Teorema: Sia f periodica di periodo 2π integrabile in $[-\pi, \pi]$.
La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, d_n(t)\, dt$$

dove:

$$d_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

dim:
Per definizione di $S_n(x)$ e di coefficienti di Fourier:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(y)}{2}\, dy + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ky)\, dy \cos(kx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ky)\, dy \sin(kx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\cos(ky) \right.$$

$$+ \sin(Kx)\sin(Ky)\,dy\,\Big]$$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} (\cos(K(x-y))\right] dy$$

se $y = x + t$:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n} (\cos(Kt))\right] dt$$

l'invarianza dell'intervallo dovuta dalla periodicità della funzione:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

Teorema di convergenza puntuale

Convergenza puntuale :
Per ogni x reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$, ovvero $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un indice $N(x,\varepsilon)$ t.c.:

$$|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall N > N(x,\varepsilon)$$

Teorema :

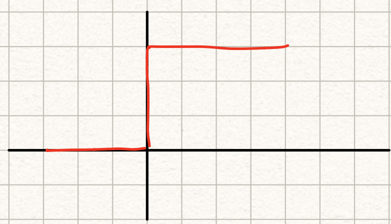
Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro

$$\frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right]$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità.

Applicazione del teorema:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



La serie di Fourier risulta:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

In $x=0$ risulta $S = \frac{1}{2}$

In $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2k+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{2K+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{2K+1}$$