Intorno di centro x_0 e raggio δ.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \delta\}$$

Un insieme aperto A dello spazio euclideo:
$\forall x \in A$ esiste un intorno di raggio $\delta > 0$
centrato in x interamente contenuto in A
Considero x_0 punto di accumulazione per A
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Nota: Per mostrare che un limite per una funzione di due o più variabili non esiste basta trovare due cammini lungo i quali la funzione tende a 2 valori distinti. (Non basta per dire che $\exists$)

Se esiste il limite I, il limite è unico per il teorema di unicità del limite.
Il limite in R^2:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

↳ definizione di continuità

Esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y=mx)\to(0,0)} \frac{1-m^2}{1+m^2}$$

Questa e' un esempio di funzione che non ammette limite perche' al variare di m il valore del limite cambia.

Con $m = 1$ vale 0

Con $m = \frac{1}{2}$ vale un altro valore

Esempio:

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}$$

quindi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) = 0$$

mentre con

$$f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

Derivata parziale

Se esiste il limite del rapporto incrementale ed e' finito.

$$f_{x_i}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots,\bar{x}_i+h,\dots,\bar{x}_n) - f(x_1,\dots,x_n)}{h}$$

Gradiente : Un vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione.

Esempio :

$$f(x,y) = x + 7y$$

$$f_x = \frac{f(x+h,\, y) - f(x,y)}{h} = \frac{\cancel{x} + h + \cancel{7y} - \cancel{x} + \cancel{7y}}{h} = 1$$

$$f_y = \frac{f(x,\, y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{\cancel{x} + 7y + h - \cancel{x} + 7y}{h} =$$

Nota : Vedo che quando derivo rispetto ad x o y l'altra parte e' costante
Se :

$f(x,y) = xy$ allora $f_x = y$

$f_y = x$

come se fosse $3x$ o $3y$

Esempio

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \qquad f_x = \frac{1}{y}$$

$$f_y = -\frac{1}{y^2} \cdot x$$

Esempio

$$\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f_x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f_y = \sqrt{1 + y^2}$$

$$f(x,y) = \sin(xy) \qquad f_x = y\cos(xy)$$

$$f_y = x\cos(xy)$$

Esempio:

$$f(x,y) = |x-y|(x+y)$$

Nel caso di $(1,1)$:

$$\frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \frac{|h|}{h}(2+h)$$

Non é derivabile perché il $|h|$ non é deriv.

Nel caso di $(0,0)$:

$$\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{|h|h}{h} = |h|$$

In questo caso e' derivabile grazie ha h.

Esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos(xy)}{1-y-\cos x} = \frac{\cos\pi}{1-1-\cos(\pi)} = -1$$