# Teorema del differenziale

**Enunciato**: Sia $f$ dotata di derivate parziali prime in un aperto $A$ di $\mathbb{R}^2$. Se le derivate parziali prime sono continue in $A$ allora $f$ e' differenziabile in $A$.

**Nota**: Questo teorema ci fornisce solo una condizione sufficiente alla differenziabilita'

# Punti stazionari

**def**: Sia una funzione $f(x)$ definita con valori in $\mathbb{R}$. Un punto $x = a$ interno al dominio si dice stazionario se:

1. La funzione e' derivabile in a
2. La derivata prima di $f$ si annulla in a

quindi: $f'(a) = 0$

In altre parole sono tutti quei punti dove il gradiente della funzione si annulla.

**Esempio**: $f(x,y) = \cos x + \sin y$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = k\pi \\ y = \frac{\pi}{2} + j\pi \end{cases}$$

In questo caso si hanno infiniti punti stazionari ciascuno di coordinate $(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi)$ al variare di k e j.

Se calcolo la matrice Hessiana:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos x & 0 \\ 0 & -\sin y \end{bmatrix}$$

$$f_x = -\sin x \qquad f_{xx} = -\cos x \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_y = \cos y \qquad f_{yy} = -\sin y \qquad f_{yx} = 0$$

Calcolata in un generico punto stazionario:

$$H\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{j+1} \end{pmatrix}$$

Al variare di k e j il det(H) e i coeffic. della matrice assumono valori negativi o positivi avendo così punti di max, min relativo o di sella.

## Esercizio d'esame:

Data la funzione $f(x,y) = x \ln x + y^2$ classificare gli eventuali punti stazionari

$$f(x,y) = x \ln x + y^2$$

$$f_x = \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln x + 1$$

$$f_y = 2y$$

$$\begin{cases} \ln x + 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^{\ln x} = e^{-1} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{e} \\ y = 0 \end{cases}$$ punti stazionari: $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$

$$f_x = 1 + \ln x \qquad f_{xx} = \frac{1}{x} \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_y = 2y \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{yx} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\frac{1}{e}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H\left(\frac{1}{e}, 0\right) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ punto di min relativo

Esercizio d'esame:

Data la funzione $f(x,y) = e^x - 3x + y\ln y$ classificare gli eventuali punti stazionari

$$f(x,y) = e^x - 3x + y\ln y$$

$$f_x = e^x - 3$$
$$f_y = \ln y + 1$$

$$\begin{cases} e^x - 3 = 0 \\ \ln y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x = 3 \\ y = \frac{1}{e} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \ln 3 \\ y = \frac{1}{e} \end{cases}$$

punti stazionari $\left(\ln 3, \frac{1}{e}\right)$

$$f_x = e^x - 3 \qquad f_{xx} = e^x \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_y = \ln y + 1 \qquad f_{yy} = \frac{1}{y} \qquad f_{yx} = 0$$

$$H = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \Rightarrow H\left(\ln 3, \frac{1}{e}\right) = \begin{pmatrix} e^{\ln 3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{1}{e}} \end{pmatrix}$$

$$H\left(\ln 3, \frac{1}{e}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$ punto di min relativo