# 气动优化设计理论与方法课程报告

# 梯度优化

报告人: 卢佐

日期: 2022 年 5 月 22 日

**<摘要>** 针对飞行器减阻优化问题，应用最陡下降梯度优化算法，获得更优的机翼展弦比及机翼面积参数，成功降低飞行器阻力。同时，通过该算例，验证了最陡下降法的收敛性，确定能够收敛到最优点；并验证了最陡下降法开始下降快，后面下降慢的收敛特性。

**关键词：**梯度优化，最陡下降法，飞行器减阻优化

**<Abstract>** To the aircraft drag reduction optimization problem, the steepest descent gradient optimization algorithm was applied to obtain the best aspect ratio and wing area, and the aircraft drag was successfully reduced. At the same time, the convergence of the steepest descent method is verified by the optimization problem, and it is determined that the method can converge to the optimal point. And the convergence characteristic of the steepest descent method that converge quickly at first and slowly to the end is also verified.

**Keywords：** gradient optimization, the steepest descent method, aircraft drag reduction optimization

# 1. 前言

一个多变量无约束最优化问题一般可描述为：

$$\begin{aligned} &\min \quad f(\mathbf{x}) \\ &w.r.t. \quad \mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$f(x)$ 为最小化目标，$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in\mathbb{R}^n$ 为 $n$ 维设计变量。目标函数的梯度为：

$$\nabla f(\mathbf{x})\equiv\mathbf{g}(\mathbf{x})\equiv\begin{bmatrix}\partial f/\partial x_1\\ \partial f/\partial x_2\\ \vdots\\ \partial f/\partial x_n\end{bmatrix} \tag{1.2}$$

对于这样一个多变量无约束最优化问题，可采用梯度优化算法对其进行求解优化。梯度优化算法利用了目标函数的梯度指导搜索方向，加快收敛过程，在实际应用中是一种较为实用的优化算法。梯度优化算法一般流程如下：首先，计算当前样本点的梯度，确定搜索方向；其次，计算沿当前搜索方向的搜索步长；然后，更新样本点，不断迭代直至收敛。

在上述无约束梯度优化流程中，包含两个子问题：计算搜索方向和搜索步长。计算搜索方法是不同梯度优化算法的主要区别，根据计算搜索方法的不同，常见的梯度算法有最陡下降法、共轭梯度法、牛顿法、拟牛顿法等。计算搜索步长是一个一维搜索问题，可用常见的一维搜索算法求解，需要注意的是，在梯度优化中，并不要精确求解该子问题，一般采用模糊搜索算法。

为了更好地研究梯度优化算法，理解其基本原理，本文实现了最陡下降法程序，并应用于机翼减阻优化问题算例。本文余下章节如下：第二章描述了本文所采用的梯度优化算法；第三章给出了针对本文算例的优化结果；第四章对本文进行了总结。

# 2. 研究方法

本文采用的最陡下降梯度优化算法，下面对该方法的原理及收敛性进行说明。

## 2.1. 最陡下降法优化原理及优化流程

最陡下降法的基本优化原理如下：从某一设计点 $x_k$ 出发，沿目标函数负梯度方向 $-g(x_k)$ 进行搜索，寻找新点使目标函数最小，求出步长 $\alpha_k$，从而得到新点 $x_{k+1}$，以此规律迭代直到梯度接近 0 为止。可以证明，在某设计点 $x_k$，目标函数的负梯度方向是使函数值下降最快的方向。

最陡下降法的一般流程如下：

**最陡下降法**

1. **初始化**：选择初始点 $x_0$，以及收敛参数 $\varepsilon_g, \varepsilon_a, \varepsilon_r$（通常取绝对误差 $\varepsilon_a = 10^{-6}$，相对误差 $\varepsilon_r = 0.01$）；

2. **计算梯度**：$\mathbf{g}(x_k) \equiv \nabla f(x_k)$，若 $\|\mathbf{g}(x_k)\| \le \varepsilon_g$，则优化结束，否则，将梯度归一化，$\mathbf{p}_k = -\mathbf{g}(x_k) / \|\mathbf{g}(x_k)\|$；

3. 通过一维线搜索寻找方向 $\mathbf{p}_k$ 的步长 $\alpha_k$；

4. 更新当前设计点 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$；

5. 计算 $f(\mathbf{x}_{k+1})$，若连续两个迭代步满足 $|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)| \le \varepsilon_a + \varepsilon_r |f(\mathbf{x}_k)|$，优化结束，否则，令 $k = k+1, \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$，返回第 2 步。

## 2. 2. 最陡下降法的收敛特性

在求解步长时，如果采用精确的线搜索，则每一轮迭代的最陡下降方向与上一轮迭代的最陡下降方向是垂直的，证明如下：

$$
\begin{aligned}
&\frac{df(\mathbf{x}_{k+1})}{d\alpha} = \frac{df(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)}{d\alpha} == 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \frac{\partial \mathbf{x}_{k+1}}{\partial \alpha} = \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{p}_k = 0 \\
&-\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_k = 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

因此，最陡下降向最优点逼近的轨迹呈锯齿状，开始几步迭代目标函数值下降很快，但随后下降很慢，通常要经过很多步迭代才能收敛到最优点。

# 3. 研究结果

## 3. 1. 问题描述

考虑一个机翼如前所述的矩形机翼飞机，其阻力系数为:

$$
C_D = \frac{0.03062702}{S} + kC_f \frac{S_{\mathbf{wet}}}{S} + \frac{C_L^2}{\pi A e} \tag{3.1}
$$

其中，第一项表示机身的寄生阻力，其他两项表示机翼的寄生阻力（如前所述）。

机翼的重量可以近似地表示为:

$$
W_w = 45.42S + 8.71 \times 10^{-5} \frac{N_{\mathbf{ult}} b^3 \sqrt{W_0 W}}{S(t/c)} \tag{3.2}
$$

其中 $N_{ult}$ 为结构设计中考虑的极限荷载因子，$t/c$ 为相对厚度。令不考虑机翼的飞机重量为$W_0$，则飞机的总重量为:

$$W = W_0 + W_w \tag{3.3}$$

注意，机翼的重量$W_w$通过$W$依赖于自身，因此需要迭代求解。

一旦得到飞机的重量，就可以求得水平飞行所需的升力系数：

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} \tag{3.4}$$

然后就可以计算升阻比$L/D = C_L / C_D$，以及水平飞行的总阻力：

$$D = \frac{W}{L/D} \tag{3.5}$$

优化问题为最小化阻力$D$，设计变量为展弦比 A，和翼面面积 S。所有新增的常量如表 3-1 所示中;其他常量参考之前给出的常量表。

表 3-1 常数变量值

| Quantity | Value | Units | Description |
|---|---|---|---|
| $W_0$ | 4940 | N | weight of the aircraft excluding the wing |
| $N_{ult}$ | 2.5 | | ultimate load factor |
| $t/c$ | 0.12 | | average thickness to chord ratio |

## 3. 2. 一维搜索算例结果

将最陡下降法应用于上述算例。需要说明的是，为了简化梯度运算，在优化过程中，梯度值用中心差分格式代替，差分步长取$1\times10^{-3}$。优化过程中的搜索步长由基于强 Wolfe 条件的一维搜索给出。

### 3. 2. 1. 最陡下降法优化结果

设置初始点 $A=10.0$，$S=40.0m^2$，经过 13 次迭代，得到最优点 $A=14.2781$，$S=11.6767m^2$，最优点处阻力$D=258.2702N$。阻力$D$关于展弦比$A$和机翼面积$S$的函数图像以及优化加点过程如图 3-1 所示，优化收敛过程如图 3-2 及表 3-2 所示。由于实际优化过程中，计算搜索步长采用模糊搜索而非精确搜索，因此，最陡下降法加点收敛在设计空间的轨迹并非如理论上所述的锯齿状。但从图 3-2 可以看出其收敛性仍有开始迭代目标函数值下降快，随后下降慢，需要经过多步迭代才能收敛到最优点的收敛特性。

