Spirale: Curva che si avvolge attorno ad un determinato punto centrale avvicinandosi o allontanandosi progressivamente a seconda di come si percorre la curva.

Spirale logaritmica:

$$\rho = e^{-b\varphi} \qquad \varphi \in [0, 2K\pi] \quad K \in \mathbb{N}, \; b > 0$$

$$L = \int_0^{2K\pi} \sqrt{(e^{-b\varphi})^2 - (b e^{-b\varphi})^2} \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2K\pi} \sqrt{e^{-2b\varphi} + b^2 e^{-2b\varphi}} \, d\varphi = \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \left(1 - e^{-2\pi K b}\right)$$

dove $k \to +\infty$ ottengo: $\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}$ ossia la lunghezza dell'intera spir.

Spirale di Archimede:

$$\rho = a + b\varphi \qquad \varphi \in [0, 2K\pi], \; K \in \mathbb{N}, \; a = 0, \; b > 0$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2} \, d\varphi = \int_0^{2K\pi} \sqrt{(b\varphi)^2 + b^2} \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2K\pi} \sqrt{b^2\varphi^2 + b^2} \, d\varphi = b \int_0^{2K\pi} \sqrt{1 + \varphi^2} \, d\varphi =$$

$$= \frac{b}{2} \left(\ln\left(2K\pi + \sqrt{1 + 4K^2\pi^2}\right) + 2K\pi\sqrt{1 + 4K^2\pi^2} \right)$$

Curva regolare a tratti: Una curva si dice regol. a tratti se $I = [a,b]$ si può suddividere nell'unione di un numero finito di intervalli su ciascuno dei quali la curva risulta regolare.

Curve equivalenti: Parametrizzazioni equivalenti

$$\varphi = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$
$$\alpha(s) = (\cos(2s), \sin(2s)) \quad s \in [0, \pi]$$

sono due parametrizzazioni diverse della circonf di centro nell'origine e raggio unitario percorse nello stesso verso.

Due curve sono equivalenti in $I = [a,b]$ e $I' = [\alpha, \beta]$ a valori in $\mathbb{R}^2$ se esiste un applicazione:

$$g : [a,b] \rightarrow [\alpha, \beta]$$

di classe C^1 tale che $g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

Curve orientate:

- Curva orientata positivamente se muovendosi sulla curva abbiamo l'interno a sinistra.
- Curva orientata negativamente, viceversa.

Integrale Curvilineo:

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \underbrace{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt}_{= ds}$$

Nota: L'integrale curvilineo è invariante per parametrizz. equiv. e anche per cambiam. di orient. sulla curva.

proprietà:

1. Per α e $\beta \in \mathbb{R}$: $\int_{\varphi} \alpha f + \beta g \, ds = \alpha \int_{\varphi} f \, ds + \beta \int_{\varphi} g \, ds$

2. Se $f \leq g$ sul sostegno: $\int_{\varphi} f \, ds \leq \int_{\varphi} g \, ds$

3. $\left| \int_{\varphi} f \, ds \right| \leq \int_{\varphi} |f| \, ds \leq \max |f| \, L(\varphi)$

4. Se φ si spezza nel unione di curve regolari φ_1 e φ_2 allora:

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_{\varphi_1} f \, ds + \int_{\varphi_2} f \, ds$$

Calcolo del baricentro:

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

$$y_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$$

Esempio: Asteroide in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ con $L(\varphi) = \frac{3}{2}$

$$x_0 = \frac{1}{L(\varphi)} \int_a^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\frac{3}{\cancel{2}}\,\cancel{2}\cos(t)\sin(t) =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^3(t)\cos(t)\sin(t)\,dt = -\frac{2}{5}\cos^5(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$y_0 = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^3(t)\cos(t)\sin(t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}\sin^5(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}$$