1 Questions

Pour $n \geqslant 1$, on définit :

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{n^x}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(1+\dfrac{x}{k}\right)} = \dfrac{n^x n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \end{array}$$

1. Pour $n \geqslant 1$, on a : $f_n > 0$ donc on peut calculer son logarithme : pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\ln f_n(x) &= x\ln n - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \\
&= x\sum_{1\leqslant k<n}(\ln(k+1)-\ln k) - \sum_{1\leqslant k<n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&= \sum_{1\leqslant k<n}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n}\left(x\frac{1}{k} - \frac{x}{k} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + o(1) \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{1\leqslant k<n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)
\end{aligned}$$

On constate grâce au lemme 3 que $(\ln f_n)$ converge simplement, donc (f_n) converge simplement vers $f : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+^*$.

2. Soient $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
f_n(x+1) &= \frac{n^{x+1}n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+1+k)} \\
&= n\frac{n^x n!}{\prod\limits_{2\leqslant k\leqslant n+1}(x+k)} \\
&= n\frac{n^x n!}{\dfrac{1}{x+1}(x+n+1)\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \\
&= \frac{n}{n+x+1}(x+1)\frac{n^x n!}{\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x+k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} (x+1)f_n(x)
\end{aligned}$$

D'où : $f(x+1) = (x+1)f(x)$.

3. Pour $n \geqslant 1$, $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $f_n > 0$, alors on note :

$$g_n = \frac{f_n'}{f_n} = (\ln f_n)'$$

Grâce à l'expression de $\ln f_n$ trouvée en (1.), on a directement, pour $x \geqslant 0$:

$$g_n(x) = \ln n - \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{x+k} \qquad \text{et donc :} \qquad g_n'(x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{(x+k)^2}$$

Comme $\dfrac{1}{(x+n)^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'après le lemme 3 la suite (g_n') converge simplement vers une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$. Appliquons maintenant le lemme 1 sur g_n' :

$$g_{n+1}'(x) - g_n'(x) = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

On constate que $g'_{n+1} - g'_n$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}_+$, on conclut que (g'_n) converge uniformément vers h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, d'après le corollaire 1, (g_n) converge uniformément vers une fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $g' = h$. On applique encore le corollaire 1 et on obtient : $(\ln f_n)$ converge uniformément vers $\ln f$ sur tout segment $I \subset \mathbb{R}_+$, $\ln f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\ln f)' = g$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f' = fg$. Avec ces résultats, on peut dire que $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$.
D'ailleurs, grâce au lemme 2, on peut aussi conclure que f_n converge uniformément vers f sur tout segment $I \in \mathbb{R}_+$.

2 Lemmes

Lemme 1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$.
Si, pour $n \geqslant 0$, la fonction $f_{n+1} - f_n$ est croissante (resp. décroissante) et positive, alors pour toute partie A majorée (resp. minorée) de D, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A.*

Démonstration. Supposons que, pour $n \geqslant 0$, $f_{n+1} - f_n$ est croissante. Alors, pour $p \geqslant 0$,

$$\left|f_{n+p} - f_n\right| = \left|\sum_{n\leqslant k<n+p} (f_{k+1} - f_k)\right| = \sum_{n\leqslant k<n+p} (f_{k+1} - f_k)$$

Donc $\left|f_{n+p} - f_n\right|$ est croissante. Soit A une partie majorée de D, notons $a = \sup A$.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que, pour $n \geqslant N$ et $p \geqslant 0$, on a : $\left|f_{n+p}(a) - f_n(a)\right| \leqslant \epsilon$ puisque $(f_n(a))$ converge donc vérifie le critère de Cauchy. Or $\left|f_{n+p} - f_n\right|$ est croissante donc $\left|f_{n+p}(a) - f_n(a)\right| \geqslant \sup\limits_{x\in A}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right|$. Donc $\sup\limits_{x\in A}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leqslant \epsilon$.
Ainsi (f_n) vérifie le critère de Cauchy donc converge uniformément vers f sur A.
Même démonstration pour le cas $f_{n+1} - f_n$ décroissante. □

Lemme 2. *Soient $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$, et $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Alors $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in f(D), |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \epsilon$$

Par convergence uniforme, il existe un rang $N \geqslant 0$ à partir duquel on a, pour $x \in D$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta$$

Alors en combinant les deux inégalités :

$$|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| \leqslant \epsilon$$

D'où $(g \circ f_n)$ converge uniformément vers $g \circ f$ sur D. □

Théorème 1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions KH-intégrables sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est aussi KH-intégrable sur $[a,b]$ et, en notant :*

$$F_n : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f_n \end{array} \qquad \text{et} \qquad F : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f \end{array}$$

la suite (F_n) converge uniformément vers F.

Démonstration. Commençons par montrer que f est KH-intégrable sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$. Par converge uniforme, il existe un rang $N \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ |f_N(x) - f(x)| \leqslant \epsilon' \qquad \text{soit :} \qquad f_N(x) - \epsilon' \leqslant f(x) \leqslant f_N(x) + \epsilon' \qquad \text{avec } \epsilon' = \frac{\epsilon}{2(b-a)} > 0$$

Or :

$$\int_a^b (f_n + \epsilon') - \int_a^b (f_n - \epsilon') = \int_a^b (2\epsilon') = 2(b-a)\epsilon' = \epsilon$$

Donc, par encadrement, f est KH-intégrable sur $[a,b]$. De plus, pour $n \geqslant 0$:

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x (f_n - f)\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |f_n - f| = \int_a^b |f_n - f| \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi (F_n) converge uniformément vers F. □

Corollaire 1. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions dérivables sur $[a,b]$. Si $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée g.*

Démonstration. Les fonctions (f_n') sont KH-intégrables sur $[a,b]$ et convergent uniformément vers g, donc d'après le théorème 1, g est KH-intégrable sur $[a,b]$ et, comme, pour $x \in [a,b]$:

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'$$

on a que (f_n) converge uniformément vers :

$$f : \begin{array}{l} [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(a) + \int_a^x g \end{array}$$

On remarque alors que f est dérivable sur $[a,b]$ et que $f' = g$. □

Lemme 3. *Soient deux suites réelles (u_n) et (v_n). Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum |v_n|$ converge, alors $\sum |u_n|$ converge aussi.*

Démonstration. Supposons que $u_n = O(v_n)$, càd $u_n = \lambda_n v_n$ avec $\lambda_n \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, et que $\sum |v_n|$ converge.
Soit $\epsilon > 0$. Compte tenu des hypothèses, il existe un rang $N \geqslant 0$ à partir duquel :

$$\sum_{n\leqslant k<+\infty} |v_k| \leqslant \epsilon' \qquad \text{et :} \qquad |\lambda_n - \lambda| \leqslant \epsilon \qquad \text{avec :} \qquad \epsilon' = \frac{\epsilon}{|\lambda| + \epsilon} > 0$$

On applique l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda_n| - |\lambda| \leqslant |\lambda_n - \lambda| \leqslant \epsilon \qquad \text{d'où :} \qquad |\lambda_n| \leqslant |\lambda| + \epsilon$$

Ainsi :

$$\sum_{n\leqslant k<+\infty} |u_k| = \sum_{n\leqslant k<+\infty} |\lambda_k|\,|v_k| \leqslant (|\lambda| + \epsilon) \sum_{n\leqslant k<+\infty} |v_k| \leqslant (|\lambda| + \epsilon)\epsilon' = \epsilon$$

La série $\sum |u_n|$ vérifie donc aussi le critère de Cauchy donc converge aussi. □