Esercitazione di Analisi 2 - III

5 novembre 2020

Informazioni generali

- Il tutorato si terrà ogni giovedì dalle 12:00 alle 13:00 via zoom;
- Se volete le slide, mandate una mail all'indirizzo:
  agresti@mat.uniroma1.it

Derivate parziali

In applicazioni alla fisica, biologia e chimica le quantità fisiche rilevanti (ad esempio densità, temperatura, velocità, accelerazione...) dipendono da molte variabili nonchè delle variabili spaziali (x, y, z).

Come si estende il concetto di derivata a funzioni f di più variabili?

Usiamo il rapporto incrementale in cui si fa variare un'incognita e si "fissano" le restanti.

Derivate parziali del secondo ordine

Sia $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto (ovvero per ogni $(x, y) \in \mathcal{O}$ esiste una "palla" $B_r(x, y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 < r^2\}$ di raggio r tale che $B_r(x, y) \subset \mathcal{O}$).

Una funzione $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ si dice derivabile parzialmente in x nel punto $(x, y) \in \mathcal{O}$ se esiste finito il limite $h \to 0$ del rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Se f è derivabile parzialmente in x nel punto $(x, y) \in \mathcal{O}$ allora si pone

$$f_x(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

- Similmente si può definire $f_y(x, y)$:

$$f_y(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}.$$

- In dimensioni più alte la definizione si estende naturalmente! Si incrementa una variabile per volta!

Calcolo delle derivate parziali

Per calcolare le derivate parziali valgono le regole che avete studiato ad analisi 1!

Per calcolare la derivata parziale di f rispetto a x nel punto (x, y) bisogna pensare di fissare y e di poter variare solo x...

Calcolare la derivata parziale in x della funzione $f(x, y) = x \sin y$ nel punto (x, y).

- Primo approccio, calcoliamo il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \sin y - x \sin y}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h \sin y}{h} = \sin y. \end{aligned}$$

- Secondo approccio, usiamo le regole di Analisi 1. La funzione $\sin y$ è constante rispetto a x quindi può essere portato fuori dal simbolo di derivata:

$$(x \sin y)_x = \sin y \, (x)_x = \sin y.$$

Calcolare la derivata parziale rispetto a y di $f(x,y) = x \sin y$.

- Primo approccio, calcoliamo il limite del rapporto incrementale: Usando la formula di addizione del seno $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x\sin(y+h) - x\sin y}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin y\cos h + x\cos y\sin h - x\sin y}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x\sin y(\cos h - 1) + x\cos y\sin h}{h}$$
$$= x\sin y \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + x\cos y \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.$$

  Poiché $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ e $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ si ha

$$(x\sin y)_x = x\cos y.$$

- Secondo approccio: poiché x è constante rispetto a y,

$$(x\sin y)_y = x(\sin y)_y = x\cos y.$$

Morale e notazioni

- È sempre preferibile usare le regole di analisi 1 per calcolare le derivate parziali;
- Usare il rapporto incrementale solo se esplicitamente richiesto nell'esercizio;
- Ricordare sempre che le variabili su cui *non* bisogna calcolare le derivate parziali sono costanti;
- Le derivate parziali si possono denotare anche con altri simboli:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \text{oppure} \qquad \partial_x f(x,y),\ \partial_y f(x,y).$$

  Per non appesantire la notazione, molto spessi il punto (x, y) in cui si calcolano le derivate non si scrive esplicitamente. In tal caso per le derivate parziali scriviamo semplicemente:

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{oppure} \qquad \partial_x f,\ \partial_y f.$$

Derivate di ordine successive

Come sopra $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ denota un insieme aperto.

