

# 气动优化设计理论与方法课程报告

## 一维搜索

报告人: 卢佐

日期: 2022 年 5 月 13 日

**<摘要>** 采用黄金分割法与基于强 Wolfe 的一维搜索两种一维搜索算法一维机翼减阻算例进行优化，改变黄金分割法的初始区间，以及基于强 Wolfe 条件的一维搜索算法的初始点与搜索步长，研究了这两种算法的影响因素。结果表明，初始区间的选取必须包含最优点才能保证黄金黄金分割法收敛到最优点；而对于任意初始点与搜索步长，基于强 Wolfe 条件的一维搜索都可以收敛到最优点，但任意初始点与搜索步长的选取会影响其收敛性。

**关键词：** 一维搜索，黄金分割法，强 Wolfe 条件，机翼减阻

**<Abstract>** The golden section method and the strong Wolfe condition based line search algorithm, are used to optimize a one-dimensional wing drag reduction optimization. The influencing factors of the two algorithms are studied by changing the initial interval of the golden section method and the initial point and search step of the strong Wolfe condition based line search algorithm. The results show that the selection of initial interval must include the optimal point to ensure the convergence of golden section method to the optimal point; For any initial point and search step, the strong Wolfe condition based line search algorithm can converge to the optimal point, but the selection of any initial point and search step size will affect the convergence.

**Keywords:** one-dimensional search, the golden section method, the strong Wolfe condition, wing drag reduction optimization

## 1. 前言

一维搜索描述了一个单变量最优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & x \in [a, b] \end{aligned} \quad (1.1)$$

其中， $f(x)$  为最小化目标， $x \in [a, b] \in \mathbb{R}$  为一维变量。对于这样一个单变量最优化问题，求解较为简单，优化算法迭代次数少且每一轮迭代计算量小，占用计算机内存少，获得极小点的几率高。常用的一维搜索方法包括二分法、牛顿法、割线法等求根方法以及缩小区间法、多项式插值法等函数最小化方法。其中，缩小区间方法根据缩小区间的原则，可以分为黄金分割法、Fibonacci 搜索等。多项式插值法根据其插值方法，可以分为牛顿法、二次插值法等。

一维搜索也描述了多变量优化沿某条线（搜索方向）寻找极小点的问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中， $f$  为最小化目标， $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$  为  $d$  维设计变量， $\mathbf{p}_k$  为第  $k$  次迭代中优化搜索方向， $\alpha$  为搜索步长。应用一维搜索，可以减少多维优化算法中  $f(\mathbf{x})$  以及  $df/dx$  的计算次数，是多维优化特别是梯度优化算法的基础。需要注意的是，在梯度优化中，并不要精确求解式(1.2)描述的一维搜索问题，其原因有二：一方面，在每一迭代步都执行一次对步长的优化，计算量太大；另一方面，当前的搜索方向并不一定直接指向最优点，在该搜索方向上求解步长的精确极值点没有必要。事实上，更有效的方法是“模糊”一维搜索，求得一个能充分减小目标函数值的步长。

为了更好地研究一维搜索，理解其基本原理，本文编写了黄金分割法与基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索两个一维搜索程序，并应用于气动减阻优化问题算例。本文余下章节如下：第二章描述了本文所采用的一维搜索方法；第三章给出了针对本文算例的研究结果；第四章对本文进行了总结。

## 2. 研究方法

本文采用了黄金分割法与基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索两种一维搜索方法，下面对这两种方法进行说明。

### 2.1. 黄金分割法

黄金分割法是一类缩小区间方法。所谓缩小区间法（如图 2-1 所示），是指按照一定的原则缩小搜索区间，直到极小点存在的范围足够小，在预定的误差范围内停止搜索。

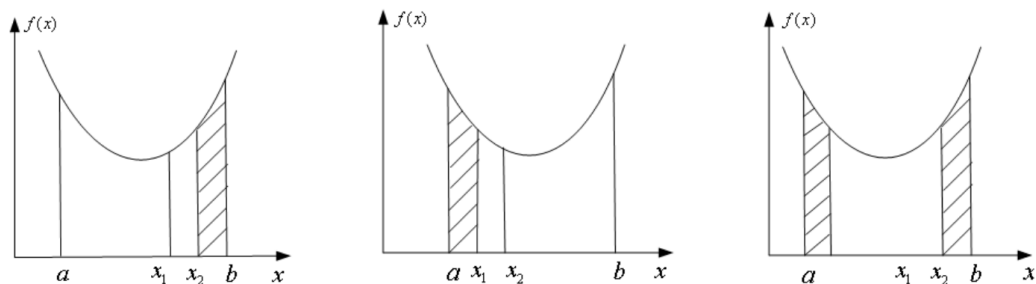


图 2-1 缩小区间方法示意图

设每一轮迭代搜索区间的长度为  $I_1, I_2, I_3, I_4, \dots$ ，在黄金分割法中，满足：

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ I_2 &= I_3 + I_4 \\ &\dots \\ \frac{I_2}{I_1} &= \frac{I_3}{I_2} = \frac{I_4}{I_3} = \dots = \tau \end{aligned} \quad (2.1)$$

推导可得，区间缩减率  $\tau$  满足以下方程

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0 \quad (2.2)$$

解方程得到

$$\tau = 0.618 \quad (2.3)$$

黄金分割法搜索过程如图 2-2 所示

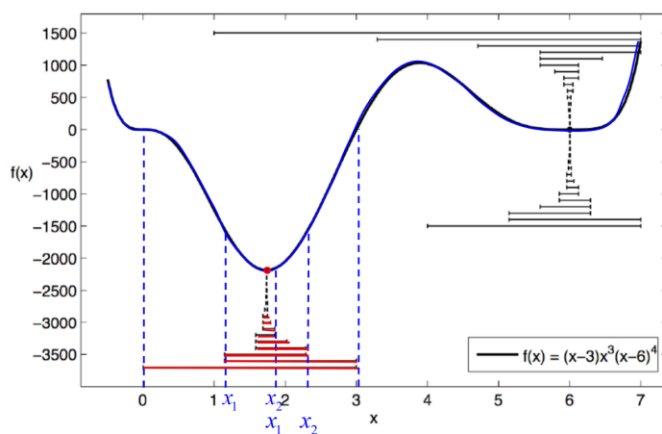


图 2-2 黄金分割法搜索过程

## 2.2. 基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索

### 2.2.1. 强 Wolfe 条件

在无约束最优化问题中，Wolfe 条件是协助一维搜索算法寻找模糊最优解的一组不等式。在一维搜索过程中，可以产生一系列  $\alpha$ ，若以下不等式成立，称满足 Wolfe 条件，结束一维搜索

$$\begin{aligned}
\text{Armijo rule:} \quad & f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \mu_1 \alpha_k \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k \\
\text{Curvature condition:} \quad & \mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k \geq \mu_2 \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k
\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中， $\mu_1, \mu_2$  为常数， $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ 。 $\mu_1$  很小， $\mu_2$  则大得多。典型值为： $\mu_1 = 1 \times 10^{-4}$ ； $\mu_2 = 0.9$ （牛顿法/柯西-牛顿法）， $\mu_2 = 0.1$ （共轭梯度法）。

式(2.4)中包含两个不等式条件：Armijo 准则和曲率条件，下面对这两个条件进行说明。

### (1) Armijo 准则

Armijo 准则，也称为函数的充分下降条件（sufficient decrease condition），描述为：

$$\begin{aligned}
& f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \mu_1 \alpha_k \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k \\
\text{or} \quad & \Phi(\alpha_k) \leq \Phi(0) + \mu_1 \alpha_k \Phi'(0)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

