**Esercizio** Assumendo che la forma differenziale

$$\omega = (\overset{a}{3x^2y - y^2})\,dx + (\overset{b}{x^3 - 2xy + 1})\,dy$$

sia esatta, calcolare una primitiva.

Per verificare che sia chiusa:

$$\frac{d}{dy} a(x,y) = \frac{d}{dx} b(x,y)$$

$$\frac{d}{dy}(3x^2y - y^2) = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 2xy + 1) = 3x^2 - 2y$$

è chiusa!

Calcolare una primitiva:

$$F_x = a \Rightarrow \int 3x^2y - y^2\,dx = \int 3x^2y\,dx - \int y^2\,dx$$

$$= \cancel{3}y\frac{x^3}{\cancel{3}} - xy^2 = x^3y - xy^2 + G(y)$$

$$F_y = b \Rightarrow \int x^3 - 2xy + 1\,dy = \int x^3\,dy - \int 2xy\,dy + \int dy$$

$$= x^3y - \cancel{2}x\frac{y^2}{\cancel{2}} + y = x^3y - xy^2 + y$$

Per determ. $G(y)$ derivo:

$$\frac{d}{dy}(x^3y - xy^2 + y) = x^3 - 2xy + 1$$

differiscono per 1 quindi

$$\int 1\,dy = y$$

ha così che la primitiva:

$$F(x,y) = x^3 y - x y^2 + y$$

Esercizio: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\}$

$$\omega = \frac{-xy}{\sqrt{(y-x^2)}}\,dx + \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{(y-x^2)}} + 2\,dy$$

Assumendo che sia esatta, trovare una primitiva

$$\int \frac{-xy}{\sqrt{y-x^2}}\,dx = y\sqrt{y-x^2} + G(y)$$

$$\left(y\sqrt{y-x^2} + G(y)\right)_y = \sqrt{y-x^2} + y\frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{y-x^2}\right)^2 + y}{2\sqrt{y-x^2}} = \frac{2(y-x^2)+y}{2\sqrt{y-x^2}}$$

$$= \frac{2y-2x^2+y}{2\sqrt{y-x^2}} + G'(y)$$

$$\frac{2y-2x^2+y}{2\sqrt{y-x^2}} + G'(y) = \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}} + 2$$

$$\frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}} + G'(y) = \frac{3y-2x^2}{2\sqrt{y-x^2}} + 2$$

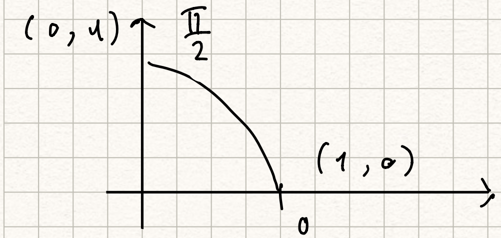
$$F(x,y) = y\sqrt{y-x^2} + \int 2\,dy$$

$$\overset{!}{=} y\sqrt{y-x^2} + 2y$$

**Esercizio**: Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale:

$$\omega = \overset{b}{xy}\,dy$$

dove $\varphi$ e' l'arco di circonferenza $x^2+y^2=1$ percorsa in senso orario situato nel quadrante positivo.




$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[a(x,y)\,x'(t) + b(x,y)\,y'(t)\right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \cdot \frac{d}{dt}(\sin t)\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\,(-\cos t)\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t\, dt$$

$$u = \cos t \qquad du = -\sin t$$

$$\int_1^0 u^2\, du = \frac{u^3}{3}\Big|_1^0 = \left(0 - \frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3}$$