Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y CC

Autores: Miguel Martínez Concha
Carlos Silva Cornejo
Emilio Villalobos Marín

Ejercicios Resueltos

1 Cálculo de integrales dobles en coordenadas rectángulares cartesianas

1.1 Problema

Calcular $\iint_D \sqrt{x+y}dxdy$ si D es la región acotada por las respectivas rectas $y = x,\ y = -x\ \ y\ \ x = 1$

Solución

Se tiene que la región $D = \left\{(x, y) \in IR^2 /\ \ 0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq x\right\}$

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x+y}dxdy &= \int_0^1 \int_{-x}^{x} \sqrt{x+y}dydx \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (x+y)^{3/2}\Big|_{-x}^{x} dx \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 (2x)^{3/2} dx \\
&= \frac{2^{5/2}}{3} \frac{2}{5} (x)^{5/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

1.2 Problema

Calcular $\iint_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$ si D es el dominio limitado por el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,-1), C(1,1)$.

Solución

Entonces se tiene que el dominio está delimitado por las rectas $y = x$, $y = -x\ \ y\ \ x = 1$.

Luego el dominio de integración es:

$$D = \left\{(x, y) \in IR^2 /\ \ 0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq x\right\}$$

.

Integrando a franjas verticales, resulta

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy &= \int_0^1\int_{-x}^{x}\sqrt{x^2-y^2}dydx\\ &= \int_0^1\int_{-x}^{x} x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}dydx\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variables $\dfrac{y}{x} = sent \implies dy = x\cos t dt$ y determinemos los limites.
Para $y = x \implies arcsen\left(\dfrac{x}{x}\right) = arcsen\,(1) = \dfrac{\pi}{2}$.
Para $y = -x \implies arcsen\left(\dfrac{-x}{x}\right) = arcsen\,(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
Por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-x}^{x} x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}dydx &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sqrt{1-sen^2 t}dtdx\\ &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 tdtdx\\ &= \int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(\frac{1+\cos 2t}{2})dtdx\\ &= \int_0^1 x^2\left[\frac{t}{2}+\frac{sen2t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2dx\\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

1.3 Problema

Calcular $\displaystyle\iint_D \left(y-2x^2\right)dxdy$ si D es la región acotada por $|x|+|y| = 2$

Solución

Se tiene que la región $D = \left\{(x,y)\in IR^2/ \quad |x|+|y|\leq 2\right\}$

Si escogemos la región con una partición de tipo I, es necesario utilizar dos integrales iterativas porque para $-2\leq x\leq 0$, la frontera inferior de la región es la gráfica de $y = -x-2$, y la superior es $y = x+2$;y para $0\leq x\leq 2$ la frontera inferior de la región es la gráfica de $y = x-2$, y la superior es $y = -x+2$

Entonces se tiene $D = D_1\cup D_2$ tal que $D_1\cup D_2 = \phi$.
donde $D_1 = \left\{(x,y)\in IR^2/\ -2\leq x\leq 0,\ \ -x-2\leq y\leq x+2\right\}$
$D_2 = \left\{(x,y)\in IR^2/\ 0 < x\leq 2,\ x-2\leq y\leq -x+2\right\}$

Por otra parte la funcion del integrando $f(x,y) = y - 2x^2$ es simétrica con respecto al eje y, es decir $\forall (x,y,z) \in D$ existe $(-x,y,z)$ tal que $f(-x,y) = y - 2(-x)^2 = f(x,y)$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(y - 2x^2\right) dxdy &= 2\int_0^2 \int_{x-2}^{-x+2} \left(y - 2x^2\right) dydx \\
&= 2\int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} + 2x^2 y\right)\Big|_{x-2}^{-x+2} dx \\
&= 2\int_0^1 \left(4x^3 - 8x^2\right) dx \\
&= \left(x^4 - \frac{8}{3}x^3\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\left(16 - \frac{64}{3}\right) = -\frac{32}{3}
\end{aligned}$$

1.4 Problema

Calcular $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ si $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.Usando coordenadas cartesianas

Solución.

Usando coordenadas cartesianas, la región de integración es un círculo centrado en el origen de radio uno

Por lo tanto

$D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dydx \\
&= \int_{-1}^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= 2\int_{-1}^1 (x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}) dx \\
&= 2\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx
\end{aligned}$$

Con ayuda de una tabla de integrales obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx &= (-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}(x\sqrt{1-x^2} + arcsenx)\Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{8}(arcsen(1) - arcsen\,(-1) = \frac{1}{8}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx &= (\frac{x}{4}\sqrt{(1-x^2)^3}+\frac{3x}{8}\sqrt{(1-x^2)}+\frac{3}{8}arcsenx)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{2\pi}{8}+\frac{2}{3}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

Notese que la solución del problema usando coordenadas cartesianas es bastante compleja

1.5 Problema

Calcular $\iint_D xydxdy$ si D es la región acotada por $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{3x-18}$, $y\geq 0$.Usando coordenadas cartesianas.

Solución.

Si escogemos la región con una partición de tipo I, es necesario utilizar dos integrales iterativas porque para $0\leq x\leq 6$, la frontera inferior de la región es la gráfica de $y=0$, y la superior es $y=\sqrt{x}$;y para $6\leq x\leq 9$ la frontera inferior de la región es la gráfica de $y=\sqrt{3x-18}$, y la superior es $y=\sqrt{x}$

Luego tenemos que $D=D_1\cup D_2$ tal que $D_1\cup D_2=\phi$.

