

# Fonctions de transfert et plan de Bode

## 1. Fonctions de transfert des quadripôles linéaires

### 1.1. Rappels

Dans ce document, nous nous occuperons uniquement des fonctions de transfert des quadripôles linéaires. Pour rappel :

- Un circuit est dit linéaire si son comportement est décrit par un système d'équations (algébriques ou différentielles) linéaires.
- La transformée de Laplace (ou de Fourier) d'un système d'équations différentielles (ou algébriques) linéaires est un système d'équations algébriques linéaires.

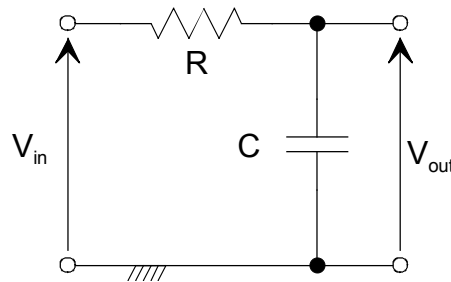
### 1.2. Définitions

On appelle fonction de transfert d'un circuit l'expression :

$$H(p) = \frac{V_{out}(p)}{V_{in}(p)} \quad \text{ou} \quad H(j \cdot \omega) = \frac{V_{out}(j \cdot \omega)}{V_{in}(j \cdot \omega)}$$

On l'exprime indifféremment en transformée de Laplace ou de Fourier. Le passage d'une forme à l'autre se fait par simple remplacement de  $p$  par  $j \cdot \omega$  (ou le contraire).

### 1.3. Exemple : le circuit RC passe-bas



On peut écrire le système d'équations différentielles décrivant le comportement du circuit en fonction du temps et en déduire le système d'équations algébriques décrivant le comportement du circuit en transformée de Laplace ou en transformée de Fourier :

$$\begin{cases} v_{in}(t) = R \cdot i(t) + v_{out}(t) \\ i(t) = C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{in}(p) = R \cdot I(p) + V_{out}(p) \\ I(p) = C \cdot p \cdot V_{out}(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_{in}(j \cdot \omega) = R \cdot I(j \cdot \omega) + V_{out}(j \cdot \omega) \\ I(j \cdot \omega) = C \cdot j \cdot \omega \cdot V_{out}(j \cdot \omega) \end{cases}$$

De ces systèmes d'équations, on peut déduire l'équation liant la tension de sortie et la tension d'entrée dans les domaines temporel, de Laplace et de Fourier :

$$v_{in}(t) = R \cdot C \cdot \frac{dv_{out}(t)}{dt} + v_{out}(t) \Leftrightarrow V_{out}(p) = \frac{V_{in}(p)}{1 + p \cdot R \cdot C} \Leftrightarrow V_{out}(j \cdot \omega) = \frac{V_{in}(j \cdot \omega)}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

L'équation différentielle nous permet de déterminer l'évolution en fonction du temps de  $V_{out}$  pour un  $V_{in}$  quelconque; par exemple, la réponse indicielle qui est l'évolution de la tension de sortie pour une tension d'entrée en échelon.

La fonction de transfert en transformée de Fourier nous permet de déterminer l'amplitude et la phase de  $V_{out}$  pour un  $V_{in}$  sinusoïdal : ce sont les phaseurs.

La fonction de transfert en transformée de Laplace fait le lien entre les deux domaines (temporel et fréquentiel) :

- on peut retrouver l'évolution de  $V_{out}$  en fonction du temps en utilisant la transformée de Laplace inverse;
- l'équation en transformée de Laplace nous permet de calculer les pôles et les zéros de la fonction de transfert du circuit; ils nous permettront de tracer son plan de Bode.

