Condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor

Resto di Peano:

Questo resto e' dato dalla formula di Taylor (se f e' derivabile $n+1$ volte)

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{K=0}^{\infty} \frac{f^K(x_0)}{K!}(x-x_0)^K$$

Nota Vogliamo fare in modo che il resto di Peano $r_n(x_0,x) \to 0$ per $n \to +\infty$ per ricavare condizioni di sviluppabilità (per non perdere "pezzi" man mano che deriviamo)

Resto Integrale

Teorema: Se f e' derivabile $n+1$ volte, allora il resto può essere espresso:

$$r_n(x_0,x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt$$

Dim per induzione:

Per $n=0$ ho che il resto vale:

$$r_0(x_0, x) = f(x) - \sum_{K=0}^{0} \frac{f^0(x_0)}{0!}(x-x_0)^0$$

$$= f(x) - f(x_0)$$

l'integrale vale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f^{0+1}(t)}{0!}(x-t)^0 = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

quindi:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt \qquad \text{ok!}$$

Per $n-1$ ho che il resto vale:

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{K=0}^{n-1} \frac{f^K(x_0)}{K!}(x-x_0)^K$$

si ha quindi:

$$r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \overset{F}{\boxed{\frac{f^n(t)}{(n-1)!}}}\ \overset{G'}{\boxed{(x-t)^{n-1}}}\,dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]$$

G = derivata rispetto a t.

$$= \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

In conclusione

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k -$$

$$- \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Resto di Lagrange

Teorema: Se una f è derivabile $n+1$ in un intervallo I e $x, x_0 \in I$ allora $\exists\, \varepsilon$ compreso tra x_0 e x tale che

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\varepsilon) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

dim sulla dispensa.

Condizioni di convergenza

Teorema: Se f è derivabile infinite volte in un intervallo (a,b) e se $\exists\, M, L$ tale che

$$|f^n(x)| \leq M L^n$$

allora $\forall x_0 \in (a,b)$ la funzione è svilup. in serie di Taylor centrata in x_0.

Per esempio: e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$