Esercizio aggiuntivi

Esercizio 4

Delle seguenti funzioni determinare il dominio, gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = x^2 y(x - y + 1)$;
2. $f(x, y) = x^3 - y^3 + \dfrac{1}{2}(x - y)^2 - x + y$;
3. $f(x, y) = 2y \log(2 - x^2) + y^2$.

Soluzioni esercizio 4(1)

(1): Punti critici:

$$P_1 = (-1, 0), \quad P_2 = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\Big), \quad Q_y = (0, y), \text{ per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

Nota che i punti Q_y sono infiniti e sono parametrizzati da y. Si nota che la curva $y \mapsto Q_y$ sul piano cartesiano disegna l'asse y.
In più:

- $\det H_f(P_1) < 0$ quindi P_1 è una sella;
- $\det H_f(P_1) > 0$ e $f_{xx}(P_1) < 0$ quindi P_1 è un massimo relativo;
- Per i restanti punti si ha $\det H_f(Q_y) = 0$. Poichè non abbiamo studiato nessuna caratterizzazione per tali punti, non potevate caratterizzarli (scusatemi!).

Soluzioni esercizio 4(2)

(2): Punti critici:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad P_3 = (-1, 1), \quad P_4 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

In più:

- P_1, P_2 sono punti di sella;
- P_3 è un massimo relativo;
- P_4 è un minimo relativo.

Soluzioni esercizio 4(3)

(3): Dominio di f:

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}.$$

Punti critici:

$$P_1 = (0, -\log 2), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (-1, 0).$$

In più:

- P_1 è un minimo relativo;
- P_2, P_3 sono punti di sella.