Entonces $D_1=\left\{(x,y)\in IR^2/\ 0\leq x\leq 6,\ 0\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\in IR^2/\ 6<x\leq 9,\ \sqrt{3x-18}\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_{D_1} xydxdy+\iint_{D_2} xydxdy \\ &= \int_0^6\int_0^{\sqrt{x}} xydydx+\int_6^9\int_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}} xydydx \\ &= \int_0^6 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}}dx+\int_6^9 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\sqrt{3x-18}}^{\sqrt{x}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^6 x^2dx+\frac{1}{2}\int_6^9(-2x^2+18x)dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^6+\left[-\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_6^9=\frac{185}{2}\end{aligned}$$

Si escogemos la región con una partición de tipo II, es necesario utilizar sólo una integral iterativa porque para $0\leq y\leq 3$, la frontera izquierda de la región es la gráfica de $x = y^2$ mentras que la frontera derecha queda determinada por la gráfica $x = \dfrac{y^2}{3} + 6$, obteniendo así la región

$D_1 = \left\{(x, y) \in IR^2 /\ y^2 \leq x \leq \dfrac{y^2}{3} + 6,\ 0 \leq y \leq 3\right\}$

la integral iterativa queda

$$\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \int_0^3 \int_{y^2}^{(y^2/3)+6} xydxdy \\
&= \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{(y^2/3)+6} ydy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[\left(\frac{y^2+18}{3}\right)^2 - y^4\right]_{y^2}^{(y^2/3)+6} ydy \\
&= \frac{1}{18}\int_0^3 \left[-8y^5 + 36y^3 + 324y\right] dy \\
&= \frac{1}{18}\left[-\frac{4}{3}y^6 + 9y^4 + 162y^2\right]_0^3 \\
&= \frac{1}{18}\left[-\frac{4}{3}3^6 + 3^6 + 2 \cdot 3^6\right] = \frac{185}{2}
\end{aligned}$$

1.6 Problema

Encontrar el área de la región determinada por las desigualdades: $xy \geq 4$, $y \leq x,\ 27y \geq 4x^2$.

Solución.

Sabemos que $xy = 4$ tiene por gráfica una hipérbola equilátera, $y = x$ es la recta bisectriz del primer cuadrante y $27y = 4x^2$ corresponde a una parábola. Veamos cuale son los puntos de intersección de estas curvas con el proprosito de configurar el dominio de integración

$$\left.\begin{array}{c} xy = 4 \\ y = x \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow y = \pm 2$$

$$\left.\begin{array}{c} 27y = 4x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Longrightarrow 27x = 4x^2 \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} x = 0 \\ x = \dfrac{24}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 0,\ y = \frac{27}{4}$$

$$\left.\begin{array}{c} xy = 4 \\ 27y = 4x^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 3,\ y = \frac{4}{3}$$

Para calcular el área $A(R) = \iint_D dxdy$, podemos escoger una partición del dominio de tipo I ó de tipo II.

Consideremos dos subregiones de tipo I

$D_1 = \left\{(x, y) \in IR^2 /\ \ 2 \leq x \leq 3, \dfrac{4}{x} \leq y \leq x\right\}$

$D_2 = \left\{ (x,y) \in IR^2 / \ \ 3 \leq x \leq \frac{27}{4}, \frac{4}{27}x^2 \leq y \leq x \right\}$

Si proyectamos sobre eje x

$$A(R) = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy$$

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_2^3 \int_{\frac{4}{x}}^x dydx + \int_3^{27/4} \int_{\frac{4}{27}x^2}^x dydx \\
&= \int_2^3 y|_{\frac{4}{x}}^x \, dx + \int_3^{27/4} y|_{\frac{4}{27}x^2}^x \, dx \\
&= \int_2^3 \left[x - \frac{4}{x} \right] dx + \int_3^{27/4} \left[x - \frac{4}{27}x^2 \right] dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - 4\ln x \right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{81}x^3 \right]_3^{27/4} \\
&= \frac{5}{2} - 4\ln\frac{3}{2} + \frac{729}{32} - \frac{9}{2} - \frac{4}{81}\frac{27^3}{4^3} + \frac{4}{81}3^3 \\
&= -2 - 4\ln\frac{3}{2} + \frac{729}{32} - \frac{243}{16} + \frac{4}{3} \\
&= \frac{665}{96} - 4\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Si proyectamos sobre eje y

$D_I = \left\{ (x,y) \in IR^2 / \ \ \frac{4}{y} \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{3y}, \frac{4}{3} \leq y \leq 2 \right\}$

$D_I = \left\{ (x,y) \in IR^2 / \ \ y \leq x \leq \frac{3}{2}\sqrt{3y}, 2 \leq y \leq \frac{27}{4} \right\}$

$$A(R) = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy$$

$$\begin{aligned}
A(R) &= \int_{\frac{4}{3}}^2 \int_{\frac{4}{y}}^{\frac{3}{2}\sqrt{3y}} dxdy + \int_2^{27/4} \int_y^{\frac{3}{2}\sqrt{3y}} dxdy \\
&= \int_{\frac{4}{3}}^2 \left[\sqrt{3y} - 4\ln y \right] dy + \int_2^{27/4} \left[\frac{3}{2}\sqrt{3y} - y \right] dy \\
&= \left[\frac{3}{2}\sqrt{3y^3} - \frac{4}{y} \right]_{\frac{4}{3}}^2 + \left[\sqrt{3y^3} - \frac{y^2}{2} \right]_2^{27/4} \\
&= -\frac{8}{3} - 4\ln\frac{3}{2} + \frac{9 \cdot 27}{8} - \frac{729}{32} + 2 \\
&= \frac{665}{96} - 4\ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

1.7 Problema

Encontrar el volumen de la región acotada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$

Solución.