在  $\mathbf{x}_k$  点时，式(2.5)中只有  $\alpha$  为变量，可写作以下函数形式：

$$\phi(\alpha) \leq l(\alpha) \tag{2.6}$$

当  $\mathbf{p}_k$  为函数下降方向时，有

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k < 0 \tag{2.7}$$

因此，式(2.5)是要求

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) < f(\mathbf{x}_k) \tag{2.8}$$

由此可见，Armijo 准则的实质是关于  $\alpha$  的函数已经充分下降（如图 2-3 所示）。

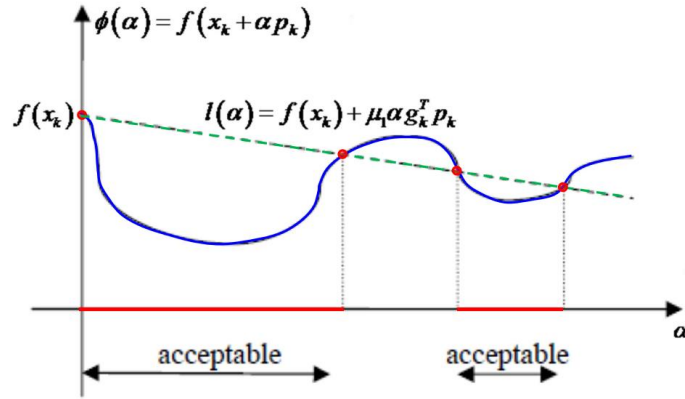


图 2-3 Armijo 准则示意图

### (2) 曲率条件

曲率条件描述为

$$\begin{aligned}
& \mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k \geq \mu_2 \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k \\
\text{or} \quad & \Phi'(\alpha_k) \geq \mu_2 \Phi'(0)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

曲率条件要求  $\Phi'(\alpha_k)$  在  $\mathbf{x}_{k+1}$  点比  $\mathbf{x}_k$  点的函数斜率更大。因为，当  $\mathbf{p}_k$  为函数下降方向时，有

$$\mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k < 0 \quad (2.10)$$

所以，曲率条件是要求新点的斜率满足： $\Phi'(\alpha_k) < 0$  且  $|\Phi'(\alpha_k)| < \mu_2 |\Phi'(0)|$ ；或  $\Phi'(\alpha_k) > 0$ （如图 2-4 所示）。

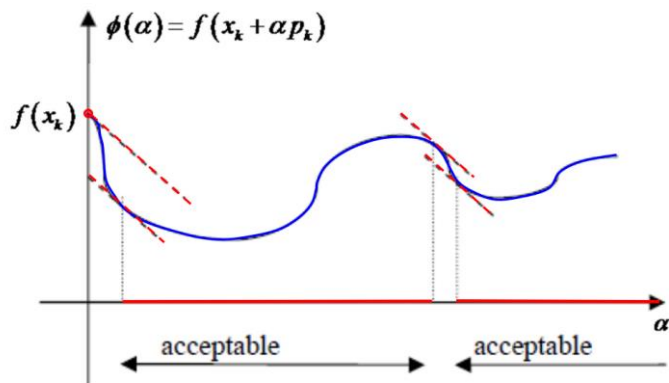


图 2-4 曲率条件示意图

Wolfe 条件需同时满足 Armijo 准则和曲率条件，即 Wolfe 条件既满足关于  $\alpha$  的函数  $\Phi(\alpha_k)$  已经充分下降，同时满足  $\Phi(\alpha_k)$  斜率的绝对值比较小（如图 2-5 所示）。

