1. 针对声学远场，证明近似表达式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\boldsymbol{y})}{r}\right] \approx \frac{1}{c_0^2}\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{r^3}\left[\frac{\partial^2 T_{ij}(\boldsymbol{y})}{\partial \tau^2}\right].$$

根据偏分法则可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\boldsymbol{y})}{r}\right] &= \left[\frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y})}{\partial \tau^2}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \\ &\quad + 2\left[\frac{\partial T_{ij}(\mathbf{y})}{\partial \tau}\right]\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\frac{\partial (1/r)}{\partial x_i} + [T_{ij}(\mathbf{y})]\frac{\partial (1/r)}{\partial x_i \partial x_j}\end{aligned} \tag{1}$$

对于声学远场，可以将忽略上式中的 r^{-2} 和 r^{-3} 项，因此有：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\boldsymbol{y})}{r}\right] \approx \left[\frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y})}{\partial \tau^2}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial \tau}{\partial x_i}\frac{\partial \tau}{\partial x_j} \tag{2}$$

其中，

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} \tag{3}$$

根据 τ 与 r 关系式：

$$\tau = t - \frac{r}{c_0} \tag{4}$$

有：

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = -\frac{1}{c_0} \tag{5}$$

又因为：

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}}{\partial x_i} \quad = \frac{x_i - y_i}{r} \tag{6}$$

因此有：

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_i} = -\frac{1}{c_0}\frac{x_i - y_i}{r} \tag{7}$$

同理：

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_j} = -\frac{1}{c_0}\frac{x_j - y_j}{r} \tag{8}$$

代入式(2)，得：

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\frac{T_{ij}(\boldsymbol{y})}{r}\right] \approx \frac{1}{c_0^2}\frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{r^3}\left[\frac{\partial^2 T_{ij}(\boldsymbol{y})}{\partial \tau^2}\right] \tag{9}$$

原式得证。

2. 对于等熵流动，$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(p' - c_0^2 \rho'\right) = 0$ 一定成立吗？

   不一定。$p' = c_0^2 \rho'$ 成立的前提是均匀介质，对于梯度较大的介质，$p' \neq c_0^2 \rho'$，因此，$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\left(p' - c_0^2 \rho'\right) = 0$ 不一定成立。

3. 参数 p' 和 ρ' 哪一个更适合描述非稳态低速燃烧流动产生的噪声？

   p' 更适合。非稳态低速燃烧流动涉及到能量方程，而参数 p' 主要就源于能量方程，因此 p' 更适合。