Usando integrales dobles y proyectando la región sobre el plano xy tenemos:
$V = \iint_D \frac{6-x-2y}{3} dxdy \ , D = \left\{ (x,y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq \frac{6-x}{2} \right\}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} (6-x-2y) \, dydx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[(6-x)y - y^2 \right]_0^{\frac{6-x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[\frac{(6-x)^2}{2} - \frac{(6-x)^2}{4} \right] dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^6 (6-x)^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{36} (6-x)^3 \right]_0^6 = 6 \end{aligned}$$

Usando integrales dobles y proyectando la región sobre el plano yz tenemos:
$V = \iint_R (6-3z-2y) \, dzdy \ , R = \left\{ (y,z) \in IR^2 / \ \ 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \frac{6-2y}{3} \right\}$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} (6-2y-3z) \, dzdy \\ &= \int_0^3 \left[(6-2y)z - \frac{3}{2} z^2 \right]_0^{\frac{6-2y}{3}} dy \\ &= \int_0^3 \left[\frac{(6-2y)^2}{3} - \frac{(6-2y)^2}{6} \right] dy \\ &= \frac{1}{6} \int_0^3 (6-2y)^2 dy \\ &= \left[-\frac{1}{12} \frac{(6-x)^3}{3} \right]_0^3 = 6 \end{aligned}$$

2 Cambios de orden de Integración

2.1 Problema

Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante .

$$I = \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx$$

Solución.
El dominio de integracion dado es $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq 2\right\}$.
Si se invierte el orden de integración tenemos que modificar la partición del dominio. $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq \dfrac{y}{2}, 0 \leq y \leq 2\right\}$,entonces la integral se puede escribir.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dydx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} e^{y^2} dxdy \\ &= \int_0^2 xe^{y^2} \Big|_0^{\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2} dy = \frac{1}{4} e^{y^2} \Big|_0^4 \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{16} - 1\right) \end{aligned}$$

2.2 Problema

Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante .

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^4 \sqrt{y} \cos y dydx$$

Solución.
El dominio de integración dado es $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\right\}$.
Si se invierte el orden de integración tenemos que modificar la partición del dominio, $D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4\right\}$,entonces la integral se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{x^2}^4 \sqrt{y} \cos y dydx &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y} \cos y dxdy \\ &= \int_0^4 \sqrt{y} \cos(y) x|_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 y \cos(y) dy \end{aligned}$$

Integrando esta última integral por partes se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^4 y \cos(y) dy &= ysen(y)|_0^4 - \int_0^4 sen(y) dy \\ &= ysen(y)|_0^4 + \cos(y)|_0^4 \\ &= 4sen(4) + \cos(4) - 1 \end{aligned}$$

2.3 Problema

Invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante .

$$I = \int_1^e \int_0^{\ln x} y dy dx$$

Solución.
El dominio de integración dado es $D = \{(x, y) \in IR^2 / \ \ 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$.
Si se invierte el orden de integración tenemos que el dominio,
$D = \{(x, y) \in IR^2 / \ \ e^y \leq x \leq e, \ 0 \leq y \leq 1\}$,entonces la integral
se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_1^e \int_0^{\ln x} y dy dx &= \int_0^1 \int_{e^y}^e y dx dy \\ &= \int_0^4 y \ \ x \Big|_{e^y}^e dy \\ &= \int_0^4 y(e - e^y) dy \\ &= e \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 - e^y \left[y - e^y \right]_0^4 \\ &= 8e - 4e^4 - 1 \end{aligned}$$

3 Cambios de variables: Coordenadas polares

3.1 Problema

Calcular $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$ si $D = \{(x, y) \in IR^2 / \ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$,usando coordenadas polares

Solución.
A partir de la coordenadas polares tenemos:
$x = rcos\theta, \ y = rsen\theta \implies x^2 + y^2 = r^2$
El valor absoluto del Jacobiano de transformación a polares es:
$\left| \dfrac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} \right| = r$
Reemplazando términos en la integral, produce

$$\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy = \iint_D r^2 \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (r, \theta)} \right| dr d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \left.\theta\right|_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Las coordenadas polares dieron una solucion más simple del problema. La simplicidad depende de la naturaleza del problema y de la simetria que presenta el dominio.

3.2 Problema

Calcular el área de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 8y$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

Solución.

Determinemos el centro y radio de la circunsferencia

$x^2 + y^2 = 8y \implies x^2 + y^2 - 8y = 0 \implies x^2 + (y-4)^2 = 16$

El área de la región D es: $A(D) \iint_D dxdy$

Por simetría, podemos calcular el área de la región D en el primer cuadrante y multiplicar por 2.

A fin de conocer los límites de integración en coordenadas polares necesitamos conocer el ángulo que forma la recta OT con el eje x.

$x^2 + y^2 = 8y \implies r^2 = 8rsen\theta \implies r = 8sen\theta$

$x^2 + y^2 = 9 \implies r = 3$

Como T pertenece a ambas circunferencias se cumple

$8sen\theta = 3 \implies \theta = arcsen\dfrac{3}{8}$

Luego, la mitad de la región $D^* = \left\{ (r,\theta)/3 \le r \le 8sen\theta; arcsen\dfrac{3}{8} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$

$$
\iint_D dxdy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| drd\theta
$$

$$\begin{aligned}
2\int_{arcsen\frac{3}{8}}^{\pi/2}\int_{3}^{8sen\theta} rdrd\theta &= 2\int_{arcsen\frac{3}{8}}^{\pi/2} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{3}^{8sen\theta} d\theta \\
\int_{arcsen\frac{3}{8}}^{\pi/2} \left(64sen^2\theta - 9\right) d\theta &= \left[64\left(\frac{\theta}{2} - \frac{sen2\theta}{4}\right) - \frac{9}{2}\theta\right]_{arcsen\frac{3}{8}}^{\pi/2} \\
&= \left[\frac{55}{2}\theta - 16sen2\theta\right]_{arcsen\frac{3}{8}}^{\pi/2} \\
&= \left[\frac{55}{4}\pi - \frac{55}{2}arcsen\frac{3}{8} + 16sen(2arcsen\frac{3}{8})\right] \\
&\approx 38,42
\end{aligned}$$

3.3 Problema

Calcular $\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, si D es el interior del cardioide $r = a\left(1+\cos\theta\right)$