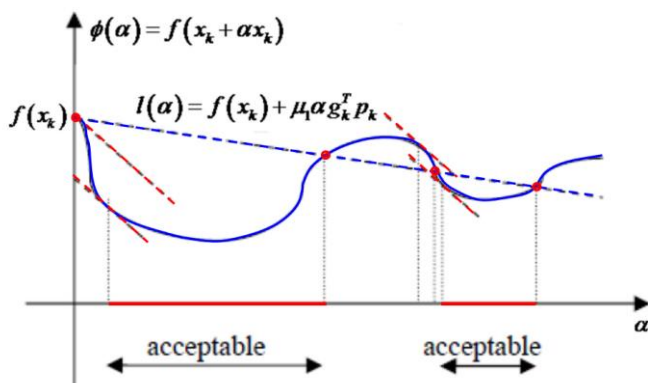


图 2-5 Wolfe 条件示意图

为了避免  $\Phi'(\alpha_k)$  为正值的情况，将曲率条件式(2.9)，用以下更强的条件来代替：

$$|\Phi'(\alpha_k)| \geq \mu_2 |\Phi'(0)| \quad (2.11)$$

成为强 Wolfe 条件

$$\text{Armijo rule: } f(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + \mu_1 \alpha_k \mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k \quad (2.12)$$

$$\text{Curvature condition: } |\mathbf{g}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)^T \mathbf{p}_k| \geq \mu_2 |\mathbf{g}_k^T \mathbf{p}_k|$$

与 Wolfe 条件不同的是，强 Wolfe 条件通过修改曲率条件，避免  $\Phi'(\alpha_k)$  为正值的情况，确保所求得的步长在局部极小点或驻点的情况。

## 2.2.2. 基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索算法流程

基于强 Wolfe 条件的线搜索算法分两个阶段进行：首先，从步长  $\alpha_1$  开始，不断增加，直到找到一个可接受的步长或找到一个区间包含期望步长；如果找到包含期望步长值的区间，那么执行第二步，不断缩小区间，直到找到可接受的步长

第一步算法流程如下：

---

### 基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索算法（第一步）

---

1. 设  $\alpha_0 = 0$ ，选择  $\alpha_1 > 0$  和  $\alpha_{\max}$ 。设  $i = 1$ ；
  2. 求  $\phi(\alpha_i)$ ；
  3. 若  $\phi(\alpha_i) > \phi(0) + \mu_1 \alpha_i \phi'(0)$  或  $\phi(\alpha_i) > \phi(\alpha_{i-1})$ ,  $i > 1$ , 设  $\alpha = \text{zoom}(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ ，停止迭代；
  4. 求  $\phi'(\alpha_i)$ ；
  5. 若  $|\phi'(\alpha_i)| \leq -\mu_2 \phi'(0)$ ，设  $\alpha^* = \alpha_i$ ，停止迭代；
  6. 若  $\phi'(\alpha_i) \geq 0$ ，设  $\alpha^* = \text{zoom}(\alpha_i, \alpha_{i-1})$ ，停止迭代；
  7. 选择  $\alpha_{i+1}$ ，使得  $\alpha_i < \alpha_{i+1} < \alpha_{\max}$ ；
  8. 设  $i = i + 1$ ，返回第 2 步。
- 

第二步算法流程如下：

---

### 基于强 Wolfe 条件的模糊线搜索算法（第二步）

---

1. 在  $\alpha_{lo}$  和  $\alpha_{hi}$  之间找到一个步长  $\alpha_j$  (采用二次插值、三次插值或二分法)；
  2. 求  $\phi(\alpha_j)$ ；
  3. 若  $\phi(\alpha_j) > \phi(0) + \mu_1 \alpha_j \phi'(0)$  或  $\phi(\alpha_j) > \phi(\alpha_{lo})$ ，设  $\alpha_{hi} = \alpha_j$ ，返回第 1 步。
  4. 求  $\phi'(\alpha_j)$ ；
  5. 若  $|\phi'(\alpha_j)| \leq -\mu_2 \phi'(0)$ ，设  $\alpha^* = \alpha_j$ ，停止迭代。
  6. 若  $\phi'(\alpha_j)(\alpha_{hi} - \alpha_{lo}) \geq 0$ ，设  $\alpha_{hi} = \alpha_{lo}, \alpha_{lo} = \alpha_j$ ；若  $\phi'(\alpha_j)(\alpha_{hi} - \alpha_{lo}) < 0, \alpha_{lo} = \alpha_j$ ，返回第 1 步
- 

