Esercitazione di Analisi 2 - IX

17 Dicembre 2020

Esercizio 1

Determinare il raggio di convergenza della seguente serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)(x^2 - 1)^n.$$

Cosa succede agli estremi?

Svolgimento Esercizio 1 - I

Poniamo $y = x^2 - 1$. Allora abbiamo la seguente serie di potenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n, \qquad \text{dove} \quad a_n = n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Usando il criterio del rapporto e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$, il raggio di convergenza è dato da:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left| \frac{\sin(\frac{1}{(n+1)^3})}{\sin(\frac{1}{n^3})} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \left| \frac{\sin(\frac{1}{(n+1)^3})}{\frac{1}{(n+1)^3}} \, \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^3}} \, \frac{\frac{1}{n^3}}{\sin(\frac{1}{n^3})} \right| = 1.
\end{aligned}$$

Dunque il raggio di convergenza è $R = 1$. Per concludere, notiamo che $|y| < 1$ è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - 1 > -1, \\ x^2 - 1 < 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 > 0, \\ x^2 < 2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \ \text{ e } \ x \neq 0.$$

Svolgimento Esercizio 1 - II

Comportamento agli estremi $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = 0$. Dobbiamo studiare le seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)(-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

In ogni caso basta dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| < \infty.$$

Poichè $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| n \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Quindi agli estremi abbiamo convergenza.

Esercizio 2

Determinare l'insieme di definizione, punti stazionari e il loro carattere della seguente funzione

$$f(x, y) = x^y.$$

Svolgimento Esercizio 2 - I

Poichè $f(x,y) = e^{y \log x}$ allora il dominio di f è data da

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0\}.$$

Per trovare i punti stazionari calcoliamo le derivate prime:

$$f_x = (e^{y \log x})_x = e^{y \log x} \frac{y}{x},$$
$$f_y = (e^{y \log x})_y = e^{y \log x} \log x.$$

I punti critici sono dati da

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 2 - II

Per la matrice Hessiana calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \left(e^{y\log x}\frac{y}{x}\right)_x = \frac{y(y-1)}{x^2}e^{y\log x}, \\ f_{xy} &= (e^{y\log x}\log x)_x = \frac{e^{y\log x}}{x}\big(y\log x + 1\big), \\ f_{yy} &= (e^{y\log x}\log x)_y = e^{y\log x}(\log x)^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{xy}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Perció $\det H(1,0) = -1 < 0$ e $(1,0)$ è un punto di sella.

Esercizio 3

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ il dominio descritto in coordinata polari dove

$$\{(\rho, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \,:\, \theta \in [0, \pi],\, 0 \leq \rho \leq 1 - \cos\theta\}.$$

Calcolare

$$\int\int_A y\, dxdy.$$

Ricorda che il modulo del determinante dello Jacobiano per la trasformazione in coordinate polari è dato da ρ.

Poichè l'area della cardiode Area$(A) = \frac{3}{4}\pi$, l'integrale da determinare permette di calcolare la coordinata y del baricentro di A come:

$$y_B = \frac{1}{\text{Area}(A)} \int\int_A y\, dxdy = \frac{4}{3\pi} \int\int_A y\, dxdy$$

Svolgimento Esercizio 3

Con la solita sostituzione $t = \cos\theta$ si ha:

$$
\begin{aligned}
\int\int_A y\,dx\,dy &= \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{1-\cos\theta} (\rho\sin\theta)\rho\,d\rho \Big) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{1-\cos\theta} \rho^2 d\rho \Big) \sin\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^3 \sin\theta\, d\theta \\
&\overset{t=\cos\theta}{=} \frac{1}{3} \int_1^{-1} (1-t)^3 (-dt) \\
&= \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (1-t)^3 dt \\
&= \frac{1}{3} \Big[-\frac{(1-t)^4}{4} \Big]_{t=-1}^{t=1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^4}{4} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale *triplo*

$$\int\int\int_A zy^2 dxdydz$$

dove A è il cilindro

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Integrali tripli

Per gli integrali tripli $\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz$ valgono formule di riduzione simili a quelli per domini normali:

- Integrazione per fili: Se esistono $B \subseteq \mathbb{R}^2$ e funzioni continue $f, g : B \to \mathbb{R}$ tali che

  $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in B \subseteq \mathbb{R}^2, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\},$$

  allora

  $$\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int\int_B \Big(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz\Big)dxdy.$$

- Integrazione per strati: Se esistono $h, k \in \mathbb{R}$ e $S(z)$ (S sta per *sezione all'altezza* z) tali che

  $$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ h \le z \le k, \ (x,y) \in S(z)\},$$

  allora

  $$\int\int\int_A f(x,y,z)dxdydz = \int_h^k \Big(\int\int_{S(z)} f(x,y,z)dxdy\Big)dz.$$

Svolgimento esercizio 4

In questo usiamo l'integrazione per strati e che la sezione di un cilindro è dato dalla circonferenza $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ di raggio 1:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_A zy^2 dxdydz &= \int_0^1 \Big(\int\int_C zy^2 dxdy\Big) dz \\
&= \Big(\int_0^1 zdz\Big)\Big(\int\int_A y^2 dxdy\Big) \\
&= \Big(\int_0^1 zdz\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\int_0^1 (\rho^2 \sin^2\theta)\rho d\rho d\theta\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta\Big)\Big(\int_0^1 \rho^3 d\rho\Big) = \frac{1}{8}\Big(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta\Big).
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi.$$

Dunque

$$\int_C zy^2 dxdydz = \frac{\pi}{8}.$$