Integrale curvilineo di una forma differenziale

A aperto di $\mathbb{R}^2$, la forma $C(A)$:

$$\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$$

L'integrale curvilineo di una forma diff. si calcola nel modo seguente:

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \left[a(x(t), y(t))\, x'(t) + b(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt$$

ove φ è una curva regolare a tratti contenuta in A in cui sia fissato un orientamento e una rappresentazione parametrica $(x(t), y(t))$ con $t \in [a,b]$ il cui verso di percorrenza coincida con l'orientamento assegnato su φ.

A diff. dell'integrale curvilineo di una funzione l'integrale di una forma differenziale dipende dall'orientamento della curva.
Se $-\varphi$ è equiv. a φ allora:

$$\int_{-\varphi} \omega = -\int_\varphi \omega$$

Quando una curva è esatta possiamo calcolare l'integrale lungo una qualsiasi curva congiung. i suoi estremi.

Teorema: Sia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$
Allora ω e' esatta $\iff$ per ogni coppia di punti P e Q di $\mathbb{R}^2$ e $\forall$ coppia φ_1 e φ_2 risulta:

$$\int_{\varphi_1} \omega = \int_{\varphi_2} \omega$$

Teorema: Sia A un aperto connesso e sia $\omega \in C(A)$
Allora ω e' esatta $\iff$ $\forall$ curva chiusa regolare a tratti φ con sostegno in A risulta:

$$\int_{\varphi} \omega = 0$$

Esercizio: Consideriamo tre curve $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ per raggiung. da $P=(0,0)$ e $Q=(1,1)$ con orientam. indotto dalla parametriz.

$$\varphi_1 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad \varphi_2 \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$\varphi_3 \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \cup \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

$$\omega = \overset{a}{y}\, dx + \overset{b}{x}\, dy \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\varphi_1 : \int_a^b \left[a(x(t), y(t))\, x'(t) + b(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 \cdot \frac{d}{dt}(t) + t \cdot \frac{d}{dt}(t^2) = \int_0^1 t^2 + 2t^2$$

$$= \int_0^1 t^2 + \int_0^1 2t^2 = \frac{t^3}{3} + 2\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 + \frac{2}{3} - 0 = 1$$

$$\varphi_2 : \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt}(t) + t\,\frac{d}{dt}(t) = \int_0^1 t + t \, dt$$

$$= \int_0^1 t + \int_0^1 t = \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

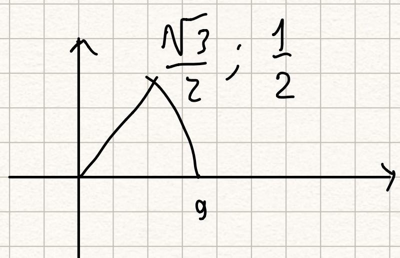
$$\varphi_3 : \int_0^1 t \cdot \cancel{\frac{d}{dt}(0)} + 0 \cdot \cancel{\frac{d}{dt}(1)} + 1 \cdot \frac{d}{dt}(t) + t \cancel{\frac{d}{dt}(1)}$$

$$= \int_0^1 dt = 1$$

Esercizio: Calcolare l'integrale di

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

lungo l'arco di centro $(0,0)$ con raggio 2 e estremi $(\sqrt{3}, 1)$ orientata in senso antiorario



$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\int_a^b [a(x(t), y(t))\, x'(t) + b(x(t), y(t))\, y'(t)]$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{\sin t}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1 =}} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\cos t}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1 =}} \frac{d}{dt}(\sin t)$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} -\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t\,(\cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \sin^2 t + \cos^2 t \; dt = \int_0^{\sqrt{3}} dt = t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$= \frac{\pi}{6}$$