Circuits logiques et numériques [ELEC-H-305]
TP 2 : Théorèmes de l'algèbre de Boole – Corrigé

v1.0.0

Question 1. Codes pondérés

a) Comment se représentent les chiffres 0 … 9 dans le code auto-complémentaire 1224 ?

Réponse : Un code « 1224 » signifie une représentation sur quatre bits ayant pour poids 1, 2, 2 et 4 (du MSB vers le LSB). Étant donné que chaque poids de chaque nombre codé est une valeur binaire naturelle, ce code est « pondéré ». Pour qu'il soit auto-complémentaire, le 0 codé doit être le complémentaire du 9 codé, le 1 codé celui du 8 codé, etc. (*Notez que le code BCD est certes pondéré, mais il n'est pas auto-complémentaire.*)

En suivant ces propriétés, on peut trouver deux codages 1224 adéquats :

Base 10	Code 1224	Base 10	Code 1224
0	0000	0	0000
1	1000	1	1000
2	0010	2	0100
3	1010	3	1100
4	0110	4	0001
5	1001	5	1110
6	0101	6	0011
7	1101	7	1011
8	0111	8	0111
9	1111	9	1111

Ce code n'est cependant pas utilisable en pratique.

- Avec le code du tableau de gauche, certaines additions ne sont pas cohérentes. Par exemple, $2 + 4$ devient $0010_2 + 0110_2 = 1000_2 = 1_{10}$.
- Certaines additions comme un simple $7 + 1$ provoquent un overflow.

b) Effectuer l'opération 199 + 124 après avoir représenté les nombres en BCD.

Réponse :

$$\begin{array}{cccc|l} & 0001 & 1001 & 1001 & 199_{10}\\ + & 0001 & 0010 & 0100 & 124_{10}\\ \hline & 0010 & \underbrace{1011}_{>9} & \underbrace{1101}_{>9} & \\ + & & 0110 & 0110 & \text{Correction}\\ \hline & \underbrace{0011}_{3} & \underbrace{0010}_{2} & \underbrace{0011}_{3} & \end{array}$$

Question 2. Détection d'erreurs

Les quatre mots suivants de quatre bits sont transmis : 1011, 1001, 1011 et 1101. Le bit le moins significatif de chaque mot est un bit de parité (impaire). Le dernier mot est composé de bits de parité (paire) portant sur les bits de même position des mots précédemment transmis.
Une erreur s'est-elle produite lors de la transmission ? Si oui, corrigez-la.

Réponse :

1	0	1	1	OK
1	**0**	0	1	←
1	0	1	1	OK
1	1	0	1	OK
OK	↑	OK	OK	

La case entourée en gras devrait être un « 1 » au lieu de « 0 ».

Question 3. En utilisant les axiomes prouver les théorèmes[1] :

Axiomes :	Théorèmes :
$A1a : x \in B, y \in B \rightarrow x + y \in B$	$T1a : x + x = x$
$A1b : x \in B, y \in B \rightarrow x \cdot y \in B$	$T1b : x \cdot x = x$
$A2a : x + 0 = x$	$T2a : x + 1 = 1$
$A2b : x \cdot 1 = x$	$T2b : x \cdot 0 = 0$
$A3a : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$T3a : x + y \cdot x = x$
$A3b : x + (y \cdot z) = (x + y)(x + z)$	$T3b : x \cdot (x + y) = x$
$A4a : x + y = y + x$	$T4 : \overline{(\overline{x})} = x$
$A4b : x \cdot y = y \cdot x$	$T5a : (x + y) + z = x + (y + z)$
$A5a : x + \overline{x} = 1$	$T5b : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$A5b : x \cdot \overline{x} = 0$	$T6a : \overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$
$A6 : \exists x, y \in B : x \neq y$	$T6b : \overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$

Réponse :

— $T1a : x + x = x$

$$
\begin{aligned}
x + x &= (x + x) \cdot 1 && \text{, A2b} \\
&= (x + x) \cdot (x + \overline{x}) && \text{, A5a} \\
&= x + x \cdot \overline{x} && \text{, A3b} \\
&= x + 0 && \text{, A5b} \\
&= x && \text{, A2a}
\end{aligned}
$$

