(t) = \widehat{I}\cos(\omega t + \Phi_I) = 20 \times 10^{-3}\cos(2\pi \times 1591 \times t)$. On prend le courant comme référence de phase : $\Phi_I = 0$.
Par la loi du **condensateur** :

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{\omega C}\widehat{I} \times \sin(\omega t) = \frac{1}{\omega C}\widehat{I} \times \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

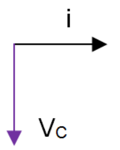
Le phaseur associé est

$$\underline{V}_C = \frac{1}{\omega C}\widehat{I}e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j\frac{1}{\omega C}\widehat{I} = \frac{1}{j\omega C}\widehat{I} = \frac{1}{j \times 2\pi \times 1591 \times 10^{-6}}20 \times 10^{-3}$$

$$= -j100 \times 20 \times 10^{-3} = -j2\ [V]$$

L'impédance de la capacité est donc

$$Z_C = \frac{\underline{V}_C}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \times 2\pi \times 1591 \times 10^{-6}} = -j\frac{1}{10^4 \times 10^{-6}} = -j100\Omega$$

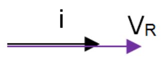


Par loi de la **résistance** :

$$v_R(t) = Ri(t) = R\widehat{I}\cos(\omega t)$$

Le phaseur associé est $\underline{V}_R = R\underline{I} = 300 \times 20 \times 10^{-3} = 6\ [V]$.
L'impédance d'une résistance est donc $Z_R = \frac{\underline{V}_R}{\underline{I}} = 300\Omega$

Question 2.1 suite.



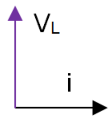
Par la loi de l'**inductance** :

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\omega L \sin(\omega t) = \omega L \hat{I} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Le phaseur associé est

$$\underline{V}_L = \omega L \hat{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L \underline{I} = j \times 2\pi \times 1591 \times 200 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-3} = j4 \times 10^{-2} \text{ [V]}$$

L'impédance de l'inductance est donc $Z_L = æ\omega L = j \times 10^4 \times 200 \times 10^{-6} = j2\Omega$.



Question 2.2.

Par quoi peut-on remplacer un condensateur excité par un signal à très basse fréquence ? Et à très haute fréquence ?

Réponse :
On sait que $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$.

Pour une fréquence très basse, $\omega \to 0 \Rightarrow Z_C \to \infty$.
On peut donc la remplacer par un circuit ouvert (analogie avec la loi long terme : le courant continu est nul dans une capacité).

Pour une fréquence très élevée, $\omega \to \infty \Rightarrow Z_C \to 0$.
On peut donc la remplacer par un court-circuit.

Question 2.3.

Par quoi peut-on remplacer une inductance excitée par un signal à très basse fréquence ? Et à très haute fréquence ?

Réponse :
On sait que $Z_L = j\omega L$.

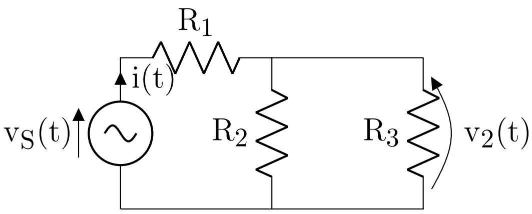
Pour une fréquence très basse, $\omega \to 0 \Rightarrow Z_L \to 0$.
On peut donc la remplacer par un court-circuit (analogie avec la loi long terme : la tension continue aux bornes d'une inductance est nulle).

Question 2.3 suite.

Pour une fréquence très élevée :$\omega \to \infty \Rightarrow Z_L \to \infty$,
On peut donc la remplacer par un circuit ouvert.

3 Exercice 3

Soit le circuit suivant où $v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(\omega t + \Phi_{V_S})$, $\widehat{V}_S = 2V$, $\omega = 10^6 rad/s$, $\Phi_{V_S} = 20$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ et $R_3 = 200\Omega$.



Question 3.1.

Que vaut la tension $v_2(t)$ de ce circuit ?

