



universität
wien

BACHELORARBEIT

Dispersion von Wellenfunktionen im Rahmen der Schrödinger-Newton-Gleichung am Beispiel eines galaktischen BEC-CDM-Halos

verfasst von

Elisabeth Schnabel, BSc

angestrebter akademischer Grad

Bachelor of Science (BSc)

Wien, 2020

Studienkennzahl lt. Studienblatt

033 661

Studienrichtung lt. Studienblatt

Astronomie

Betreut von:

Mag. Mag. Dr. Tanja Rindler-Daller

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Motivation und theoretische Grundlagen	2
2.1	Dunkle Materie - Hinweise	2
2.2	Dunkle Materie - Kandidaten	5
2.3	Probleme im Standardmodell der Dunklen Materie	6
2.4	Dunkle Materie als Skalarfeld	7
2.5	BEC-CDM	7
2.6	Schrödinger-Newton-Gleichung	10
3	SN-Gleichung einer Vielteilchen-Wellenfunktion	11
3.1	Aufstellen der Gleichung	11
3.2	Massenschwerpunkt-Koordinaten	13
3.3	Effekt der Schrödinger-Newton-Gleichung auf den Massenschwerpunkt	23
3.4	Weite Wellenfunktion	26
4	Näherungen für BEC-CDM-Halos	28
4.1	Numerische Methode	28
4.2	Python-Skript	37
4.3	Weite Wellenfunktion in der Hartree-Fock-Näherung	41
5	Diskussion	42

1 Einleitung

Dunkle Materie als faszinierender, gar geheimnisvoller Bestandteil des Kosmos, liefert ein weites Forschungsgebiet, das sich von der Teilchenphysik, über interstellare Dynamik bis hin zur Strukturbildung des Universums erstreckt. Trotz der Etablierung eines Standardmodells für die Dunkle Materie wird aufgrund offensichtlicher Mängel weiterhin fieberhaft an Alternativen geforscht. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer hypothetischen Form der Dunklen Materie, die sich in dem exotischen Zustand eines Bose-Einstein-Kondensates befindet, im Rahmen der Schrödinger-Newton-Gleichung.

Zuerst werden neben den Hinweisen auf die Existenz der Dunklen Materie sowohl das Dunkle-Materie-Modell des BEC-CDMs als auch die erwähnte Schrödinger-Newton-Gleichung erklärt. Letztere wird anschließend für ein Vielteilchen-System in Abhängigkeit seiner Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten untersucht. Darauf folgt die Beschreibung und Analyse einer numerischen Methode, die im Fall spezieller Näherungen die zeitliche Entwicklung eines Teils der Vielteilchen-Wellenfunktion im Rahmen der Schrödinger-Newton-Gleichung lösen kann. Es wird auch ein Python-Code vorgeschlagen. Abschließend folgt eine Diskussion über gewonnene Erkenntnisse und mögliche weitere Überlegungen.

2 Motivation und theoretische Grundlagen

2.1 Dunkle Materie - Hinweise

Dunkle Materie als eine das ganze Universum durchdringende Substanz, aus welcher der dominante Teil gebundener astronomischer Systeme wie Galaxien besteht, wurde erstmals von Fritz Zwicky postuliert. 1933 analysierte der Astronom die Messungen von Radialgeschwindigkeiten einzelner Galaxien im Coma-Galaxienhaufen. Dabei fand er, dass diese über weite Bereiche schneller rotieren, als bei der Menge an sichtbarer Materie nach Newtonscher Dynamik zu erwarten wäre [27].

Newtons zweitem Theorem nach wirkt dieselbe Gravitationskraft auf einen Körper, der sich außerhalb einer sphärischen Massenverteilung befindet, als wäre deren Gesamtmasse in einem Punkt im Zentrum konzentriert. Wird nun ein galaktisches Zentrum als Punktmasse modelliert, so sollte ein Stern oder Gas, der bzw. das sich in großem Abstand r um dieses bewegt, folgenden Geschwindigkeitsverlauf aufweisen [2]:

$$v_c(r) = \sqrt{G \frac{M(< r)}{r}} . \quad (1)$$

G bezeichnet die Gravitationskonstante und $M(< r)$ jene Masse, die innerhalb von r eingeschlossen ist. Mit zunehmendem Abstand vom Zentrum sollte also die Geschwindigkeit proportional zu $r^{-1/2}$ abfallen, da die leuchtende Masse nach außen hin nicht mehr stark zunimmt. Die tatsächlich beobachtete Situation ist in Abbildung 1 veranschaulicht. Aufgetragen ist der Betrag der beobachteten

Rotationsgeschwindigkeit sichtbarer Materie der Galaxie NGC 6503 in Abhängigkeit zur Distanz zum Galaxienzentrum. Zudem ist mit einer strichlierten Linie eingezeichnet, wie der Verlauf der Geschwindigkeiten nach klassischer Dynamik zu erwarten wäre. Da der starke Abfall ab einem bestimmten Radius ausbleibt und stattdessen ein Plateau erreicht wird, kann auf zusätzliche gravitativ wechselwirkende Materie geschlossen werden, deren Menge nach außen hin zunimmt [15].