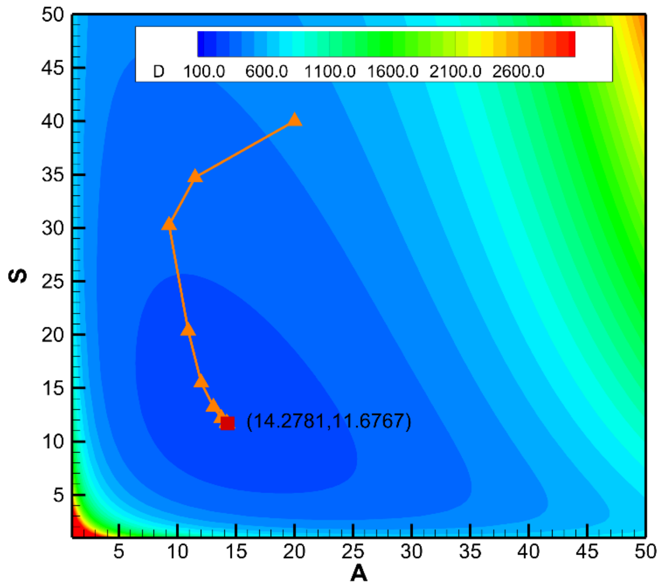


图 3-1 阻力关于展弦比和机翼面积的函数图像以及优化加点过程（黄色三角形为优化加点，红色正方形为最优点）

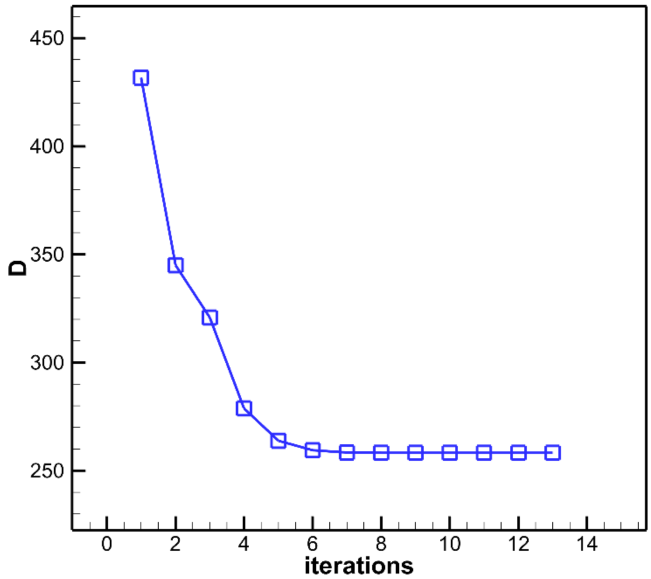


图 3-2 优化收敛过程

表 3-2 优化加点收敛过程

| Iteration | A | S | D |
|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 40 | 431.6939 |
| 2 | 11.5007 | 34.7311 | 344.9718 |
| 3 | 9.2779 | 30.2523 | 320.8403 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 10.9101 | 20.3864 | 278.8292 |
| 5 | 12.0369 | 15.5151 | 263.7917 |
| 6 | 13.0728 | 13.2398 | 259.4357 |
| 7 | 13.7422 | 12.1841 | 258.4364 |
| 8 | 14.2065 | 11.7658 | 258.2744 |
| 9 | 14.2417 | 11.6961 | 258.2708 |
| 10 | 14.2609 | 11.6922 | 258.2704 |
| 11 | 14.2753 | 11.6791 | 258.2702 |
| 12 | 14.2772 | 11.6775 | 258.2702 |
| 13 | 14.2781 | 11.6767 | 258.2702 |

# 4. 总结

本文实现了最陡下降梯度优化算法，并用于飞行器减阻优化算例，仅用 13 次迭代，获得了最优的展弦比和机翼面积。当展弦比 $A = 14.2781$，机翼面积 $S = 11.6767m^2$，阻力仅为 $D = 258.2702N$，相较于初始点 $A = 10.0$，$S = 40.0m^2$，阻力下降了 $110.5465N$。并通过该算例，研究认识了最陡下降法的确定收敛以及线性收敛的收敛特性。即，最陡下降法可以确定

# 致谢

感谢韩忠华教授在气动优化设计理论与方法课程上对梯度优化算法的细心讲解，用生动形象的语言让我对算法的原理与基本思想有了更加深刻的理解。感谢郭恒博等同学在完成梯度优化程序编写及撰写本报告时的讨论和建议。