

## 1 Questions

Pour  $n \geq 1$ , on définit :

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f_n : x \mapsto \frac{n^x}{\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)} = \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)}$$

1. Pour  $n \geq 1$ , on a :  $f_n > 0$  donc on peut calculer son logarithme : pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= x \sum_{1 \leq k \leq n} (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left( x \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} \left( x \frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

On constate que  $(\ln f_n)$  converge simplement, donc  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+^*$ .

2. Soient  $n \geq 1$  et  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1} n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+1+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\prod_{2 \leq k \leq n+1} (x+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\frac{1}{x+1} (x+n+1) \prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \\ &= \frac{n}{n+x+1} (x+1) \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} (x+1) f_n(x) \end{aligned}$$

D'où :  $f(x+1) = (x+1)f(x)$ .

3. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  et  $f_n > 0$ , alors on note :

$$g_n = \frac{f'_n}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de  $\ln f_n$  trouvée en (1.), on a directement, pour  $x \geq 0$  :

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et donc :} \quad g'_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Comme  $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , la suite  $(g'_n)$  converge simplement vers une fonction  $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ . Appliquons maintenant le lemme 1 sur  $g'_n$  :

$$g'_{n+1}(x) - g'_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

On constate que  $g'_{n+1} - g'_n$  est décroissante et positive sur  $\mathbb{R}_+$ , on conclut que  $(g'_n)$  converge uniformément vers  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi, d'après le corollaire 1,  $(g_n)$  converge uniformément vers une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ ,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g' = h$ . On applique encore le corollaire 1 et on obtient :  $(\ln f_n)$  converge uniformément vers  $\ln f$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\ln f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $(\ln f)' = g$ . Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f' = fg$ . Avec ces résultats, on peut dire que  $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ .

D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ .

## 2 Lemmes

**Lemme 1.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D \subset \mathbb{R}$ .

Si, pour  $n \geq 0$ , la fonction  $f_{n+1} - f_n$  est croissante (resp. décroissante) et positive, alors pour toute partie  $A$  majorée (resp. minorée) de  $D$ , la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ .

*Démonstration.* Supposons que, pour  $n \geq 0$ ,  $f_{n+1} - f_n$  est croissante. Alors, pour  $p \geq 0$ ,

$$|f_{n+p} - f_n| = \left| \sum_{n \leq k < n+p} (f_{k+1} - f_k) \right| = \sum_{n \leq k < n+p} (f_{k+1} - f_k)$$

Donc  $|f_{n+p} - f_n|$  est croissante. Soit  $A$  une partie majorée de  $D$ , notons  $a = \sup A$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $N \geq 0$  tel que, pour  $n \geq N$  et  $p \geq 0$ , on a :  $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leq \epsilon$  puisque  $(f_n(a))$  converge donc vérifie le critère de Cauchy. Or  $|f_{n+p} - f_n|$  est croissante donc  $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \geq \sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|$ . Donc  $\sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$ .

Ainsi  $(f_n)$  vérifie le critère de Cauchy donc converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ .

Même démonstration pour le cas  $f_{n+1} - f_n$  décroissante. □

**Lemme 2.** Soient  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $D \subset \mathbb{R}$ , et  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue. Alors  $(g \circ f_n)$  converge uniformément vers  $g \circ f$ .

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . Par continuité uniforme, il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall x, y \in f(D), |x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \epsilon$$

Par convergence uniforme, il existe un rang  $N \geq 0$  à partir duquel on a, pour  $x \in D$  :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta$$

Alors en combinant les deux inégalités :

$$|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| \leq \epsilon$$

D'où  $(g \circ f_n)$  converge uniformément vers  $g \circ f$  sur  $D$ . □

**Théorème 1.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions KH-intégrables sur  $[a, b]$  qui converge uniformément vers  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est aussi KH-intégrable sur  $[a, b]$  et, en notant :

$$F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f_n \quad x \mapsto \int_a^x f$$

la suite  $(F_n)$  converge uniformément vers  $F$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par convergence uniforme, il existe un rang  $N \geq 0$  tel que, avec  $\epsilon' > 0$  défini plus tard :

$$\forall x \in [a, b], |f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon' \quad \text{soit :} \quad f_N(x) - \epsilon' \leq f(x) \leq f_N(x) + \epsilon'$$

Or :

$$\int_a^b (f_n + \epsilon') - \int_a^b (f_n - \epsilon') = \int_a^b (2\epsilon') = 2(b-a)\epsilon' = \epsilon \quad \text{avec } \epsilon' = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Donc, par encadrement,  $f$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$ . De plus, pour  $n \geq 0$  :

$$\sup_{x \in [a,b]} |F_n(x) - F(x)| = \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^x (f_n - f) \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x |f_n - f| = \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi  $(F_n)$  converge uniformément vers  $F$ . □

**Corollaire 1.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions dérивables sur  $[a, b]$ . Si  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers une fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , alors la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable sur  $[a, b]$  et de dérivée  $g$ .

*Démonstration.* Les fonctions  $(f'_n)$  sont KH-intégrables sur  $[a, b]$  et convergent uniformément vers  $g$ , donc d'après le théorème 1,  $g$  est KH-intégrable sur  $[a, b]$  et, comme, pour  $x \in [a, b]$  :

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n$$

on a que  $(f_n)$  converge uniformément vers :

$$f : \begin{aligned} & [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) + \int_a^x g \end{aligned}$$

On remarque alors que  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  et que  $f' = g$ . □