Esercitazione di Analisi 2 - II

29 ottobre 2020

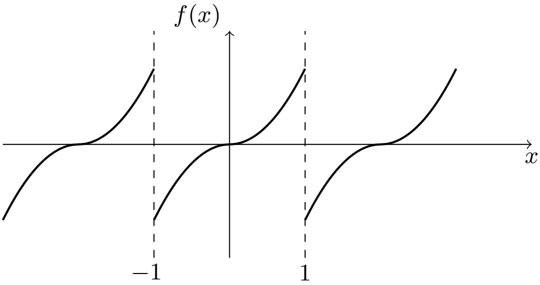
Informazioni generali

- Il tutorato si terrà ogni giovedì dalle 13:00 alle 14:00 in aula 11;
- Per problemi (matematici e non) e/o appuntamenti contattatemi all'indirizzo email:

  agresti@mat.uniroma1.it

Esercizio 1

Data la funzione $f(x) = x|x|$ per $x \in (-1, 1)$ ed estesa per periodicità su $\mathbb{R}$. Determinare i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier.



Coefficienti per la serie di Fourier

Ricordiamo che i coefficienti di una funzione di periodo T sono dati da

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx, \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx.$$

In particolare

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,dx.$$

- Se f è pari (ovvero $f(x) = f(-x)$) allora $b_k = 0$ e

$$a_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx.$$

- Se f è dispari (ovvero $f(x) = -f(-x)$) allora $a_k = 0$ (anche $a_0 = 0$) e

$$b_k = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx.$$

Esericizio 1 - I

La funzione $f(x) = x|x|$ è dispari. Infatti:

$$f(-x) = (-x)|-x| = -x|x| = -f(x).$$

Dunque $a_k = 0$. Rimane da calcolare b_k:

$$b_k = 2\int_0^1 x^2 \sin(\pi k x)\, dx.$$

Calcoliamo la primivita di $x^2 \sin(\pi k x)$: (Usiamo una integrazione per parti doppia $\int fg' = fg - \int f'g$)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(\pi k x)\, dx &= \frac{1}{\pi k}\int x^2(-\cos(\pi k x))'\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi k}x^2\cos(\pi k x) - \frac{1}{\pi k}\int 2x\cos(\pi k x)\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi k}x^2\cos(\pi k x) - \frac{1}{\pi^2 k^2}\int 2x(\sin(\pi k x))'\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi k}x^2\cos(\pi k x) - \frac{2}{\pi^2 k^2}x\sin(\pi k x) + \frac{2}{\pi^2 k^2}\int \sin(\pi k x)\, dx
\end{aligned}$$

Esercizio 2 - II

Dunque

$$\int x^2 \sin(\pi k x)\, dx = -\frac{1}{\pi k} x^2 \cos(\pi k x) - \frac{2}{\pi^2 k^2} x \sin(\pi k x) - \frac{2}{\pi^3 k^3} \cos(\pi k x).$$

Per calcolare b_k resta da calcolare la differenza della precedente funzione in $x = \pi$ e in $x = 0$:

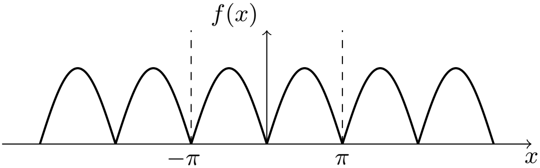
$$b_k = \frac{1}{\pi k} \pi^2 \cos(\pi k) - \frac{2}{\pi^3 k^3} [\cos(\pi k) - 1] \quad = \frac{\pi}{k} (-1)^k - \frac{2}{\pi^3 k^3} [(-1)^k - 1].$$

dove abbiamo usato la formula

$$\cos(\pi m) = (-1)^m \quad \text{per ogni intero } m.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f(x) = |\sin x|$ per $x \in (-\pi, \pi)$. Determinare i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier.



La funzione è pari nè dispari. Quindi $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$.

Esercizio 2 - I

Quanto vale il coefficiente a_0?

a) $\dfrac{3}{\pi}$, b) $\dfrac{2}{\pi}$, c) $\dfrac{3}{\pi}$.

La risposta è a). Svolgimento:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}(-\cos x)|_{-\pi}^{0} \\ &= -(\cos\pi - \cos 0) = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 - II

Determinare i coefficienti a_k. Quanto vale il coefficiente a_1?

a) $\frac{3}{\pi}$, b) $\frac{2}{\pi}$, c) $\frac{3}{\pi}$.

La risposta è a). Svolgimento: Devo calcolare

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(kx)\, dx.$$

Come posso riscrivere $\sin x \cos(kx)$? Per integrare è meglio avere somme invece che prodotti....