Réponse :
En mettant R_2 et R_3 en parallèle, on obtient la résistance équivalente

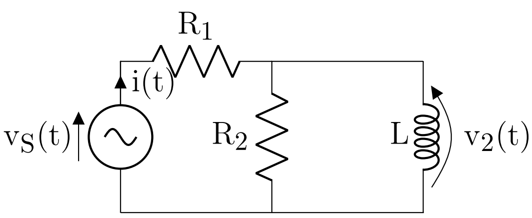
$$R_{23} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 100\Omega$$

La tension $v_2(t)$ est alors celle au borne de R_{23}.
Par le diviseur résistif :

$$v_2(t) = \frac{R_{23}}{R_{23} + R_1} v_S(t) = \frac{100}{200} = 0,5 v_S(t) = \widehat{V}_2 \times \cos(\omega t + \Phi_{V_2})$$

Avec $\widehat{V}_2 = 1V$, $\omega = 10^6 rad/s$, et $\Phi_{V_2} = 20$.

Soit le circuit suivant où $v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(\omega t + \Phi_{V_S})$, $\widehat{V}_S = 2V$, $\omega = 10^6 rad/s$, $\Phi_{V_S} = 20$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 137\Omega$ et $L = 100\mu F$.



Question 3.2.

Que vaut la tension $v_2(t)$ de ce circuit ?

Réponse :
Essayons de retrouver une forme semblable au diviseur résistif, mais dans le domaine fréquentiel (avec les phaseurs).
En mettant R_2 et L en parallèle, on obtient l'impédance équivalente :

$$Z_{eq} = \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}$$

La tension $v_2(t)$ est alors celle au borne de Z_{eq}.
Par le diviseur impédant :

$$\underline{V}_2 = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_1}\underline{V}_S = \frac{\frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}}{R_1 + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}}\underline{V}_S = \frac{j\omega L R_2}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)}\underline{V}_S$$

$$= \frac{j1,37 \times 10^4}{1,37 \times 10^4 + j2,37 \times 10^4}\underline{V}_S = \frac{1,37}{\sqrt{1,37^2 + 2,37^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \mathrm{atan}(\frac{2,37}{1,37}))}\underline{V}_S = \frac{1}{2}e^{j30^o}\underline{V}_S$$
.

Et, en écrivant le phaseur de la tension d'entrée : $\underline{V}_S = 2 \times e^{j20^o}$, on a :

$$\underline{V}_2 = 2\mathrm{V} \times \frac{1}{2}e^{j(20^o + 30^o)} = e^{j50^o}$$

Enfin, la variation temporelle est

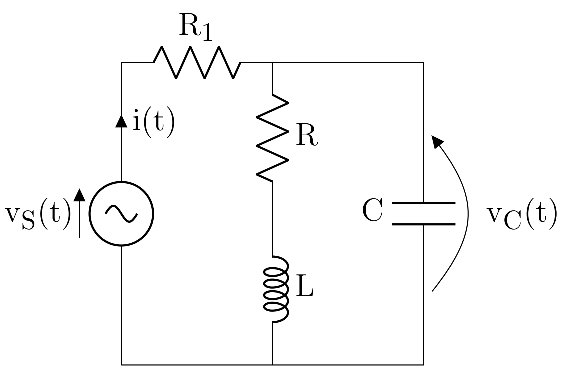
$$v_2(t) = \mathrm{Re}(\underline{V}_2 e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(e^{j(\omega t + 50^o)}) = \cos(\omega t + 50^o) = \widehat{V}_2 \times \cos(\omega t + \Phi_{V_2})$$

Avec $\widehat{V}_2 = 1\mathrm{V}$, $\omega = 10^6\mathrm{rad/s}$, et $\Phi_{V_2} = 50$.

Ce calcul impliquant des phaseurs parait long, mais résoudre le circuit à partir des équations temporelles aurait été encore nettement plus compliqué.

