Esercitazione di Analisi 2 - VII

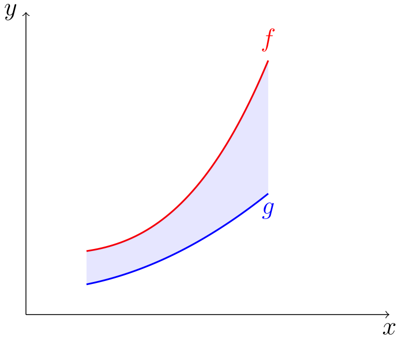
3 Dicembre 2020

Domini normale rispetto all'asse x

Dominio normale rispetto all'asse x

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse x se esistono $a < b$ e funzioni continue $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}.$$



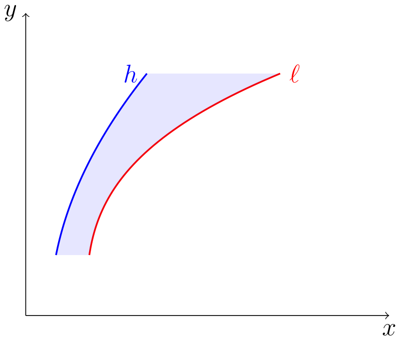
In maniera informale, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse x se ogni retta parallela all'asse y incontra la frontiera di A in due punti.

Domini normale rispetto all'asse y

Dominio normale rispetto all'asse y

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice normale rispetto all'asse y se esistono $c < d$ e funzioni continue $h, \ell : [c, d] \to \mathbb{R}$ tali che

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, c \leq y \leq d, \, h(y) \leq x \leq \ell(y)\}.$$



In maniera informale, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è un dominio normale rispetto all'asse y se ogni retta parallela all'asse x incontra la frontiera di A in due punti.

Formule di riduzione integrali doppi su domini normali

Sia F una funzione continua su A.

- Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}$ allora

$$\int_A F(x,y)dxdy = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} F(x,y)dy \Big) dx.$$

- Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, c \le y \le d,\ h(y) \le x \le \ell(y)\}$ allora

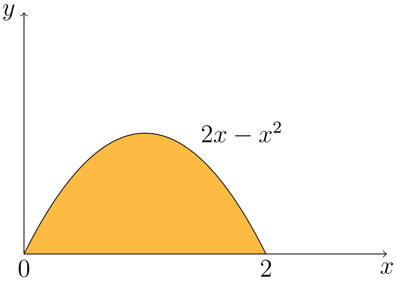
$$\int_A F(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_{h(y)}^{\ell(y)} F(x,y)dx \Big) dy.$$

Esercizio 1

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A xy\,dx\,dy$$

dove A è descritto in figura.



Svolgimento Esercizio 1

Poiché $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$. Quindi

$$\int_A xydxdy = \int_0^2 \Big(\int_0^{2x-x^2} xydy \Big) dx.$$

Risolviamo l'integrale

$$\int_0^{2x-x^2} xydy = x\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{2x-x^2} = \frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2}.$$

Dunque

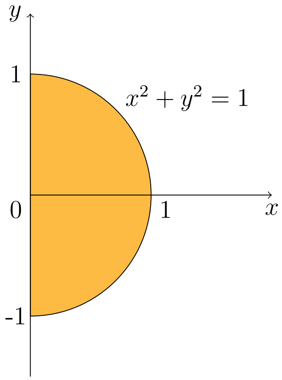
$$\begin{aligned}\int_A xydxdy &= \int_0^2 \frac{4x^3 - 4x^4 + x^5}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{4 \cdot 16}{4} - \frac{4 \cdot 32}{5} + \frac{64}{6}\Big] = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x dx dy$$

dove A è descritto in figura.



Svolgimento Esercizio 2

Dalla definizione abbiamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

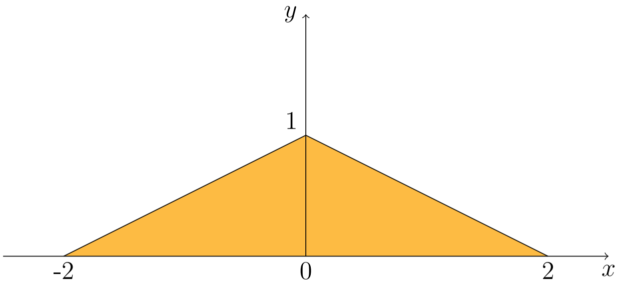
Quindi

$$\begin{aligned}
\int_A x dx dy &= \int_0^1 \Big(x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \Big) dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= \Big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \Big]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