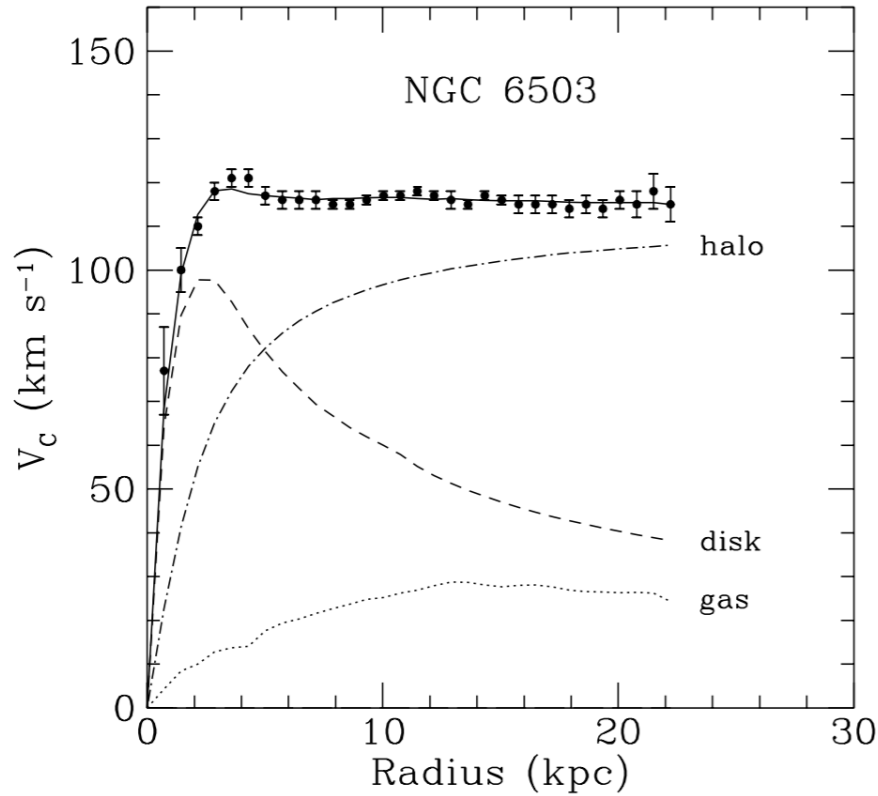


Abbildung 1: Rotationskurve der Galaxie NGC 6503: Der Betrag der Rotationsgeschwindigkeit v_c ist in Abhängigkeit zum Radius aufgetragen [15].

Einen weiteren Hinweis auf die Existenz Dunkler Materie bringt der beobachtbare Effekt der Gravitationslinsen. Hierbei werden Photonen, die sich durch eine gekrümmte Raumzeit bewegen, abgelenkt. Je nach Position der Lichtquelle kommt es zu einer Verschiebung, Verzerrung oder Vergrößerung des Bildes. Ein Beispiel ist in Abbildung 2 gezeigt: Das Bild einer Galaxie wird zu einem langen Bogen verzerrt. Diese Galaxie liegt hinter einem Galaxienhaufen, Abell

370, dessen Gravitationspotential für die Ablenkung des Lichtes verantwortlich ist [8]. Solche starken Raumzeitkrümmungen, die dieses Phänomen beobachtbar machen, werden durch massive Objekte verursacht [18].

Fritz Zwicky schlug 1937 vor, dass durch Beobachtung solcher Gravitationslinsen ausgezeichnete Messungen der Massen von Galaxienhaufen möglich sein würden [30], was sich bewahrheitet hat. Tatsächlich ist die Messung von Gravitationslinsen heute die erfolgreichste Methode, um Dunkle Materie empirisch zu erforschen. Es kann auf die mittlere Dichte der Dunklen Materie und seine Dichte relativ zur baryonischen Materie geschlossen werden. Außerdem können die Größe und Masse einzelner Dunkle Materie Teilchen sowie ihre Streuquerschnitte im Fall unterschiedlicher fundamentaler Wechselwirkungen abgeschätzt werden [18].



Abbildung 2: Das Bild einer Galaxie wird durch das Gravitationspotential des Galaxienhaufens Abell 370, hinter dem sie in weiter Entfernung liegt, zu einem langen Bogen verzerrt [8].

Die Erforschung der Kosmischen Hintergrundstrahlung lässt Rückschlüsse auf die ursprüngliche Massenverteilung kurze Zeit nach dem Urknall der Dunklen Materie im Kosmos zu. Diese Strahlung weist Anisotropien auf, die bei der Durchquerung von Photonen durch Gravitationspotentiale, die zu einer Rotverschiebung derselben führen, verursacht werden. Mittels der durch die Raumsonde WMAP, die Unregelmäßigkeiten im Kosmischen Hintergrund erforschte, erhobenen Daten konnte festgestellt werden, dass rund 83% der Mate-

rie im Universum Dunkle Materie ist und nur 17% die uns bekannte baryonische Materie [16].

