

Test jednej i dwóch proporcji

Maciej Beręsewicz

Zadanie 1

Wysunięto przypuszczenie, że frakcja studentów Politechniki Poznańskiej wydających miesięcznie na kino mniej niż 40 zł jest mniejsza od 30%. Celem weryfikacji tej hipotezy wylosowano do próby niezależnie 100 studentów Politechniki Poznańskiej i otrzymano następujący szereg rozdzielczy miesięcznych wydatków na kino (w zł). Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikuj to przypuszczenie.

Wydatki na kino	Liczba studentów (n_i)
0-20	5
20-40	20
40-60	40
60-80	25
80-100	10
Razem	100

W pierwszej kolejności zapisujemy układ hipotez:

- $H_0: p = 0.3$
- $H_1: p < 0.3$

Układ hipotez jest lewostronny w związku z tym wartość statystyki krytycznej wynosi:

$$z_\alpha = z_{0.05} = -1.6448536$$

Natomiast, aby zweryfikować tę hipotezę stosujemy następującą statystykę:

$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}}$$

Podstawiając do powyższego wzoru otrzymujemy:

$$z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}} = \frac{0.25 - 0.3}{\sqrt{\frac{0.3 \times (1 - 0.3)}{100}}} = -1.0910895$$

Odpowiedź: Porównując statystykę z ($= -1.09$) ze statystyką krytyczną z_{kr} ($= -1.64$) nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na rzecz alternatywnej ponieważ $z > z_{kr}$. Oznacza to, że frakcja studentów Politechniki Poznańskiej wydających miesięcznie na kino mniej niż 40 zł nie jest mniejsza od 30%.

Zadanie 5

Zdaniem kierownika zmiany maszyna A jest gorsza od maszyny B. Na 500 elementów wyprodukowanych przez maszynę A 50 miało usterki, a na 1000 wyprodukowanych przez maszynę B było 40 usterek. Czy to przypuszczenie kierownika jest uzasadnione? Przyjmij poziom istotności 0,05

W pierwszej kolejności zapisujemy układ hipotez:

- $H_0: p_A = p_B$
- $H_1: p_A > p_B$

Układ hipotez jest prawostronny w związku z tym wartość statystyki krytycznej wynosi:

$$z_{1-\alpha} = z_{0.95} = 1.6448536$$

Natomiast, aby zweryfikować tę hipotezę stosujemy następującą statystykę:

$$z = \frac{p_a - p_b}{\sqrt{\hat{p} \times (1 - \hat{p}) \times (\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b})}}$$

gdzie $\hat{p} = (m_a + m_b)/(n_a + n_b)$.

Podstawiając do powyższych wzorów otrzymujemy:

$$\hat{p} = (m_a + m_b)/(500 + 1000) = (50 + 40)/(500 + 1000) = 0.06$$

a

$$z = \frac{p_a - p_b}{\sqrt{\hat{p} \times (1 - \hat{p}) \times (\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b})}} = \frac{0.1 - 0.04}{\sqrt{0.06 \times (1 - 0.06) \times (\frac{1}{500} + \frac{1}{1000})}} = \frac{0.06}{\sqrt{0.0564 \times 0.003}} = 4.612656$$

Odpowiedź: Porównując statystykę z ($=4.61$) ze statystyką krytyczną z_{kr} ($=1.64$) odrzucamy hipotezę zerową na rzecz alternatywnej ponieważ $z > z_{kr}$. Oznacza to, kierownik ma rację mówiąc, że maszyna A jest gorsza od maszyny B.