Section2.7

1. 将 Fourier 变换对定义为 $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t, f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$, 证明时域格林函数 $G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)=\frac{\delta(t-\tau-R/c_0)}{4\pi\Re}$ 的频域表达式为 $\tilde{G}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega)=\frac{\exp(-ikR)}{4\pi\Re}$ 。

   根据 Fourier 变换的定义，有:

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)e^{-i\omega(t-\tau)}\ \mathrm{d}t-\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\left(t-\tau-R/c_0\right)}{4\pi\Re}e^{-i\omega(t-\tau)}\ \mathrm{d}t-\tau \\
&= \frac{1}{4\pi\Re}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\tau-R/c_0\right)e^{-i\omega(t-\tau-R/c_0)}e^{-i\omega R/c_0}\ \mathrm{d}t-\tau \\
&= \frac{e^{-i\omega R/c_0}}{4\pi\Re}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\tau-R/c_0\right)e^{-i\omega(t-\tau-R/c_0)}\ \mathrm{d}t-\tau
\end{aligned} \tag{1}
$$

   对于 Dirac Function，有：

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t\right)e^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t=1 \tag{2}
$$

   因此有：

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\omega) &= \frac{e^{-i\omega R/c_0}}{4\pi\Re}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\tau-R/c_0\right)e^{-i\omega(t-\tau-R/c_0)}\ \mathrm{d}t-\tau \\
&= \frac{e^{-i\omega R/c_0}}{4\pi\Re} \\
&= \frac{e^{-ikR}}{4\pi\Re}
\end{aligned} \tag{3}
$$

   其中，$k=\frac{\omega}{c_0}$。

2. 对均匀平均流中的静止点源 $Q(\boldsymbol{y},\tau)=\exp(i\omega\tau)$, 其辐射的声场用 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 表示, 利用上题中的格林函数, 证明 $\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{\exp[i\omega(t-R/c_0)]}{4\pi\Re}$

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x},t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(\boldsymbol{y},\tau)G_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\frac{\delta\left(t-\tau-R/c_0\right)}{4\pi\Re}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{4\pi\Re}\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-\tau-R/c_0\right)e^{-i\omega(t-\tau-R/c_0)}\ \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{e^{i\omega(t-R/c_0)}}{4\pi\Re}
\end{aligned} \tag{4}
$$