Le derivate del secondo ordine di $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ nel punto (x, y) sono date da

$$f_{xx} = (f_x)_x(x, y), \qquad f_{xy} = (f_x)_y(x, y),$$
$$f_{yx} = (f_y)_x(x, y), \qquad f_{yy} = (f_y)_y(x, y).$$

- Similmente si possono definire le derivate di ordine superiore;
- In generale $f_{xy}(x, y) \neq f_{yx}(x, y)$. Nel caso in cui $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ sono continue in (x, y) allora vale

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

  Tale risultato si chiama *teorema di inversione di Schwarz.*

Esercizi

Esercizio 1

Calcolare le derivate parziali rispetto a x e rispetto a y delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = e^x + e^y$;
2. $f(x, y) = x^{10} + 2x^4y^2 - 4xy^4 + 2y^2$;
3. $f(x, y) = e^{x^2} \cos y$;
4. $f(x, y) = \sin(x + 2y)$;
5. $f(x, y) = e^{-x-y^2}$;
6. $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$.

Esercizio 2

Determinare il dominio e le derivate parziali rispetto a x e rispetto a y delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \arccos(xy)$;
2. $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2)$.

Esercizio 1

Esercizio 1(1): La funzione è una somma di due funzioni che dipendono ciascuna da una variabile. Quindi

$$f_x = (e^x + e^y)_x = (e^x)_x + (e^y)_x = e^x + 0 = e^x.$$

Similmente $f_y = e^y$.

Esercizio 1(2): Ricordando che $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$, si ha

$$\begin{aligned}
(x^{10} + 2x^4y^2 - 4xy^4 + 2y^2)_x &= (x^{10})_x + (2x^4y^2)_x - (4xy^4)_x + (2y^2)_x \\
&= (x^{10})_x + 2y^2(x^4)_x - 4y^4(x)_x + 0 \\
&= 10x^9 + 2y^2(4x^3) - 4y^4 \\
&= 10x^9 + 8y^2x^3 - 4y^4.
\end{aligned}$$

Analogamente $f_y = 4x^4y - 16xy^3 + 4y$.

Esercizio 1 - II

Esercizio 1(3):

$$f_x = (e^{x^2}\cos y)_x = (e^{x^2})_x \cos y = e^{x^2}(x^2)_x \cos y = 2xe^{x^2}\cos y,$$
$$f_y = (e^{x^2}\cos y)_y = e^{x^2}(\cos y)_y = -e^{x^2}\sin y.$$

Esercizio 1(4):

$$f_x = \cos(x+2y), \qquad \text{e} \qquad f_y = 2\cos(x+2y).$$

Esercizio 1(5): Poichè $f = e^{-x}e^{-y^2}$ ragionando come nel caso (3) abbiamo

$$f_x = (e^{-x})_x e^{-y^2} = -e^{-x}e^{-y^2} = -e^{-x-y^2},$$
$$f_y = e^{-x}(e^{-y^2})_y = e^{-x}e^{-y^2}(-2y) = -2ye^{-x-y^2}.$$

Esercizio 1 -III

Esercizio 1(6): Ricordando che

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} f_x = (\arctan(x^2+y^2))_x &= \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)_x \\ &= \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Similmente

$$f_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Esercizio 2 - I

Esercizio 2(1): Si ricorda che la funzione $\arccos t$ é ben definita solo se $t \in [-1, 1]$. Quindi il dominio di f é dato dai punti (x, y) che verificano $-1 \leq xy \leq 1$. Piú precisamente

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -1 \leq xy \leq 1\}.$$

Per calcolare la derivata di f, ricordiamo che

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dunque

$$f_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - (xy)^2}}(xy)_x = -\frac{y}{\sqrt{1 - (xy)^2}}$$
$$f_y = -\frac{1}{\sqrt{1 - (xy)^2}}(xy)_y = -\frac{x}{\sqrt{1 - (xy)^2}}.$$

Esercizio 2 - II

Esercizio 2(2): Come nel punto precendente $\arccos t$ é ben definita solo se $t \in [-1, 1]$. Quindi il dominio di f é dato dai punti (x, y) che verificano $-1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Poiché $x^2 + y^2 \geq 0$, la prima condizione é sempre verificata e il dominio é dato da Piú precisamente

$$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Per calcolare la derivata di f, ricordiamo che

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dunque

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}(x^2 + y^2)_x = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}$$
$$f_y = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}(x^2 + y^2)_y = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}.$$

Esercizi aggiuntivi

Calcolare il dominio e le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni:

- $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{7x + 4y + 1}}$;
- $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{y}$;
- $f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2)$.