

# 1 Questions

Pour  $n \geq 1$ , on définit :

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f_n : x \mapsto \frac{n^x}{\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)} = \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)}$$

1. Pour  $n \geq 1$ , on a :  $f_n > 0$  donc on peut calculer son logarithme : pour  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= x \sum_{1 \leq k \leq n} (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left( x \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} \left( x \frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

On constate que  $(\ln f_n)$  converge simplement, donc  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction positive  $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ .

2. Soient  $n \geq 1$  et  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1} n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+1+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\prod_{2 \leq k \leq n+1} (x+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\frac{1}{x+1} (x+n+1) \prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \\ &= \frac{n}{n+x+1} (x+1) \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\sim} (x+1) f_n(x) \end{aligned}$$

D'où :  $f(x+1) = (x+1)f(x)$ .

3. Pour  $n \geq 1$ ,  $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  et  $f_n > 0$ , alors on note :

$$g_n = \frac{f'_n}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de  $\ln f_n$  trouvée en (1.), on a directement, pour  $x \geq 0$  :

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et donc :} \quad g'_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Par un calcul similaire à celui de (1.), on a :

$$g_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left( \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{x+k} \right) - \frac{1}{x+n} \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k \leq n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$$

Donc  $(g_n)$  converge simplement vers une fonction  $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ . De plus, comme  $\frac{1}{(x+n)^2} \stackrel{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , on a aussi que  $(g'_n)$

converge simplement vers une fonction  $h : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ . Appliquons maintenant le lemme 1 sur  $g'_n$  :

$$g'_{n+1}(x) - g'_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

On constate que  $g'_{n+1} - g'_n$  est décroissante et positive, on conclut que  $(g'_n)$  converge uniformément vers  $h$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi, d'après le lemme 3,  $(g_n)$  converge uniformément vers  $g$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ ,  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $g' = h$ . On applique encore le lemme 3 et on obtient :  $(\ln f_n)$  converge uniformément vers  $\ln f$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\ln f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $(\ln f)' = g$ . Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et  $f' = fg$ . Avec ces résultats, on peut dire que  $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ . D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $I \subset \mathbb{R}_+$ .

## 2 Lemmes