

# Détermination du rapport $C_p/C_v$ de l'air

Yohann Bertrand

William Trudel

Aubert Lamy

3<sup>ème</sup> année au baccalauréat

Université du Québec à Trois-Rivières

Département de physique

## Résumé

Les objectifs de ce laboratoire étaient de faire les mesures nécessaires pour pouvoir calculer la valeur du rapport des chaleurs spécifiques  $c_p/c_v$  de l'air, faire une analyse détaillée des incertitudes rattachées aux variables de la situation, et se servir de cela pour optimiser la valeur du résultat final et apprendre à exploiter une abondance de mesures afin d'en extraire le contenu numérique avec le plus de précision<sup>1</sup>. Pour ce faire, nous avons lâché une bille en métal dans un tube rattaché à une bouteille scellée. La bille étant presque de la même largeur que le tube, elle s'est mise à osciller dans le tube. Nous avons mesuré ces oscillations et nous avons déduit la période d'oscillation amortie et la période d'oscillation naturel de ce système. Avec ces périodes et les paramètre du montage, nous avons trouvé une valeur expérimentale du rapport  $c_p/c_v$  de l'air. Avec la fréquence amortie calculé de façon préliminaire nous avons obtenus un rapport de  $(1,46 \pm 0,07)$  et avec la fréquence naturelle du système nous avons obtenus  $(1,42 \pm 0,05)$ . Dans nos conditions d'expérimentations, la valeur théorique était de  $1,40$  <sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup> Source 1 de la médiagraphie

<sup>2</sup> Selon la source 2 de la médiagraphie

## Introduction

Cette expérience portait sur le rapport  $c_p/c_v$  de l'air. On fait les mesures de la période d'oscillation de la bille ainsi que des paramètres du laboratoire pour trouver ce rapport et on fait une analyse détaillée des incertitudes rattachées aux variables de la situation pour pouvoir optimiser la valeur finale.

## Théorie

### *Tirée de la source 1 de la médiagraphie*

La situation est assez simple en principe (voir figures). Une bille d'acier en haut d'un tube est lâchée en chute libre. Dans sa chute, la bille comprime la colonne d'air au-dessous d'elle. La pression de l'air augmente, la chute de la bille est ralentie, arrêtée, puis renversée. La bille finit par faire un mouvement oscillatoire, et l'analyse mathématique prédit en effet un mouvement harmonique simple. La constante physique recherchée entre dans l'expression de la période de ce mouvement.

On observe bien en pratique un mouvement oscillatoire, mais à cause de frottement entre la bille et le tube, les oscillations sont amorties. De plus, à cause d'une fuite d'air autour de la bille, une dérive lente de la bille vers le bas du tube se surimpose.

La source de l'incertitude majeure est dans la détermination de la période. Le défi consiste à analyser les mesures de position afin de reconstituer le mouvement non-amorti et sans dérive prédit par la théorie, et à partir de celui-ci calculer la période avec (beaucoup) plus de précision que ne donne le mouvement actuel. La difficulté pratique, c'est que les corrections nécessaires ne sont peut-être pas uniformes, dans quel cas

l'étudiant doit trouver un compromis entre ce qu'il faudrait faire et ce qui est raisonnable de faire. Ceci peut devenir une question de jugement, situation bien connue dans l'exploitation de mesures de n'importe quelle expérience.

Paramètres du milieu et du système :

$m$  masse de la bille

$r, A, l$  rayon, section et longueur du tube

$V$  volume de l'air comprimé =  $V_0$  (bouteille) +  $V_1$  (portion du tube sous de la bille)

$P$  pression de l'air à l'intérieur

$P_a$  pression atmosphérique externe

$g$  accélération de la pesanteur

$k$   $c_p/c_v$  constante de l'air

Variables contrôlées : aucune

Variable dépendante et mesurée :  $y(t)$  = position de la bille en fonction du temps

### Équations pertinentes

L'analyse mathématique est faite autour du point d'équilibre du mouvement oscillatoire de la bille (= position de repos s'il n'y avait pas de dérive = position où l'accélération nette est nulle).