Dunkle Materie spielt auch bei der Strukturbildung im Kosmos eine wichtige Rolle. Simulationen zeigen, dass heute beobachtbare Strukturen sich nicht ohne dem zur baryonischen Materie zusätzlichen Dunkle Materie Anteil bilden hätten können. Für die Entwicklung beispielsweise von Galaxien und Galaxienhaufen, gibt es mittlerweile gute theoretische Modellierungen. Ein Beispiel hierfür ist das Illustris-Projekt, welches große hydrodynamische Simulationen der Dunklen Materie und des Gases im Universum umfasst. Der Zeitraum erstreckt sich von den Anfangsbedingungen des Kosmos bis 13,6 Milliarden Jahre nach dem Urknall. Abbildung 3 zeigt eine Gegenüberstellung einer "künstlichen" Beobachtung der Illustris-Simulation (linke Bildhälfte) mit vom Hubble-Teleskop beobachteten Galaxien (rechte Bildhälfte). Zu sehen ist, dass die Verteilung, die Farben und die Formen der Galaxien in beiden Bildern statistisch gesehen sehr ähnlich sind [16].



Abbildung 3: Linke Bildhälfte: Bild einer "künstlichen" Beobachtung der Illustris-Simulation. Rechte Bildhälfte: Hubble eXtreme Deep Field Beobachtung. Quelle: Illustris Collaboration; <http://www.illustris-project.org/media/>

2.2 Dunkle Materie - Kandidaten

Mögliche Kandidaten der Dunklen Materie müssen Eigenschaften aufweisen, die mit den Beobachtungen übereinstimmen. Sie müssen sowohl mit der Dunklen Materie als auch mit der baryonischen gravitativ wechselwirken. Für elektromagnetische Wechselwirkungen gibt es keine Hinweise. Überdies müssen sie über große kosmologische Zeiträume hinweg stabil sein, da aus Beobachtungsdaten hervorgeht, dass Dunkle Materie bereits zur Zeit der Rekombination in großen Mengen vorlag.

Allgemein werden mögliche Kandidaten in relativistische und nicht-relativistische Teilchen unterteilt. Erstere Form wird auch heiße Dunkle Materie, *Hot Dark Matter* (HDM), und zweitere kalte Dunkle Materie, *Cold Dark Matter* (CDM), genannt. Als HDM kommen beispielsweise Neutrinos in Frage. Wäre die Dunkle Materie durch HDM-Teilchen dominiert, hätten sich gänzlich andere Strukturen entwickelt, als beobachtet werden, weshalb diese Materieform höchstens für einen kleinen Teil der gesamten Dunklen Materie aufkommen kann. Da für das CDM keine geeigneten Kandidaten im Standardmodell zu finden sind, muss dieses erweitert werden. Eine solche Erweiterung des Standardmodells nennt sich SUSY, die Theorie der *Supersymmetrie*. Innerhalb dieses Modells wird die Existenz diverser Teilchen vorhergesagt, von denen einige mögliche Kandidaten des CDM wären. Beispiele hierfür sind folgende:

- WIMPs: Ein Beispiel für hypothetische CDM-Teilchen sind die WIMPs, was für *Weakly Interacting Massive Particles* steht. Diese Teilchen wechselwirken nicht elektromagnetisch, allerdings gravitativ und sind für die schwache Kraft empfänglich.
- Axion: Das QCD-Axion ist ein weiterer vielversprechender Kandidat für die Dunkle Materie. Es handelt sich hierbei um ein sehr leichtes, elektrisch neutrales Boson, das postuliert wurde, um das CP-Problem¹ in der Quantenchromodynamik (QCD) zu lösen [28].

2.3 Probleme im Standardmodell der Dunklen Materie

Im Standardmodell für die Dunkle Materie, dem Λ CDM-Modell, werden die Dunkle Materie Teilchen als WIMPs angenommen. Das Standardmodell beschreibt bestimmte großräumige Strukturen des Kosmos sehr gut, versagt aber bei anderen [4]. Drei davon sind folgende:

- Das *Missing Satellite Problem*: Mit diesem Begriff benennt man im Englischen die Tatsache, dass N-Körper-Simulationen, die auf dem Λ CDM-Modell beruhen, weit mehr Subhalos voraussagen, als Satellitengalaxien beobachtet werden. Ursprüngliche sich auf kleinen Skalen ereignende Schwankungen im skaleninvarianten CDM sollten durch Kollaps zu einer großen Anzahl an Subhalos führen.
- Das *Cusp/Core-Problem*: Hiermit wird das bei N-Körper-Simulationen auftretende Problem bezeichnet, dass Massendichteverteilungen von Dunkle Materie Halos im Λ CDM-Modell weit steiler vorausgesagt werden, als die beobachteten Rotationskurven von Galaxien implizieren.
- Das *Satellite Plane Problem*: Beobachtungen zeigen, dass Zwerggalaxien, die sich um die Milchstraße und die Andromeda-Galaxie bewegen, einem

¹Als CP-Problem wird die Tatsache bezeichnet, dass die Quantenchromodynamik CP-Symmetrie zu erhalten scheint, obwohl es hierfür keinen ersichtlichen Grund gibt. [6]

dünnen, planaren Orbit folgen. Auch dies steht in Diskrepanz zu Simulationen, die zufällige Verteilungen der Zwerggalaxien um ihre Muttergalaxie voraussagen [5].