## 3. 研究结果

### 3.1. 问题描述

考虑一个展长为  $b$ ，弦长为  $c$  的矩形机翼。其平面面积为  $S = bc$ ，展弦比为  $A = b^2 / S$ ，该机翼的阻力系数可近似表达为

$$C_D = kC_f \frac{S_{wet}}{S} + \frac{C_L^2}{\pi Ae} \quad (3.1)$$

右侧第一项表示寄生阻力， $k$  为形状系数，用来衡量压差阻力的影响， $C_f$  表示表面摩擦系数，对于全湍流边界层， $C_f$  可近似表达为

$$C_f = \frac{0.074}{Re^{0.2}} \quad (3.2)$$

其中，雷诺数  $Re = \rho Vc / \mu$ 。

式(3.1)右侧第二项表示诱导阻力，其中  $e$  为奥斯瓦尔德效率因子。升力系数  $C_L$  和机翼面积  $S$  为常数。所有常数变量值见表 3-1。

表 3-1 常数变量值

Quantity	Value	Units	Description
$\rho$	1.23	$kg / m^3$	density of air
$\mu$	$17.8 \times 10^{-6}$	$kg / (msec)$	viscosity of air
$V$	35	$m / s$	air speed
$S$	11.8	$m^2$	planform area
$S_{wet}$	$2.05S$	$m^2$	wing wetted area
$k$	1.2		form factor
$C_L$	0.3		lift coefficient
$e$	0.96		Oswald efficiency factor

(1) 写出总阻力系数关于变量  $A$  的函数关系；

(2) 采用以下两种方法最小化阻力系数：黄金分割法；满足充分下降准则的一维搜索（进阶：满足强 Wolfe 条件的一维搜索）。结果收敛精度保证 6 位有效数字。

(3) 讨论这两种方法的相对性能。尝试不同的初始点或步长，比较收敛效率、迭代次数或者你认为合适的任何其他指标。

## 3.2. 一维搜索算例结果

将黄金分割法与基于强 Wolfe 条件的一维搜索应用于上述算例，并通过改变黄金分割法的初始区间，以及研究基于强 Wolfe 条件的一维搜索的初始点及搜索步长，研究这两种算法的特点。需要说明的是，为了简化梯度运算，在基于强 Wolfe 条件的一维搜索中，梯度值用中心差分格式代替，差分步长取  $1 \times 10^{-3}$ 。

3.2.1. 黄金分割法结果

设置黄金分割法初始区间为[1,100]，经过 36 次迭代，所得最优点精度达到 $1\times 10^{-6}$ ，最优点  $x^*=28.394248$ ，最优点处函数值为  $f(x^*)=0.011561$ 。黄金分割法收敛曲线与所加样本点如图 3-1 所示。