4 Exercice 4

Pour le circuit suivant



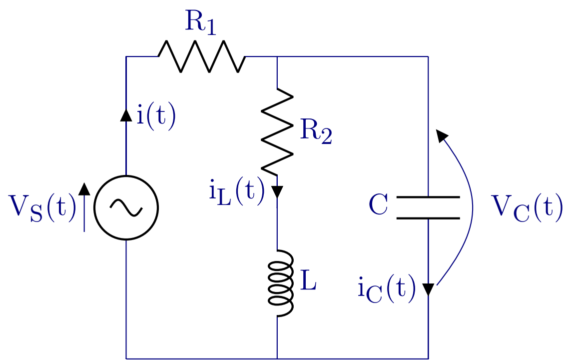
Où $v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(\omega t + \Phi_{V_S})$, $\widehat{V}_S = 1V$, $\omega = 4rad/s$, $\Phi_{V_S} = 45$, $R_1 = 4\Omega$, $R = 1\Omega$, $L = 1H$ et $C = \frac{1}{4}F$

Question 4.1.

Déterminer la tension aux bornes de la capacité $V_C(t)$.

Réponse :

On place d'abord les flèches de tensions et courants :



Il s'agit d'une circuit avec source sinusoïdale en régime permanent, la résolution se fera donc dans le domaine fréquentiel, avec l'aide des phaseurs.
Plusieurs méthodes de résolution sont possibles.

Méthode 1 :

$$\underline{V}_S = R_1\underline{I} + \underline{V}_C = R_1(\underline{I}_L + \underline{I}_C) + \underline{V}_C$$

$$\underline{V}_C = (R + j\omega L)\underline{I}_L \Rightarrow \underline{I}_L = \frac{\underline{V}_C}{R_2 + j\omega L}$$

$$\underline{V}_C = \frac{\underline{I}_C}{j\omega C} \Rightarrow \underline{I}_C = j\omega C\underline{V}_C$$

Avec ce système d'équations, on trouve donc :

$$\underline{V}_S = \frac{R_1}{R_2 + j\omega L}\underline{V}_C + j\omega R_1 C\underline{V}_C + \underline{V}_C = \frac{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 LC + j\omega(L + R_1 R_2 C)}{R_2 + j\omega L}\underline{V}_C$$

On a donc :

$$\underline{V}_C = \frac{R_2 + j\omega L}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 LC + j\omega(L + R_1 R_2 C)}\underline{V}_S$$

Comme $v_S(t) = \widehat{V}_S \times \cos(\omega t + \Phi_{V_S})$, avec les valeurs données dans l'énoncé, son phaseur (phaseurs en sinus, sinon, déphaser de 90°) est $\underline{V}_S = e^{j45^o}$. On remplace dans l'expression du phaseur de $v_C(t)$:

$$\underline{V}_C = e^{j45^o}\frac{1 + j4}{-11 + j8} = e^{j45^o}\frac{4,12e^{j75,96^o}}{13,6e^{j143,97^o}} = 0,303e^{-j23^o}$$

Et donc, lorsqu'on repasse dans le domaine temporel :

$$v_C(t) = \widehat{V}_C \times \cos(\omega t + \Phi_{V_C})$$

Avec $\widehat{V}_C = 0,303V$, $\omega = 4rad/s$, et $\Phi_{V_C} = -23$.

Question 4.1 suite.

Méthode 2 :
Une autre méthode possible est l'utilisation du diviseur impédant. On remplace R_2, L et C par une impédance équivalente :

$$Z_{eq} = (Z_R + Z_L)//Z_C = \frac{(R_2 + j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_2 C}$$