1. Les théorèmes 5 et 6 peuvent être prouvés avec des tables de vérité.

— $T1b : x \cdot x = x$

$$\begin{aligned} x \cdot x &= x \cdot x + 0 && \text{, A2a} \\ &= x \cdot x + x \cdot \overline{x} && \text{, A5b} \\ &= x \cdot (x + \overline{x}) && \text{, A3a} \\ &= x \cdot 1 && \text{, A5a} \\ &= x && \text{, A2b} \end{aligned}$$

— $T2a : x + 1 = 1$

$$\begin{aligned} x + 1 &= (x + 1) \cdot 1 && \text{, A2b} \\ &= (x + 1) \cdot (x + \overline{x}) && \text{, A5a} \\ &= x + 1 \cdot \overline{x} && \text{, A3b} \\ &= x + \overline{x} && \text{, A2b} \\ &= 1 && \text{, A5a} \end{aligned}$$

— $T2b : x \cdot 0 = 0$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= x \cdot 0 + 0 && \text{, A2a} \\ &= x \cdot 0 + x \cdot \overline{x} && \text{, A5b} \\ &= x \cdot (0 + \overline{x}) && \text{, A3a} \\ &= x \cdot (\overline{x}) && \text{, A2a} \\ &= 0 && \text{, A5b} \end{aligned}$$

— $T3a : x + y \cdot x = x$

$$\begin{aligned} x + x \cdot y &= x \cdot 1 + x \cdot y && \text{, A2b} \\ &= x \cdot (1 + y) && \text{, A3a} \\ &= x \cdot 1 && \text{, T2a} \\ &= x && \text{, A2b} \end{aligned}$$

— $T3b : x \cdot (x + y) = x$

$$\begin{aligned} x \cdot (x + y) &= (x + 0) \cdot (x + y) && \text{, A2a} \\ &= x + 0 \cdot y && \text{, A3b} \\ &= x + 0 && \text{, T2b} \\ &= x && \text{, A2a} \end{aligned}$$

— $T4 : \overline{(\overline{x})} = x$

$$\begin{aligned}
\overline{(\overline{x})} &= \overline{(\overline{x})} \cdot 1 && \text{, A2b} \\
&= \overline{(\overline{x})} \cdot (x + \overline{x}) && \text{, A5a} \\
&= \overline{(\overline{x})} \cdot x + \overline{(\overline{x})} \cdot \overline{x} && \text{, A3a}
\end{aligned}$$

En posant $y = \overline{x}$:

$$\begin{aligned}
&= \overline{(\overline{x})} \cdot x + 0 && \text{, A5b} \\
&= \overline{(\overline{x})} \cdot x + x \cdot \overline{x} && \text{, A5b} \\
&= x \cdot (\overline{(\overline{x})} + \overline{x}) && \text{, A3b}
\end{aligned}$$

En posant $y = \overline{x}$:

$$\begin{aligned}
&= x \cdot 1 && \text{, A5a} \\
&= x && \text{, A2b}
\end{aligned}$$

— $T5a : (x + y) + z = x + (y + z)$

x	y	z	(x+y)	**(x+y)+z**	(y+z)	**x+(y+z)**
0	0	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	**1**	1	**1**
0	1	0	1	**1**	1	**1**
0	1	1	1	**1**	1	**1**
1	0	0	1	**1**	1	**1**
1	0	1	1	**1**	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	**1**

— $T5b : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

x	y	z	$(y \cdot z)$	$x \cdot (y \cdot z)$	$(x \cdot y)$	$(x \cdot y) \cdot z$
0	0	0	0	**0**	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	**0**
0	1	0	0	**0**	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	**0**
1	0	1	0	**0**	0	**0**
1	1	0	0	**0**	1	**0**
1	1	1	1	**1**	1	**1**

— $T6a : \overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

x	y	$\overline{(x + y)}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	**1**	**1**
0	1	**0**	**0**
1	0	**0**	**0**
1	1	**0**	**0**

— $T6b : \overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$

x	y	$\overline{(x \cdot y)}$	$\overline{x} + \overline{y}$
0	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**
1	1	**0**	**0**