Esercitazione di Analisi 2 - VI

26 novembre 2020

integrali curvilinei di una funzione

Sia $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1 e sia f una funzione continua sul supporto di γ. Allora l'integrale curvilineo di f sulla curva γ è dato da:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

dove $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

L'integrale curvilineo $\int_\gamma f ds$ è indipendente dalla parametrizzazione della curva. Più precisamente, se γ, β sono due curve equivalenti, allora

$$\int_\gamma f ds = \int_\beta f ds.$$

Esercizio 1

Sia $f(x,y) = xy$ verificare che

$$\int_\gamma f\,ds = \int_\delta f\,ds$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, 2\sin t), && t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \delta(t) &= (\cos 2t, 2\sin 2t), && t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 1

Per semplicità svolgeremo solo il calcolo del primo integrale. Il secondo è analogo. Dalla definizione si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,dt.\end{aligned}$$

Con la sostituzione $u = \cos t$ si ha (ricorda $du = -\sin t dt$, $u(0) = 1$ e $u(\pi/2) = 0$)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t \sqrt{1 + 3\cos^2 t}\,dt &= -\int_1^0 2u\sqrt{1+3u^2}\,ds \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 6u\sqrt{1+3u^2}\,ds \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+3u^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{14}{9}.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare

$$\int_\gamma f ds$$

nei seguenti casi.

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ e
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$
2. $f(x,y) = \dfrac{x}{1+y^2}$ e
$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ e
$$\gamma(t) = \Big(2(\cos t + t\sin t), 2(\sin t - t\cos t)\Big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Svolgimento Esercizio 2 - I

(1): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t|.$$

Poichè $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ abbiamo

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 2\int_0^{\pi} \sin t dt = 2[-\cos t]_0^{\pi} = 4.$$

(2): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}.$$

Poichè $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ abbiamo

$$\int_\gamma f ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt.$$

Svolgimento Esercizio 2 - II

(2): (continua) Con la sostituzione $u = \sin t$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(3): Calcoliamo f su γ:

$$f(x(t), y(t)) = 2\sqrt{1+t^2}.$$

Inoltre $\gamma'(t) = (2t\cos t, 2t\sin t)$ perciò:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2.$$

Dunque

$$\int_\gamma f ds = 2\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2} dt = 2\left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{4}{3}[(1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Esercizio 3

Parametrizzare la curva in figura orientata in senso antiorario.

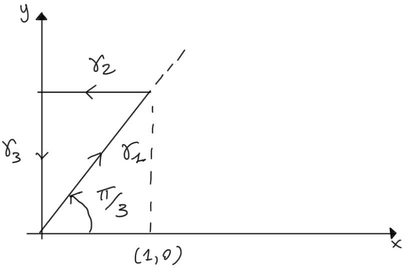

Figure 1: Cammino per l'esericizio 3

Svolgimento Esercizio 3

Poiché l'angolo è pari a $\frac{\pi}{3}$, la curva γ_1 giace sulla retta di equazioni $y = \tan\frac{\pi}{3}x = \sqrt{3}x$. Dunque la retta è parallela al vettore $(1, \sqrt{3})$. Perciò

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, \sqrt{3}t), && t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= (1-t, \sqrt{3}), && t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) &= (0, \sqrt{3}(1-t)), && t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Unendo le curve in un'unica scrittura:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, \sqrt{3}t) & t \in [0,1] \\ (2-t, \sqrt{3}), & t \in [1,2] \\ (0, \sqrt{3}(3-t)), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Esercizio 4

Parametrizzare la curva in figura orientata in senso antiorario.

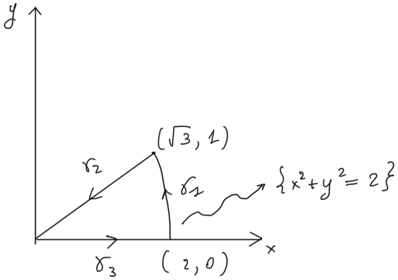

Figure 2: Cammino per l'esericizio 4

Svolgimento Esercizio 4

Poiché il punto di intersezione è dato da $(\sqrt{3}, 1)$ l'angolo corrispondente è $\frac{\pi}{6}$. Dunque la retta su cui giace è data da $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Dunque la retta è parallela al vettore $(\sqrt{3}, 1)$. Perciò

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t), & t &\in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \\
\gamma_2(t) &= (\sqrt{3}(1-t), (1-t)), & t &\in [0, 1] \\
\gamma_3(t) &= (2t, 0), & t &\in [0, 1].
\end{aligned}$$

Unendo le curve in un'unica scrittura:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right), & t \in [0, 1] \\ (\sqrt{3}(2-t), (2-t)), & t \in [1, 2] \\ (2(t-2), 0), & t \in [2, 3]. \end{cases}$$