Condizioni di Cauchy Riemann

Definiamo delle funzioni derivabili in senso complesso.

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

$$+ i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

assumiamo che $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$.

Se calcolo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$= u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + i\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + i\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= u_y(x_0, y_0)/i + v_y(x_0, y_0)$$

Se uguagli i limiti ottengo le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

Possiamo dire quindi che se u e v soddisf. le condizioni di Cauchy-Reimann allora f è derivabile.

Esempio: Verificare che la funzione sia olomorfa (deriv. nel piano complesso)

$f(x) = e^z$ $\qquad e^z = u(x,y) + i v(x,y)$

$\qquad\qquad\qquad e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + \underbrace{e^x i \sin y}_{v}$$

$u(x,y) = e^x \cos y$

$v(x,y) = i^2 e^x \sin y = e^x \sin y$

$u_x = e^x \cos y = v_y \quad ; \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$

La f risulta olomorfa. OK!