Solución.
Cambiando a cordenadas polares, tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy &= \iint_{D^*} \frac{r^2}{r\cos\theta + r}\left|\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,\theta\right)}\right| drd\theta \\
&= \iint_{D^*} \frac{r^2}{r\cos\theta + r} rdrd\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \frac{r^2}{1+\cos\theta}drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos\theta}\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(1+\cos\theta\right)^2 d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left[\theta + 2sen\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{sen2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi a^3
\end{aligned}$$

Observacion si deseamos se rigurosos debemos hacer notar que la integral es impropia cuando $x \leq 0$, e $y = 0$, pues en tal caso el denominador es cero. Luego:

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{\substack{\alpha\to\pi^- \\ \varepsilon\to 0}} \int_0^{\alpha}\int_{\varepsilon}^{a(1+\cos\theta)} \frac{r^2}{1+\cos\theta} dr d\theta + \lim_{\substack{\beta\to\pi+ \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\beta}^{2\pi}\int_{\varepsilon}^{a(1+\cos\theta)} \frac{r^2}{1+\cos\theta} dr d\theta \\
&= \lim_{\alpha\to\pi^-} \frac{a^3}{3}\int_0^{\alpha} (1+\cos\theta)^2 d\theta + \lim_{\beta\to\pi+} \frac{a^3}{3}\int_{\beta}^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \lim_{\alpha\to\pi^-} \frac{a^3}{3}\left[\frac{3}{2}\alpha + 2sen\alpha + \frac{sen2\alpha}{4}\right] + \lim_{\beta\to\pi+} \frac{a^3}{3}\left[3\pi - \frac{3}{2}\beta - 2sen\beta - \frac{sen2\beta}{4}\right] \\
&= \pi a^3
\end{aligned}
$$

3.4 Problema

Calcular el volumen V el sólido acotado por las gráficas $z = 9 - x^2 - y^2$ y $z = 5$.

Solución.

Como el sólido es simétrico, basta encontrar su volumen en el primer octante y multiplicar su resultado por cuatro.

Usando integrales dobles y proyectando la región sobre el plano xy tenemos:

$$V = 4\int\int_D \left[9 - x^2 - y^2 - 5\right] dxdy$$

$D = \left\{(x,y) \in IR^2 / \ \ x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

A partir de la coordenadas polares, obtenemos:

$\left.\begin{array}{c} x = rcos\theta \\ y = rsen\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2$

$0 \leq x^2 + y^2 = r^2 \leq 4 \iff 0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

$D^* = \left\{(r,\theta) / \ \ 0 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$

El valor absoluto del Jacobiano de transformación a polares es:

$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$

Reemplazando términos en la integral, produce:

$$
\begin{aligned}
V &= 4\int\int_{D^*} \left[4 - r^2\right] r dr d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \left[4 - r^2\right] r dr d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{4}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta \\
&= 8\pi
\end{aligned}
$$

4 Cambios de variables. Coordenadas curvilíneas

4.1 Problema

Calcular $I = \iint_D 3xydxdy$, donde D es la región acotada por por la rectas

$$\begin{array}{ll} x - 2y = 0, & x - 2y = -4 \\ x + y = 4, & x + y = 1 \end{array} \quad (1)$$

Solución.

Podemos usar el cambio de variables

$$\left.\begin{array}{c} u = x - 2y \\ v = x + y \end{array}\right\} (1) \implies \begin{array}{c} x = \dfrac{1}{3}(2u + v) \\ y = \dfrac{1}{3}(u - v) \end{array} \quad (2)$$

Asi,$x - 2y = -4$ se transforma en $u = -4$
$x - 2y = 0$ se transforma en $u = 0$
$x + y = 1$ se transforma en $v = 1$
$x + y = 4$ se transforma en $v = 4$

Para calcular el Jacobiano$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ tenemos dos posibilidades.

La primera, es usar la transformación inversa (2) x e y en términos de u y v
.

La segunda, mucho más simple, es calcular a partir de (1) $\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$ y luego usar la propiedad $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left[\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|\right]^{-1}$.

En efecto$\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \implies \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{3}$

Por lo tanto, del teorema del cambio e variables se deduce que:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 3xydxdy = \iint_{D^*} 3\left(\frac{1}{3}(2u+v)\frac{1}{3}(u-v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\ &= \int_1^4 \int_{-4}^0 \frac{1}{9}\left(2u^2 - uv - v^2\right) dvdu \\ &= \frac{1}{9}\int_1^4 \left[2u^2v - \frac{uv^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_{-4}^0 du \\ &= \frac{1}{9}\int_1^4 \left[8u^2 + 8u - \frac{64}{3}\right] du \\ &= \frac{1}{9}\left[\frac{8u^3}{3} + 4u^2 - \frac{64}{3}u\right]_1^4 du = \frac{164}{9} \end{aligned}$$

4.2 Problema

Calcular el área de la región D, que esta acotada por las curvas

$$\begin{matrix} x^2 - y^2 = 1, & x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 4, & x + y = 6 \end{matrix} \quad (1)$$

Solución.

Teniendo en cuenta el cambio de variables que transforma la región D en la región D^*

$$\left.\begin{matrix} u = x^2 - y^2 \\ v = x + y \end{matrix}\right\} (1) \implies$$

La imagen D^* de la región D está acotada por la rectas verticales;

$x^2 - y^2 = 1$ se transforma en $u = 1$

$x^2 - y^2 = 9$ se transforma en $u = 9$

y las rectas horizontales

$x + y = 4$ se transforma en $v = 4$

$x + y = 6$ se transforma en $v = 6$

Es decir, $D^* = \{(u, v) / 1 \le u \le 9, 4 \le v \le 6\}$

Vamos a calcular $\left|\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right|$ a partir de (1) $\left|\dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}\right|$ y usar la propiedad $\left|\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| = \left[\left|\dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}\right|\right]^{-1}$.

