Forma esponenziale

Sappiamo che:

$$s_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

dove:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i b_k)$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

In conclusione:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} = \delta_{n,m}$$

Esponenziale complessa:

$$e^{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

questa scrittura ci permette di trattare l'esponenziale nella forma:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

In questo modo:

$$e^z = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

con $u(x,y) = e^x \cos y \quad v(x,y) = e^x \sin y$

Nota La funzione esponenziale ha nel piano complesso un periodo $= 2\pi i$ quindi e' periodica.

Logaritmo complesso:

Con $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ il $\ln z$ sono quei numeri $w = x + iy$ tali che $e^w = z$
Si ricava:

$$e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow x = \ln r$$

$$\log z = \log|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

Nota: Ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi.