1 Questions

Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{n^x}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+\dfrac{x}{k}\right)} = \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \end{array}$$

1. Pour $n \geqslant 1$, on a : $f_n > 0$ donc on peut calculer son logarithme : pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x\ln n - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \\ &= x\sum_{1\leqslant k<n} (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{1\leqslant k<n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant k<n} \left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n} \left(x\frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

On constate que $(\ln f_n)$ converge simplement, donc (f_n) converge simplement vers une fonction positive $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$.

2. Soient $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1}n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+1+k)} \\ &= n\frac{n^x n!}{\prod\limits_{2\leqslant k\leqslant n+1}(x+k)} \\ &= n\frac{n^x n!}{\dfrac{1}{x+1}(x+n+1)\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \\ &= \frac{n}{n+x+1}(x+1)\frac{n^x n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} (x+1)f_n(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(x+1) = (x+1)f(x)$.

3. Pour $n \geqslant 1$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $f_n > 0$, alors on note :

$$g_n = \frac{f_n'}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de $\ln f_n$ trouvée en (1.), on a directement, pour $x \geqslant 0$:

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{x+k} \qquad \text{et donc :} \qquad g_n'(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Par un calcul similaire à celui de (1.), on a :

$$g_n(x) = \sum_{1\leqslant k<n} \left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{x+k}\right) - \frac{1}{x+n} \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$$

Donc (g_n) converge simplement vers une fonction $g : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$. De plus, comme $\dfrac{1}{(x+n)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on a aussi que (g_n')

converge simplement vers une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$. Appliquons maintenant le lemme 1 sur g'_n :

$$g'_{n+1}(x) - g'_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

On constate que $g'_{n+1} - g'_n$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, on conclut que (g'_n) converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après le lemme 3, (g_n) converge uniformément vers g sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g' = h$. On applique encore le lemme 3 et on obtient : $(\ln f_n)$ converge uniformément vers $\ln f$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, $\ln f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\ln f)' = g$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' = fg$. Avec ces résultats, on peut dire que $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$. D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que f_n converge uniformément vers f sur tout segment $I \in \mathbb{R}_+$.

2 Lemmes