Esercitazione di Analisi 2 - V

19 novembre 2020

Curve nello spazio

Definizione

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e d la dimensione dello spazio (di solito $d = 2$ o $d = 3$). Una curva è una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}^d$ continua.

Una curva è una “mappa" e l’immagine di tale mappa cioé l’insieme

$$\{\varphi(t) \ : \ t \in I\}$$

definisce il suo *sostegno* (il corrispondente disegno sul piano o nello spazio).

Esempio

Le curve

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= (\cos t, \sin t) \qquad && t \in [0, 2\pi], \\ \varphi_2(t) &= (\cos t, \sin t) \qquad && t \in [0, 4\pi], \end{aligned}$$

hanno lo stesso sostegno ma sono due curve differenti!

Lunghezza di una curva

Sia $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in I = (a, b)$ una curva di classe C^1 (ovvero x, y, z sono derivabili con derivata continua). Allora la lunghezza della curva φ è data da

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

(In fisica) l'infinitesimo di lunghezza di curva si pone

$$ds(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Quindi la lunghezza di una curva è la “somma" degli infinitesimi di lunghezza.

Esercizio 1 - Lunghezza di un'elica

L'elica è di passo $p > 0$ e di numero di giri $n \in \mathbb{N}$ è data da

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t, pt), \qquad t \in [0, 2\pi n].$$

Calcolare la lunghezza di φ.

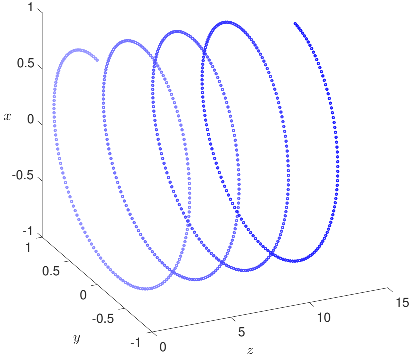
Svolgimento Esercizio 1

Nota che

$$\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t, p), \qquad t \in (0, 2\pi n).$$

Poiché $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ si ha

$$L(\varphi) = \int_0^{2\pi n} \sqrt{1+p^2}\, dt = 2\pi n \sqrt{1+p^2}.$$



Esercizio 2

1. $\varphi(t) = (\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
2. $\varphi(t) = (\cos^2 t, \cos t \sin t)$ per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
3. $\varphi(t) = (t^3, t^2)$ per $t \in [0, 1]$;
4. $\varphi(t) = (t, \log(1 - t^2))$ per $t \in [a, b]$ dove $-1 < a < b < 1$;

Svolgimento esercizio 2 - I

(1): $\varphi'(t) = (t\sin t, t\cos t)$ dunque

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = t.$$

Perciò:

$$L(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

(2): $\varphi'(t) = (-2\cos t\sin t, \cos^2 t - \sin^2 t) = (-\sin(2t), \cos(2t))$ dunque

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$

Perciò:

$$L(\varphi) = \frac{\pi}{2}.$$

(3): $\varphi'(t) = (3t^2, 2t)$ dunque

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = t\sqrt{9t^2 + 4},$$

dove abbiamo usato che $t \geq 0$. Perciò:

$$L(\varphi) = \int_0^1 t\sqrt{9t^2 + 4}dt = \frac{1}{27}(9t^2 + 4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{(13)^{3/2} - 8}{27}.$$

Svolgimento esercizio 2 - II

(4): $\varphi'(t) = (1, -\frac{2t}{1-t^2})$ dunque

$$
\begin{aligned}
(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}.
\end{aligned}
$$

Perciò:

$$
\begin{aligned}
L(\varphi) &= \int_a^b \frac{1+t^2}{1-t^2} dt \\
&= \int_a^b \Big(-1 + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \Big) dt \\
&= [-t - \log(1-t) + \log(1+t)]_a^b \\
&= a - b + \log\frac{1+b}{1-b} - \log\frac{1+a}{1-a}.
\end{aligned}
$$

Baricentro di una curva: Motivazione

Partiamo da un sistema di punti $(p_i)_{i=1}^N$ nello spazio con massa $(m_i)_{i=1}^N$. Il baricentro (o centro di massa) è dato da:

$$p_{B,N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i p_i}{\sum_{i=1}^N m_i}.$$