a) En général, la somme des forces sur la bille ( $F > 0$  vers le haut) donne :

$$F_{net,y} = AP - (mg + AP_a) \quad (1)$$

Au point d'équilibre (donc quand  $F_{net,y} = 0$ ) la pression interne nécessaire pour soutenir la bille sera alors :

$$P_{eq} = P_a + mg/A, \quad (2)$$

ce qui permet d'écrire l'équation 1 comme :

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2} = A(P - P_{\text{eq}}) = A\delta P. \quad (3)$$

b) Un déplacement  $\delta h = y$  de la bille au-dessus de ce point d'équilibre ( $y > 0$ ) implique un agrandissement du volume du gaz ( $\delta V > 0$ ), donc une chute de sa pression ( $\delta P < 0$  via son équation d'état – voir sous iii), donc un  $P - P_{\text{eq}}$  et une  $F_y$  négatifs. De même, un déplacement  $y < 0$  entraînera un  $\delta P$  et  $F_y > 0$ . Par conséquent, cette force est une force de restitution, produisant des oscillations autour de la position d'équilibre.

c) Puisque le mouvement de la bille est suffisamment rapide on suppose que, du point de vue thermodynamique, l'air (le gaz) subit au cours des oscillations des transformations (compressions ou dilatations) adiabatiques. Le gaz est régi par l'équation d'état :

$$PV^k = \text{cte}, \text{ avec } k \equiv c_p/c_v, \quad (4)$$

ce qui relie  $\delta P$  à  $\delta V$ , selon :

$$\begin{aligned} \delta P &= -(Pk/V)\delta V, \text{ avec } \delta V = A\delta h \\ &= Ay \text{ dans le tube.} \end{aligned} \quad (5)$$

Ceci substitué dans l'équation 3 donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{A\delta P}{m} \\ &= \frac{A\left(-\frac{Pk}{V}\right)\delta V}{m} \\ &= \frac{A\left(-\frac{Pk}{V}\right)Ay}{m} \\ &= -\left[\frac{kPA^2}{mV}\right]y \\ &= -\omega_0^2 y. \end{aligned} \quad (6)$$

La fréquence angulaire  $\omega_0$  des oscillations (idéales) est ainsi une fonction de la constante  $k$  du gaz aussi bien que des paramètres du montage :  $P$ ,  $A$ ,  $m$  et  $V$ . Les

valeurs de  $P$  et de  $V$  devraient être celles autour du point d'équilibre :  $P_{\text{eq}}$  et  $V_{\text{eq}} = V_0 + V_1$ .

Puisque période  $T$  et fréquence angulaire  $\omega$  sont reliées selon  $\omega = 2\pi/T$ , alors :

$$k = \frac{4\pi^2 mV}{PA^2 T_0^2} \equiv \frac{C}{T_0^2}, \quad (7)$$

et le mouvement oscillatoire de la bille devrait donc être décrit par :

$$y(t) = B \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (8)$$

d) En pratique on observe non pas des oscillations idéales décrites selon l'équation 8, mais des oscillations amorties (paramètre "a") surimposées sur une dérive dans le temps qu'on prend linéaire, faute de mieux (paramètre "b") :

$$y(t) = B e^{-at} \sin(\omega t + \phi) - bt + y_0. \quad (9)$$

Remarque : si le détecteur à ultrasons est utilisé pour répertorier la position de la bille, nous remarquerons que la position de la bille augmente graduellement. En effet, la position 5 correspond à la distance entre la bille et l'émetteur ultrason qui était positionné au-dessus de la bille. Avec la fuite d'air, la bille s'éloignait de l'émetteur. Nous avons une oscillation de la forme

$$y(t) = B e^{-at} \sin(\omega t + \phi) + bt + y_0 \quad (9a)$$

Deux considérations d'analyse entrent en jeu maintenant :

a) Dans l'équation 7, les paramètres  $m$  et  $A$  sont connus très précisément. Les paramètres  $P$  et  $V$  peuvent être calculés avec relativement peu d'incertitude. Cela met le fardeau de l'incertitude de  $k$  sur la précision de  $T_0$ . Or la période ne peut pas être mesurée très précisément à partir du mouvement observé de la bille. Il s'agit donc

d'explorer les possibilités d'analyser le mouvement de la bille afin d'obtenir une période plus certaine.

