Exercice 1

Soit $\alpha \neq 1$

1. La série $\left(\sum_{1\leqslant n} \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge ssi $\alpha > 1$.

Quelque soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est monotone sur $]0, +\infty[$, donc pour $n \geqslant 1$, $\frac{1}{n^\alpha}$ est compris entre $\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$ et $\int_{n}^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$.

2. Supposons que la série diverge, càd $\alpha < 1$. Soit $N \geqslant 1$. Par sommation de la relation précédente :

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est compris entre } \int_0^N \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ et } \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{(N+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ car } 1-\alpha > 0$$

Donc par encadrement : $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

3. Supposons que la série converge, càd $\alpha > 1$. Soit $N \geqslant 1$. Par sommation de la relation précédente :

$$\sum_{N\leqslant n} \frac{1}{n^\alpha} \text{ est compris entre } \int_{N-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \text{ et } \int_1^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)(N-1)^{\alpha-1}} \sim \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} \text{ car } \alpha-1 > 0$$

Donc par encadrement : $\sum_{N\leqslant n} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$

Exercice 2

La suite (a_n) est positive et bornée : $0 \leqslant (a_n) \leqslant M$.

1. Pour $n \geqslant 1$, $na_n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1} \leqslant M \times n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1} \longrightarrow 0$ par croissances comparées puisque $0 \leqslant \frac{x}{X} < 1$.
   Donc en particulier la suite $\left(na_n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1}\right)_{1\leqslant n}$ est bornée : Il existe $M_x \geqslant 0$ tq pour $n \geqslant 1$, $na_n\left(\frac{x}{X}\right)^{n-1} \leqslant M_x$ donc $na_n x^{n-1} \leqslant M_x X^{n-1}$
   Ainsi, pour $N \geqslant 1$,
   $$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} na_n x^{n-1} \leqslant M_x \sum_{1\leqslant n\leqslant N} X^{n-1} \longrightarrow M_x \frac{1}{1-X}$$
   Donc $\left(\sum_{1\leqslant n} na_n x^{n-1}\right)$ est majorée, et croissante donc converge, càd que $B(x)$ est bien défini.

2. **a.** On reconnaît un petit Bernoulli :

$$A(x_2) - A(x_1) = \sum_{0\leqslant n} a_n(x_2^n - x_1^n) = (x_2 - x_1)\sum_{0\leqslant n} a_n\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} x_1^k x_2^{n-1-k}\right)$$

   b. $0 \leqslant x_1 < x_2$ donc, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$x_1^{n-1} \leqslant x_1^k x_2^{n-1-k} \leqslant x_2^{n-1}$$

   Donc, par sommation :

$$nx_1^{n-1} \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} x_1^k x_2^{n-1-k} \leqslant nx_2^{n-1}$$

   Ainsi, comme (a_n) est positive :

$$\sum_{0\leqslant n} a_n n x_1^{n-1} \leqslant \sum_{0\leqslant n} a_n\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} x_1^k x_2^{n-1-k}\right) \leqslant \sum_{0\leqslant n} a_n n x_2^{n-1}$$

Soit, puisque $x_2 - x_1 > 0$:
$$(x_2 - x_1)B(x_1) \leqslant A(x_2) - A(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)B(x_2)$$

c. Soient x_0, $x \in [0,1[$.

— Si $x \geqslant x_0$, alors : $(x - x_0)B(x_0) \leqslant A(x) - A(x_0) \leqslant (x - x_0)B(x)$

— Si $x \leqslant x_0$, alors : $(x_0 - x)B(x) \leqslant A(x_0) - A(x) \leqslant (x_0 - x)B(x_0)$
Soit, en multipliant par -1 : $(x - x_0)B(x_0) \leqslant A(x) - A(x_0) \leqslant (x - x_0)B(x)$

Donc dans tous les cas, on a l'inégalité :
$$(x - x_0)B(x_0) \leqslant A(x) - A(x_0) \leqslant (x - x_0)B(x)$$

Prenons $x \in \left[0\,,\, X_0 = \dfrac{x_0+1}{2}\right]$, alors :
$$\begin{cases} (x - x_0)B(x_0) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0 \\ (x - x_0)B(x) \text{ est compris entre } 0 \text{ et } (x - x_0)B(X_0) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0, \text{ donc } (x - x_0)B(x) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Donc par encadrement,
$$A(x) - A(x_0) \underset{x \longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0$$

càd A est continue en x_0. Donc A est continue sur $[0,1[$

d. Soient $x_0 \neq x \in [0,1[$.
$$(x - x_0)B(x_0) \leqslant A(x) - A(x_0) \leqslant (x - x_0)B(x)$$

