Bacheca avvisi /users/paola.loreti uniroma1.it
materiale corso Codice corso : yhkj454
pagina didattica /paola.loreti/didattica.html

ragione : numero reale definito come il rapporto tra un termine e il suo precedente

es. $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$

ragione $= \dfrac{x^2}{x}$ serie geometrica

Ridotta n-esima : $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$

↳ successione che dipende da x di n termini

se $x = 1$ ottengo n
se $x \neq 1$ ottengo :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se calcolo $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = x^n$

1. guardo quale parte dipende da n.
2. vedo che se n e'
   - al denominatore converge a 0

• al numeratore:

se x è positivo $\to +\infty$

se x è negativo:

• se n è pari $\to -\infty$

• se n è disp $\to +\infty$

a livello schematico:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

sappiamo quanto vale, caso raro.

Dim. per induzione:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

per $n=1$ ok! $\frac{1-x}{1-x} = 1$

per $n+1$ vogliamo dimostrare che:

$$\underbrace{1 + x + x^2 + x^{n-1}}_{\frac{1-x^n}{1-x}} + x^{n\cancel{+1}\cancel{-1}} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\boxed{\frac{1-x^n}{1-x} + x^n} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\frac{1-x^n}{1-x} + x^n = \frac{1-x^n+x^n(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{1-\cancel{x^n}+\cancel{x^n}-x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{ok!}$$

Nota: la serie geometrica e' un caso particolare di serie di potenze. Succede quando tutti gli $a_n = 1$ e $x_0 = 0$

Serie di potenze:

- generalizzazione delle serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

↳ serie geometrica e' il caso con $x_0 = 0$ e $a_n = 1$

Nota: Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci a $x_0 = 0$

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x - 1)^n \qquad x - x_0, \quad x_0 = 1$$

con $y = x - 1$: $\displaystyle\sum_{x=0}^{+\infty} y^n$

1. sappiamo essere

$\hookrightarrow$ ... convergente $|y| < 1$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \qquad \frac{1}{n} \to a_n$$

converge nell'intervallo $(-1, 1) \cup \{-1\}$

perché di maggio 1

agli estremi di questo intervallo:

$x = 1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} 1^n \Rightarrow$ serie armonica

diverge a $+\infty$

$x = -1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n}$

$\hookrightarrow$ con il criterio di Leibniz converge

quindi $(-1, 1) \cup \{-1\}$

$\hookrightarrow$ diverge (serie armonica)

non può essere scritto $[-1, 1)$? sì!

Esempio:

$$\sum^{+\infty} \frac{1}{\ldots} x^n \qquad \to a_n$$

$n=1$ n^2

$\hookrightarrow$ con $n=100$:

- non cambia il comportamento ma cambia la somma.

La serie converge $(-1,1) \cup \{-1,1\}$ perché:

$[-1,1]$

$n=1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $2>1$ serie armonica generaliz.

$n=-1$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge per Leibniz.

Nota L'insieme di convergenza non è mai l'insieme vuoto.

Esempio: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$\hookrightarrow$ converge (per il criterio del rapporto) solo per $x=0$