b) En plus, la période  $T$  observée n'est PAS égale à  $T_0$ . Pour avoir  $T_0$  il faut donc corriger la période apparente  $T$  par un facteur de correction (qui est lui-même fonction de l'amortissement  $a$ ). Il faudra rechercher la forme exacte de ce facteur de correction et le calculer.

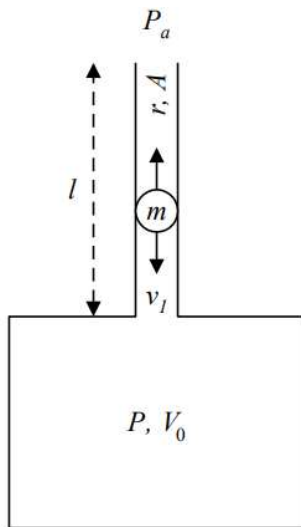
Une grande partie du travail dans cette manipulation tourne autour de la précision avec laquelle on détermine  $T_0$ .

## Montage

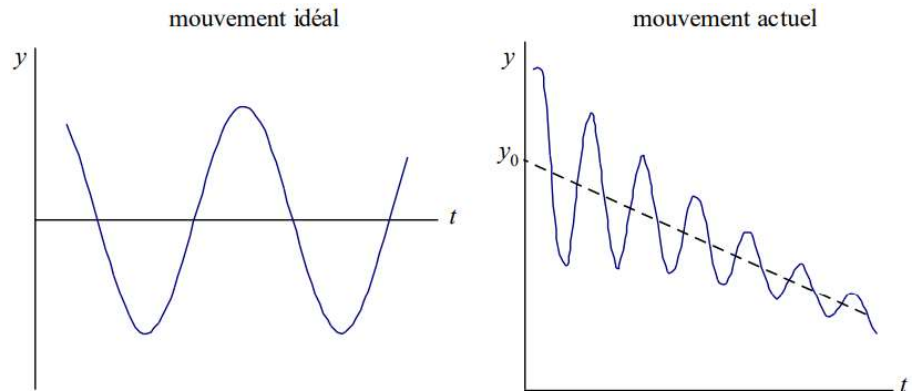
Matériel :

- Détecteur à ultrasons
- Ordinateur (logiciel PASCO)
- Bille d'acier
- Tube de verre
- Bouteille
- Pied à coulisse
- Règle graduée
- Support pour le tube
- Niveau optique
- Matériel nettoyant
- Aimant et fil

Schémas<sup>3</sup> :



**Figure 1** : Schéma du montage



**Figure 2** : Mouvements harmoniques

<sup>3</sup> Tirés de la source 1 de la médiagraphie

**Méthodologie** : Voir source 1 de la médiagraphie

## Résultats

Tableaux :

Tableau 1 : Mesure des paramètres et constantes théoriques

Paramètre	Valeur	Incertitude
Masse bille (g) :	16,52	0,01
L tube (mm) :	600	1
d tube (mm) :	15,88	0,01
h bouteille (mm) :	363	2
h col (mm) :	123	2
d bouteille (mm) :	229	2
Distance capteur-tube (mm) :	28,0	0,1
Température (K)	298,2	0,5
Pression (kPa)	101,30	0,05
hauteur d'équilibre de la bille (m)	0,40	0,01
$g \text{ (m/s}^2\text{)}^4$	9,80665	

Tableau 2 : Variables, constantes et paramètres calculés

Variable	Valeur	Incertitude
m	$1652 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$V_0$	$98 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$V_1$	$45 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$
V	$99 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$P_{\text{eq}}$	$1021 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^2$
A	$1981 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
C	1,62	0,05
b	$70 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$y_0$	0,307	0,003
a	0,148	0,005
B	0,251	0,005