Supponiamo che $(p_i)_{i=1}^N$ siano punti su una curva, ovvero $p_i = \varphi(t_i)$ per qualche $t_i \in I$. Allora possiamo far tendere $N \to \infty$ e le sommatorie “diventano" integrali:

$$\begin{aligned}\varphi_B = \frac{\int_a^b \varphi(t)dm(t)}{\int_a^b dm(t)} &= \frac{\int_a^b \varphi(t)\mathcal{D}(t)ds(t)}{\int_a^b \mathcal{D}(t)ds(t)} \\ &= \frac{1}{m(\varphi)} \int_a^b \varphi(t)\mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt\end{aligned}$$

dove $\mathcal{D}(t)$ è la densità lineare del materiale e $m(\varphi)$ è massa del materiale

$$m(\varphi) = \int_a^b \mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Baricentro con densità variabile

Il baricentro di una curva φ con densità $\mathcal{D}(t)$ si calcola come:

$$\varphi_B = \frac{1}{m(\varphi)} \int_a^b \varphi(t)\mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

dove $m(\varphi)$ è la massa di φ. Scritta per componenti la precedente diventa:

$$x_B = \frac{1}{m(\varphi)} \int_a^b x(t)\mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

$$y_B = \frac{1}{m(\varphi)} \int_a^b y(t)\mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

$$z_B = \frac{1}{m(\varphi)} \int_a^b z(t)\mathcal{D}(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Baricentro con densità costante

Di solito $\mathcal{D}(t)$ è una constante e la formula per il baricentro si può semplificare:

$$\varphi_B = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b \varphi(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

dove $L(\varphi)$ è la lunghezza di φ. Scritta per componenti la precedente diventa:

$$x_B = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

$$y_B = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

$$z_B = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b z(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Esercizio 3

Calcolare la coordinata x_B del baricentro della seguenti curva $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, dove $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, (circonferenza) con densità $\mathcal{D}(t) = t$.

Esercizio 4

Calcolare massa del corpo posto sulla curva $\varphi(t) = (\cos t + \cos^2 t, \sin t + \cos t \sin t)$, dove $t \in [0, \pi]$, (cardiode) con densità $\mathcal{D}(t) = \sin(t/2)$.

Esercizio 5

Calcolare la coordinata y_B del baricentro della cicloide data da

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) \quad \text{dove } t \in [0, 2\pi].$$

Svolgimento Esercizio 3

Poichè $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ abbiamo

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1.$$

Poiché la densità $\mathcal{D}(t) = t$, la massa vale

$$m(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

Perciò

$$x_B = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt.$$

Integrando per parti si ha che

$$\int t \cos t dt = \cos t + t \sin t.$$

Dunque

$$x_B = \frac{8}{\pi^2}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = \Big(\frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\Big).$$

Svolgimento Esercizio 4

Nota che la curva è scritta in coordinate polari:

$$x(t) = \rho(t)\cos t, \quad y(t) = \rho(t)\sin t, \quad \text{dove} \quad \rho(t) = 1 + \cos t.$$

Dopo alcuni conti (dovete solamente usare che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ e che $\rho'(t) = -\sin t$)

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (\rho'(t))^2 + (\rho(t))^2 = 2(1 + \cos t) = 4\cos^2 \frac{t}{2}.$$

Poiché $t \in [0, \pi]$ abbiamo che $\cos \frac{t}{2} \geq 0$ e dunque

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 2\cos \frac{t}{2}.$$

Ricordando che la densità vale $\mathcal{D}(t) = \sin \frac{t}{2}$ e che $2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} = \sin t$ si ha

$$m(\varphi) = \int_0^\pi \sin t dt = [-\cos t]_0^\pi = 2.$$

Svolgimento Esercizio 5 - I

Calcoliamo la lunghezza della curva. Nota che $\varphi'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ e

$$\begin{aligned}(x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t \\ &= 2 - 2\cos t = 4\sin^2 \frac{t}{2}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $\frac{1-\cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}$. Poiché $\sin \frac{t}{2} \geq 0$ per $t \in [0, 2\pi]$ abbiamo che

$$L(\varphi) = 2\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2\Big[-2\cos \frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 4[-\cos \pi + \cos 0] = 8.$$

Per la coordinata y possiamo ragionare come segue

$$\begin{aligned}y_B &= \frac{1}{L(\varphi)} \int_0^{2\pi} \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left(2\sin^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right] \sin \frac{t}{2} dt.\end{aligned}$$

Svolgimento Esercizio 5 - II

Con la sostituzione

$$u = \cos\frac{t}{2}$$

si ha

$$du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt, \qquad u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u(2\pi) = -1.$$

Dunque

$$\int_0^{2\pi}\left[1-\cos^2\frac{t}{2}\right]\sin\frac{t}{2}dt = -2\int_1^{-1}(1-u^2)du = 2\left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Perciò

$$y_B = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1-\cos^2\frac{t}{2}\right]\sin\frac{t}{2}dt = \frac{4}{3}.$$