

Esercizio: Sia D la corona circolare di centro l'origine e raggi 2 e 1. Determinare l'orient. positiva del bordo. Calcolare tramite la formula di Gauss Green:

$$\iint_D x^2 dx dy \quad \varphi_1 : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$
$$\varphi_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Applicando la formula di Gauss Green:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 dx dy &= \iint_D \left(\frac{x^3}{3}\right)_x dx dy = \frac{1}{3} \int_{\partial^+ D} x^3 dy = \\ &= \frac{1}{3} \left(\int_0^{2\pi} 16 \cos^4 t dt \right) = \frac{16}{3} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt \right) \\ &= \frac{16}{3} \left(\frac{1}{2} (t + \cos^2 t \sin^2 t) + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$