En efecto $\left|\dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x + y) = 2v \implies \left|\dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| = \dfrac{1}{2v}$

El teorema del cambio variables afirma que:

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dxdy = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}\right| dudv \\ &= \int_1^9 \int_4^6 \frac{1}{3v} dvdu \\ &= \frac{1}{2} \int_1^9 [\ln v]_4^6 \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{6}{4}\right) \int_1^9 du \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} [u]_1^9 = 4 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4.3 Problema

Calcular $I = \displaystyle\iint_D \frac{x^3 + y^3}{xy} dxdy$, donde D es la región del primer cuadrante acotada por:

$$\begin{matrix} y = x^2, & y = 4x^2 \\ x = y^2, & x = 4y^2 \end{matrix} \quad (1)$$

Solución.

El cálculo de I sería bastante complejo si usamos coordenadas cartesianas por la simetría que tiene el dominio.Sin embargo, una cambio de variables simplifica la región D y la transforma en D^*.

Sean $u = \dfrac{x^2}{y}, \ \ v = \dfrac{y^2}{x}$

Luego D^* esta acotada por la rectas verticales;

$y = x^2$ se transforma en $u = 1$.

$y = 4x^2$ se transforma en $u = \dfrac{1}{4}$.

y las rectas horizontales

$x = y^2$ se transforma en $\quad v = 1$.

$x = 4y^2$ se transforma en $\quad v = \dfrac{1}{4}$.

Es decir, $D^* = \left\{ (u,v) /1 \leq u \leq \dfrac{1}{4}, 1 \leq v \leq \dfrac{1}{4} \right\}$

Para calcular $\left| \dfrac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right|$ tenemos dos posibilidades, la primera es despejar x e y en términos de u y v a partir de (1).

La segunda, es calcular $\left| \dfrac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \right|$ y usar la propiedad $\left| \dfrac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right| = \left[\left| \dfrac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \right| \right]^{-1}$.

En efecto$\left| \dfrac{\partial (u,v)}{\partial (x,y)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \implies \left| \dfrac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right| = \dfrac{1}{3}$

Calculemos ahora la integral

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{x^3 + y^3}{xy} dxdy = \iint_D \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right) dxdy \\
&= \int_{1/4}^{1} \int_{1/4}^{1} (u+v) \frac{1}{3} dvdu \\
&= \frac{1}{3} \int_{1/4}^{1} \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_{1/4}^{1} du \\
&= \frac{1}{3} \int_{1/4}^{1} \left[\frac{3}{4}u + \frac{15}{32} \right] du \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{8}u^2 + \frac{15}{32}u \right]_{1/4}^{1} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{8}\frac{15}{16} + \frac{15}{32}\frac{3}{4} \right] \\
&= \frac{15}{64}
\end{aligned}
$$

4.4 Problema

Evaluar la integral $I = \iint_D [x+y]^2 \ dxdy$, donde D es la región del plano xy acotado por las curvas

$$
\begin{matrix} x + y = 2, & x + y = 4, \\ y = x, & x^2 - y^2 = 4, \end{matrix} \quad (1)
$$

Solución.

Observese que las ecuaciones de la curvas de la frontera de D sólo incluyen a x e y en las combinaciones de $x \pm y$,y el integrando incluye solamentenlas mismas combinaciones. Aprovechando estas simetrías, sean las coordenadas

$u = x + y, \quad v = x - y$

Luego, la imagen D^* de la región D está acotada por las curvas;

$x + y = 2$ se transforma en $u = 2$.

$x + y = 4$ se transforma en $u = 4$.

A su vez

$x - y = 0$ se transforma en $\quad v = 0$.

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 4$ se transforma en $\quad uv = 4$.

Es decir, $D^* = \left\{ (u, v) / \ \ 2 \leq u \leq 4, 0 \leq v \leq \dfrac{4}{u} \right\}$

El jacobiano de la transformación es $\left| \dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| = \left[\left| \dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} \right| \right]^{-1}$.

En efecto$\dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \Longrightarrow \left| \dfrac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| = \dfrac{1}{2}$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\iint_D [x + y]^2 \, dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{D^*} u^2 dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_2^4 \int_0^{4/u} u^2 dvdu \\
&= \frac{1}{2} \int_2^4 u^2 \left. v \right|_0^{4/u} du \\
&= \frac{1}{2} \int_2^4 4udu \\
&= \frac{4}{2} \left. \frac{u^2}{2} \right|_2^4 = 12
\end{aligned}$$

5 Cálculo de integrales triples en coordenadas rectángulares cartesianas

5.1 Problema

Sea R la región en IR^3 acotada por: $z = 0, z = \dfrac{1}{2}y, \ x = 0; \ \ x = 1, \ y = 0, \ y = 2$

Calcular $\displaystyle\iiint_R (x + y - z) \, dxdydz.$

Solución.

Del gráfico de la región , tenemos que $\ 0 \leq z \leq \dfrac{1}{2}y$.Proyectando la región R sobre el plano xy. Así $D = \left\{ (x, y) \in IR^2 / \ \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \right\}$.

Por lo tanto;

$$\iiint_R (x+y-z)\,dxdydz = \iint_D (\int_0^{\frac{1}{2}y} (x+y-z)\,dz)dxdy$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^2(\int_0^{\frac{1}{2}y} (x+y-z)\,dz)dydx &= \int_0^1\int_0^2 \left[xz+yz-\frac{z^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}y} dydx \\
\int_0^1\int_0^2 \left[\frac{1}{2}(x+y)y-\frac{y^2}{8}\right] dydx &= \int_0^1\int_0^2 \left[\frac{1}{2}xy+\frac{3}{8}y^2\right] dydx \\
\int_0^1 \left[\frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{8}y^3\right]_0^2 dx &= \int_0^1 [(x+1)]\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

También es posible resolver el problema anterior proyectando la región R sobre el plano xz.En tal caso, $2z \le y \le 2$ y
$D = \left\{(x,z) \in IR^2/\ \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le 1\right\}$

$$\iiint_R (x+y-z)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^1(\int_{2z}^2 (x+y-z)\,dy)dzdx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}-zy\right]_{2z}^2 dzdx &= 2\int_0^1\int_0^1 [x+1-z-xz]\,dzdx \\
2\int_0^1 \left[xz+z-\frac{z^2}{2}-x\frac{z^2}{2}\right]_0^1 dx &= 2\int_0^1 \left[x+1-\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right] dx \\
\int_0^1 [(x+1)]\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Una tercera posibilidad de solución consiste en proyectar la región R sobre el plano yz.
Esta se deja como ejercicio.

