Esercitazione di Analisi 2 - IV

12 novembre 2020

Punti critici di una funzione in due variabili

Notazione:

- $A \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme aperto;
- Si dice che $f \in C^1(A)$ se le derivate parziali f_x, f_y sono *continue* in ogni punto di A.

Punti critici

Sia $f \in C^1(A)$. Un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice un *punto critico o stazionario* per f in A se

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0.$$

- I punti critici sono i candidati per essere punti di massimo o minimo per la funzione f in A;
- Nel caso di funzioni di *una* variabile i punti critici sono i valori in cui la derivata si annulla!

Carattere dei punti critici in due dimensione

Una volta trovati gli eventuali punti critici di una funzione vogliamo anche studiarne la loro natura, ovvero se (x_0, y_0) è:

- punto di minimo;
- punto di massimo;
- punto di sella.

Si ricorda che un punto $(x_0, y_0) \in A$ si dice di *minimo locale* per f se esiste una palla $B_r(x_0, y_0) = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\} \subseteq A$ tale che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in B_r(x_0, y_0). \tag{1}$$

Per i *massimi locali* bisogna invece di (1) si richiede

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \text{per ogni } (x, y) \in B_r(x_0, y_0).$$

Esempio di punto di massimo o minimo

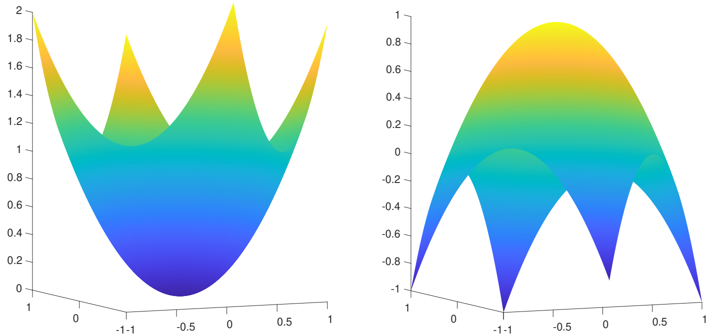

Figure 1: Sulla sinistra il grafico di $f(x,y) = x^2 + y^2$ e sulla destra quello di $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

Esempio di punto di sella

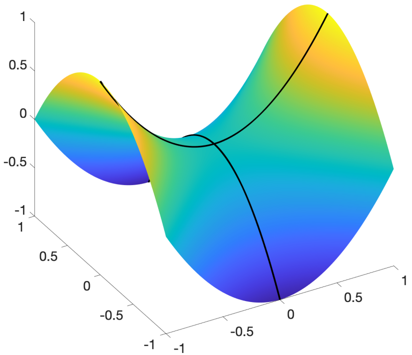

Figure 2: Grafico di $f(x, y) = x^2 - y^2$

Test per le derivate seconde

Sia $f \in C^2(A)$. Sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto critico per f. Per determinare la natura dei punti critici si può ragionare come segue.

1. Calcolare la matrice Hessiana $H_f(x_0, y_0)$:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix};$$

2. Calcolare il suo determinante

$$\det H_f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2;$$

3. Capire se ci troviamo in uno dei seguenti casi

$$\det H_f(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ allora } (x_0, y_0) \text{ è un minimo;} \\ \text{Se } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ allora } (x_0, y_0) \text{ è un massimo.} \end{cases}$$

$\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ è una sella.

Esercizio 1

Esercizio 1

Determinare gli eventuali punti critici delle seguenti funzioni e la loro natura.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$;
2. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$.

Svolgimento esercizio 1 - I

(1): Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = 2x - 2, \quad f_y = 2y + 4.$$

Ricorda che i punti critici si ottengono ponendo uguale a zero le derivate parziali. Dunque i punti critici (x, y) soddisfano:

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

L'unico punto critico è dato da $(1, -2)$. Le derivate seconde sono:

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = 0, \qquad f_{yy} = 2.$$

Dunque la matrice Hessiana è data da

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\det H_f = 4, \quad \text{e} \quad f_{xx}(1, -2) = 2 > 0$$

allora $(1, -2)$ è un punto di minimo locale.