Tableau 3 : Périodes d'oscillations

Expérience	Valeur	Incertitude
Test 1	1,05	0,01
Test 2	1,06	0,01
Test 3	1,05	0,01
Test 4	1,06	0,01
Moyenne	1,05	0,01
T corrigé	1,07	
$T_0$ corrigé	1,07	0,01

*N.B. : L'incertitude sur T corrigé est plus petite que le nombre de chiffres significatifs de la valeur de T corrigé; elle est donc négligeable.*

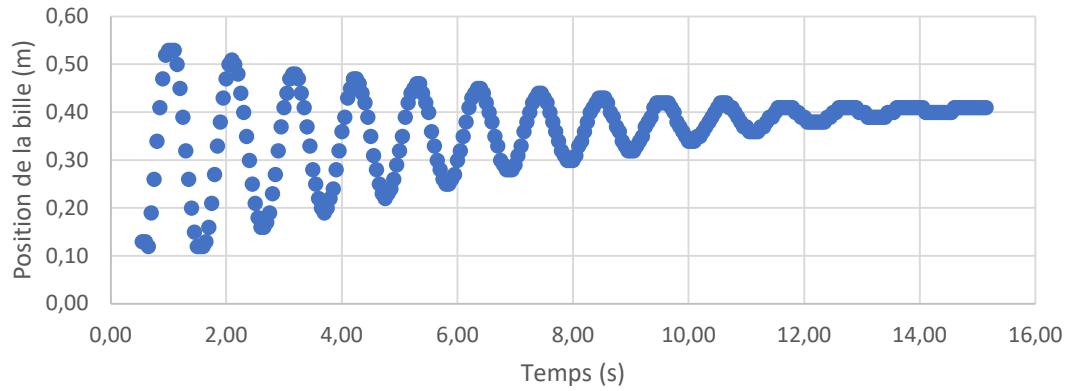
Tableau 4 : Valeurs de  $c_p/c_v$

Expérience	Valeur	Incertitude
$c_p/c_v$ préliminaire	1,46	0,07
$c_p/c_v$ corrigé	1,42	0,05
$c_p/c_v$ théorique	1,40	

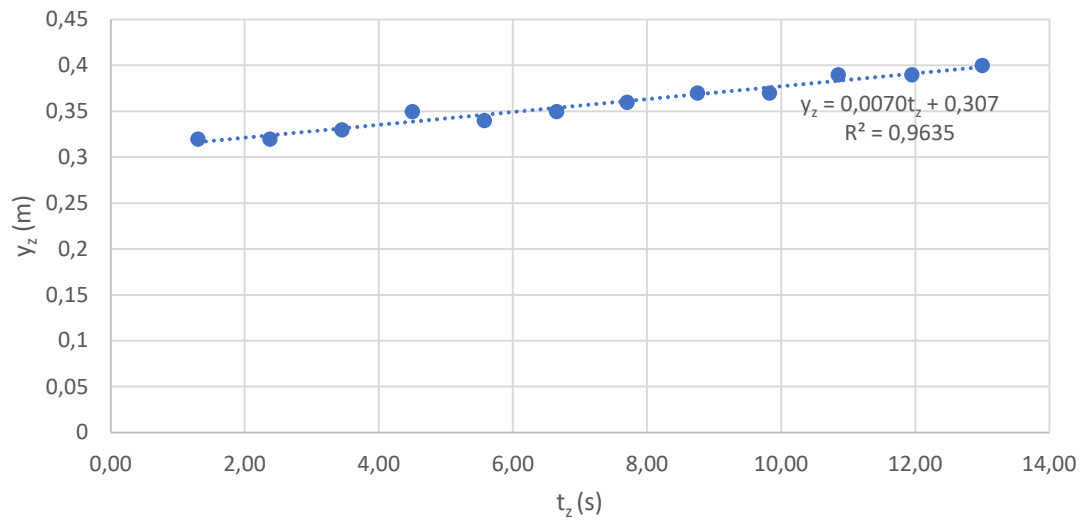
<sup>4</sup> Selon la source 3 de la médiagraphie

