

1 Questions

Pour $n \geq 1$, on définit :

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f_n : x \longmapsto \frac{n^x}{\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)} = \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)}$$

1. Pour $n \geq 1$, on a : $f_n > 0$ donc on peut calculer son logarithme : pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= x \sum_{1 \leq k < n} (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{1 \leq k < n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{1 \leq k < n} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} \left(x \frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

On constate que $(\ln f_n)$ converge simplement, donc (f_n) converge simplement vers une fonction positive $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

2. Soient $n \geq 1$ et $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1} n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+1+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\prod_{2 \leq k \leq n+1} (x+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\frac{1}{x+1} (x+n+1) \prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \\ &= \frac{n}{n+x+1} (x+1) \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (x+1) f_n(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(x+1) = (x+1)f(x)$.

3. Pour $n \geq 1$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $f_n > 0$, alors on note :

$$g_n = \frac{f'_n}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de $\ln f_n$ trouvée en (1.), on a directement, pour $x \geq 0$:

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et donc :} \quad g'_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Par un calcul similaire à celui de (1.), on a :

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq k < n} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{x+k} \right) - \frac{1}{x+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$$

Donc (g_n) converge simplement vers une fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$. De plus, comme $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a aussi que (g'_n)

converge simplement vers une fonction $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$. Appliquons maintenant le lemme 1 sur g'_n :

$$g'_{n+1}(x) - g'_n(x) = \frac{1}{(x + n + 1)^2}$$

On constate que $g'_{n+1} - g'_n$ est décroissante et positive, on conclut que (g'_n) converge uniformément vers h sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, d'après le lemme 3, (g_n) converge uniformément vers g sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $g' = h$. On applique encore le lemme 3 et on obtient : $(\ln f_n)$ converge uniformément vers $\ln f$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, $\ln f$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $(\ln f)' = g$. Ainsi f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f' = fg$. Avec ces résultats, on peut dire que $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$. D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que f_n converge uniformément vers f sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$.

2 Lemmes