E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition. *On dit qu'une partie A de E est compacte lorsque, de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite convergente dans A.*

Théorème. *Toute partie fermée et bornée A de E est compacte.*

Démonstration. Soit $A \subset E$ une partie fermée et bornée de E.

— Considérons d'abord la dimension 1 : $E = \mathrm{vect}(e)$ avec $\|e\| = 1$.
Soit une suite $(\lambda_j e)_{j\geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$, alors la suite $(\|\lambda_j e\|)_{j\geqslant 0} = (|\lambda_j|)_{j\geqslant 0}$ est bornée, donc par le théorème de Bolzano-Wierstrass, il existe une extraction $\varphi \nearrow\!\!\nearrow$ telle que $(|\lambda_{\varphi(j)}|)_{j\geqslant 0} \longrightarrow \lambda$. Puis :

  — si $(\lambda_{\varphi(j)})_{j\geqslant 0}$ est positive à partir d'un certain rang, alors $(\lambda_{\varphi(j)})_{j\geqslant 0} \longrightarrow l$ avec $l = \lambda$

  — si $(\lambda_{\varphi(j)})_{j\geqslant 0}$ est négative à partir d'un certain rang, alors $(\lambda_{\varphi(j)})_{j\geqslant 0} \longrightarrow l$ avec $l = -\lambda$

  — sinon, on construit $\psi \nearrow\!\!\nearrow$ telle que $(\lambda_{\varphi\circ\psi(j)})_{j\geqslant 0}$ soit positive, ainsi : $(\lambda_{\varphi\circ\psi(j)})_{j\geqslant 0} \longrightarrow l$ avec $l = \lambda$

Dans tous les cas, on a une extraction $\theta \nearrow\!\!\nearrow$ telle que $(\lambda_{\theta(j)})_{j\geqslant 0}$ converge vers l.
Or, $(\|\lambda_{\theta(j)} e - le\|)_{j\geqslant 0} = (|\lambda_{\theta(j)} - l|)_{j\geqslant 0} \longrightarrow 0$, d'où $(\lambda_{\theta(j)} e)_{j\geqslant 0} \longrightarrow le$. Comme A est fermée, on a aussi $le \in A$.

— En dimension n, on a $E = \mathrm{vect}(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, avec $\forall i, \|e_i\| = 1$.
Soit une suite $(x_j)_{j\geqslant 0} = \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_{i,j} e_i\right)_{j\geqslant 0} \in A^{\mathbb{N}}$. Grâce au cas de la dimension 1 démontrée juste avant, on construit dans l'ordre, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, l'extraction φ_i telle que $(\lambda_{i,\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_i(j)} e_i)_{j\geqslant 0} \longrightarrow l_i e_i$. Ainsi, avec $\varphi = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$, on a $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, (\lambda_{i,\varphi(j)} e_i)_{j\geqslant 0} \longrightarrow l_i e_i$. Puis, on note $x = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} l_i e_i$, on a : $\forall j \geqslant 0,\ \|x_{\varphi(j)} - x\| = \left\| \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} (\lambda_{i,\varphi(j)} - l_i) e_i \right\| \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_{i,\varphi(j)} - l_i| \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Soit encore : $(x_{\varphi(j)})_{j\geqslant 0} \longrightarrow x$. Comme A est fermée, on a aussi $x \in A$. Donc A est compacte.

□

Théorème. *Toutes les normes de E sont équivalentes.*

Démonstration. Montrons que $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_1$, puis comme l'équivalence des normes est une relation d'équivalence, on pourra généraliser à toutes les normes.

— Soit $x = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i e_i \in E$. $\|x\| = \left\| \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i e_i \right\| \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \|\lambda_i e_i\| = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i| = \|x\|_1$. On a alors la première inégalité : $\|x\| \leqslant \|x\|_1$.

— Considérons la sphère unité de la norme 1 : $S_1 = \{x \in E \,|\, \|x\|_1 = 1\}$ et notons $m = \inf\limits_{x\in S_1} \|x\|$. Il faut alors montrer que $m > 0$. Comme m est une borne inférieure, il existe une suite $(x_k)_{k\geqslant 0} \in S_1^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_k\| \longrightarrow m$. La sphère S_1 est fermée et bornée pour $\|\cdot\|_1$ donc par le théorème précédent S_1 est compacte pour $\|\cdot\|_1$. Ainsi il existe une extraction $\varphi \nearrow\!\!\nearrow$ telle que $(x_{\varphi(k)})_{k\geqslant 0} \underset{\|\cdot\|_1}{\longrightarrow} x \in S_1$. Comme $0 \notin S_1$, on a $x \neq 0$. Montrons alors que $\|x\| = m$. Pour $k \geqslant 0$, grâce à la première inégalité, on a : $\|x_{\varphi(k)} - x\| \leqslant \|x_{\varphi(k)} - x\|_1 \longrightarrow 0$, or $\|x_{\varphi(k)}\| - \|x\| \leqslant \|x_{\varphi(k)} - x\|$ donc $\|x_{\varphi(k)}\| - \|x\| \longrightarrow 0$ soit $\|x_{\varphi(k)}\| \longrightarrow \|x\|$.
Alors par unicité de la limite, on a : $\|x\| = m$. De plus, $x \neq 0$ donc $m > 0$.
Ainsi, pour tout $x \in E$, on note $y = \dfrac{x}{\|x\|_1}$, alors $y \in S_1$ donc $\|y\| \geqslant m$, donc $\|x\| \geqslant m\|x\|_1$ soit $\|x\|_1 \leqslant \dfrac{\|x\|}{m}$ car $m > 0$.

Finalement, $\forall x \in E, \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant \dfrac{\|x\|}{m}$ donc les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes. □