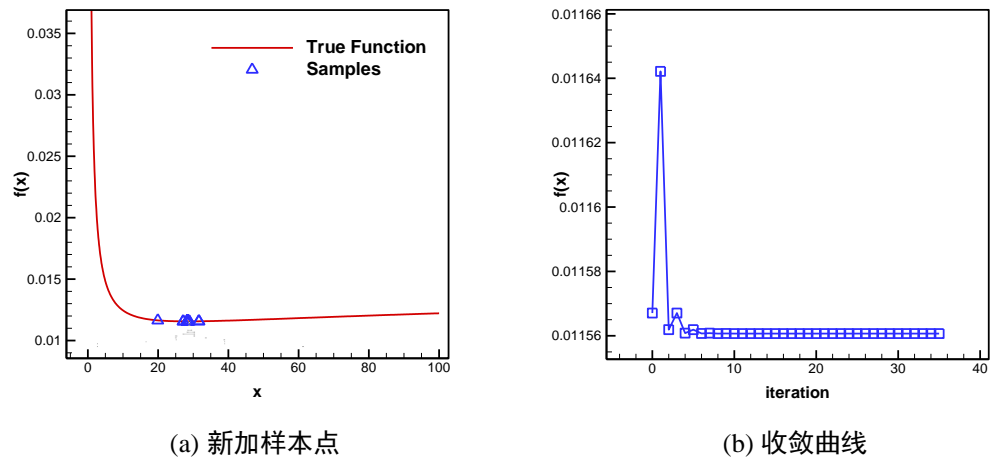


图 3-1 黄金分割法新加样本点及收敛曲线

改变黄金分割法的初始步长，对黄金分割法收敛所需迭代次数及搜索结果进行对比，对比结果表 3-2 所示。可以看出，首先，初始区间的选择直接决定了黄金分割法是否能够找到最优点，黄金分割法只能找到初始区间中包含的最小值，反之，若黄金分割法所得最优点位于初始区间的边界，则需要考虑扩大或移动初始区间；其次，初始区间的大小对黄金分割法的迭代次数影响不大，初始区间从[1,10]到[1,100]，黄金分割法的迭代次数都在 35 次左右，最大相差仅 5 迭代次数。

表 3-2 不同初始区间下黄金分割法迭代次数和搜索结果

初始区间	迭代次数	最优点 $x^*$	最优点函数值 $f(x^*)$
[1,10]	31	9.999999	0.012452
[1,20]	33	19.999999	0.011640
[1,30]	34	28.394249	0.011561
[1,40]	33	28.394247	0.011561
[1,50]	34	28.394248	0.011561
[1,60]	35	28.394248	0.011561
[1,70]	36	28.394249	0.011561
[1,80]	33	28.394247	0.011561
[1,90]	35	28.394247	0.011561
[1,100]	36	28.394249	0.011561



### 3.2.2. 基于强 Wolfe 条件的一维搜索结果

设置初始点为  $x_0 = 1.0$ ，算法第一步中步长每次增大  $\Delta\alpha = 10$ ，即  $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 10$ 。经过 17 次迭代，所得最优点精度达到  $1 \times 10^{-6}$ ，得到最优点  $x^* = 28.394248$ ，最优点处函数值为  $f(x^*) = 0.011561$ ，与黄金分割法所得的结果一致，其加点及收敛曲线如图 3-2 所示，可以看到，梯度优化收敛速度较快，5 步以内就可以收敛到最优解附近，17 步就到达  $1 \times 10^{-6}$  的收敛精度。

