Curva espressa dal grafico di una funzione

Possiamo parametrizzare una curva nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

Otteniamo che la lunghezza è:

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

<u>Esempio</u>: Asteroide $a > 0$ $\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Data la simmetria consideriamo $x, y > 0$ ottenendo:

$$y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \qquad x \in [0, a]$$

$$y' = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Calcolo la lunghezza:

$$\frac{L}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \left[\cancel{\frac{3}{2}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}\left(-\cancel{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\right)\right]^2}\, dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{1 + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})\, x^{-\frac{2}{3}}}\, dx =$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} - \cancel{x^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}}}}\, dx =$$

$$= \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} \, dx = a^{\frac{1}{3}} \int_0^a x^{-\frac{1}{3}} \, dx$$

$$= \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = \frac{3}{2} a \Rightarrow \frac{L}{4} = \frac{3}{2} a \Rightarrow L = 6a$$

Esempio $(a = 1)$:

Equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e' regolare a tratti quindi possiamo calcolare la lunghezza.

$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$

$y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t$

il cui modulo risulta:

$$\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2}$$

$$\sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t}$$

$$\sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t \, (\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1})}$$

$$3\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t} = \frac{3}{2} |\sin(2t)|$$

quindi:

$$L = \cancel{4}^{\,2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cancel{2}} \sin(2t) \, dt = -3\cos(2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6$$

Lunghezza coordinate polari:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi$$