Section4.2

1. 对完全气体, 证明热力学关系式 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}s}{c_p}$ 成立。

   根据热力学第二定律：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}e &= T\ \mathrm{d}s - p\ \mathrm{d}(1/\rho) = C_v \mathrm{d}T \\ \mathrm{d}h &= T\ \mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\rho = C_p \mathrm{d}T \end{aligned} \tag{1}$$

   因此有：

$$\frac{T\ \mathrm{d}s - p\ \mathrm{d}(1/\rho)}{c_v} = \frac{T\ \mathrm{d}s + \mathrm{d}p/\rho}{c_p} \tag{2}$$

$$\frac{C_p}{C_v}\frac{p}{\rho^2}\mathrm{d}\rho = \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \frac{C_p - C_v}{C_p}T\mathrm{d}s \tag{3}$$

   又因为：

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma \tag{4}$$

$$C_p = C_v + R \tag{5}$$

$$p = \gamma RT \tag{6}$$

   因此有：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}s}{c_p} \tag{7}$$

   原式得证。

2. 对等熵过程, 利用上述热力学关系式, 进一步证明

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t}$$

   其中，p_0 为常数。

   由第 1 题的结论，已知：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}s}{c_p} \tag{8}$$

   因此有：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{p}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} \tag{9}$$

又因为：

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} = \frac{p_0}{p}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(\frac{p}{p_0}) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\ln(\frac{p}{p_0}) \tag{10}$$

因此有：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) - \frac{1}{c_p}\frac{\mathrm{D}s}{\mathrm{D}t} \tag{11}$$

原式得证。