Donc $\dfrac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ est compris entre $B(x_0)$ et $B(x)$. Utilisons le troisième tiret de la question (3.) pour dire que B est continue en x_0, ainsi par encadrement : $\dfrac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow B(x_0)$.
Donc A est dérivable sur $[0,1[$ et $A' = B$

3. Il suffit de reproduire la même démarche qu'aux questions (1.) et (2.) en remplaçant A par A_h et B par A_{h+1} :
Pour $h \in \mathbb{N}$, on définit la fonction suivante croissante $[0,1[$:
$$A_h : x \mapsto \sum_{h \leqslant n} \frac{n!}{(n-h)!} a_n x^{n-h}$$

— Soit $h \in \mathbb{N}$. Montrons comme en (1.) que A_h est bien définie : soient $x \in [0,1[$ et $X = \dfrac{x+1}{2}$. Pour $n \geqslant 1$:
$$0 \leqslant \frac{n!}{(n-h)!} a_n \left(\frac{x}{X}\right)^{n-h} \leqslant M \times \frac{n!}{(n-h)!} \left(\frac{x}{X}\right)^{n-h}$$

Et, par croissances comparées puisque $n \mapsto \dfrac{n!}{(n-h)!}$ est polynomiale de degré h et que $0 \leqslant \dfrac{x}{X} < 1$:
$$\frac{n!}{(n-h)!} \left(\frac{x}{X}\right)^{n-h} \longrightarrow 0 \text{ donc } \frac{n!}{(n-h)!} a_n \left(\frac{x}{X}\right)^{n-h} \longrightarrow 0$$

Donc il existe $M_x \geqslant 0$ tel que :
$$\frac{n!}{(n-h)!} a_n x^{n-h} \leqslant M_x X^{n-h}$$

Donc, pour $N \geqslant 1$:
$$\sum_{h \leqslant n \leqslant N} \frac{n!}{(n-h)!} a_n x^{n-h} \leqslant M_x \sum_{h \leqslant n \leqslant N} X^{n-h} \underset{N \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} M_x \frac{1}{1-X}$$

Donc $\left(\sum_{h\leqslant n} \frac{n!}{(n-h)!}a_n x^{n-h}\right)$ est majorée, et croissante donc converge, càd que $A_h(x)$ est bien défini.

— Soit $h \in \mathbb{N}$. Démontrons, comme en (2.a) et (2.b) l'inégalité de contrôle de A_h : Soient $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$, alors :

$$A_h(x_2) - A_h(x_1) = \sum_{h\leqslant n} \frac{n!}{(n-h)!}a_n(x_2^{n-h} - x_1^{n-h}) = (x_2 - x_1)\sum_{h\leqslant n} \frac{n!}{(n-h)!}a_n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-h-1} x_1^k x_2^{n-h-1-k}$$

Comme $0 \leqslant x_1 < x_2$:

$$x_1^{n-h-1} \leqslant x_1^k x_2^{n-h-1-k} \leqslant x_2^{n-h-1} \text{ donc } (n-h)x_1^{n-h-1} \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n-h-1} x_1^k x_2^{n-h-1-k} \leqslant (n-h)x_2^{n-h-1}$$

Donc :

$$\sum_{h+1\leqslant n} \frac{n!}{(n-h-1)!}a_n x_1^{n-h-1} \leqslant \sum_{h\leqslant n} \frac{n!}{(n-h)!}a_n \sum_{0\leqslant k\leqslant n-h-1} x_1^k x_2^{n-h-1-k} \leqslant \sum_{h+1\leqslant n} \frac{n!}{(n-h-1)!}a_n x_2^{n-h-1}$$

Soit :

$$(x_2 - x_1)A_{h+1}(x_1) \leqslant A_h(x_2) - A_h(x_1) \leqslant (x_2 - x_1)A_{h+1}(x_2)$$

— Soit $h \in \mathbb{N}$. Montrons comme en (2.c.) que A_h est continue sur $[0, 1[$: soient x_0, $x \in [0, 1[$, on a :

$$(x - x_0)A_{h+1}(x_0) \leqslant A_h(x) - A_h(x_0) \leqslant (x - x_0)A_{h+1}(x)$$