## 2. Plan de Bode

### 2.1. Définition

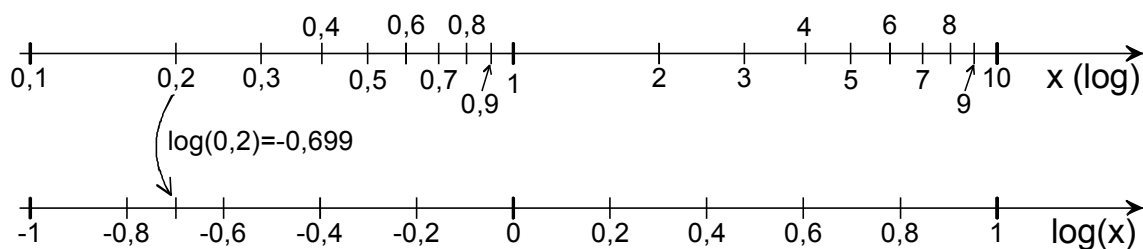
On appelle plan de Bode une représentation graphique de la fonction de transfert exprimée en transformée de Fourier. Cette fonction est une fonction complexe (à une variable réelle  $\omega$ ), Il faut donc tracer deux courbes pour la représenter (parties réelle et imaginaire, module et phase, ...).

Dans le plan de Bode, on représente le module et la phase en fonction de  $\omega$  (ou de la fréquence).

Les plages de variation du module de  $H(j\omega)$  et de  $\omega$  sont généralement très étendues; on choisit donc d'utiliser des axes logarithmiques (en base 10) pour tracer le module et des axes semi-logarithmiques pour la phase.

Un plan de Bode est donc composé des deux graphiques : un bi-logarithmique et un semi-logarithmique.

### 2.2. L'axe logarithmique



Pour tracer un plan de Bode, on utilise du papier dont les axes sont gradués de manière à nous éviter de devoir calculer le logarithme de  $H(j\omega)$  et de  $\omega$  : l'intervalle entre deux graduations n'est pas fixe, mais varie de manière logarithmique.

Tracer  $H(j\omega)$  en fonction de  $\omega$  dans ces axes logarithmiques est alors équivalent à tracer  $\log(H(j\omega))$  en fonction de  $\log(\omega)$  dans des axes linéaires.

Pour différencier un axe logarithmique gradué en  $x$  d'un axe linéaire gradué en  $\log(x)$ , on nomme l'axe logarithmique  $x(\log)$  et l'axe linéaire  $\log(x)$  (les deux graphiques obtenus sont équivalents, seules les grandeurs auxquelles se réfèrent les graduations des axes sont différentes).

#### 2.2.1. Propriétés des axes logarithmiques

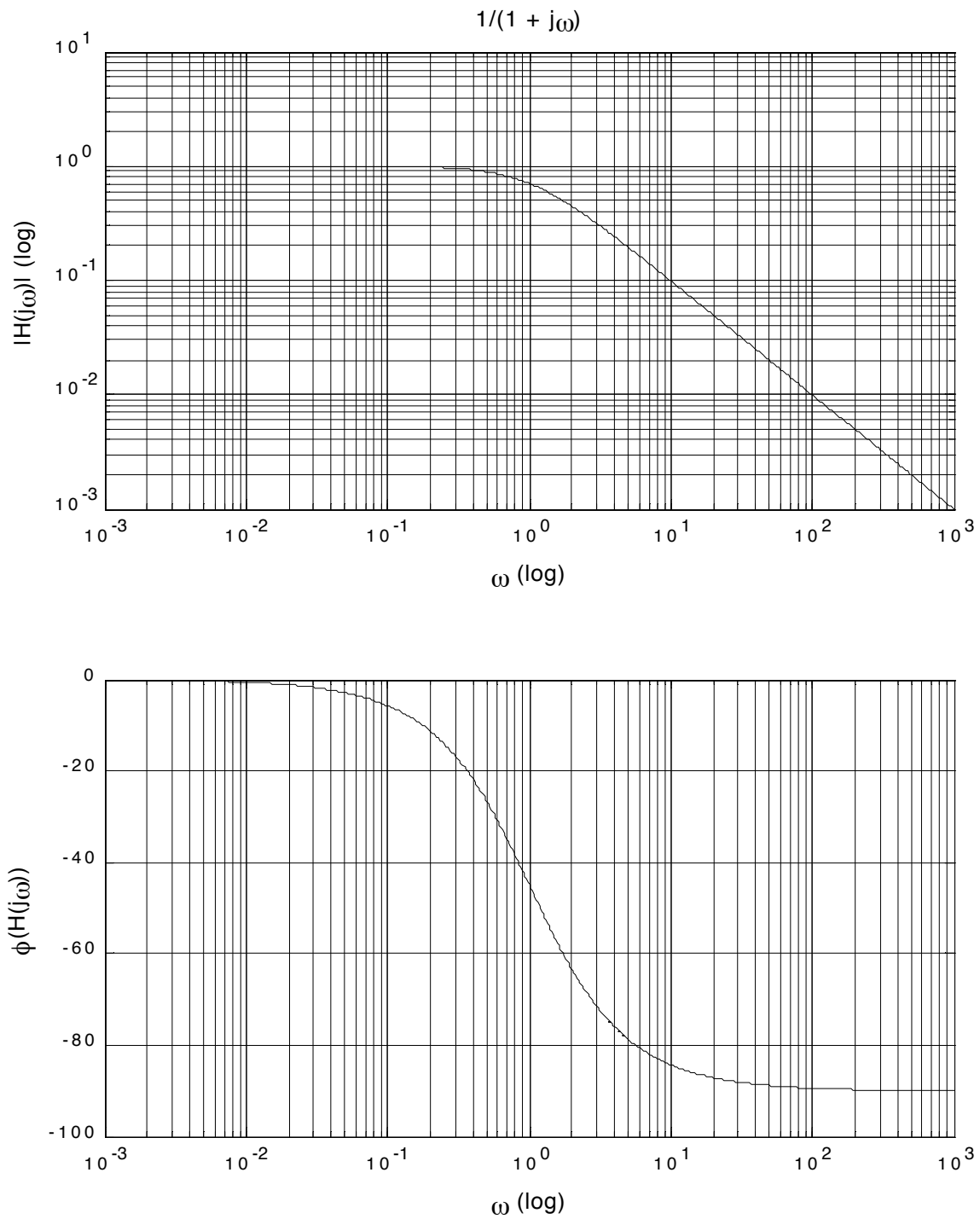
- on peut écrire :