Graphiques :

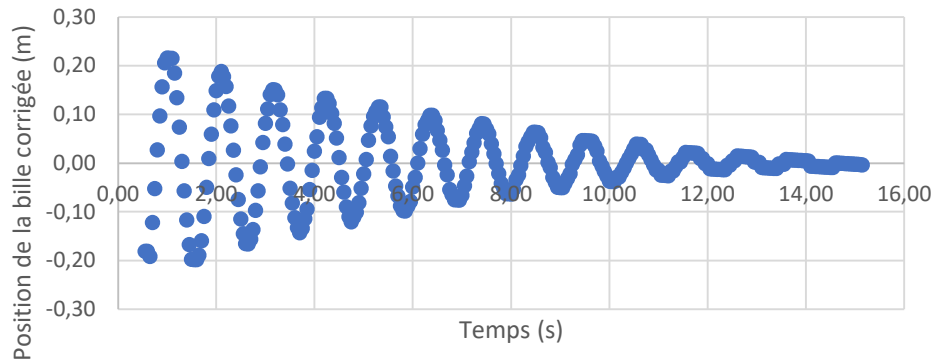
Graphique 1 : Position de la bille (m) en fonction du temps (s)



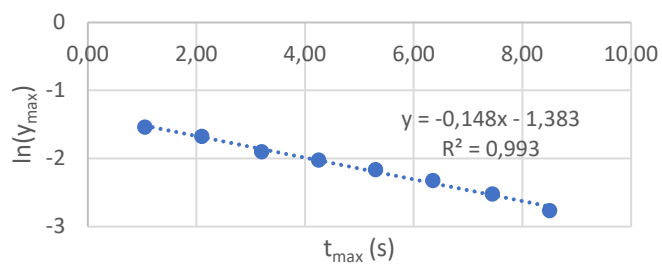
Graphique 2 : Détermination des paramètres  $y_0$  et  $b$  de l'équation (9-a)



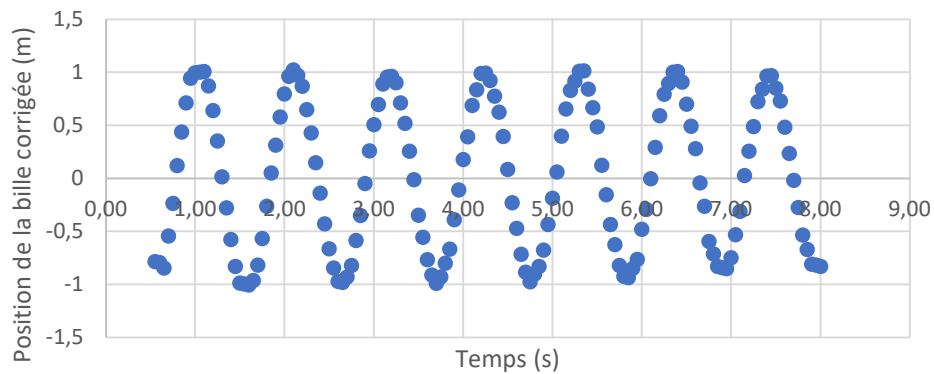
Graphique 3 : Correction de la position de la bille (m) en fonction du temps (s) selon les paramètres  $y_0$  et b

