Derivazione di una funzione composta

Teorema: Assumiamo $x(t)$, $y(t)$ derivabili in $t \in I$. Sia f differenziabile in $(x(t), y(t)) \in A$. Allora F risulta derivabile in t e:

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))\,x'(t) + f_y(x(t), y(t))\,y'(t)$$

Derivata direzionale

Def: Per direzione si intende un vettore di modulo unitario.
In $\mathbb{R}^n$ definiamo come:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\lambda) - f(x)}{t}$$

In $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \lambda = (\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\alpha, y + t\beta) - f(x, y)}{t}$$

Al posto di calcolare il limite possiamo utiliz. un teorema (il seguente).

Teorema:
Assumiamo f differenziabile in $x \in A \subset \mathbb{R}^n$. Allora f ammette derivata direzionale rispetto a ogni direzione λ e vale:

$$\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) = \nabla_x \cdot \lambda$$

Esempio: Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y) = e^x y$ lungo il vettore $u = (3,4)$ nel punto $(2,0)$.

1. Controllo che il vettore abbia norma unitaria:

$$|u| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 1$$

Non ha norma unitaria quindi diventa:

$$u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

2. Calcolo il gradiente:

$$\nabla f(x_0,y_0) = (e^x y, e^x)$$

3. Calcolo il valore nel punto

$$\nabla f(2,0) = (0, e^2)$$

4. Calcolo il prodotto scalare

$$\frac{\partial f}{\partial u} f(2,0) = (0, e^2)\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}e^2$$

Nota: In funzioni a 2 o più variabili esiste una derivata per ogni piano.

Esempio: $f(x,y) = x^2 - y^2$, punto $(1,1)$ lungo la direzione $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = u$

$$|u| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = (2x, -2y)$$

$$\nabla f(1,1) = (2, -2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (2,-2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

Insiemi connessi in $\mathbb{R}^2$

Def: Un insieme aperto A si dice connesso se non esistono due aperti disgiunti non vuoti in $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A.

Teorema: Sia A un insieme aperto connesso e sia f dotata di derivate parziali nulle in A. Allora f è costante in A.

Esempio: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$

$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \arctan\frac{y}{x}$$

$$f_x = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x^2+1} + y \frac{1}{x^2+1}$$

$$= y^{-1}\, 1/x^2+1 + y/x^2+1 = 0$$

$$f_y = \frac{x}{y^2+1} + \frac{1}{x}\,\frac{1}{y^2+1}$$

$$= \frac{x}{y^2+1} + \frac{x^{-1}}{y^2+1} = 0$$

$$f(x,y) = f(1,1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{costante!}$$