5.2 Problema

Calcular $\iiint_D x^2 dxdydz$ si D es la región acotada por $y^2+z^2 = 4ax$, $y^2 = ax, x = 3a$
Solución.
La superficie $y^2+z^2 = 4ax$ corresponde a un paraboloide de revolución como el bosquejado en la figura.
En dos variables el gráfico de $y^2 = ax$ es una parábola, pero es tres variables es la superficie de un manto parabólico.

Finalmente, el gráfico $x = 3$ es un plano paralelo al plano xz a la distancia $3a$.
Luego el gráfico de la región es
La proyección de la region sobre el plano xy es:
$D = \left\{(x, y, z) \in IR^3 / D_1 \cup D_2\ ,\ -\sqrt{4ax - y^2} \leq z \leq \sqrt{4ax - y^2}\right\}$
Por simetría se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D x^2 dxdydz = 2\iint_{D_1}\int_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} x^2 dzdxdy \\ &= 2\int_0^{3a}\int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}}\int_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} x^2 dzdydx \\ &= 2\int_0^{3a}\int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}}\left[x^2 z\right]_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} dydx \\ &= 4\int_0^{3a}\int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} x^2\sqrt{4ax - y^2}dydx \end{aligned}$$

De una tabla de integrales obtenemos

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}du = \frac{1}{2}(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 arcsen\frac{u}{a})$$

Así al integrar la expresión:

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \sqrt{4ax - y^2}dy &= \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{4ax - y^2} + 4ax\ arcsen\frac{y}{2\sqrt{ax}}\right)\right]_{\sqrt{ax}}^{2\sqrt{ax}} \\ &= 2ax\ arcsen\,(1) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{ax}\sqrt{3ax} + 4ax\ arcsen\frac{1}{2}\right] \\ &= 2ax\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}ax\sqrt{3}\ - 2ax\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{2\pi}{3}ax\ + \frac{\sqrt{3}}{2}ax \end{aligned}$$

Por lo tanto al sustituir en la integral anterior, queda

$$\begin{aligned} 4\int_0^{3a}\left[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]ax^3dx &= \left[\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)ax^4\right]_0^{3a} \\ &= 27a^5\left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

5.3 Problema

Calcular el volumen del sólido Ω acotado por la superficie $y = x^2$ y los planos $y + z = 4 \ ; z = 0$.

Solución.

Consideremos que la región Ω está acotada inferiormente por la frontera $z = 0$ y superiomente por $z = 4 - y$.

Si Proyectamos la región Ω sobre el plano xy, se tiene:

$\Omega = \left\{(x, y, z) \in IR^3 / \ \ (x, y) \in D, \ 0 \leq z \leq 4 - y\right\}$

$D = \left\{(x, y) \in IR^2 / \ \ -2 \leq x \leq 2, \ x^2 \leq y \leq 4\right\}$

Luego el volumen de la región es

$$\begin{aligned}
V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dxdydz = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dzdydx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)\,dydx = \int_{-2}^{2}\left[4y - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{4} dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right] dx \\
&= \left[8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{10}\right]_{-2}^{2} = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$

6 Coordenadas esféricas

6.1 Problema

Resolver $I = \iiint_{D} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)} dxdydz$ si D es la región de IR^3 limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ con $0 < b < a$ anillo esférico.

Solución

Por la simetría del dominio y la forma del integrando

usaremos coordenadas esféricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= rsen\theta\cos\phi \\ y &= rsen\theta sen\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} b^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 & \Longrightarrow & b \leq r \leq a \\ tg\theta = \dfrac{y}{z} = 0 & \Longrightarrow & 0 \leq \theta \leq \pi \\ tg\phi = \dfrac{y}{x} = 0 & \Longrightarrow & 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{array}$$

Recordando que el valor absoluto del Jacobiano a esféricas es :

$\left|\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}\right| = r^2 sen\theta$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^a re^{-r^2}\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| drd\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^a r^3e^{-r^2} sen\theta\ \ drd\theta d\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{2}r^2e^{-r^2}-e^{-r^2}\right]_b^a sen\theta\ \ d\theta d\phi \\
&= \left(\frac{1}{2}b^2e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}-\frac{1}{2}a^2e^{-a^2}-e^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} sen\theta\ \ d\theta d\phi \\
&= \left(\frac{1}{2}b^2e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}-\frac{1}{2}a^2e^{-a^2}-e^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi} -\cos\theta|_0^{\pi}\ \ d\phi \\
&= 2\left(\frac{1}{2}b^2e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}-\frac{1}{2}a^2e^{-a^2}-e^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi}\ d\phi \\
&= 4\pi\left(\frac{1}{2}b^2e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-b^2}-\frac{1}{2}a^2e^{-a^2}-e^{-a^2}\right)
\end{aligned}
$$

6.2 Problema

Encontrar el volumen de la región determinada por $x^2+y^2+z^2 \le 16$, $z^2 \ge x^2+y^2$.

Solución

$x^2+y^2+z^2=16$ es una esfera con centro en el origen y radio 4

$z^2=x^2+y^2$ es un cono con vértice en el origen y eje de simetría coincidente con el eje z.