Prenons $x \in \left[0\,,\, X_0 = \frac{x_0+1}{2}\right]$, alors :

$$\begin{cases} (x - x_0)A_{h+1}(x_0) \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0 \\ (x - x_0)A_{h+1}(x) \text{ est compris entre } 0 \text{ et } (x - x_0)A_{h+1}(X_0) \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0, \text{ donc } (x - x_0)A_{h+1}(x) \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Donc par encadrement,

$$A_h(x) - A_h(x_0) \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} 0$$

càd A_h est continue en x_0. Donc A_h est continue sur $[0, 1[$

— Soit $h \in \mathbb{N}$. Démontrons que A_h est dérivable sur $[0, 1[$: soient $x_0 \neq x \in [0, 1[$, on a :

$$(x - x_0)A_{h+1}(x_0) \leqslant A_h(x) - A_h(x_0) \leqslant (x - x_0)A_{h+1}(x)$$

Donc $\frac{A_h(x) - A_h(x_0)}{x - x_0}$ est compris entre $A_{h+1}(x_0)$ et $A_{h+1}(x)$ Par continuité, $A_{h+1}(x) \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} A_{h+1}(x_0)$ donc, par encadrement : $\frac{A_h(x) - A_h(x_0)}{x - x_0} \underset{x\longrightarrow x_0}{\longrightarrow} A_{h+1}(x_0)$
Ainsi A_h est dérivable sur $[0, 1[$ et $A'_h = A_{h+1}$

Par récurrence, $A = A_0$ est de classe C^∞ sur $[0, 1[$ et pour $h \in \mathbb{N}$, $A^{(h)} = A_h$.

4. Posons pour $x \in [0, 1[$:

$$A(x) = \sum_{0\leqslant n} a_k x^k \qquad\qquad B(x) = \sum_{0\leqslant n} b_k x^k$$

Supposons que $A = B$ et qu'il existe k tq $a_k \neq b_k$, alors on note $m = \min\{k \geqslant 0 | a_k \neq b_k\}$.

$$A^{(m)}(0) - B^{(m)}(0) = m!(a_m - b_m) \sum_{m<n} \frac{n!}{(n-m)!}(a_n - b_n)0^{n-m} = m!(a_m - b_m) \neq 0 \text{ par supposition}$$

Or, par hypothèse : $A^{(m)} = B^{(m)}$ donc $A^{(m)}(0) - B^{(m)}(0) = m!(a_m - b_m) = 0$, c'est absurde donc $\forall k \geqslant 0,\ a_k = b_k$

Exercice 3

$a_n \sim b_n$ donc il existe $(g_n) \longrightarrow 1$ telle que $\forall n,\ b_n = g_n a_n$

1. — Supposons que $\left(\sum a_n\right)$ converge vers S. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang p tel que :

$$\begin{cases} \forall n \geqslant p,\ 1-\epsilon \leqslant g_n \leqslant 1+\epsilon \\ \forall N \geqslant p,\ S - \epsilon \leqslant \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \leqslant S + \epsilon \text{ donc } S' - \epsilon \leqslant \sum\limits_{p\leqslant n\leqslant N} a_n \leqslant S' + \epsilon \text{ avec } S' = S - \sum\limits_{0\leqslant k<p} a_n \end{cases}$$

Ainsi pour $N \geqslant p$:

$$\sum_{p\leqslant n\leqslant N} b_n \leqslant (1+\epsilon) \sum_{p\leqslant n\leqslant N} a_n \leqslant (1+\epsilon)(S'+\epsilon)$$

Donc $\left(\sum\limits_{p\leqslant n} b_n\right)$ est croissante et majorée donc converge. Donc $\left(\sum b_n\right)$ converge.

— Par contraposée : supposons que $\left(\sum b_n\right)$ converge, alors comme $b_n \sim a_n$, $\left(\sum a_n\right)$ converge aussi. Donc si $\left(\sum a_n\right)$ diverge, $\left(\sum b_n\right)$ diverge aussi.

2. — Soit $N \geqslant 0$. Si $\sum\limits_{N\leqslant n} a_n = 0$, alors on a par positivité : $\forall n \geqslant N,\ a_n = 0$ donc $\sum\limits_{N\leqslant n} b_n = \sum\limits_{N\leqslant n} g_n \times 0 = 0$.

— Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang p tel que : $\forall n \geqslant p,\ 1-\epsilon \leqslant g_n \leqslant 1+\epsilon$.
Donc, pour $N \geqslant p$,

$$(1-\epsilon)\sum_{N\leqslant n} a_n \leqslant \sum_{N\leqslant n} b_n \leqslant (1+\epsilon)\sum_{N\leqslant n} a_n \text{ donc } 1-\epsilon \leqslant \frac{\sum\limits_{N\leqslant n} b_n}{\sum\limits_{N\leqslant n} a_n} \leqslant 1+\epsilon \text{ en supposant } \sum_{N\leqslant n} a_n \neq 0$$

Donc $\dfrac{\sum\limits_{N\leqslant n} b_n}{\sum\limits_{N\leqslant n} a_n} \underset{\sum_{N\leqslant n} a_n \neq 0}{\longrightarrow} 1$

Finalement, on a bien $\sum\limits_{N\leqslant n} a_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{N\leqslant n} b_n$

3. — Soit $N \geqslant 0$. Si $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n = 0$, alors on a par positivité : $\forall 0 \leqslant n \leqslant N,\ a_n = 0$ donc $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} b_n = \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} g_n \times 0 = 0$.

— Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang p tel que : $\forall n \geqslant p,\ 1-\epsilon \leqslant g_n \leqslant 1+\epsilon$.
Pour $N \geqslant p$:

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant N} b_n = B_0 + \sum_{p\leqslant n\leqslant N} b_n \text{ avec } B_0 = \sum_{0\leqslant n<p} b_n$$

Donc :

$$B_0 + (1-\epsilon)\sum_{p\leqslant n\leqslant N} a_n \leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant N} b_n \leqslant B_0 + (1+\epsilon)\sum_{p\leqslant n\leqslant N} a_n$$

Soit :

$$(1-\epsilon)\sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n + B_0 - (1-\epsilon)A_0 \leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant N} b_n \leqslant (1+\epsilon)\sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n + B_0 - (1+\epsilon)A_0 \text{ avec } A_0 = \sum_{0\leqslant n<p} a_n$$

Alors, en supposant $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \neq 0$:

$$1-\epsilon+\frac{B_0-(1-\epsilon)A_0}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n} \leqslant \frac{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} b_n}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n} \leqslant 1+\epsilon+\frac{B_0-(1+\epsilon)A_0}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n}$$

Or, $\left(\sum a_n\right)$ n'est pas majorée, donc il existe un rang $q \geqslant p$ tel que

$$\forall N \geqslant q,\ \left|\frac{B_0-(1+\epsilon)A_0}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n}\right| \leqslant \epsilon$$

Alors pour $N \geqslant q$,

$$1-2\epsilon \leqslant \frac{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} b_n}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n} \leqslant 1+2\epsilon$$

Donc $\dfrac{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} b_n}{\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n} \underset{\sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \neq 0}{\longrightarrow} 1$

Finalement, on a bien $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} a_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum\limits_{0\leqslant n\leqslant N} b_n$

4. $(u_n) \longrightarrow l > 0$ donc $\left(\sum u_n\right)$ diverge grossièrement. Ainsi :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k \sim \sum_{1\leqslant k\leqslant n} l = n\times l\ \text{, d'où : } \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k \longrightarrow l$$

Exercice 4

1. Pour $t \in [0,1[$:

$$\mathbb{E}(t^X) = \sum_{0\leqslant n} t^n \mathbb{P}(X=n) = \sum_{0\leqslant n} t^n p_n = G_x(t)$$

2. Supposons que $X \perp\!\!\!\perp Y$. Pour $t \in [0,1[$:

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t) \text{ car } t^X \perp\!\!\!\perp t^Y \text{ par coalition}$$

3.

$$G_X(1) = \mathbb{E}(1^X) = \mathbb{E}(1) = 1$$

D'après les résultats de l'exercice 2 :

$$G_X'(1) = \sum_{1\leqslant n} np_n \times 1^{n-1} = \mathbb{E}(X)$$

4. Supposons $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors pour $t \in [0,1[$:

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = pt^1 + (1-p)t^0 = pt + 1 - p = 1 + p(t-1)$$

Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $Y = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$ où $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, donc, pour $t \in [0,1[$:

$$G_Y(t) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n} G_{X_k}(t) = \prod_{1\leqslant k\leqslant n} 1 + p(t-1) = (1+p(t-1))^n$$

