Serie di potenze ed equazione di Bessel

Illustriamo il metodo di Frobenius per determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0 \quad , \quad x > 0 , \\ y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots +$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \overset{m=n-1}{=} 1 + \sum_{m=0} a_{m+1} x^{m+1}$$

$\hookrightarrow n = m+1$

Calcolo i vari termini:

∞

$$x\,y(x) = \sum_{n=0} a_n \, x^{n+1}$$

$\rightarrow$ $n=0$ $\quad 2a_2 x$

$n=1$ $\quad 3a_3 x^2$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, a_{n+2}\, x^{n+1}$$

$$y''(x) = 0 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n}$$

$$x\,y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n+1}$$

Sostituisco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n+1} +$$

$$+ a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, a_{n+2}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

ottengo:

raccoglie

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) = 0$$

$(n+2)(n+1) + (n+2)$

$n^2 + n + 2n + 2 + n$

$+ 2$

$n^2 + 4n + 2$

$(n+2)^2$ prodotto notevole

Ricavo $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$

Posso ricavare che:

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}\, a_n$$

$(n+2)$

per n dispari $a_n = 0$ per $a_1 = 0$

per n pari ho $n = 2k$

$$a_{2k+2} = -\frac{1}{(2k+2)^2} a_{2k}$$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2 (k+1)^2} a_{2k}$$

con $k = 0$:

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2} \qquad a_0 = 1$$

con $k = 1$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4}$$

con $k = 2$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{3^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^4}$$

$$= -\frac{1}{2^6} \frac{1}{(3!)^2}$$

Nota: il segno si alterna

infine:

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = (-1)^n \dfrac{1}{2^{2n}} \dfrac{1}{(n!)^2} \end{cases}$$

$$y(x) = \sum^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{1}{\ldots} \frac{1}{\ldots}}_{a_n} x^{2n}$$

$$y(x) = \sum_{n=0} (-1) \quad \frac{\;}{2^{2n}} \quad \frac{\;}{(n!)^2} \quad x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$\hookrightarrow$ funzione di Bessel