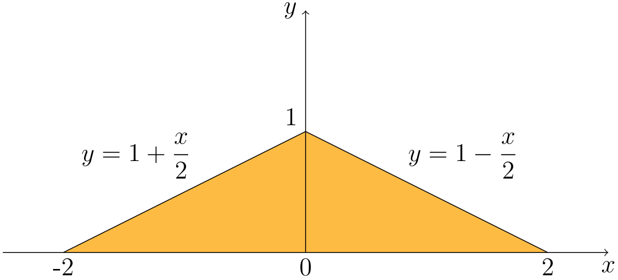
Esercizio 3

Descrivere il dominio A in figura come uno o unione di più domini normali rispetto all'asse x o all'asse y. Infine calcolare l'integrale doppio

$$\int_A x^2 dxdy.$$



Svolgimento Esercizio 3 - I



- Come dominio normale rispetto all'asse x possiamo scrivere $A = A_1 \cup A_2$ dove

$$A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\},$$
$$A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -2 \leq x \leq 0,\, 0 \leq y \leq 1 + \frac{x}{2}\right\}.$$

- Come dominio normale rispetto all'asse y possiamo scrivere

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq 1, 2y - 2 \leq x \leq 2 - 2y\}.$$

Svolgimento Esercizio 3 - II

Usando il fatto che A si scrive facilmente come dominio normale rispetto all'asse y

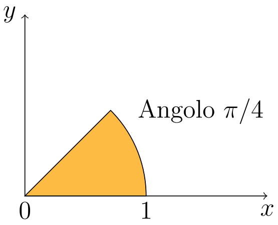
$$\begin{aligned}
\int_A x^2 dxdy &= \int_0^1 \frac{x^3}{3}\Big|_{2y-2}^{2-2y} dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [8(1-y)^3 - 8(y-1)^3]dy \\
&= \frac{16}{3}\int_0^1 (1-y)^3 dy \\
&= \frac{16}{3}\Big[-\frac{1}{4}(1-y)^4\Big]_0^1 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_A y dx dy$$

dove A è descritto in figura.



Suggerimento: Scrivere il dominio come normale rispetto all'asse y.

Esercizio 4

Tramite costruzioni geometriche

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2},\, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\Big\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_A y dx dy = &\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\Big(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx\Big) dy \\
&\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y(\sqrt{1-y^2} - y) dy \\
&= -\frac{1}{3}[(1-y^2)^{3/2}]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{3}[y^3]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{1}{2}\Big)^{3/2} - 1\Big] - \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Calcolare *una* primitiva delle seguenti forme differenziali.

1. $\omega(x, y) = \cos(xy)y\,dx + \left(\cos(xy)x + y^2\right)dy$ su $A = \mathbb{R}^2$;
2. $\omega(x, y) = \dfrac{2xy^2}{1 + x^2y^2}dx + \dfrac{2x^2y}{1 + x^2y^2}dy$ su $A = \mathbb{R}^2$.

Calcolare infine l'integrale

$$\int_\gamma \omega$$

dove

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t), \qquad t \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

e l'orientazione della curva γ è indotta dal parametro t.

Svolgimento Esercizio 5 - I

(1): Dalla definizione abbiamo che, se F è una primitiva allora

$$\cos(xy)y = F_x \quad \cos(xy)x + y^2 = F_y. \tag{$\star$}$$

Integriamo la prima rispetto a x:

$$F = g(y) + \int \cos(xy)y dx = g(y) + \sin(xy).$$

dove g è una funzione arbitraria che dipende solo da y. Derivando la precedente

$$F_y = g'(y) + \cos(xy)x.$$

Da ($\star$) e la precedente abbiamo

$$g'(y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad g(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Dove $c \in \mathbb{R}$. Una primitiva di ω è data da

$$F(x, y) = \sin(xy) + \frac{y^3}{3}.$$

Svolgimento Esercizio 5 - II

(1): (continuo) Poiché se una forma è esatta si ha che

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(t_F)) - F(\gamma(t_I)).$$

Essendo $t_I = \frac{\pi}{4}$, $t_F = \frac{\pi}{2}$, $\gamma(\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ si ha

$$\int_\gamma \omega = \sin\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{16\sqrt{2}} - 1\Big).$$

(2): Ragionando come in (1) otteniamo

$$F(x,y) = \log(1 + x^2y^2).$$

Analogamente

$$\int_\gamma \omega = \log\left(1 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \log\frac{65}{64}.$$