Svolgimento esercizio 1 - II

(2): Determiniamo i punti critici di f. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = \frac{x^2 + y^2 + 1 - (x - y)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \qquad f_y = \frac{-x^2 - y^2 - 1 - (x - y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

I punti critici soddisfano:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 + 1 + 2xy = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 1 + 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

dove abbiamo sommatto e sottratto le due equazioni. Se $x = y$ allora la seconda ci fornisce $x^2 = -\frac{1}{2}$, che è impossibile. Mentre per $x = -y$ la seconda ci dà:

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque i punti critici sono:

$$P_1 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Svolgimento esercizio 1 - III

Calcolando le derivate seconde si ottiene che:

$$H_f(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$, allora P_1 è un massimo locale.

Analogamente

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, allora P_1 è un minimo locale.

Esercizio 2

Esercizio 2

Delle seguenti funzioni determinare il dominio, gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = y \log(x + y)$;
2. $f(x, y) = xy \log(xy^2) + x^2 y$.

Svolgimento esercizio 2 - I

(1): Poiché il logaritmo è definito solo per numeri positivi si ha che

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x + y > 0\}.$$

Calcolo derivate prime:

$$f_x = \frac{y}{x+y}, \qquad f_y = \log(x+y) + \frac{y}{x+y}.$$

Per calcolare i punti critici, si ricorda che se $(x, y) \in dom(f)$ allora $x + y > 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x+y} = 0 \\ \log(x+y) + \dfrac{y}{x+y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ \log x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Dunque l'unico punto critico è: $P = (1, 0)$. Poiché

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

Svolgimento esercizio 2 - II

(2): Poiché il logaritmo è definito solo per numeri positivi si ha che

$$dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0 \text{ e } y \neq 0\}.$$

Calcolo derivate prime:

$$f_x = y \log(xy^2) + y + 2xy, \qquad f_y = x \log(xy^2) + 2x + x^2.$$

Per calcolare i punti critici, si ricorda che se $(x, y) \in dom(f)$ allora $x > 0$ e $y \neq 0$,

$$\begin{cases} y \log(xy^2) + y + 2xy = 0 \\ x \log(xy^2) + 2x + x^2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log(xy^2) + 1 + 2x = 0 \\ \log(xy^2) + 2 + x = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni otteniamo

$$1 + 2x - 2 - x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 1.$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$\log(y^2) + 3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y^2 = e^{-3} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \pm e^{-\frac{3}{2}}.$$

I punti critici sono $P_1 = (1, e^{-\frac{3}{2}})$ e $P_2 = (1, -e^{-\frac{3}{2}})$.

Svolgimento esercizio 2 - III

Calcolando le derivate seconde si ottiene che:

$$H_f(P_1) = \begin{bmatrix} 3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & 2e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) = 2 > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = 3e^{-\frac{3}{2}} > 0$, allora P_1 è un minimo locale.

Analogamente

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} -3e^{-\frac{3}{2}} & 2 \\ 2 & -2e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P_1) = 2 > 0.$$

Poiché $f_{xx}(P_1) = -3e^{-\frac{3}{2}} < 0$, allora P_1 è un massimo locale.

Esercizio 3

Esercizio 3

Delle seguenti funzioni determinare gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = y - 2\sin(xy)$;
2. $f(x, y) = \arctan(xy)$.

Svolgimento esercizio 3 - I

(1): Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = -2y\cos(xy), \qquad\qquad f_y = 1 - 2x\cos(xy).$$

I punti critici (x, y) soddisfano:

$$\begin{cases} -2y\cos(xy) = 0 \\ 1 - 2x\cos(xy) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ oppure } \cos(xy) = 0 \\ 1 - 2x\cos(xy) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico è dato da $P = (\frac{1}{2}, 0)$. Calcolando le derivate seconde abbiamo

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

Svolgimento esercizio 3 - II

(2): Determiniamo i punti critici di f. Dunque calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x = \frac{y}{(1+(xy)^2)}, \qquad\qquad f_y = \frac{x}{(1+(xy)^2)}.$$

Dunque l'unico punto critico è dato da $P = (0,0)$. Calcolando le derivate seconde abbiamo

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det H_f(P) < 0.$$

Dunque P è un punto di sella.

Esercizio 4

Delle seguenti funzioni determinare il dominio, gli eventuali punti critici e la loro natura.

1. $f(x, y) = x^2 y(x - y + 1)$;
2. $f(x, y) = x^3 - y^3 + \frac{1}{2}(x - y)^2 - x + y$;
3. $f(x, y) = 2y \log(2 - x^2) + y^2$.