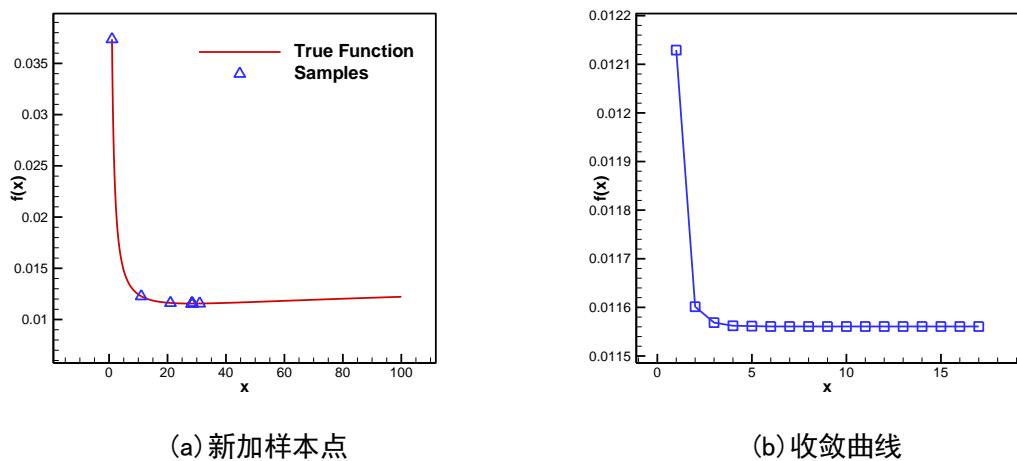


图 3-2 于强 Wolfe 条件的一维搜索加点及收敛曲线

改变基于强 Wolfe 条件的一维搜索结果的初始点，取  $\Delta\alpha = 10$ ，不同初始点的搜索的收敛曲线结果如图 3-3 所示，表 3-4 给出了不同初始点的搜索结果和迭代次数。可以看到，对于任意初始点，基于强 Wolfe 条件的一维搜索都可以找到最优点，但最优点会影响搜多收敛性，越靠近最优点的初始点可以更快地收敛到最优点附近，减少迭代次数。

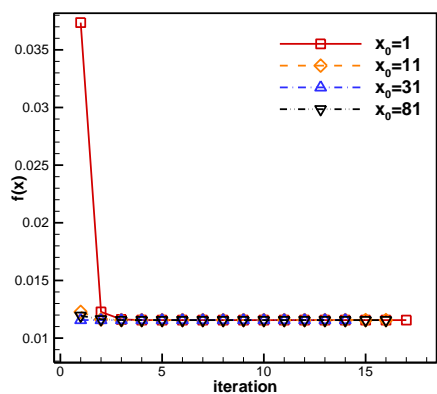


图 3-3 不同初始点的基于强 Wolfe 条件的一维搜索收敛曲线

表 3-3 不同的基于强 Wolfe 条件的一维搜索迭代次数和搜索结果

初始点 $x_0$	迭代次数	最优点 $x^*$	最优点函数值 $f(x^*)$
1	17	28.394248	0.011561

11	16	28.394248	0.011561
21	15	28.394248	0.011561
31	14	28.394248	0.011561
41	15	28.394248	0.011561
51	16	28.394248	0.011561
61	16	28.394248	0.011561
71	16	28.394248	0.011561
81	16	28.394248	0.011561

改变基于强 Wolfe 条件的一维搜索结果的步长  $\Delta\alpha$ ，取初始点  $x_0 = 1.0$ ，不同步长下搜索的结果及迭代次数如表 3-4 所示，可以看到，不同的  $\Delta\alpha$  对迭代次数的影响较大，合适的  $\Delta\alpha$  可以显著减小迭代次数。

表 3-4 不同步长  $\Delta\alpha$  的基于强 Wolfe 条件的一维搜索迭代次数和搜索结果

步长 $\Delta\alpha$	迭代次数	最优点 $x^*$	最优点函数值 $f(x^*)$
10	17	28.394248	0.011561
20	16	28.394248	0.011561
30	17	28.394248	0.011561
40	11	28.394248	0.011561
50	20	28.394248	0.011561
60	18	28.394248	0.011561
70	20	28.394248	0.011561
80	12	28.394248	0.011561
90	12	28.394248	0.011561

## 4. 总结

本文实现了黄金分割法与基于强 Wolfe 条件的一维搜索两种一维线搜索方法，对机翼优化算例进行了优化。通过改变黄金分割法的初始区间，以及基于强 Wolfe 条件的一维搜索算法的初始点与搜索步长，研究了这两种算法在一维凸优化问题上的收敛性，得到以下两个结论：

- 黄金分割法能否收敛到最优点与初始区间有关，初始区间必须包含最优点才能保证黄金分割法收敛到最优点；
- 针对一维凸优化问题，基于强 Wolfe 条件的一维搜索对于任意初始点都可以收敛到最优点，但初始点以及搜索步长的选取对该算法的收敛性有较大影响，合适的初始点及搜索步长可以有效地降低迭代次数，加快收敛。

## 致谢

感谢韩忠华教授在气动优化设计理论与方法课程上对一维搜索算法的细心讲解，用生动形象的语言让我对算法的原理与基本思想有了更加深刻的理解。感谢郭恒博等同学在完成一维搜索程序编写及本报告时的讨论和建议。