$$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow \log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Par exemple, on peut remarquer que la distance entre 0,1 et 1 est égale à celle entre 1 et 10; de même pour les distances entre 1 et 2, 2 et 4, 4 et 8.

- $\log(0) = -\infty$  : le point  $(H(j\omega) = 0, \omega = 0)$  se trouve en  $(-\infty, -\infty)$  dans des axes logarithmiques; le croisement des axes d'un graphique logarithmique se fait donc à une valeur quelconque (en général une puissance de 10) des abscisses et des ordonnées.

### 2.3. Exemple : le circuit RC passe-bas



## 2.4. Tracé asymptotique d'un plan de Bode

### 2.4.1. Principe

On peut tracer l'allure générale d'une fonction de transfert dans un plan de Bode en utilisant le tracé asymptotique; il s'agit de diviser l'axe des  $\omega$  en plusieurs intervalles et de trouver des expressions approchées de la fonction de transfert (dont on sait tracer le plan de Bode), valables chacune pour un de ces intervalles.

### 2.4.2. Marche à suivre

#### a) factoriser la fonction de transfert en p

On sait que la fonction de transfert d'un quadripôle linéaire est une fonction rationnelle de p. En factorisant le numérateur et le dénominateur, on peut écrire cette fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{A_o \cdot \left(1 + \frac{p}{z_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{z_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p}{z_n}\right)}{\left(1 + \frac{p}{p_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p}{p_m}\right)} \quad \text{où les } z_i \text{ et les } p_i \text{ sont des réels positifs ou nuls.}$$

Ecrire la fonction de transfert sous cette forme nous permet de faire apparaître de manière explicite ses zéros et ses pôles. On supposera dans un premier temps, que tous les pôles et zéros sont réels.

#### b) en déduire la fonction de transfert en j·ω

$$H(j \cdot \omega) = \frac{A_o \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{z_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{z_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{z_n}\right)}{\left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_m}\right)}$$

#### c) définir les intervalles de ω

pour cela, il faut classer les  $z_i$  et les  $p_i$  dans l'ordre croissant; chacun d'entre eux est la frontière entre deux intervalles.