5. Pour $t \in [0,1[$:

$$G_S(t) = \sum_{0\leqslant n} t^n \mathbb{P}(S=n)$$

$$\mathbb{P}(S=n) = \sum_{0\leqslant m} \mathbb{P}(N=m)\mathbb{P}_{N=m}(S=m) = \sum_{0\leqslant m} \mathbb{P}(N=m)\mathbb{P}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant m} X_k = n\right)$$

Il s'agit d'une série double de termes positifs qui converge puisqu'elle est égale à $G_S(t)$ et $t\in[0,1[$ donc on peut écrire :

$$G_S(t) = \sum_{\substack{0\leqslant n\\0\leqslant m}} t^n\mathbb{P}(N=m)\mathbb{P}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant m} X_k = n\right) = \sum_{0\leqslant m}\mathbb{P}(N=m)\left(\sum_{0\leqslant n} t^n\mathbb{P}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant m} X_k = n\right)\right) = \sum_{0\leqslant m}\mathbb{P}(N=m)G_{\sum_{1\leqslant k\leqslant m} X_k}(t)$$

$$= \sum_{0\leqslant m}\mathbb{P}(N=m)\,(G_X(t))^m = G_N\circ G_X(t)$$

D'où : $G_S = G_N \circ G_X$

Problème

1. **a.** On utilise la formule de Stirling :

$$\mathbb{P}(R=2n) = \frac{4\binom{2(n-1)}{n-1}}{2n}\times\frac{1}{4^n}$$

$$\binom{2(n-1)}{n-1} = \frac{(2(n-1))!}{((n-1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi(n-1)}}{2\pi(n-1)}\times\left(\frac{2(n-1)}{n-1}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}4^{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\mathbb{P}(R=2n) \sim \frac{4^n}{2n\sqrt{n\pi}}\times\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$$

On décompose $\mathbb{P}(R>i)$:

$$\mathbb{P}(R>i) = \sum_{i<n}\mathbb{P}(R=n) = \sum_{\substack{i<n\\ n \text{ pair}}}\mathbb{P}(R=n) = \sum_{\frac{i}{2}<n}\mathbb{P}(R=2n)$$

Il s'agit du reste de la série de terme général $u_n = \mathbb{P}(R=2n)$ dont on connaît un équivalent $v_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{\frac{3}{2}}}$, et $\left(\sum v_n\right)$ converge. Donc les restes des séries de u_n et v_n sont équivalents :

$$\mathbb{P}(R>i) \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{\frac{i}{2}<n}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}}$$

b. On a équivalence entres les séries divergentes :

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\mathbb{P}(R>i) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{i}} \sim \frac{2\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}$$

2. **a.** **i.** Par décroissance de (a_n) :

$$a_nB_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} b_ka_n \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n} b_ka_{n-k} = 1 \text{ donc } a_n \leqslant \frac{1}{B_n}$$

On utilise encore la décroissance de (a_n), notamment $\forall 0 \leqslant k \leqslant m-n,\ m-k \geqslant n$ donc $a_{m-k} \leqslant a_n$:

$$a_n B_{m-n} + a_0(B_m - B_{m-n}) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m-n} b_k a_n + \sum_{m-n<k\leqslant m} b_k a_0 \geqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant m} b_k a_{m-k} = 1$$

ii. À partir d'un certain rang, on a $m_n > n$, alors d'après la question précédente :

$$a_n \leqslant \frac{1}{B_n} \text{ et } a_n \geqslant \frac{1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})}{B_{m_n-n}} \sim \frac{1}{B_{m_n-n}} \sim \frac{1}{B_n}$$

Donc, par encadrement : $a_n \sim \dfrac{1}{B_n}$

iii. Avec $b_n \sim \dfrac{C}{n}$, cherchons une suite (m_n) vérifiant les conditions de la question précédente. On suppose $n = o(m_n)$, donc :

$$\frac{m_n - n}{n} = \frac{m_n}{n} - 1 \longrightarrow +\infty \text{ donc à partir d'un rang } r \text{ on a : } \frac{m_n - n}{n} \geqslant 1 \text{ càd } m_n - n \geqslant n$$

On choisit un $\epsilon > 0$. À partir d'un rang $p \geqslant r$, on a $\dfrac{C(1-\epsilon)}{n} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{C(1+\epsilon)}{n}$. À partir d'un rang $q \geqslant p$, on a en plus $m_n - n \geqslant p$ car $m_n - n \longrightarrow +\infty$. On se place après le rang q.

