1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc, pour $\epsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\left|q - \sqrt{2}\right| \leqslant \epsilon$. Ainsi $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = \inf\limits_{q \in \mathbb{Q}} \left|q - \sqrt{2}\right| = 0$

2. Soit $y \in E$, notons $d = d(y, A)$.
   $d = \inf\limits_{x \in A} \|x - y\|$ donc il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - y\| \longrightarrow d$.
   À partir d'un rang n_0, on a : $\|x_n - y\| \leqslant 2d$ donc $x_n \in \overline{\mathcal{B}}(y, 2d) \cap \overline{A}$.
   Par compacité, il existe une extraction φ telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x \in \overline{\mathcal{B}}(y, 2d) \cap \overline{A}$. De plus, pour $n \geqslant 0$, on a :

$$\left\|y - x_{\varphi(n)}\right\| - \left\|x_{\varphi(n)} - x\right\| \leqslant \|x - y\| \leqslant \left\|y - x_{\varphi(n)}\right\| + \left\|x_{\varphi(n)} - x\right\|$$

   Par passage à la limite, puisque $\left\|x_{\varphi(n)} - y\right\| \longrightarrow d$ et $\left\|x_{\varphi(n)} - x\right\| \longrightarrow 0$, on a donc : $\|x - y\| = d$.

3. Soient $x, y \in E$.
   a. Pour $a \in A$, $d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x - y\| + \|y - a\|$
   b. $d(x, A) - \|x - y\|$ est un minorant de $\|y - a\|$ pour $a \in A$, donc est inférieur à $d(y, A)$. D'où : $d(x, A) \leqslant \|x - y\| + d(y, A)$.
   c. On a donc, pour $x, y \in E$,

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant \|x - y\| \qquad \text{et} \qquad d(y, A) - d(x, A) \leqslant \|y - x\| = \|x - y\|$$

   soit encore :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant \|x - y\|$$

   C'est à dire que $x \longmapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

4. Soient A un fermé de E et B un compact de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$. Notons $\delta = \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a - b\| = \inf\limits_{b \in B} d(b, A)$.
   Il existe une suite $(a_n, b_n) \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|b_n - a_n\| \longrightarrow \delta$. Par compacité, il existe une extraction φ telle que $b_{\varphi(n)} \longrightarrow b \in B$.
   Comme en (2.), on a, pour $n \geqslant 0$:

$$\left\|b - b_{\varphi(n)}\right\| - \left\|b_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \left\|b - a_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \left\|b - b_{\varphi(n)}\right\| + \left\|b_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}\right\|$$

   et on déduit que : $\left\|b - a_{\varphi(n)}\right\| \longrightarrow \delta$, donc $d(b, A) = \delta$. Or, A est fermé donc il existe $a \in A$ tel que $\|b - a\| = \delta$.
   Sachant que $A \cap B = \emptyset$, on ne peut pas avoir $\delta = 0$ (auquel cas on aurait $a = b \in A \cap B$) donc $\delta > 0$.

5. Avec :

$$A = \left\{\left(x, \frac{1}{x^2}\right) \middle| x < 0\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{\left(x, \frac{1}{x^2}\right) \middle| x > 0\right\}$$

   A et B sont fermés et disjoints, et on a : $\inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a - b\| = 0$. En effet, posons :

$$(a_n) = \left(-\frac{1}{n}, n^2\right) \in A^{\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad (b_n) = \left(\frac{1}{n}, n^2\right) \in B^{\mathbb{N}}$$

   Alors : $\|a_n - b_n\|_2 = \dfrac{2}{n} \longrightarrow 0$