Prenons un exemple :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{A_o \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{z_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{z_1}\right)}{\left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{j \cdot \omega}{p_3}\right)} \quad \text{avec } 0 < z_0 < p_0 < p_1 < p_2 < z_1$$

nous obtenons alors 6 intervalles :

$$\omega < z_0 \quad z_0 < \omega < p_0 \quad p_0 < \omega < p_1 \quad p_1 < \omega < z_1 \quad z_1 < \omega < p_2 \quad p_2 < \omega$$

#### d) Etablir l'expression approchée de la fonction de transfert pour chaque intervalle

– 1<sup>er</sup> intervalle :

pour  $\omega \ll z_0$ , on peut écrire :  $1 + \frac{j \cdot \omega}{z_0} \approx 1$

on peut faire la même approximation pour tous les autres termes.

l'expression approchée de la fonction de transfert pour  $\omega \ll z_0$  est donc :

$$H(j \cdot \omega) = A_o$$

– 2<sup>ème</sup> intervalle :

Ici, nous ferons l'hypothèse que  $z_0 \ll p_0$ .

On peut alors écrire : pour  $z_0 \ll \omega \ll p_0$ , 
$$\begin{cases} 1 + \frac{j \cdot \omega}{z_0} \approx \frac{j \cdot \omega}{z_0} \\ 1 + \frac{j \cdot \omega}{p_0} \approx 1 \end{cases}$$

l'expression approchée de la fonction de transfert pour  $z_0 \ll \omega \ll p_0$  est donc :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{A_0 \cdot j \cdot \omega}{z_0}$$

– En faisant de même pour les autres intervalles, on trouve :

pour  $p_0 \ll \omega \ll p_1$ ,  $H(j \cdot \omega) = \frac{A_0 \cdot p_0}{z_0}$

pour  $p_1 \ll \omega \ll z_1$ ,  $H(j \cdot \omega) = \frac{A_0 \cdot p_0 \cdot p_1}{j \cdot \omega \cdot z_0}$

pour  $z_1 \ll \omega \ll p_2$ ,  $H(j \cdot \omega) = \frac{A_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2}{-\omega^2 \cdot z_0 \cdot z_1}$

pour  $p_2 \ll \omega$ ,  $H(j \cdot \omega) = \frac{A_0 \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot p_2}{j \cdot \omega \cdot z_0 \cdot z_1}$

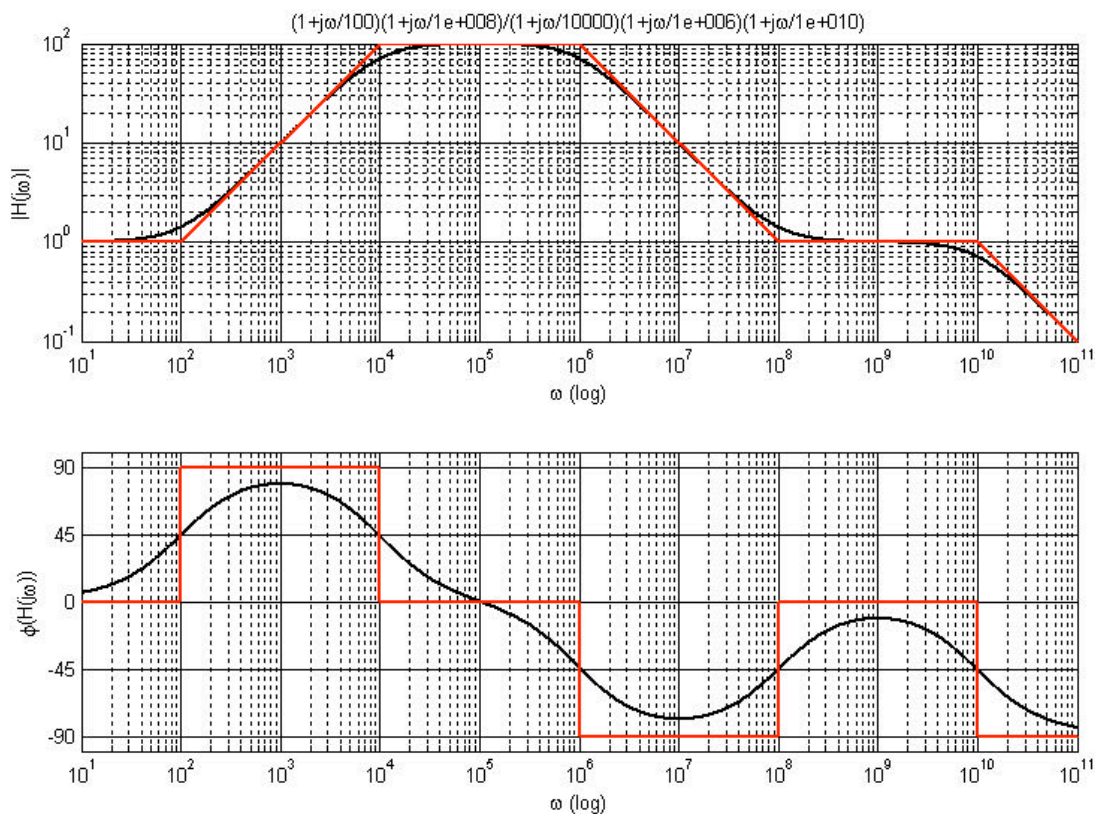
e) Tracer les fonctions approchées dans leur intervalle :

