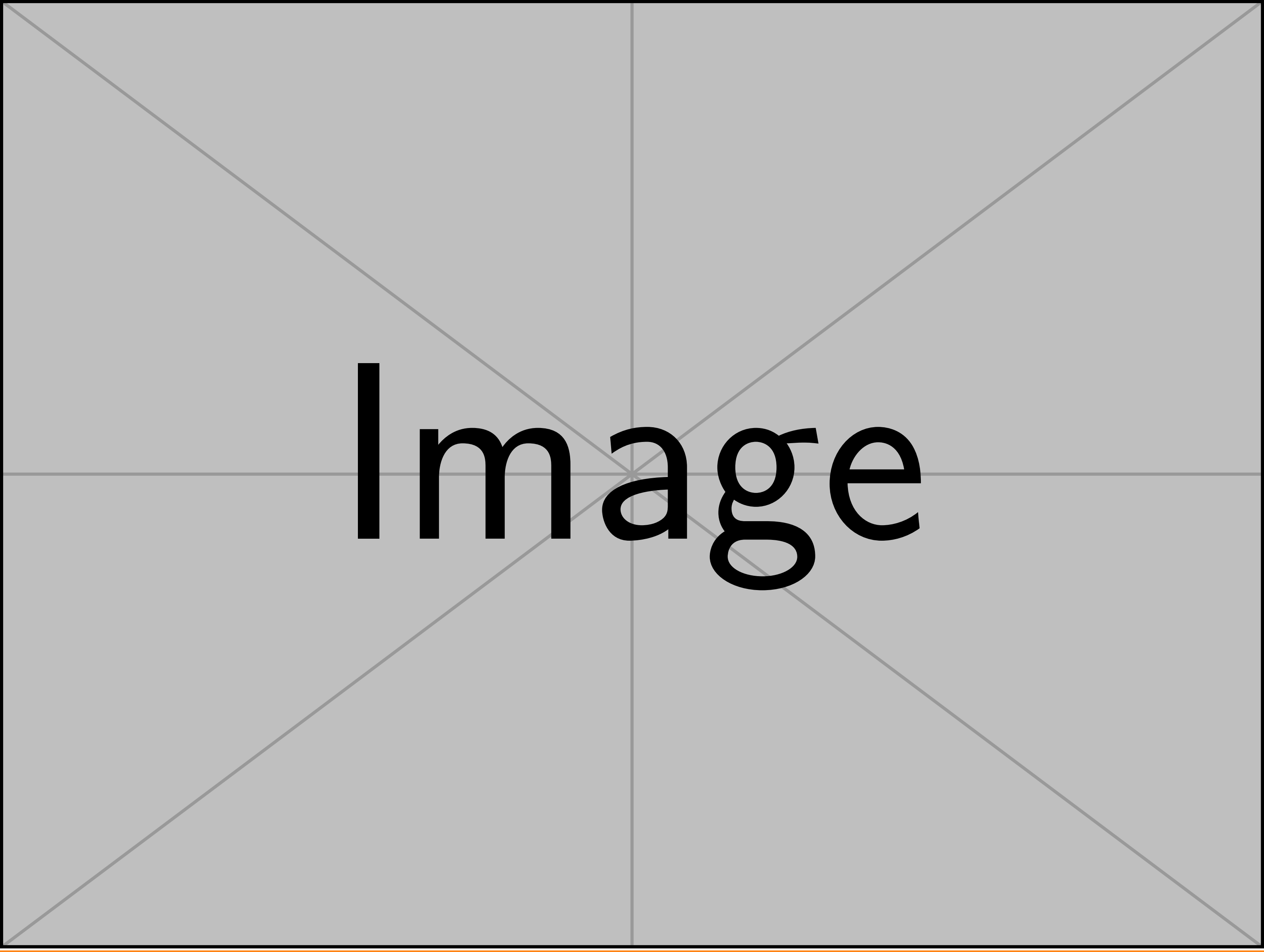

Note on Real and Complex Analysis

作者：BEISNWKZNAN

时间：2022.9.9

版本：0.01

项目地址：https://github.com/BEISNWKZNAN/A-Note-of-Rudin-s-Real-and-Complex-Analysis/

目录

第 1 章 抽象积分

1.1 回顾 Riemann 积分

首先我们知道 Riemann 积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{n} f(t_i)m(E_i)$$

其中 $m(E_i)$ 总是一个区间的长度（测度），将其与函数的某个值相乘以得到函数所围面积的估计。即以函数的图以及 $x=a, x=b, y=0$ 为边界点的图形（集合）的面积（测度）。更进一步的，我们有在学习重积分时定义的 Jordan 测度。

定义 1.1 (Jordan 测度)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集，则存在 $I=\{x\in\mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i=1,2,\cdots,n\}, I\supseteq D$，则定义函数 $\mathcal{X}_D : I \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 1, x\in D \\ 0, x\notin D \end{cases}$. 若函数 $\mathcal{X}_D$ 是可积的，则称 D 为 Jordan 可测集，$\int_I \mathcal{X}_D(x)dx$ 定义为 D 的 Jordan 测度。♣

这个测度的定义实际上是用内部的小矩形去逼近集合的面积。显然，I 的选取并不影响 D 的可测性以及测度，所以这个定义是好的。

同时我们可以看到集函数 m 一样是一个测度，不过他似乎只能定义在区间上。

定义 1.2 (区间测度)

若 I 是 $\mathbb{R}$ 上的有界区间，即 $I=(a,b),(a,b],[a,b)$ 或 $[a,b], a\leqslant b, a,b\in\mathbb{R}$, 则定义 $m(I)=b-a$.
若 I 是无界区间，则 $m(I)=+\infty$. ♣

通过这两个已知的测度，我们应该可以认识到测度应该有的一些性质。并试图得到衡量一个集合大小的一般理论。

1.2 测度的概念

首先，测度应该是一个映射到 $[0,\infty]$ 函数。

其次，我们是试图衡量面积、长度之类的东西，所以他应该是要保留一些并集的性质，他应该可以需要保持有限并，即有有限可加性。进一步的，我们由集合论的知识可以知道对于势相同无穷集。可数并似乎不改变集合的势，比如，可数的直线不可能覆盖一个平面。或许我们可以加入可数可加性。即如果 A_i 是互不相交的集合列，应有

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

不过还有一个问题，刚刚我们并没有定义集函数定义域，我们称其定义域里的元素为可测集，为使定义域可以承受可数可加性，我们应该要求他的定义域是对于可数可加封闭的，我们通常认为实直线是无穷长的，所以全集 X 应该也在其定义域里，这样我们也可以要求任何可测集的补集也为可测的。这样我们就得到了 σ-代数。

定义 1.3

我们称一个集合族 $\mathfrak{M}$ 是 σ 代数如果他有如下性质。

(i) $X\in\mathfrak{M}$

(ii) $A\in\mathfrak{M} \Rightarrow A^c\in\mathfrak{M}$

(iii) $(A_i \in \mathfrak{M}) \vee (A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i) \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$
如果一个集合属于 $\mathfrak{M}$ 则称这个集合是可测的。

这个定义与拓扑和开集的定义是相似的。开集的定义在数学分析中已经给出了。

接下我们或许可以给出一些测度的性质，以确认我们的定义的合适的。

命题 1.1

如果 μ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度，那么它有如下性质：

(1)