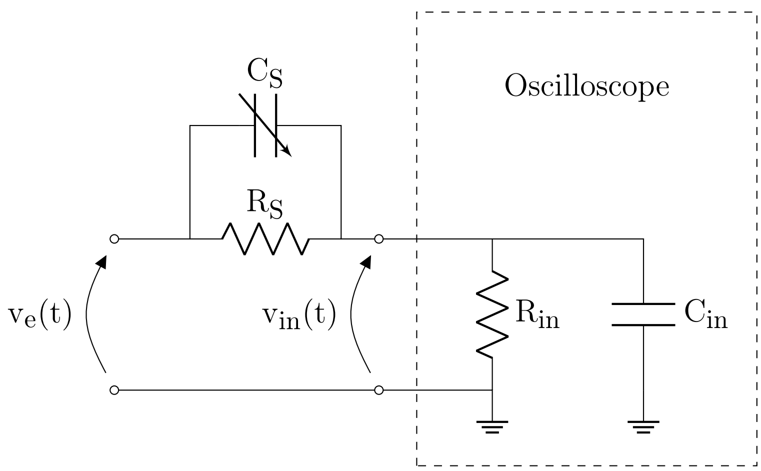
Ensuite, par le diviseur impédant :

$$\underline{V}_C = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_1}\underline{V}_S = \frac{\frac{R_2 + j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega R_2 C}}{R_1 + \frac{R_2 + j\omega L}{1-\omega^2 LC + j\omega R_2 C}}\underline{V}_S = \frac{R_2 + j\omega L}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 LC + j\omega(L + R_1 R_2 C)}\underline{V}_S$$

On retombe donc bien sur la même équation que celle obtenue par la première méthode !

5 Exercice 5

Le signal $v_e(t)$ à mesurer est connecté à un oscilloscope au moyen d'une sonde externe. La sonde est constituée d'une résistance R_S et d'une capacité C_S (réglable) en parallèle. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est modélisée par la mise en parallèle de $R_{in} = 1M\Omega$ et $C_{in} = 20pF$.



Question 5.1.

Déterminer les éléments de la sonde pour réaliser un facteur de division de k *(par exemple* $k = 10$*) sans déformer le signal mesuré.*
Dans ces conditions, déterminer la nouvelle impédance d'entrée équivalente.

Question 5.1 suite.

Réponse :
La sonde (externe) à haute impédance permet de connecter le signal à étudier à l'oscilloscope tout en réalisant un facteur de division (par exemple 10 ou 100) indépendant de la fréquence.
La sonde est constituée d'une résistance R_S fixe et d'un condensateur C_S réglable.

Le rapport de division est (par le diviseur impédant) :

$$\frac{\underline{V}_{in}}{\underline{V}_e} = \frac{Z_{in}}{Z_S + Z_{in}} = \frac{R_{in}//C_{in}}{R_S//C_S + R_{in}//C_{in}} = \frac{\frac{R_{in}}{1+j\omega R_{in}C_{in}}}{\frac{R_S}{1+j\omega R_S C_S} + \frac{R_{in}}{1+j\omega R_{in}C_{in}}} = \frac{1}{1 + \frac{R_S}{R_{in}}\frac{1+j\omega R_{in}C_{in}}{1+j\omega R_S C_S}}$$

Pour que le signal à l'entrée de l'oscilloscope ne soit pas déformé, il faut que ce rapport soit indépendant de la fréquence et la sonde sera dite <u>adaptée</u>, c'est-à-dire ici :

$$R_S C_S = R_{in} C_{in}$$

Le rapport $\frac{1}{k} = \frac{\underline{V}_{in}}{\underline{V}_e} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}}$ sera réel et indépendant de ω $(= \frac{\widehat{V}_{in}}{\widehat{V}_e})$ si :

$$\Rightarrow R_S = (k-1)R_{in}$$
$$\Rightarrow C_S = \frac{C_{in}}{k-1}$$

où k est le <u>rapport d'atténuation</u> de la sonde.

Exemple : $R_{in} = 1M\Omega$, $C_{in} = 20pF$, $k = 10 \Rightarrow R_S = 9M\Omega$ et $C_S = 2,2pF$.