Aufgrund solcher Probleme im Standardmodell der Dunklen Materie werden Alternativen dazu erforscht. Eine davon ist das Modell von Dunkler Materie in Form eines Skalarfeldes. Dieser Ansatz wird im Weiteren erklärt.

2.4 Dunkle Materie als Skalarfeld

Im Englischen ist der Begriff für dieses Modell *Scalar Field Dark Matter Model* oder kurz SFDM. Hierbei handelt es sich um ein Dunkles Materie Modell, bei dem die Natur der Dunklen Materie ausschließlich durch ein fundamentales Skalarfeld Φ bestimmt ist. Galaktische Dunkle Materie Halos formen sich in diesem Modell durch die Kondensation eines Skalarfeldes im frühen Universum. Ein Beispiel hierfür ist ein Modell, in dem sich die Halos von Galaxien durch astronomische Bose-Einstein-Kondensat-Tropfen eines Skalarfeldes formen. Die Dunklen Materie Teilchen dieses Feldes sind ultraleichte Bosonen mit einer Masse von rund $10\text{--}22\text{ eV}$. Aus dieser Masse folgt, dass die kritische Temperatur für eine Kondensation in ein Bose-Einstein-Kondensat sehr hoch ist und dass sich somit BEC-Tropfen sehr früh im Universum formen konnten. Überdies beträgt die de Broglie Wellenlänge dieser Bosonen rund 1 kpc [17]. Im Weiteren wird das Modell des BEC-CDMs genauer besprochen.

2.5 BEC-CDM

Die Abkürzung BEC-CDM steht für *Bose-Einstein Condensate-Cold Dark Matter*. Hierbei handelt es sich um ein Modell der Dunklen Materie, bei dem diese aus ultraleichten Bosonen zusammengesetzt ist. Jene können sich dank der Tatsache, dass sie nicht dem Paulischen Ausschließungsprinzip unterliegen, zum überwiegenden Teil im selben quantenmechanischen Zustand befinden. Die Bezeichnung *Cold* weist darauf hin, dass sie zudem nicht-relativistisch sind. Um als CDM in Frage zu kommen, muss ihre Dichte im Phasenraum ρ_{ps} ,

$$\rho_{ps} = n\lambda_{dB}^3, \quad (2)$$

genügend groß sein, um ein Bose-Einstein-Kondensat zu formen. n bezeichnet hierbei die Teilchendichte. In die Phasenraumdichte geht die de Broglie Wellenlänge

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \quad (3)$$

der Teilchen ein. Dabei bezeichnet h die Planckkonstante, m die Teilchenmasse und v den Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens. Vergleichen wir nun die beiden Definitionen, so finden wir, dass für eine große Phasenraumdichte die

Teilchenmasse m entsprechend klein sein muss. Allgemein gilt als Bedingung für die Bildung eines Bose-Einstein-Kondensates

$$\rho_{ps} > 1 . \quad (4)$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die ultraleichten Bosonen dieses Dunkle-Materie-Modells diese Bedingung mit

$$\rho_{ps} \gg \gg 1 \quad (5)$$

mit Leichtigkeit erfüllen [25].

Für die quantenmechanische Beschreibung des Bose-Einstein-Kondensats definieren wir die Wellenfunktion $\hat{\Psi}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, die aus dem $[1+3N]$ -dimensionalen Raum der reellen Zahlen in den eindimensionalen der komplexen abbildet,

$$\hat{\Psi} : \mathbb{R}^{(1+3N)} \rightarrow \mathbb{C} , \quad (6)$$

sowie die Wellenfunktion $\phi(t, \mathbf{x})$, die aus dem $[1+3]$ -dimensionalen Raum der reellen Zahlen in den eindimensionalen der komplexen abbildet:

$$\phi : \mathbb{R}^{(1+3)} \rightarrow \mathbb{C} . \quad (7)$$

Das Argument t der Wellenfunktion steht für die Zeitkoordinate, $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ bzw. \mathbf{x} für die Raumkoordinaten eines beziehungsweise mehrerer Teilchen. In der Hartree-Fock-Näherung² wird die totale Wellenfunktion $\hat{\Psi}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ als Produkt der Wellenfunktionen ϕ der einzelnen N bosonischen Teilchen geschrieben:

$$\hat{\Psi}(t = 0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(t = 0, \mathbf{x}_i) . \quad (8)$$

$\hat{\Psi}(t = 0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ sei ein kohärenter Zustand. Dies ist unter der Annahme möglich, dass sich bis auf $o(N)$ Teilchen alle in demselben 1-Teilchen-Zustand ϕ befinden. Unter der Annahme, dass die lineare Schrödingergleichung,

$$i\partial_t \hat{\Psi}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = H_N \hat{\Psi}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) , \quad (9)$$

wobei H_N die N -Teilchen-Hamiltonfunktion bezeichnet, für große N die Kohärenz von $\hat{\Psi}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ erhält, kann $\hat{\Psi}$ als

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \simeq \prod_{i=1}^N \phi(t, \mathbf{x}_i) \quad (10)$$

²Mit der Hartree-Fock-Methode wird ein System vieler gleichartiger Teilchen in der Mean-Field-Näherung, bei der ein System miteinander wechselwirkender Teilchen als ein System freier Teilchen in einem äußeren Feld betrachtet wird, behandelt.

geschrieben werden [10].

Unter Verwendung der Gesamtanzahl N aller Teilchen in einem Halo wird die Wellenfunktion ψ des Kondensates definiert [23]:

$$\psi(t, \mathbf{r}) := \sqrt{N} \phi(t, \mathbf{r}) . \quad (11)$$

Die über das Volumen V (beispielsweise eines Dunkle-Materie-Halos) integrierte Wahrscheinlichkeitsdichte dieser Funktion, die der Anzahldichte $n(t, \mathbf{r})$ entspricht,

$$|\psi(t, \mathbf{r})|^2 = n(t, \mathbf{r}) , \quad (12)$$

ergibt damit die Gesamtzahl N der sich darin befindlichen Bosonen:

$$\int_V d^3\mathbf{r} |\psi(t, \mathbf{r})|^2 = N . \quad (13)$$

Der Grundzustand dieses nun definierten quantenmechanischen Systems bosonischer Teilchen wird von der Gross-Pitaevskii-Gleichung (14), die der zeitabhängigen Schrödingergleichung sehr ähnelt, beschrieben:

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(t, \mathbf{r}) + g|\psi(t, \mathbf{r})|^2 \right] \psi(t, \mathbf{r}) . \quad (14)$$

Neben den üblichen Termen für die kinetische Energie und ein beliebiges Potential taucht hier auch ein nichtlinearer Term, der proportional zur Kopplungskonstante g ist, auf. Letztere ist proportional zur Streulänge a der Teilchen,

$$g = 4\pi\hbar^2 \frac{a}{m} , \quad (15)$$

welche wiederum vom Streuquerschnitt σ , welcher für nicht-relativistische Teilchen konstant ist, abhängt:

$$\sigma = 8\pi a^2 . \quad (16)$$

m beschreibt die Masse eines Halo-Teilchens.
Als potentielle Energie in Gleichung (14) wählen wir nun

$$V(t, \mathbf{r}) = m\Phi(t, \mathbf{r}) , \quad (17)$$

wobei $\Phi(t, \mathbf{r})$ das Newtonsche Gravitationspotential des Halos sein soll und durch die Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(t, \mathbf{r}) = 4\pi G\rho(t, \mathbf{r}) \quad (18)$$

definiert ist. Mit der darin auftretenden klassischen Massendichte ρ bringen wir die quantenmechanische Beschreibung der Anzahldichte aus Gleichung (12) in Verbindung:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = m|\psi(t, \mathbf{r})|^2 . \quad (19)$$

Lösen wir nun die Poisson-Gleichung (18), so erhalten wir:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = -Gm \int d^3\mathbf{r}' \frac{|\psi(t, \mathbf{r})|^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} . \quad (20)$$

Nach Einsetzen in die Gross-Pitaevskii-Gleichung (14) erhalten wir nun eine Beschreibung des BEC-CDM-Halos [25]:

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - Gm^2 \int d^3\mathbf{r}' \frac{|\psi(t, \mathbf{r})|^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} + g|\psi(t, \mathbf{r})|^2 \right] \psi(t, \mathbf{r}) . \quad (21)$$

2.6 Schrödinger-Newton-Gleichung

Die Schrödinger-Newton-Gleichung (SN-Gleichung) beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion $\psi(t, \mathbf{x})$ eines Teilchens mit der Masse m im eigenen Gravitationspotential.

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_g(t, \mathbf{x}) \right] \psi(t, \mathbf{x}) \quad (22)$$

Hierbei beschreibt ∂_t die partielle Zeitableitung nach der Zeit, Δ den Laplace-Operator, \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum und V_g die potentielle Energie. Letztere erfüllt, dass

$$\Delta V_g(t, \mathbf{x}) = m\Delta\Phi(t, \mathbf{x}) = 4\pi Gm^2 |\psi(t, \mathbf{x})|^2 , \quad (23)$$

wobei

$$\Delta\Phi(t, \mathbf{x}) = 4\pi G\rho(t, \mathbf{x}) \quad (24)$$

die klassische Poisson-Gleichung für das Gravitationspotential $\Phi(t, \mathbf{x})$, das von der Masse des Teilchens erzeugt wird, ist. Hier ist auch die semi-klassische Beschreibung ersichtlich: Die klassische Massendichte $\rho(t, \mathbf{x})$ wird als m mal der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(t, \mathbf{x})|^2$ interpretiert.

Mit der Lösung der Poisson-Gleichung ergibt sich für V_g

$$V_g(t, \mathbf{x}) = -Gm^2 \int d^3\mathbf{x}' \frac{|\psi(t, \mathbf{x}')|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (25)$$

und somit für die Schrödinger-Newton-Gleichung die Form

$$i\hbar\partial_t\psi(t, \mathbf{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - Gm^2 \int d^3\mathbf{x}' \frac{|\psi(t, \mathbf{x}')|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \right] \psi(t, \mathbf{x}) . \quad (26)$$

Gleichung (26) ähnelt sehr der Gross-Pitaevskii-Gleichung (21). Es muss aber bedacht werden, dass die Wellenfunktion im ersten Fall ein einziges Teilchen und im zweiten Fall ein System von N Teilchen beschreibt, weswegen sich neben

dem Kopplungskonstanten-Term sowohl die Laplace-Operatoren als auch die potentiellen Energien unterscheiden.

Ursprünglich wurde sie von L. Diósi [7] und R. Penrose [20, 22, 21] aufgestellt. Deren Motivation war es, mit der Schrödinger-Newton-Gleichung eine dynamische Beschreibung des Kollapses der quantenmechanischen Wellenfunktion zu erzielen [1].

3 SN-Gleichung einer Vielteilchen-Wellenfunktion

In diesem Kapitel soll die Schrödinger-Newton-Gleichung für Vielteilchensysteme, die durch quantenmechanische Vielteilchen-Wellenfunktionen beschrieben werden, in Anlehnung an eine Arbeit von Giulini und Großardt [13] diskutiert werden. Nachdem die Gleichung aufgestellt worden sein wird, erfolgt eine Umformung in Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten, um die Entwicklung in diesem Kontext zu betrachten. Anschließend werden gewisse Näherungsannahmen getroffen, um konkrete Situationen zu verstehen.

3.1 Aufstellen der Gleichung

Wir definieren eine Funktion $\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N)$, die aus dem $[1+3(N+1)]$ -dimensionalen Raum der reellen Zahlen in den eindimensionalen der komplexen abbildet,

$$\Psi : \mathbb{R}^{1+3(N+1)} \rightarrow \mathbb{C} . \quad (27)$$

Das erste Argument bezieht sich auf die Zeitkoordinate t , die restlichen $3(N+1)$ auf die jeweiligen drei Ortskoordinaten jedes der $(N+1)$ Teilchen. Diese besitzen die Massen m_0, m_1, \dots, m_N . Zu beachten ist, dass hier mit einem Teilchen mehr als im Kapitel über das BEC-CDM gearbeitet wird und zunächst nicht die Annahme getroffen wird, dass alle Teilchenmassen gleich wären. Dies hat praktische Gründe, die im Weiteren ersichtlich sein werden.

Für die Wellenfunktion Ψ hat die Schrödinger-Gleichung die allgemeine Form

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) = & \left[-\sum_{a=0}^N \frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_a + V_{other}(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) \right. \\ & \left. + V_g(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) \right] \Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) . \end{aligned} \quad (28)$$

Diese Gleichung beschreibt die zeitliche Veränderung des quantenmechanischen Zustands Ψ , der das System der $(N+1)$ -Teilchen repräsentiert. Da besonders die gravitative Wechselwirkung der Teilchen von Interesse ist, definieren wir als

$$V_g(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{a=0}^N m_a \Phi(t, \mathbf{x}_a) \quad (29)$$

die Summe aller Gravitationsenergien der (N+1) Teilchen mit den Massen m_a , die sich an den Orten \mathbf{x}_a aufhalten. Φ bezeichnet das Gravitationspotential am Ort \mathbf{x} . In Newtonscher Beschreibung lässt es sich als

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -G \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\sum_{b=0}^N \tilde{\rho}_b(t, \mathbf{x}')}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (30)$$

definieren. G bezeichnet die Gravitationskonstante und $\tilde{\rho}_b$ die Massenverteilung repräsentiert vom b-ten Teilchen. Letztere ist proportional zur von Ψ ableitbaren Massenverteilung.

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_b(t, \mathbf{x}) &= m_b \left\{ \int \prod_{\substack{c=0 \\ c \neq b}}^N d^3 \mathbf{x}_c \right\} |\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{b-1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{b+1}, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \\ &= m_b \left\{ \int \prod_{c=0}^N d^3 \mathbf{x}_c \right\} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) |\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N)|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Hierbei bezeichnet

$$d^3 \mathbf{x}_c := dx_c^1 \wedge dx_c^2 \wedge dx_c^3 \quad (32)$$

und

$$\prod_{c=0}^N d^3 \mathbf{x}_c := d^3 \mathbf{x}_0 \wedge d^3 \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge d^3 \mathbf{x}_N \quad (33)$$

das jeweilige Keilprodukt der Integranden. Letztendlich besteht auch im Ausdruck (31) der Zusammenhang zwischen der quantenmechanischen Beschreibung des Vielteilchensystems mit der Wellenfunktion Ψ und einer klassischen, Newtonschen Beschreibung der Gravitation mit einer Massenverteilung.