On voit que les expressions approchées sont toutes de la forme :  $H(j \cdot \omega) = k \cdot (j \cdot \omega)^n$ , avec  $n$  entier.

On en déduit : 
$$\begin{cases} \log(|H(j \cdot \omega)|) = \log(k \cdot \omega^n) = \log(k) + n \cdot \log(\omega) \\ \varphi(H(j \cdot \omega)) = n \cdot 90^\circ \end{cases}$$

Le tracé approché du module est donc une suite de segments de droite de pente  $n$ ; celui de la phase une série de palier.

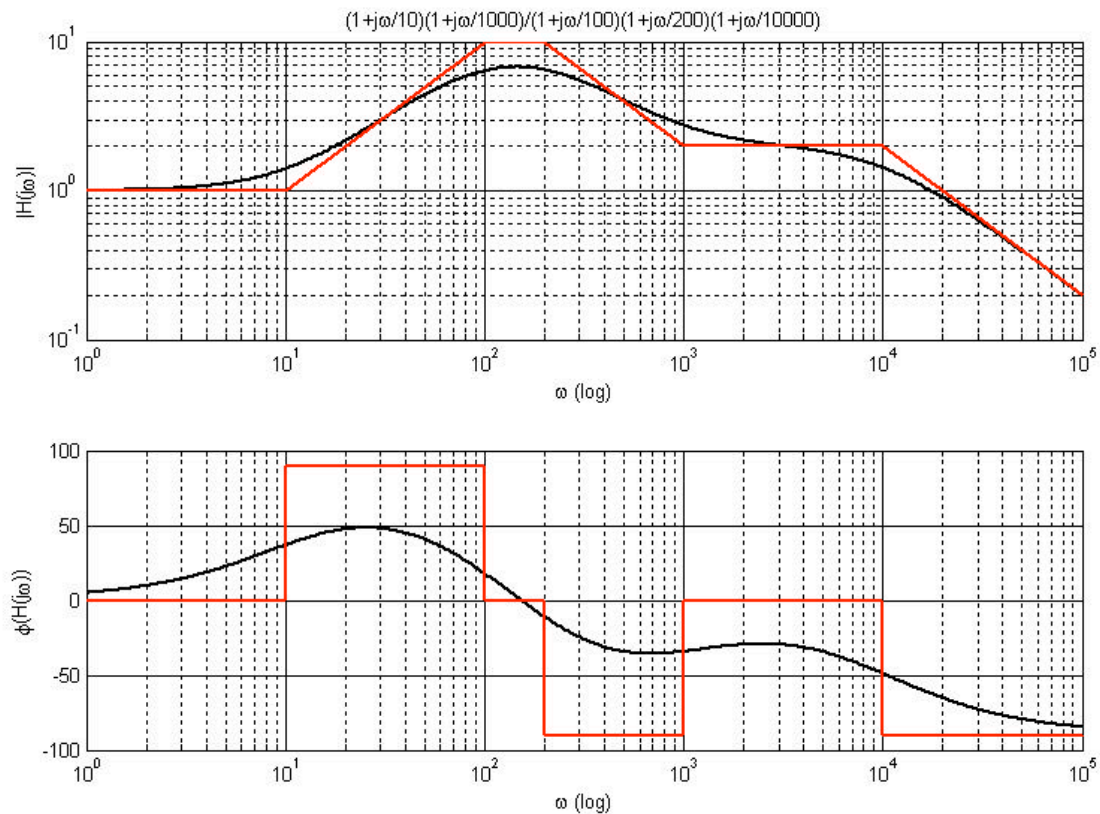
Le tracé réel de la fonction de transfert "colle" au tracé asymptotique, sauf pour les  $\omega$  proches des pôles et des zéros :



