Esercitazione di Analisi 2 - I

22 ottobre 2020

Informazioni generali

- Il tutorato si terrà ogni giovedì dalle 13:00 alle 14:00 in aula 11;
- Per problemi (matematici e non) e/o appuntamenti contattatemi all'indirizzo email:

  agresti@mat.uniroma1.it

Esercizio 1

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{n}, \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n} x^n.$$

Determinazione del raggio di convergenze r di una serie di potenza

Data la serie di potenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

- *Criterio di Cauchy (o della radice)*:
  Se
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell, \qquad \text{(anche } +\infty\text{)}$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.
- *Criterio di D'Alambert (o del rapporto)*:
  Se $a_n \neq 0$ per ogni n e
  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell, \qquad \text{(anche } +\infty\text{)}$$
  allora $r = \frac{1}{\ell}$. Nel caso $\ell = \infty$, si ha $r = 0$.

Svolgimento Esercizio 1: Parte I

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1: Parte I

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}}{(-1)^n \frac{1}{n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| (-1)\frac{n}{n+1} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = 1. \end{aligned}$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = 1$.

Svolgimento Esercizio 1: Parte II

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento Esercizio 1: Parte II

Consideriamo la prima serie di termine generale

$$a_n = \frac{e^n}{n^n}.$$

Possiamo applicare uno dei due criteri:

- Criterio della radice;
- Criterio del rapporto.

Svolgimento:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e}{n} = 0.$$

Dunque il raggio di convergenza è $r = \frac{1}{\ell} = \infty$.

Esercizio 2

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(1-x)^n$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Converge in $0 < x < 2$;

b) Converge in $-1 < x < 1$;

c) Converge in $2 < x < 4$.

La risposta giusta è a).

La risposta giusta è a). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = 1 - x$ si ottiene la serie di potenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) y^n. \tag{1}$$

2. Ricordando il limite notevole

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

   possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (1) con il criterio del rapporto:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(\frac{1}{n+1})}{\sin(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{1}{n+1})}{(\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

   Quindi $r = 1$.

3. Dallo step 2 abbiamo che (1) converge per $|y| < 1$. Quindi la serie originale converge per

$$\begin{aligned} |1 - x| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < 1 - x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 < -x < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 2. \end{aligned}$$

Esercizio 3

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} x^{2n}$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Converge in $-e < x < e$;

b) Converge in $-e^2 < x < e^2$;

c) Converge in $-\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$.

La risposta giusta è c).

La risposta giusta è c). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = x^2$ si ottiene la serie di potenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)} y^n. \tag{2}$$

2. Ricordando il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1,$$

possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (2) con il criterio della radice:

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(n+1)}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.\end{aligned}$$

Quindi $r = \frac{1}{e}$.

3. Dallo step 2 abbiamo che (2) converge per $|y| < e$. Quindi la serie originale converge per

$$|x^2| = x^2 < \frac{1}{e} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{e}} < x < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Esercizio 4

Determinare i coefficienti dei primi 3 termini dello sviluppo in serie di Taylor intorno al punto 0 della funzione

$$f(x) = \sin(\ln(1 + 2x)).$$

a) I coefficienti sono 1 e 1;
b) I coefficienti sono 2 e 2;
c) I coefficienti sono 2 e -2.

Ricorda che lo sviluppo di Taylor di una funzione f intorno ad un punto x_0 è dato da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots .$$

La risposta giusta è c).

La risposta giusta è c). Poichè $f(0) = 0$. Resta solamente determinare la derivata prima e seconda e poi calcolarle in $x = 0$.

1. Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f'(x) = \cos(\ln(1+2x))\frac{2}{1+2x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 2.$$

2. Dalla regola di Leibniz (ovvero $(fg)' = f'g + fg'$) abbiamo

$$f''(x) = -\sin(\ln(1+2x))\Big(\frac{2}{(1+2x)}\Big)^2 + \cos(\ln(1+2x))\Big(-\frac{4}{(1+2x)^2}\Big).$$

   Dunque

$$f''(0) = -4.$$

Esercizio 5

Considerata la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)(x^2+2)^n$$

quali delle seguenti affermazioni è esatta?

a) Non converge mai;

b) Converge in $-1 < x < 1$;

c) Converge in $1 < x < 3$.

La risposta giusta è a).

La risposta giusta è a). La serie può essere studiata con i seguenti step:

1. Ponendo $y = x^2 + 2$ si ottiene la serie di potenza
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right) y^n. \tag{3}$$
2. Ricordando il limite notevole
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$
possiamo studiare il raggio di convergenza della serie (3) con il criterio del rapporto:
$$\begin{aligned} \ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right)} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1. \end{aligned}$$
Quindi $r = 1$.
3. Dallo step 2 abbiamo che (3) converge se $|x^2 + 2| < 1$. Poichè $x^2 + 2 \geq 2$ la precedente disuguaglianza non è mai verificata.

Esercizi aggiuntivi

1. Studiare la convergenza della seguente serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-1)^{2n}}(x+1)^n.$$
2. Calcolare i primi tre termini della sviluppo in serie di Taylor in $x_0 = 1$ di:
$$f(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$
3. Determinare il valore del seguente integrale:
$$\int_{\frac{1}{27}\pi}^{\frac{55}{27}\pi} \cos^2 x \, dx.$$