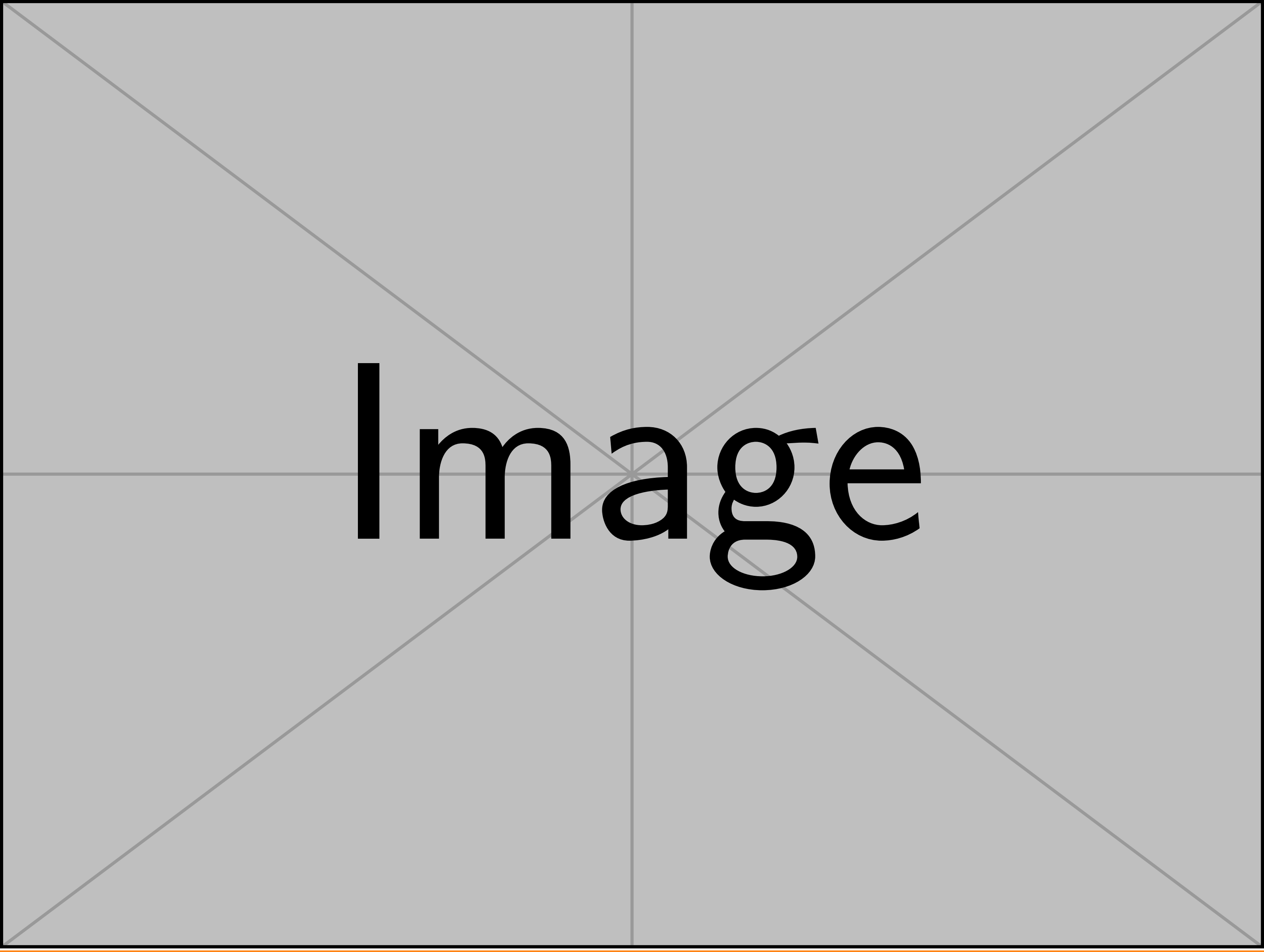

Note on Real and Complex Analysis

作者：BEISNWKZNAN

时间：2022.9.9

版本：0.01

项目地址：https://github.com/BEISNWKZNAN/A-Note-of-Rudin-s-Real-and-Complex-Analysis/

目录

第 1 章 抽象积分

1.1 回顾 Riemann 积分

首先我们知道 Riemann 积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{n} f(t_i)m(E_i)$$

其中 $m(E_i)$ 总是一个区间的长度（测度），将其与函数的某个值相乘以得到函数所围面积的估计。即以函数的图以及 $x = a, x = b, y = 0$ 为边界点的图形（集合）的面积（测度）。更进一步的，我们有在学习重积分时定义的 Jordan 测度。

定义 1.1 (Jordan 测度)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集，则存在 $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, n\}, I \supseteq D$，则定义函数 $\mathcal{X}_D : I \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} 1, x \in D \\ 0, x \notin D \end{cases}$. 若函数 $\mathcal{X}_D$ 是可积的，则称 D 为 Jordan 可测集，$\int_I \mathcal{X}_D(x)dx$ 定义为 D 的 Jordan 测度。 ♣

这个测度的定义实际上是用内部的小矩形去逼近集合的面积。显然，I 的选取并不影响 D 的可测性以及测度，所以这个定义是好的。

同时我们可以看到集函数 m 一样是一个测度，不过他似乎只能定义在区间上。

定义 1.2 (区间测度)

若 I 是 $\mathbb{R}$ 上的有界区间，即 $I = (a, b), (a, b], [a, b)$ 或 $[a, b], a \leqslant b, a, b \in \mathbb{R}$, 则定义 $m(I) = b - a$.

若 I 是无界区间，则 $m(I) = +\infty$. ♣

通过这两个已知的测度，我们应该可以认识到测度应该有的一些性质。并试图得到衡量一个集合大小的一般理论。

1.2 测度的概念

首先，测度应该是一个集函数 $m : P(X) \to \mathbb{R}^*$.

其次，我们是试图衡量面积、长度之类的东西，所以他应该是要保留一些并集的性质，他应该可以需要保持有限并，即有有限可加性。