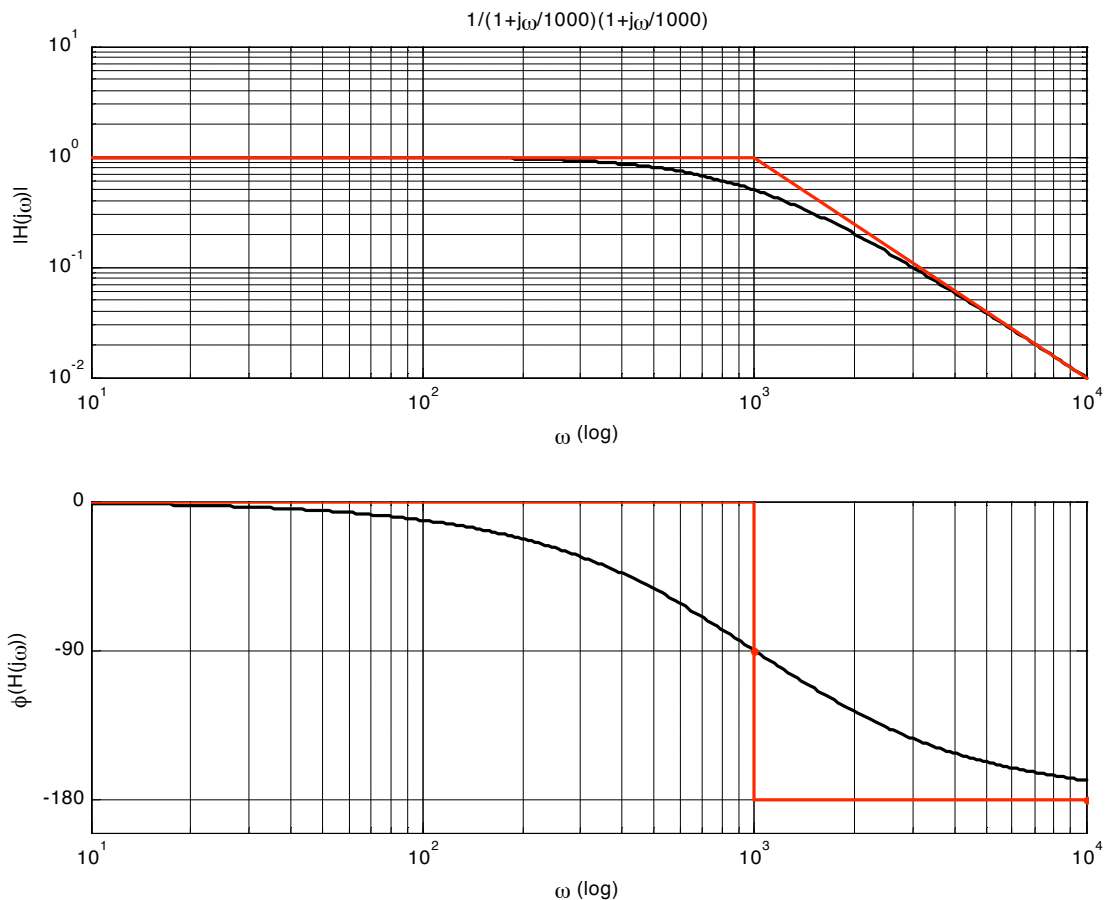
Si on parcourt le graphique en suivant les  $\omega$  croissants, On peut remarquer que :

- chaque fois qu'on rencontre un zéro, la pente du tracé asymptotique augmente d'une unité (en axes logarithmiques) et celui de la phase subit une discontinuité de  $+90^\circ$ ;
- chaque fois qu'on rencontre un pôle, la pente du tracé asymptotique diminue d'une unité et celui de la phase subit une discontinuité de  $-90^\circ$ ;

Si l'hypothèse que les pôles et zéros sont très éloignés les uns des autres n'est pas respectée, la fonction réelle n'atteint pas le tracé asymptotique dans la zone délimitée par des pôles (ou zéros) trop proches :



