Continuità e derivabilità

Quando parliamo di funzioni a più variab. il fatto che una funzione sia derivabile in un punto non è una condizione suff. affinché la funzione sia anche continua

Esempio:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{x^2 m}{x^2(1+m)}$$

$$= \frac{m}{1+m}$$ non esiste il limite

non è continua ma $\exists$ le derivate part. in $(0,0)$

Derivate parziali seconde

Sia:

$$f(x,y) = xe^y + y^3x^2$$

Entrambe le derivate parziali (1ª e 2ª)

$$f_x = e^y + 2xy^3 \qquad f_{xy} = e^y + 6xy^2$$

$$f_y = xe^y + 3y^2x^2 \qquad f_{yx} = e^y + 6xy^2$$

derivate parziali

miste

Nota: Se la $f(x)$ ammette derivate parziali continue seconde allora coincidono

Nota: All'aumentare delle variabili il n. di derivate parziali miste aumenta e può dare luogo a delle matrici.

Teorema di Schwarz

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una funzione in due variabili, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se f ammette derivate seconde miste continue ($f \in C^2(A)$) allora vale in A:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Matrice Hessiana

Def: Una matrice Hessiana è una matrice che ha come componenti le derivate parziali di una funzione di due o più variabili.

Nel caso di una funzione a due variabili la matrice Hessiana sarà:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Se $f_{xx} > 0 \wedge \det(H) > 0$: punto minimo relat.

$f_{xx} < 0 \wedge \det(H) > 0$: punto max relat.

$\det(H) < 0$: punto di sella

Esempio :

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x = -2x\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y = -2y\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xx} = -2\, e^{-(x^2+y^2)} - 2x\left[-2x\, e^{-(x^2+y^2)}\right]$$

$$f_{yy} = -2\, e^{-(x^2+y^2)} - 2y\left[-2y\, e^{-(x^2+y^2)}\right]$$

$$f_{xx} = -2\, e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy} = -2\, e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = +(-2x) - 2y\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\overset{!}{=}\ 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yx} = +(-2y) - 2x\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\overset{!}{=}\ 4xy\, e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\Big(\quad (x^2+y^2) \quad (x^2+y^2) \quad -(x^2+y^2) \Big)$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} & 4xy\,e^{-(x^2+y^2)} \\ 4xy\,e^{-(x^2+y^2)} & -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Nei punti $(0,0)$ cosa succede?

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -2 < 0 \\ \det(H) = 4 \end{matrix}$$

max!