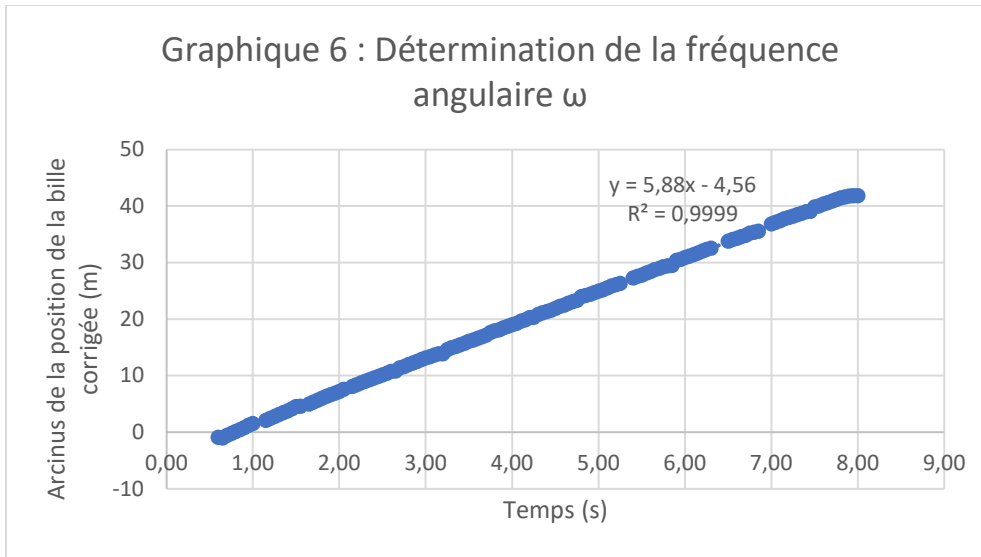


Graphique 4 : Détermination des paramètres B et a de l'équation (9-a)



Graphique 5 : Correction de la position de la bille (m) en fonction du temps (s) selon les paramètres B et a





*N.B. : Toutes les pentes et ordonnées à l'origine des graphiques ont été trouvées grâce à la fonction DROITEREG d'Excel*

*N.B. : Les barres d'erreur ont été omises sur les graphiques, car dans tous les cas, elles n'étaient pas suffisamment grandes pour être visibles*

### **Exemples de calculs :**

#### **Pression verticale sur un hémisphère**

La force verticale est donnée par :

$$F_{vertical} = P_{vertical} \times A_{\perp}$$

Mais l'aire perpendiculaire d'un hémisphère est l'aire d'un cercle :

$$A_{\perp} = \pi \times r^2$$

Donc,

$$F_{vertical} = P_{vertical} \times A_{\perp} = P_{vertical} \pi r^2$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} + a^2 = \frac{4\pi^2}{T_0^2}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{4\pi^2}{T^2} + a^2}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\frac{4\pi^2}{1,07^2} + 0,148^2}}$$

$$T_0 = 1,07 \text{ s}$$

#### **Relation entre T et $T_0$ et calcul de $T_0$**

$$\omega^2 = \omega_0^2 - a^2$$

$$\text{mais } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

#### **Calcul et Incertitude de m, V, P, A<sup>2</sup> et C**

##### Pour m :

m = 16,52 g et l'incertitude est de 0,01 g sur la masse de la bille m provient de l'incertitude de la balance utilisé pour mesurer la masse de la bille.



Pour V :

$$P_{\acute{e}q} = 1,021 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$V = V_0 + V_1$$

Mais :

$$V_0 = \pi \times \left(\frac{D_{bout}}{2}\right)^2 \times h_{bouteille}$$

$$\delta P_{\acute{e}q} = P_{\acute{e}q} \sqrt{\left(\frac{\delta P_a}{P_a}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta A}{A}\right)^2}$$

Et

$$V_1 = \pi \times \left(\frac{D_{tube}}{2}\right)^2 \times h_{bille \acute{e}q}$$

$$\begin{aligned} \delta P_{\acute{e}q} &= 1,021 \\ &\times 10^{-5} \sqrt{\left(\frac{0,05}{101,30}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{16,52}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{1,981}\right)^2} \end{aligned}$$

$$h_{bille \acute{e}q} = h_{tube} + dist_{cap} - h_{eq}$$

$$\delta P_{\acute{e}q} = 0,001 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \times \left(\frac{229}{2000}\right)^2 \times \frac{(363 - 123)}{1000} \\ &\quad + \pi \times (15,88/2000)^2 \\ &\quad \times (0,6 + 0,028 - 0,40) \end{aligned}$$

Pour A :

$$V = 9,9 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$A = \pi \times \left(\frac{d_{tube}}{2000}\right)^2$$

