Esercitazione di Analisi 2 - VIII

10 Dicembre 2020

Esercizio 1

Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 1 - x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Svolgimento Esercizio 1 - I

Nota che $f(x) = 1 - g(x)$ dove

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Quindi i coefficienti sono la differenza dei coefficienti delle singole funzioni:

$$a_k = a_k^{(1)} - a_k^{(2)} \quad \text{e} \quad b_k = b_k^{(1)} - b_k^{(2)}.$$

Dove $a_k^{(1)}, b_k^{(1)}$ sono i coefficienti di Fourier della funzione 1 e $a_k^{(2)}, b_k^{(2)}$ sono quelli di g.
Si vede subito che $a_0^{(1)} = 2$, $a_k^{(1)} = b_k^{(1)} = 0$ per ogni $k \geq 1$. Per quanto riguarda g abbiamo che

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx.$$

Dunque

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Svolgimento Esercizio 1 - II

Se $k \geq 1$ possiamo calcolare la primitiva di $x\cos(kx)$ per parti come segue:

$$\begin{aligned}\int x\cos(kx)dx &= \int x\Big(\frac{\sin kx}{k}\Big)' dx \\ &= x\frac{\sin kx}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}dx = x\frac{\sin kx}{k} + \frac{1}{k^2}\cos(kx).\end{aligned}$$

Poiché $\cos(k\pi) = (-1)^k$

$$a_k^{(2)} = \frac{1}{\pi k^2}[\cos(kx)]_0^\pi = \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

Per $b_k^{(2)}$ si ragiona analogamente. Infatti

$$\int x\cos(kx)\,dx = -x\frac{\cos(kx)}{k} + \frac{1}{k^2}\sin(kx)$$

implica che

$$b_k^{(2)} = \frac{1}{\pi}\Big[-x\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_0^\pi = -\frac{1}{k}(-1)^k.$$

Dunque $a_0 = a_0^{(1)} - a_0^{(2)} = 2 - \frac{\pi}{2}$ e per ogni $k \geq 1$

$$a_k = a_k^{(1)} - a_k^{(2)} = \frac{1}{\pi k^2}[1 - (-1)^k], \quad b_k = b_k^{(1)} - b_k^{(2)} = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

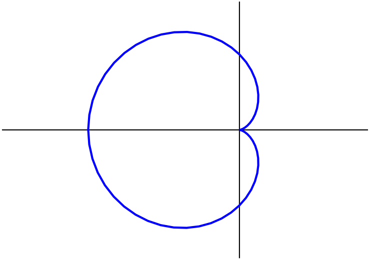
Esercizio 2

Calcolare

$$\int_\gamma f\,ds$$

dove

- $f(x,y) = |y|$
- $\gamma(\theta) = ((1-\cos\theta)\cos(\theta), (1-\cos\theta)\sin(\theta))$ for $\theta \in [0, 2\pi]$;



Svolgimento Esercizio 2

Sia γ_S e γ_I la parte superiore della cardiode e la parte inferiore, rispettivamente. Poiché f è simmetrica rispetto all'asse x is ha

$$\int_\gamma |y| ds = 2 \int_{\gamma_S} y ds.$$

Poiché

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2} d\theta \\ &= \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta = \sqrt{2}\sqrt{(1-\cos\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_S} y ds &= \sqrt{2} \int_0^\pi \sin\theta(1-\cos\theta)\sqrt{(1-\cos\theta)} d\theta \\ &\overset{t=\cos\theta}{=} \sqrt{2} \int_1^{-1} (1-t)\sqrt{1-t}(-dt) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{5}\Big[-(1-t)^{5/2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{5}(4\sqrt{2}) = \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Dunque $\int_\gamma |y| ds = \frac{32}{5}$.

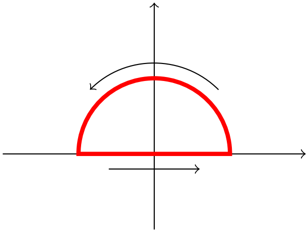
Esercizio 3

Sia γ la curva descritta in figura con l'orientazione indicata. Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

dove

$$\omega = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$



Svolgimento Esercizio 3

Si vede subito che $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ dove

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t), \text{ dove } t \in [0, \pi],$$
$$\gamma_2(t) = (t, 0), \text{ dove } t \in [-1, 1].$$

Dunque

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_0^\pi -\frac{1}{2} \sin t dt + \frac{1}{2} \sin t \cos t dt$$
$$= \int_0^\pi -\frac{1}{2} \sin t dt + \frac{1}{4} \sin(2t) dt = \frac{1}{2}[\cos t]_0^\pi - \frac{1}{8}[\cos(2t)]_0^\pi = -1.$$

Inoltre

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+|t|} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = 2\log(1+t)|_0^1 = 2\log 2.$$

Perciò

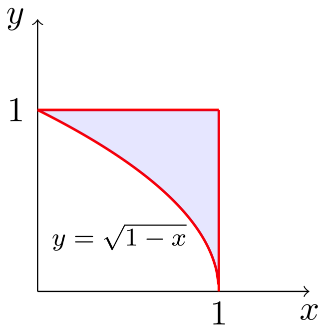
$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = 2\log 2 - 1.$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x^2 dxdy$$

dove A è descritto in figura.



Svolgimento esercizio 4

Analizzando la funzione integranda, si vede che è conveniente trattare il dominio come normale rispetto all'asse y. Per fare ciò riscriviamo $\sqrt{1-x} = y$ come $y^2 = 1 - x$ e dunque A si scrive come

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq y \leq 1, \, 1 - y^2 \leq x \leq 1\}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\int_A x^2 dxdy &= \int_0^1 \Big(\int_{1-y^2}^1 x^2 dx \Big) dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1 - y^2)^3] dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 [1 - (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) dy \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 [3y^2 - 3y^4 + y^6] \\
&= \frac{1}{3} \Big[1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{7} \Big] = \frac{19}{105}.
\end{aligned}$$