1. Lighthill 声比拟方程能直接应用于高 Ma 流动诱发的气动噪声问题吗?
   不能。(1)Lighthill 声比拟方程假设空气介质是均匀静止的，但该条件不能适用于高马赫数流动；(2)Lighthill 声比拟方程没有考虑能量输运作用；(3)Lighthill 声比拟方程仅适用于弱可压缩流动，不适用于高马赫数下的强可压缩流动。

2. 从 Lighthill 声比拟方程出发，详细证明方程的时域积分解为
   根据声比拟方程，有：

$$p'(\mathbf{x},\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V G\frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y},\tau)}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

根据分步积分，有：

$$G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i\partial y_j}=T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_j}+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}\right)-\frac{\partial}{\partial y_j}\left(T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right) \tag{2}$$

因此有：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_V G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_V \frac{\partial}{\partial y_i}\left(G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j}\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\&-\int_{-\infty}^{\infty}\int_V \frac{\partial}{\partial y_j}\left(T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{3}$$

注意到 $T_{ij}=T_{ji}$，因此有：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_V G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_V \frac{\partial}{\partial y_j}\left[G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i}-T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right]\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{4}$$

应用高斯散度定理，有：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_V G\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\&+\int_{-\infty}^{\infty}\int_S \left[G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i}-T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right]n_i\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{5}$$

对于 Lighthill 声比拟方程，S 为无穷大，因此有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_S \left[G\frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i}-T_{ij}\frac{\partial G}{\partial y_i}\right]n_i\mathrm{d}S\mathrm{d}\tau=0 \tag{6}$$

因此：

$$\begin{aligned}p'(\mathbf{x},\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V G\frac{\partial^2 T_{ij}(\mathbf{y},\tau)}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial^2 G}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7}$$

代入自由空间格林函数 G_0，有：

$$p'(\mathbf{x},\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)}{\partial y_i\partial y_j}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

自由空间格林函数 G_0 满足：

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial y_i\partial y_j}=\frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i\partial x_j} \tag{9}$$

因此有：

$$\begin{aligned}
p'(\mathbf{x},\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_V T_{ij}(\mathbf{y},\tau)\frac{\partial^2 G_0(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\mathrm{d}^3\mathbf{y}\ \mathrm{d}\tau\\
&=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}T_{ij}(\mathbf{y},\tau)G_0(\mathbf{x},\mathbf{y},t-\tau)\mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}^3\mathbf{y}\\
&=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_V\int_{-\infty}^{\infty}T_{ij}(\mathbf{y},\tau)\frac{\delta(t-\tau-r/c_0)}{4\pi r}\mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}^3\mathbf{y}\\
&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_V\frac{T_{ij}\left(\mathbf{y},t-r/c_0\right)}{r}\ \mathrm{d}^3\mathbf{y}
\end{aligned} \tag{10}$$

原式得证。