- Concernant la première condition :

$$B_{m_n-n} = B_n + \sum_{n<k\leqslant m_n-n} b_k$$

  Donc :

$$B_{m_n-n} \sim B_n \Leftrightarrow \sum_{n<k\leqslant m_n-n} b_k = o(B_n) \Leftrightarrow \sum_{n<k\leqslant m_n-n} b_k = o(\ln n) \text{ car } B_n \sim \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{C}{k} \sim C\ln n$$

  Or :

$$\sum_{n<k\leqslant m_n-n} b_k \leqslant C(1+\epsilon) \sum_{n<k\leqslant m_n-n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{m_n - 2n}{n} \sim \frac{m_n}{n}$$

  Donc par comparaison :

$$\frac{m_n}{n} = o(\ln n) \Leftrightarrow m_n = o(n\ln n) \Rightarrow \sum_{n<k\leqslant m_n-n} b_k = o(\ln n) \Leftrightarrow B_{m_n-n} \sim B_n$$

  Ainsi la première condition est assurée si $m_n = o(n\ln n)$

- Concernant la seconde condition :

$$B_{m_n} - B_{m_n-n} = \sum_{m_n-n<k\leqslant m_n} b_k \leqslant C(1+\epsilon) \sum_{m_n-n<k\leqslant m_n} \frac{1}{k} \leqslant C(1+\epsilon)\frac{n}{m_n - n} = O\left(\frac{n}{m_n}\right)$$

  Donc, par encadrement :

$$\frac{n}{m_n} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow n = o(m_n) \Rightarrow B_{m_n} - B_{m_n-n} \longrightarrow 0$$

  La seconde condition est donc assurée par hypothèse puisqu'on a : $n = o(m_n)$

Finalement, il suffit que $n = o(m_n)$ et $m_n = o(n\ln n)$ pour vérifier toutes les conditions de la question précédente. Or une telle suite existe : $(m_n) = (n\ln(\ln n))_{n\geqslant 2}$ donc on peut dire que $a_n \sim \dfrac{1}{B_n}$ càd $a_n \sim \dfrac{1}{C\ln n}$

b. Posons $(a_n) = (\mathbb{P}(R > 2n))_{n\geqslant 0}$ et $(b_n) = (\mathbb{P}(S_{2n} = 0))_{n\geqslant 0}$. Ces suites sont positives et (a_n) est bien décroissante. Rappelons une formule donnée dans la question (D.2.a.) du DS9 :

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0 \text{ et } \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)^2 \sim \left(\frac{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}}{4^n}\right)^2 = \frac{1}{\pi n} \text{ donc } b_n \sim \frac{1}{\pi n}$$

Soit $n \geqslant 0$:

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k b_{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_k a_{n-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(R > 2n - 2k) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(R > 2n - k) = 1 \text{ car } \mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$$

Donc : $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k b_{n-k} = 1$, ainsi d'après (a.) : $\mathbb{P}(R > 2n) \sim \dfrac{\pi}{\ln n}$, or $(\mathbb{P}(R > n))_{n \geqslant 0}$ est monotone, donc, par encadrement, on a : $\mathbb{P}(R > n) \sim \dfrac{\pi}{\ln n}$. Alors :

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(R > k) \sim \pi \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\ln k} \text{ car } \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge donc } \sum \frac{1}{\ln n} \text{ aussi}$$

Calculons un équivalent de $\sum \dfrac{1}{\ln k}$: Soit $3 \leqslant k \leqslant n$.
Pour $t \in [k-1, k]$:

$$\frac{1}{\ln(k-1)} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln k}$$

En intégrant entre $k-1$ et k :

$$\frac{1}{\ln(k-1)} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln k}$$

Donc par association d'inégalités :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \frac{1}{\ln k} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{\ln t}$$

Et en sommant de 3 à n :

$$\int_{2}^{n} \frac{dt}{\ln t} \leqslant \sum_{3 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\ln k} \leqslant \int_{3}^{n+1} \frac{dt}{\ln t}$$

Or :

$$\int_{2}^{n} \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{n}{\ln n} \text{ et } \int_{3}^{n+1} \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{n+1}{\ln(n+1)} + \int_{2}^{3} \frac{dt}{\ln t} \sim \frac{n}{\ln n}$$

Donc par encadrement : $\displaystyle\sum_{3 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$, donc : $\mathbb{E}(N_n) \sim \dfrac{\pi n}{\ln n}$