Como $z\ge 0$, sólo debemos considerar sólo la región sobre el plano xy.

La intersección de la esfera con el cono se obtiene mediante el sistema:

$$
\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2=z^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{r} z=\sqrt{8} \\ x^2+y^2=8 \end{array}
$$

Usaremos coordenadas esféricas:

$$
\left.\begin{array}{l} x=rsen\theta\cos\phi \\ y=rsen\theta sen\phi \\ z=r\cos\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} 0\le x^2+y^2+z^2\le 16 & \Longrightarrow & 0\le r\le 4 \\ tg\theta=\dfrac{y}{z}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}=1 & \Longrightarrow & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ tg\phi=\dfrac{y}{x}=0 & \Longrightarrow & 0\le\phi\le 2\pi \end{array}
$$

Recordando que el valor absoluto del Jacobiano a esféricas es :

$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| = r^2sen\theta$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^4 r^2 sen\theta \ \ drd\theta d\phi \\
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^4 sen\theta \ \ d\theta d\phi \\
V &= \frac{4^3}{3}\int_0^{2\pi} -\cos\theta|_0^{\frac{\pi}{4}} \ \ d\phi \\
V &= \frac{4^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\phi = \frac{4^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)2\pi
\end{aligned}
$$

Otra opción para resolver este problema es usar coordenadas cilíndricas,en tal caso

$$
\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} x^2+y^2+z^2 = 16 & \Longrightarrow & z = 16 - r^2. \\ x^2+y^2 = z^2 & \Longrightarrow & z = r^2 \end{array}
$$

Teníamos que el Jacobiano de transformación a cilíndricas es:
$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$ luego:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}}\int_{r^2}^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} rz|_{r^2}^{\sqrt{16-r^2}} drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{8}} \left(r\sqrt{16-r^2}-r^2\right) drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{(16-r^2)^3}-\frac{r^3}{3}\right)_0^{\sqrt{8}} d\theta \\
&= -\frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{8^3}-\sqrt{16^3}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(64-32\sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

7 Coordenadas Cilíndricas

7.1 Problema

Usando integrales triples calcular el volumen de la región acotada por $z = x^2+y^2$ y $z = 27-2x^2-2y^2$.

Solución.

Por la simetría del volumen los resolveremos usando coordenadas cilíndricas.

$$
\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} z = x^2+y^2 & \Longrightarrow & z = r^2. \\ z = 27-2x^2-2y^2 & \Longrightarrow & z = 27-2r^2 \\ x^2+y^2 = 9 & \Longrightarrow & r = 3. \end{array}
$$

Como el Jacobiano de transformación a cilíndricas es:
$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$ se tiene:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2}^{27-2r^2} rdzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\ z|_{r^2}^{27-2r^2}\ drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\left(27-3r^2\right)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{27}{2}r^2-\frac{3}{4}r^4\right]_0^3 d\theta \\
&= \frac{243}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{243}{4}2\pi = \frac{243}{2}\pi
\end{aligned}$$

7.2 Problema

Calcular el volumen de la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=13$ y el cono $(z-1)^2 = x^2+y^2,\quad z\geq 1$

Solución.

El volumen pedido es

$$V = \iiint_R dxdydz$$

donde la región R está dada por

$R = \left\{(x,y,z)\in IR^3/\,(x,y)\in D; 1+\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

D corresponde a la proyección de R sobre el plano xy.

$D = \left\{(x,y,z)\in IR^2/x^2+y^2\leq 13\right\}$

Por la simetría del volumen conviene usar coordenadas cilíndricas.

$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{array}\right\} \implies x^2+y^2+z^2\leq r^2+z^2\leq 13$,

Determinemos la imagen R^* de R

$(z-1)^2 = x^2+y^2 \iff z\geq 1+r \implies 1+r\leq z\leq\sqrt{13-r^2}$

Luego

$R^* = \left\{(r,\theta,z)\in IR^3/\,(r,\theta)\in D; 1+r\leq z\leq\sqrt{13-r^2}\right\}$

La región R al ser proyectada sobre el plano xy. produce

$z=0 \implies x^2+y^2=13$

$D_1^* = \left\{(r,\theta)\in IR^3/\leq r\leq 2\ \ ;-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Como el Jacobiano de transformación a cilíndricas es:
$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_R dxdydz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} r dz d\theta dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r z_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} d\theta dr \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \left(\sqrt{13-r^2} - (1+r) \right) d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^2 \left(r\sqrt{13-r^2} - \left(r + r^2 \right) \right) dr \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3} \left(13 - r^2 \right)^{3/2} - \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) \right]_0^2 \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{3} \left(13^{3/2} - 7^{3/2} \right) - \left(\frac{4}{2} + \frac{8}{3} \right) \right]
\end{aligned}
$$

7.3 Problema

Calcular utilizando coordenadas cilíndricas el volumen de la región R , donde R es el interior a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$,y exterior al cilindro $(x-1)^2+y^2 = 1$.

Solución

La región R se describe en coordenadas cartesianas mediante

$R = \left\{ (x, y, z) \in IR^3 / (x, y) \in D; 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}$

donde D es la proyección de R sobre el plano xy.

