

1 Questions

Pour $n \geq 1$, on définit :

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$f_n : x \longmapsto \frac{n^x}{\prod_{1 \leq k \leq n} \left(1 + \frac{x}{k}\right)} = \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)}$$

1. Pour $n \geq 1$, on a : $f_n > 0$ donc on peut calculer son logarithme : pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= x \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= x \sum_{1 \leq k < n} (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{1 \leq k < n} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \sum_{1 \leq k < n} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} \left(x \frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sum_{1 \leq k < n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

On constate que $(\ln f_n)$ converge simplement, donc (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$.

2. Soient $n \geq 1$ et $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1} n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+1+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\prod_{2 \leq k \leq n+1} (x+k)} \\ &= n \frac{n^x n!}{\frac{1}{x+1} (x+n+1) \prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \\ &= \frac{n}{n+x+1} (x+1) \frac{n^x n!}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+k)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (x+1) f_n(x) \end{aligned}$$

D'où : $f(x+1) = (x+1)f(x)$.

3. Pour $n \geq 1$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $f_n > 0$, alors on note :

$$g_n = \frac{f'_n}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de $\ln f_n$ trouvée en (1.), on a directement, pour $x \geq 0$:

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et donc :} \quad g'_n(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Comme $\frac{1}{(x+n)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la suite (g'_n) converge simplement vers une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Appliquons maintenant le lemme 1 sur g'_n :

$$g'_{n+1}(x) - g'_n(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

On constate que $g'_{n+1} - g'_n$ est décroissante et positive sur \mathbb{R}_+ , on conclut que (g'_n) converge uniformément vers h sur \mathbb{R}_+ . Ainsi, d'après le corollaire 1, (g_n) converge uniformément vers une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, g est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $g' = h$. On applique encore le corollaire 1 et on obtient : $(\ln f_n)$ converge uniformément vers $\ln f$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, $\ln f$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $(\ln f)' = g$. Ainsi f est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f' = fg$. Avec ces résultats, on peut dire que $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que f_n converge uniformément vers f sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$.

2 Lemmes

Lemme 1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.

Si, pour $n \geq 0$, la fonction $f_{n+1} - f_n$ est croissante (resp. décroissante) et positive, alors pour toute partie A majorée (resp. minorée) de D , la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A .

Démonstration. Supposons que, pour $n \geq 0$, $f_{n+1} - f_n$ est croissante. Alors, pour $p \geq 0$,

$$|f_{n+p} - f_n| = \left| \sum_{n \leq k < n+p} (f_{k+1} - f_k) \right| = \sum_{n \leq k < n+p} (f_{k+1} - f_k)$$

Donc $|f_{n+p} - f_n|$ est croissante. Soit A une partie majorée de D , notons $a = \sup A$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \geq 0$ tel que, pour $n \geq N$ et $p \geq 0$, on a : $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leq \epsilon$ puisque $(f_n(a))$ converge donc vérifie le critère de Cauchy. Or $|f_{n+p} - f_n|$ est croissante donc $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \geq \sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|$. Donc $\sup_{x \in A} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$.

Ainsi (f_n) vérifie le critère de Cauchy donc converge uniformément vers f sur A .

Même démonstration pour le cas $f_{n+1} - f_n$ décroissante. □

Lemme 2. Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$, et $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in f(D), |x - y| \leq \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \epsilon$$

Par convergence uniforme, il existe un rang $N \geq 0$ à partir duquel on a, pour $x \in D$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \delta$$

Alors en combinant les deux inégalités :

$$|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| \leq \epsilon$$

D'où $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur D . □

Théorème 1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions KH-intégrables sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors f est aussi KH-intégrable sur $[a, b]$ et, en notant :

$$F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f_n \quad \text{et} \quad F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f$$

la suite (F_n) converge uniformément vers F .

Démonstration. Commençons par montrer que f est KH-intégrable sur $[a, b]$. Soit $\epsilon > 0$. Par convergence uniforme, il existe un rang $N \geq 0$ tel que, avec $\epsilon' > 0$ défini plus tard :

$$\forall x \in [a, b], |f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon' \quad \text{soit :} \quad f_N(x) - \epsilon' \leq f(x) \leq f_N(x) + \epsilon'$$

Or :

$$\int_a^b (f_n + \epsilon') - \int_a^b (f_n - \epsilon') = \int_a^b (2\epsilon') = 2(b-a)\epsilon' = \epsilon \quad \text{avec } \epsilon' = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

Donc, par encadrement, f est KH-intégrable sur $[a, b]$. De plus, pour $n \geq 0$:

$$\sup_{x \in [a, b]} |F_n(x) - F(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x (f_n - f) \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} \int_a^x |f_n - f| = \int_a^b |f_n - f| \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi (F_n) converge uniformément vers F . □

Corollaire 1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a, b]$. Si $(f'_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $[a, b]$ et de dérivée g .

Démonstration. Les fonctions (f'_n) sont KH-intégrables sur $[a, b]$ et convergent uniformément vers g , donc d'après le théorème 1, g est KH-intégrable sur $[a, b]$ et, comme, pour $x \in [a, b]$:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n$$

on a que (f_n) converge uniformément vers :

$$f : \begin{array}{l} [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) + \int_a^x g \end{array}$$

On remarque alors que f est dérivable sur $[a, b]$ et que $f' = g$. □