Formula di Werner:

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

Esercizio 2 - III

Dalle formule di Werner ho:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x(1+k)) + \sin(x(1-k))\,dx.$$

1. Caso $k=1$:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}[\cos(2\pi) - \cos(0)] = 0.$$

2. Caso $k>1$: Usando che $\cos m\pi = (-1)^m$ si ha

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(x(1+k))}{1+k} + \frac{\cos(x(1-k))}{1-k}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{1+k}-1}{1+k} + \frac{(-1)^{1-k}-1}{1-k}\right] \end{aligned}$$

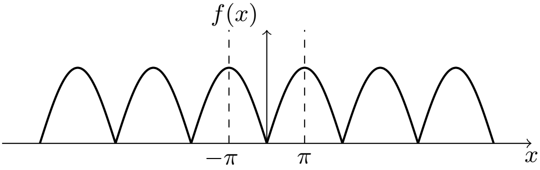
Esercizio 2 - IV

a_k ha una struttura speciale:

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è dispari} \\ -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{k+1} - \frac{2}{k-1}\right] = \frac{2}{\pi(k^2-1)}, & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

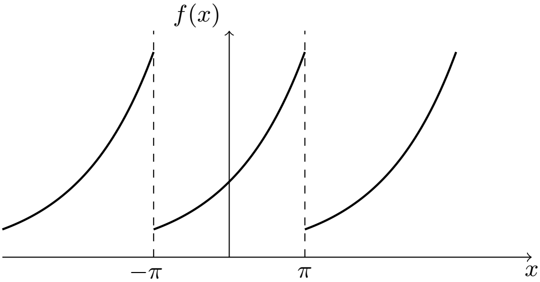
C'è una interpretazione geometrica per il fatto che $a_{2k+1} = 0$?

La funzione $|\sin x|$ ha periodo minimo π e non 2π. Dunque potremmo usare lo sviluppo con periodo $T = \frac{\pi}{2}$ e in tal caso avremmo solo coefficienti $\frac{\pi}{T}k = 2k$. Ovvero solo numeri pari!



Esercizio 3

Data la funzione $f(x) = e^x$ per $x \in (-1, 1)$ ed estesa per periodicità su $\mathbb{R}$. Determinare i coefficienti del suo sviluppo in serie di Fourier.



La funzione non è pari nè dispari. Quindi dobbiamo analizzare tutti i coefficienti della sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 3 - I

Quanto vale il coefficiente a_0?

a) $e - e^{-1}$, b) $e^{\pi} - e^{-\pi}$, c) $2.$

La risposta è a).
Svolgimento: Ricordando che il periodo di f è pari a $T = 1$, abbiamo che

$$a_0 = \int_{-1}^{1} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{1} = e - e^{-1}.$$

Esercizio 3 - II

Quanto vale il coefficiente a_1?

a) $\frac{1}{2}[e^{\pi} - e^{-\pi}]$, b) $\frac{1}{2}[e^{\pi} + e^{-\pi}]$, c) $e^{\pi} - e^{-\pi}$.

Partiamo da a_1. Dobbiamo calcolare la primitiva di $e^x \cos x$. Cosa possiamo fare? Per farci una idea usiamo una integrazione per parti: ($\int f g' \, dx = f g - \int f' g \, dx$)

$$\int e^x \cos x \, dx = \int e^x (\sin x)' \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \tag{1}$$

Non abbiamo risolto il problema. Ma $e^x \sin x$ ha la “stessa struttura" di $e^x \cos x$. Proviamo a iterare il ragionamento:

$$\int e^x \sin x \, dx = \int e^x (-\cos x)' \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \tag{2}$$

Comparando (1)-(2) abbiamo guadagnato un segno diverso! Quindi usando (1)-(2) abbiamo

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Esercizio 3 - III

Dunque abbiamo ottenuto che

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}.$$

Dopo molti conti, verificate sempre che la primitiva F che avete trovato soddisfa $F' = f$ ovvero:

$$\left(\frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}\right)' = e^x \cos x.$$

A questo punto possiamo calcolare a_1:

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left[e^{\pi} + e^{-\pi}\right].$$

Esercizio 3 - IV

Determinare i restanti coefficienti a_k.

Calcoliamo sola la primitiva di $e^x \cos(kx)$, gli a_k si calcolano come prima:

$$\begin{aligned}
\int e^x \cos kx \, dx &= \frac{1}{k} \int e^x (\sin kx)' \, dx \\
&= \frac{1}{k} \Big[e^x \sin(kx) - \int e^x \sin(kx) \, dx \Big] \\
&= \frac{1}{k} e^x \sin(kx) - \frac{1}{k^2} \int e^x (-\cos(kx))' \, dx \\
&= \frac{1}{k} e^x \sin(kx) - \frac{1}{k^2} \Big[-e^x \cos(kx) + \int e^x \cos(kx) \, dx \Big] \\
&= \frac{1}{k} e^x \sin(kx) + \frac{1}{k^2} e^x \cos(kx) - \frac{1}{k^2} \int e^x \cos(kx) \, dx
\end{aligned}$$

Dunque

$$\int e^x \cos kx = \frac{e^x}{k^2+1} \Big[k \sin kx + \cos kx \Big].$$