$D = \left\{ (x, y) \in IR^3 / x^2 + y^2 \leq 4 \ \ ; (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \right\}$

Transformemos la región R a coordenadas cilindricas definidas por

$$
\left. \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{array} \right\} \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) + z^2 \leq 4
$$

$$
\Longleftrightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}
$$

La región R al ser proyectada sobre el plano xy da origen a dos subregiones

$x^2 + y^2 \leq r^2 \leq 4 \iff 0 \leq r \leq 2$ si $\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2}$

$(x-1)^2 + y^2 \geq 1 \iff r \geq 2\cos\theta$ y $r \leq 2$ si -$\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

Entonces, la región R^* puede describirse mediante

$R^* = \left\{ (r, \theta, z) / (r, \theta) \in D^* = D_1^* \cup D_1^*; 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \right\}$

$D_1^* = \left\{ (r, \theta) \in IR^3 / 2\cos\theta \leq r \leq 2 \ \ ; -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \right\}$

$D_2^* = \left\{ (r, \theta) \in IR^3 / 0 \leq r \leq 2 \ \ ; \dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{3\pi}{2} \right\}$

Ademas, el Jacobiano de la transformación a cilíndricas es:
$\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = r$
En consecuencia la integral puede describirse por

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_R (r)\, drd\theta dz \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2} r\left[\,z\,\right]_0^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2 r\left[\,z\,\right]_0^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2} r\sqrt{4-r^2}drd\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}drd\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\right]_{2\cos\theta}^{2} d\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\right]_0^2 d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1-\cos^2\theta\right)^{3/2} d\theta + \frac{8}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} sen^3\theta d\theta + \frac{8}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{8}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

7.4 Problema

Calcular $I = \iiint_D \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dxdydz.$

En la región $D = \left\{(x,y,z) \in IR^3 / \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\} \quad a > 0, b > 0, c > 0$

Solución.

La región de integración es un elipsoide de semieejes a,b,c.
Efectuemos un primer cambio de variables:
$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw.$
Con ello, D se transforma en la bola.
$D^* = \left\{(u,v,w)/u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$ yel valor absoluto del Jacobiano queda
:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{array}\right| = abc$$

Luego, aplicando el teorema del cambio de variables y obtenemos la integral

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz. \\
&= \iiint_{D^*} \left(u^2+v^2+w^2\right) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \\
&= \iiint_{D^*} \left(u^2+v^2+w^2\right) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \\
&= \iiint_{D^*} \left(u^2+v^2+w^2\right)(abc)\, dudvdw
\end{aligned}$$

Ahora, transformamos a coordenadas esféricas.

$$\left.\begin{array}{l} u = rsen\theta\cos\phi \\ v = rsen\theta sen\phi \\ w = r\cos\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} 0 \le u^2+v^2+w^2 \le 1 & \Longrightarrow & 0 \le r \le 1 \\ tg\theta = \dfrac{v}{w} & \Longrightarrow & 0 \le \theta \le \pi \\ tg\phi = \dfrac{v}{u} & \Longrightarrow & 0 \le \phi \le 2\pi \end{array}$$

Quedando, la region $D^{**} = \{(r,\theta,\phi)\,/0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi\}$

$$\begin{aligned}
abc\iiint_{D^*}(u^2+v^2+w^2)dudvdw &= abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\left(r^2\right) r^2 sen\theta \;\; drd\theta d\phi \\
&= abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^1 sen\theta \;\; d\theta d\phi \\
&= \frac{abc}{5}\int_0^{2\pi} -\cos\theta|_0^{\pi} \;\; d\phi \\
&= \frac{2abc}{5}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi abc}{5}
\end{aligned}$$

Observación

Es claro que la integración se podría haber efectuado usando directamente la trasformación compuesta.

$$\left.\begin{array}{l} x = arsen\theta\cos\phi \\ y = brsen\theta sen\phi \\ z = cr\cos\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}\right| = abcr^2 sen\theta$$

7.5 Problema

Calcular $I = \iiint_D \dfrac{dxdydz.}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$,

en la región $D = \left\{(x,y,z) \in IR^3/x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$, (a,b,c) es un punto fijo

no peteneciente a la esfera $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Solución.

Si usamos coordenadas cartesianas los límites de integración son dificultosos, pues en tal caso tendríamos.

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \frac{dxdydz.}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \\ I &= \int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} \frac{dzdydx.}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} \end{aligned}$$

Es claro que si usamos este camino las cosas no serán fáciles.

Sin embargo , dada la simetria esférica del dominio y observando que el integrando no es nada más que el reciproco de la distancia desde $(a,b,c) \notin D$ hasta $(x,y,z) \in D$,nos damos cuenta que el resultado no puede depender más que de la distancia **d** entre dichos puntos.Por ello, el resultado no puede variar si ubicamos el eje z pasando por el punto (a,b,c). Si $(0,0,d)$ son las nuevas coordenadas del punto fijo tenemos.

$$I = \iiint_D \frac{dxdydz.}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

Observación

El razonamiento anterior es muy usado el cálculo de integrales que aparecen aplicaciones a la Física pues en dicha Ciencia son comunes las leyes en que aparece una distacia o el cuadrado de una distancia en el denominador del integrando.

Para calcular I en (*) usamos coordenadas esféricas. Obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{r^2 sen\theta \;\; d\phi d\theta dr}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} \\ &= 2\pi\int_0^R\int_0^\pi \frac{r^2 sen\theta \;\; d\theta dr}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} \end{aligned}$$

Para calcular

$$J = \int_0^\pi \frac{r^2 sen\theta \;\; d\theta dr}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}$$

podemos hacer

$s = r^2 + d^2 - 2dr\cos\theta$

$ds = 2dr sen\theta d\theta$

Además, $\theta = 0 \implies s = r^2 + d^2 - 2dr = (d-r)^2$

$\theta = \pi \implies s = r^2 + d^2 + 2dr = (d+r)^2$

Reemplazando en la integral anterior produce

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{r}{2d}\int_{(d-r)^2}^{(d+r)^2} s^{-1/2} ds = \frac{r}{2d}\ 2s^{1/2}\Big|_{(d-r)^2}^{(d+r)^2} \\
&= \frac{r}{2d}\left[2\left(d+r\right)-2\left(d-r\right)\right] \\
&= \frac{r}{2d}\left[4r\right] = \frac{2r^2}{d}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi\int_0^R \frac{2r^2}{d} dr \\
I &= \frac{4\pi}{d}\ \frac{r^3}{3}\Big|_0^R \\
I &= \frac{4\pi}{3d} R^3
\end{aligned}
$$