$\delta V$

$$\delta V = V \sqrt{2 \left(\frac{\delta D_{bouteille}}{D_{bouteille}}\right)^2 + \left(\frac{\delta H_{bouteille}}{H_{bouteille}}\right)^2 + 2 \left(\frac{\delta D_{tube}}{D_{tube}}\right)^2 + \left(\frac{\delta H_{tube}}{H_{tube}}\right)^2 + \left(\frac{\delta dist_{cap}}{dist_{cap}}\right)^2 + \left(\frac{\delta H_{eq}}{H_{eq}}\right)^2}$$

$$A = \pi \times \left(\frac{15,88}{2000}\right)^2$$

$$A = 1,981 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$\delta V$

$$= 9,9$$

$$\times 10^{-3} \sqrt{2 \left(\frac{0,01}{15,88}\right)^2 + \left(\frac{2}{240}\right)^2 + 2 \left(\frac{0,01}{15,88}\right)^2 + \left(\frac{1}{600}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{28,0}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{0,40}\right)^2}$$

$$\delta A = A \times \frac{\delta d_{tube}}{d_{tube}}$$

$$\delta A = 1,981 \times 10^{-4} \times \frac{0,01}{15,88}$$

$$\delta V = 0,3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\delta A = 0,001 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Pour P :

$$P_{\acute{e}q} = P_a + mg/A$$

Pour C :

$$C = \frac{4 \times \pi^2 \times m \times V}{P \times A^2}$$

$$\begin{aligned} P_{\acute{e}q} &= 101300 + 0,01652 \\ &\quad \times \frac{9,80665}{1,981 \times 10^{-4}} \end{aligned}$$

$$C = \frac{4 \times \pi^2 \times 1,652 \times 10^{-2} \times 9,9 \times 10^{-3}}{1,021 \times 10^5 \times (1,981 \times 10^{-4})^2}$$

$$C = 1,62 \text{ s}^2$$

$$\begin{aligned} \delta C &= C \sqrt{\left(\frac{\delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\delta V}{V}\right)^2} \\ \delta C &= 1,61 \sqrt{\left(\frac{0,001}{1,021}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{1,652}\right)^2 + 2\left(\frac{0,001}{1,981}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{9,9}\right)^2} \\ \delta C &= 0,05 \text{ s}^2 \end{aligned}$$

Calcul de K et de son incertitude :

$$\begin{aligned} k &= \frac{C}{T_0^2} \\ k &= \frac{1,62}{1,07^2} \\ k &= 1,42 \\ \delta k &= k \sqrt{\left(\frac{\delta C}{C}\right)^2 + 2\left(\frac{\delta T_0}{T_0}\right)^2} \\ \delta k &= 1,61 \sqrt{\left(\frac{0,05}{1,62}\right)^2 + 2\left(\frac{0,01}{1,07}\right)^2} \\ \delta k &= 0,05 \text{ s}^2 \end{aligned}$$

## Analyse

Le but de cette expérience était de trouver le rapport  $c_p/c_v$  de l'Air et nous avons trouvé deux valeurs expérimentales du rapport  $c_p/c_v$  de l'air. Avec la période amortie calculé de façon préliminaire nous avons obtenus un rapport de  $(1,46 \pm 0,07)$  et avec la période

naturelle du système nous avons obtenus  $(1,42 \pm 0,05)$ . Dans nos conditions d'expérimentations, la valeur théorique était de  $1,40$ <sup>5</sup>. Nous constatons que nos deux valeurs recoupent la valeur théorique dans leur incertitude, mais que la deuxième est plus près ce qui signifie qu'elles sont toute deux exactes. Aussi la première valeur est moins précise que la deuxième, mais les deux ont une incertitude relative de moins de 5% ce qui est très bon. Sans surprise la valeur corrigée est plus près de la valeur théorique, mais la valeur préliminaire fait une très bonne approximation de la valeur théorique.