Setzt man nun den Ausdruck für die Massenverteilung (31) in die Formel für das Newtonsche Gravitationspotential (30) und dies in die Beschreibung von V_g in (29) ein, so erhält man für den gravitativen Beitrag zur Hamiltonfunktion

$$V_g(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) = -G \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N m_a m_b \left\{ \int \prod_{c=0}^N d^3 \mathbf{x}_c \right\} \frac{|\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N)|^2}{\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|}. \quad (34)$$

Für den zweiten Potentialterm in der Hamiltonfunktion definieren wir das Potential

$$V_{other}(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) = V_{ab}(\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|) \quad (35)$$

als den Anteil nicht-gravitativer Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, wobei $V_{ab} = V_{ba}$ gilt. ab bezeichnet dabei das miteinander interagierende Teilchenpaar, Teilchen a und Teilchen b. Abhängig ist dieses Potential vom relativen räumlichen Abstand der Teilchen.

Setzen wir nun die Potentialterme (34) und (35) in die Schrödinger-Gleichung (28) ein, so erhalten wir die Schrödinger-Newton-Gleichung für eine Vielteilchen-Wellenfunktion.

$$i\hbar\partial_t\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) = \left[-\sum_{a=0}^N \frac{\hbar^2}{2m_a} \Delta_a + \sum_{a=0}^N \sum_{b>a}^N V_{ab}(\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|) \right. \\ \left. - G \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N m_a m_b \left\{ \int \prod_{c=0}^N d^3\mathbf{x}'_c \right\} \frac{|\Psi(t, \mathbf{x}'_0, \dots, \mathbf{x}'_N)|^2}{\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}'_b\|} \right] \Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (36)$$

Zu erkennen ist hierbei, dass es sich bei dieser um eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt [13].

3.2 Massenschwerpunkt-Koordinaten

Um Aussagen über das Verhalten des Massenschwerpunkts des (N+1)-Teilchen-Systems im Rahmen der Schrödinger-Newton-Gleichung machen zu können, müssen die Teilchenkoordinaten in Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten umgeformt werden.

Die Gesamtmasse M der (N+1) Teilchen ist durch

$$M := \sum_{a=0}^N m_a \quad (37)$$

gegeben. Der Massenschwerpunkt \mathbf{c} ist definiert durch

$$\mathbf{c} := \frac{1}{M} \sum_{a=0}^N m_a \mathbf{x}_a \\ = \frac{m_0}{M} \mathbf{x}_0 + \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{M} \mathbf{x}_\beta . \quad (38)$$

In der zweiten Zeile wurde der Beitrag eines beliebigen Teilchens 0 aus praktischen Gründen, die in ein paar Zeilen ersichtlich sein werden, von denen der restlichen getrennt. In weiterer Folge werden lateinische und griechische Indizes mit folgender Konvention gehandhabt:

$$a, b, \dots \in \{0, 1, \dots, N\} , \\ \alpha, \beta, \dots \in \{1, 2, \dots, N\} . \quad (39)$$

Abgesehen vom Teilchen 0 wird der Vektor vom Massenschwerpunkt \mathbf{c} zum Teilchenort \mathbf{x}_α hin mit den Relativkoordinaten

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{c} \\ = -\frac{m_0}{M} \mathbf{x}_0 + \sum_{\beta=1}^N \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{m_\beta}{M} \right) \mathbf{x}_\beta \quad (40)$$

beschrieben. N der (N+1) Ortsvektoren können durch Umstellen von Gleichung (40) als

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{c} + \mathbf{r}_\alpha \quad (41)$$

ausgedrückt werden. Der Ortsvektor des 0-ten Teilchens kann mithilfe der Gleichungen (38) und (40) nun mit

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{r}_\beta \quad (42)$$

angeschrieben werden. Die Umformung ist hier wiedergegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \frac{m_0}{M} \mathbf{x}_0 + \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{M} \mathbf{x}_\beta \\ \Leftrightarrow \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{M} \mathbf{x}_\beta &= \frac{m_0}{M} \mathbf{x}_0 \\ \Leftrightarrow \frac{M}{m_0} \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{x}_\beta &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (43)$$

Wir konzentrieren uns auf die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{M}{m_0} \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} (\mathbf{c} + \mathbf{r}_\beta) = \frac{M}{m_0} \mathbf{c} - \frac{1}{m_0} \mathbf{c} \sum_{\beta=1}^N m_\beta - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{r}_\beta . \quad (44)$$

Wir verwenden, dass

$$\sum_{\beta=1}^N m_\beta = M - m_0 , \quad (45)$$

sodass

$$(M - m_0) \frac{1}{m_0} \mathbf{c} = \frac{M}{m_0} \mathbf{c} - \frac{m_0}{m_0} \mathbf{c} \quad (46)$$

und setzen ein:

$$\frac{M}{m_0} \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} (\mathbf{c} + \mathbf{r}_\beta) = \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{r}_\beta . \quad (47)$$

Somit folgt aus (43):