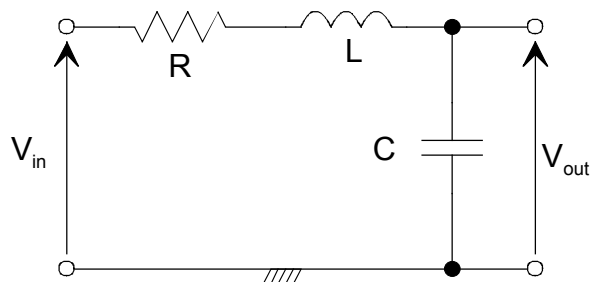
Si la fonction de transfert a des zéros ou des pôles multiples, leur effet est multiplié par leur multiplicité. Dans l'exemple ci-dessous, on a un pôle double, la pente du tracé asymptotique passe donc de 0 à -2 et la phase subit une discontinuité de  $-180^\circ$  :



#### 2.4.3. Cas des pôles complexes conjugués

Au point précédent, nous avons fait l'hypothèse que les pôles et zéros de la fonction de transfert étaient réels. Ce n'est pas toujours le cas, il se peut également qu'une fonction de transfert ait une (ou plusieurs) paire de pôles ou zéros complexes conjugués.

Prenons l'exemple du circuit RLC passe-bas :



Sa fonction de transfert s'écrit :

$$H(p) = \frac{1}{1 + p \cdot R \cdot C + p^2 \cdot L \cdot C} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \zeta \cdot \frac{p}{p_0} + \left(\frac{p}{p_0}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \\ \zeta = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

On a réécrit la fonction de transfert du circuit sous sa forme canonique. Sous cette forme, on voit que la fonction de transfert est entièrement déterminée par les paramètres  $p_0$  et  $\zeta$ .

On voit également qu'elle a deux pôles donnés par :

$$p_1, p_2 = \frac{-\frac{\zeta}{p_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{p_0}\right)^2 - \frac{1}{p_0^2}}}{\frac{1}{p_0^2}} = -p_0 \cdot \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

On voit que :

- si  $\zeta > 1$ , les deux pôles sont réels;
- si  $\zeta = 1$ , on a un pôle double en  $-p_0$ ;
- si  $\zeta < 1$ , les pôles sont complexes conjugués :  $p_1, p_2 = p_0 \cdot \left(-\zeta \pm j \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}\right)$ .

Dans ce dernier cas, on ne peut factoriser davantage la fonction de transfert. Ecrivons la fonction de transfert en  $j \cdot \omega$  :

$$H(j \cdot \omega) = \frac{1}{1 + 2j \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{avec } \omega_0 = p_0 \text{ et } \zeta < 1$$

On peut diviser les  $\omega$  en deux intervalles :

- $\omega \ll \omega_0$  :  $H(j \cdot \omega) \approx 1$
- $\omega \gg \omega_0$  :  $H(j \cdot \omega) \approx -\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$

On voit que pour le comportement asymptotique, cette paire de pôles complexes conjugués est équivalent à un pôle double en  $p_0$  (qui est la norme des pôles complexes) : la pente du module diminue de 2 et la phase de  $180^\circ$ .

La différence par rapport à un pôle double se voit dans le comportement de la fonction de transfert autour de  $\omega_0$ . En effet, calculons  $H(j \cdot \omega_0)$  :

$$H(j \cdot \omega_0) = \frac{1}{2 \cdot j \cdot \zeta}$$

La phase vaut  $-90^\circ$  et le module prend une valeur qui dépend de  $\zeta$  :

- dans le cas d'un pôle double :  $\zeta = 1 \Leftrightarrow |H(j \cdot \omega_0)| = \frac{1}{2}$
- dans le cas d'une paire de pôles complexes conjugués :  $\zeta < 1 \Leftrightarrow |H(j \cdot \omega_0)| > \frac{1}{2}$

Dans le cas où  $\zeta = 0$ , le module tend vers l'infini en  $\omega_0$  (dans l'exemple du RLC, cela correspond à  $R = 0$ ) : c'est le phénomène de résonance.



$\zeta = 1/2$

Voici le tracé du plan de Bode du circuit RLC pour plusieurs valeurs de  $\zeta$  :