En ayant calculé la valeur de C avant la période et son incertitude, nous avons pu constater que l'incertitude relative était d'environ 3% ce qui veut dire que pour maximiser la précision de notre valeur finale il faudrait que notre incertitude sur la période soit de moins de 3%. Heureusement nous avons eu des incertitudes relatives sur  $T_0$  d'environ 1% ce qui veut dire que la l'incertitude majeur sur notre valeur finale venait en fait de C. D'ailleurs, l'incertitude la plus importante de notre laboratoire venait de la mesure du volume. En effet, les mesures en générales des dimensions de la bouteille n'étaient pas faciles à prendre avec précision, et la hauteur de la colonne d'air sous la bille dépendait de 3 mesures qui n'était pas toutes extrêmement précises (surtout la hauteur du détecteur à ultrasons qui se mettait à trembler dès qu'on touchait au montage). La plupart des valeurs que l'on a mesuré l'on été avec un mètre ce qui n'est pas très précis.

Nous constatons aussi que les valeurs de T et  $T_0$  sont identiques pour le nombre de chiffre significatif permis pour ces valeurs, mais que

<sup>5</sup> Selon la source 2 de la médiagraphie

l'incertitude de  $T_0$  est plus grande car elle dépend de l'amortissement  $a$  en plus de  $T$ . Nous en concluons que le temps mis à dégager la valeur de  $T_0$  n'était pas très utile dans notre situation, il a peut-être amélioré l'exactitude de notre valeur, mais à diminuer sa précision ce qui nous empêche d'en profiter.

Nous avons remarqué que la valeur préliminaire pour la période était assez précise surtout quand on comparait plusieurs séries de mesure, mais cette période n'étant pas la période naturelle du système, il ne serait pas logique d'essayer de la prendre avec une plus grande précision puisqu'elle n'est pas ce qu'on cherche. Aussi il aurait été intéressant de trouver un autre moyen de calculer le volume d'air sous la bille car nous aurions pu avoir une valeur beaucoup plus précise de  $k$  et la correction de  $T_0$  aurait plus d'importance, car l'incertitude relative sur  $C$  était environ 10 fois plus conséquente que celle sur  $T_0$  dans le calcul de l'incertitude de  $k$ .

## Conclusion

Les objectifs de ce laboratoire étaient de faire les mesures nécessaires pour pouvoir

calculer la valeur du rapport des chaleurs spécifiques  $c_p/c_v$  de l'air. Pour ce faire, nous avons lâché une bille en métal dans un tube rattaché à une bouteille scellée. Nous avons mesuré les oscillations de la bille et nous avons déduit la période d'oscillation amortie et la période d'oscillation naturel de ce système. Avec ces périodes et les paramètres du montage, nous avons trouvé une valeur expérimentale du rapport  $c_p/c_v$  de l'air. Avec la période amortie calculée de façon préliminaire nous avons obtenus un rapport de  $(1,46 \pm 0,07)$  et avec la période naturelle du système nous avons obtenus  $(1,42 \pm 0,05)$ . Dans nos conditions d'expérimentations, la valeur théorique était de  $1,40^6$ . Nous avons donc une valeur assez près de la valeur théorique et qui la recoupe dans son incertitude. Si nous avions à refaire ce laboratoire, nous prendrions moins de série de mesures, mais prendrions plus de temps pour nettoyer le tube et la bille, parce que nous avons remarqué que plus nous faisons de mesures plus la qualité des graphiques diminuait et donnait de plus en plus de grandes incertitudes. D'ailleurs, la plus grande cause d'erreur de ce laboratoire vient de la qualité du nettoyage car si la friction commence à devenir trop élevée et non uniforme, la période ne sera pas celle que nos équations prédisent.

---

<sup>6</sup> Selon la source 2 de la médiagraphie

### **Médiagraphie**

- [1] Département de physique de l'Université du Québec à Trois-Rivières. « Labo 6 : Détermination du rapport  $c_p/c_v$  de l'air », Automne 2022
- [2] [https://www.engineeringtoolbox.com/air-specific-heat-capacity-d\\_705.html](https://www.engineeringtoolbox.com/air-specific-heat-capacity-d_705.html)
- [3] Troisième conférence générale des poids et mesures, Paris, 1901