Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\varphi \\ y = \rho \sin\phi \sin\varphi \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho = x \\ \varphi = y \\ \phi = z \end{matrix}$$

dove φ varia tra 0 e 2π

ϕ varia tra 0 e π

$\rho \geq 0$

La jacobiana della trasformazione e':

$$\begin{vmatrix} \sin\phi\cos\varphi & -\rho\sin\phi\sin\varphi & \rho\cos\phi\cos\varphi \\ \sin\phi\cos\varphi & \rho\sin\phi\cos\varphi & \rho\cos\phi\sin\varphi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$\det(J) = -\rho^2 \sin\phi$$

Coordinate cilindriche

Il sistema di coordinate cilindriche e' un sistema di coordinate che estende il sistema bidimensionale polare aggiungendo una terza coordinata che misura l'altezza di un punto dal piano base (r, φ, h)

Le tre coordinate cilindriche possono essere convertite in coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

la jacobiana della trasformazione e':

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

il $\det(J) = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$

Teorema del cambiamento di variabili negli integrali doppi

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^2$ e $\phi : T \to D$ un applicazione invertibile di classe C^1 con det. jacobiano $\neq 0$ in T.
Allora $\forall$ funzione continua $f : D = \phi(T) \to \mathbb{R}$ vale:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_T f(x(u,v), y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

Esercizio: Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{y} \, dx\, dy$$

dove D e' racchiuso dalle rette:

$y = x \qquad y = \frac{1-x}{3}$

$y = 3x \qquad y = 1-x$

Cambio variabili:

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = \frac{y}{1-x}$$

$$T = \left\{ (u,v) : 1 \le u \le 3, \ \frac{1}{3} \le v \le 1 \right\}$$

$u = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x \Rightarrow 1$

$\qquad\qquad y = 3x \Rightarrow 3$

$v = \frac{y}{1-x} \Rightarrow y = \frac{1-x}{3} \Rightarrow v(1-x) = \frac{(1-x)}{3} \Rightarrow v = \frac{1}{3}$

$\qquad\qquad y = 1-x \Rightarrow v(1-x) = 1-x \Rightarrow v = 1$

Da $u = \frac{y}{x}$, $v = \frac{y}{1-x}$ si ottiene

$$\begin{cases} y = ux \\ y = v(1-x) \end{cases} \begin{cases} y = ux \\ ux = v(1-x) \end{cases} \begin{cases} y = ux \\ ux = v - vx \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ux \\ ux + vx = v \end{cases} \quad \begin{cases} y = ux \\ x = \frac{v}{u+v} \end{cases} \begin{cases} y = \frac{uv}{u+v} \\ x = \frac{v}{u+v} \end{cases}$$

Calcolo la jacobiana con:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{u+v} \\ y = \dfrac{uv}{u+v} \end{cases}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{0\cdot(u+v) - v}{(u+v)^2} = -\frac{v}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{(u+v) - v}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v} - \frac{v}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{v(u+v) - uv}{(u+v)^2} = \frac{v}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u(u+v) - uv}{(u+v)^2} = \frac{u}{u+v} - \frac{uv}{(u+v)^2}$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{v}{(u+v)^2} & \dfrac{1}{u+v} - \dfrac{v}{(u+v)^2} \\ \dfrac{v}{u+v} - \dfrac{uv}{(u+v)^2} & \dfrac{u}{u+v} - \dfrac{uv}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{uv}{(u+v)^3}$$

l'integrale finale:

$$\iint_T \frac{v}{(u+v)^3} = \int_{1/3}^{1} v\,dv \int_{1}^{3} \frac{1}{(u+v)^3}$$