Si la condition d'adaptation $R_S C_S = R_{in} C_{in}$ de la sonde est réalisée, l'impédance d'entrée de l'oscilloscope muni de la sonde est :

$$Z_e = Z_{in} + Z_S = \frac{R_{in}}{1 + j\omega R_{in}C_{in}} + \frac{R_S}{1 + j\omega R_S C_S} = \frac{R_{in} + R_S}{1 + j\omega(R_{in} + R_S)\frac{C_{in}C_S}{C_{in}+C_S}}$$

La résistance d'entrée et la capacité d'entrée sont devenues :

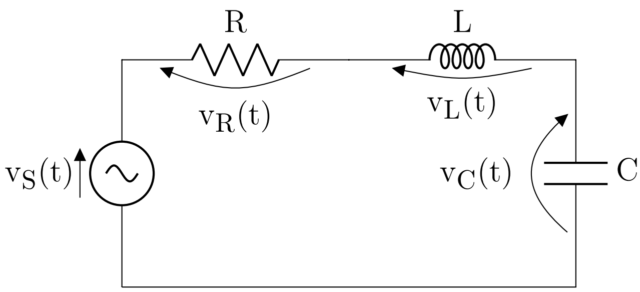
$$R_e = R_{in} + R_S = kR_{in}$$
$$C_e = \frac{C_{in}C_S}{C_{in} + C_S} = \frac{C_{in}}{k}$$

La sonde permet donc d'augmenter la résistance d'entrée et de diminuer la capacité d'entrée.

Pour l'exemple : $R_e = 10M\Omega$ et $C_e = 2pF$

6 Exercice 6

Pour le circuit RLC série en régime sinusoïdal permanent suivant :



Question 6.1.

Représenter les phaseurs des différentes tensions dans le plan complexe (diagramme des phaseurs), en prenant le courant comme origine des phases. On se placera successivement dans le cas $\omega > \omega_0$, $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$, *avec* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Réponse :
La loi des mailles et les lois constitutives des trois composants nous donne dans le domaine fréquentiel :

$$\underline{V}_S = \underline{V}_R + \underline{V}_L + \underline{V}_C$$

$$\underline{V}_R = R\underline{I}$$

$$\underline{V}_L = j\omega L\underline{I}$$

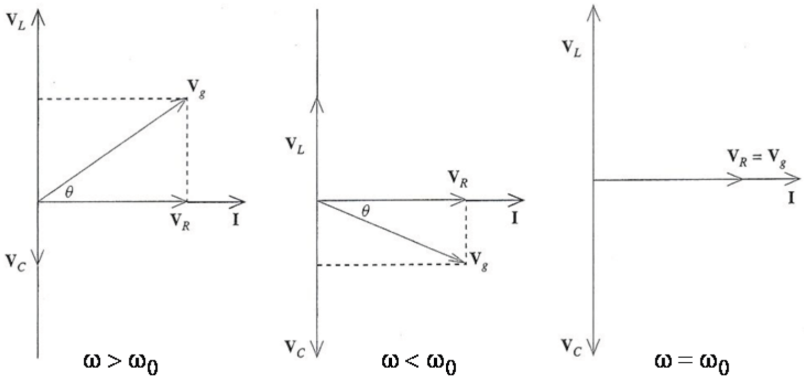
$$\underline{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}$$

On a donc :

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{V}_S}{Z_{tot}} = \frac{\underline{V}_g}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

- $\omega > \omega_0 \Rightarrow |Z_L| = |X_L| = \omega L > |Z_C| = |X_C| = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow |\underline{V}_L| > |\underline{V}_C|$
  Le circuit est globalement inductif et le courant est en retard (de θ) sur la tension.
- $\omega < \omega_0 \Rightarrow |\underline{V}_L| < |\underline{V}_C|$
  Le circuit est globalement capacitif et le courant est en avance sur la tension.
- $\omega = \omega_0 \Rightarrow |\underline{V}_L| = |\underline{V}_C|$
  Les réactances inductive et capacitive se compensent exactement. Le courant et la tension sont en phase.

Question 6.1 suite.



Question 6.2.

La tension $v_C(t)$ *peut-elle avoir une amplitude supérieure à celle de la tension d'alimentation ?*

Réponse :

Affirmatif, c'est le principe de la résonance.
L'amplitude $v_C(t)$ (et $v_L(t)$) peut devenir supérieure à celle de $v_S(t)$. Par contre, $v_R(t)$ ne peut pas dépasser $v_S(t)$.