Partiamo da:

$$x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

cerco una soluzione della forma:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

vado quindi a calcolarmi i vari termini

$$x y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \qquad (1)$$

per il calcolo di $y'(x)$ partiamo da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

se derivo i vari termini ho $\frac{d(1)}{dt} = 0$ e $\frac{d}{dt}(a_1 x) = a_1$ quindi:

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

infatti con $n = 0 \Rightarrow 2 a_2 x$

$n = 1 \Rightarrow 3 a_3 x^2$

$$n = 2 \Rightarrow 4\, a_4\, x^3$$

per $y''(x)$ ottengo:

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n}$$

quindi:

$$x\, y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n+1}$$

sostituisco:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)\, a_{n+2}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{n+1}$$

riordiniamo:

$$(2) \quad a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + (n+2)^2 a_{n+2} \right) x^{n+1} = 0$$

raccolto

$(n+2)^2$ ottengo da:

$$(n+2)(n+1) + (n+2)$$

$$[n+2(n+1)+1)] = [(n+2)(n+2)] = (n+2)^2$$

ottengo, sostituendo le condizioni iniziali nel punto (1) e (2) che:

$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0$

ricavo che:

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

per i numeri dispari $a_n = 0$
per i numeri pari ho $n = 2k$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2 (k+1)^2} a_{2k}$$

con $k = 0$:

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

con $k = 1$:

$$a_4 = -\frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2} \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^2}$$

con $k = 2$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^4}\frac{1}{2^2}$$

$$= -\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$

in maniera generalizzata quindi:

$$\begin{cases} a_{2K+1} = 0 \\ a_{2K} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} \end{cases}$$

quindi:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

↳ funzione di Bessell

Prova calcolo raggio di convergenza

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{(-1)^n} (-1) \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2} \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{(-1)^n} \frac{1}{(n!)^2} \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{(n!)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{[(n+1)(n!)]^2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{(n!)^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{1}{(n+1)^2 \cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{1}{2}}{1 \ldots} \right|$$

$$\left| \qquad \cancel{\frac{1}{(n!)^2}} \qquad \right|$$

$$= \left| - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{2} \right| = 0 \qquad r = \frac{1}{0} = +\infty$$

confermato!