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{r}_\beta . \quad (48)$$

Nachdem die neuen Koordinaten definiert sind, ist nun von Interesse, wie das Keilprodukt der $(N+1)$ 1-Formen dx_a^1 in dieser Schreibweise aussieht. Hierfür setzen wir die infinitesimalen Formen für die Ausdrücke von \mathbf{x}_0 und \mathbf{x}_α in die Definition (32) ein. Nach einigen Umformungen ergibt sich:

$$dx_0^1 \wedge dx_1^1 \wedge dx_2^1 \wedge \dots \wedge dx_N^1 = \frac{M}{m_0} (dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1) . \quad (49)$$

Der genaue Rechenweg ist hier wiedergegeben:

$$\begin{aligned} dx_0^1 \wedge dx_1^1 \wedge dx_2^1 \wedge \dots \wedge dx_N^1 &= \\ &= \left(dc^1 - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} dr_\beta^1 \right) \wedge (dc^1 + dr_1^1) \wedge \dots \wedge (dc^1 + dr_N^1) \\ &= dc^1 \wedge dc^1 \wedge \dots \wedge dc^1 - \left(\sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} dr_\beta^1 \right) \wedge dc^1 \wedge \dots \wedge dc^1 \\ &\quad + dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dc^1 \wedge \dots \wedge dc^1 + \dots + dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 \\ &\quad - \left(\sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} dr_\beta^1 \right) \wedge dr_1^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 + \dots \\ &\quad - \left(\sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} dr_\beta^1 \right) \wedge \dots \wedge dc^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 . \end{aligned} \quad (50)$$

Den Keilprodukt-Rechenregeln nach fallen alle Terme weg (sind gleich Null), in denen gleiche Komponenten von dc^1 oder dr_β^1 mehr als einmal auftreten. Nicht betroffen davon sind der vierte und sechste hier angeschriebene Term. Damit vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{aligned} dx_0^1 \wedge dx_1^1 \wedge dx_2^1 \wedge \dots \wedge dx_N^1 &= \\ &= dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 - \frac{m_1}{m_0} dr_1^1 \wedge dc^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 \\ &\quad - \frac{m_2}{m_0} dr_2^1 \wedge dr_1^1 \wedge dc^1 \wedge dr_3^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 + \dots - \frac{m_N}{m_0} dr_N^1 \wedge dr_1^1 \wedge \dots \wedge dr_{N-1}^1 \wedge dc^1 \\ &= \left(\frac{m_0}{m_0} + \frac{m_1}{m_0} \right) dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 + \frac{m_2}{m_0} dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 + \dots \\ &\quad + \frac{m_N}{m_0} dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 \\ &= \sum_{a=0}^N \frac{m_a}{m_0} dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 \\ &= \frac{M}{m_0} dc^1 \wedge dr_1^1 \wedge dr_2^1 \wedge \dots \wedge dr_N^1 . \end{aligned} \quad (51)$$

Analog zu den Definitionen (32) und (33) definieren wir

$$d^3\mathbf{r}_\alpha := dr_\alpha^1 \wedge dr_\alpha^2 \wedge dr_\alpha^3 \quad (52)$$

und

$$\prod_{\alpha=1}^N d^3\mathbf{r}_\alpha := d^3\mathbf{r}_1 \wedge d^3\mathbf{r}_2 \wedge \dots \wedge d^3\mathbf{r}_N . \quad (53)$$

Für das N-fache Keilprodukt ergibt sich somit

$$\prod_{a=0}^N d^3\mathbf{x}_a = \left(\frac{M}{m_0}\right)^3 \left(d^3\mathbf{c} \wedge \prod_{\alpha=1}^N d^3\mathbf{r}_\alpha\right) \quad (54)$$

Hiervon lässt sich auch einfach die Jakobi-Determinante der Transformation ablesen [13]:

$$\det \left\{ \frac{\partial(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\alpha)}{\partial(\mathbf{c}, \mathbf{r}_\alpha)} \right\} = \left(\frac{M}{m_0}\right)^3 =: J . \quad (55)$$

Nun interessieren wir uns für die Darstellung des kinetischen Anteils der Vielteilchen-SN-Gleichung (36) in Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten. In der nicht-relativistischen Mechanik ist die kinetische Energie T definiert als eine quadratische Funktion der totalen Zeitableitung der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3)$, sofern diese nur implizit von der Zeit abhängen:

$$T = \frac{1}{2} M_{jk}(\mathbf{q}) \dot{q}^j \dot{q}^k . \quad (56)$$

M_{jk} können als die Koeffizienten eines metrischen Tensors definiert werden. T ist aufgrund seiner \dot{q} -Abhängigkeit eine Funktion des Tangentialraums TM zum Konfigurationsraum M , dem Raum der Teilchenpositionen [3]. Für ein infinitesimales Pfadelement ds im Konfigurationsraum,

$$(ds)^2 = M_{jk} dq_j dq_k , \quad (57)$$

gilt [14], dass

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 . \quad (58)$$

Für N -Teilchen, deren Ortskoordinaten mit $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$ und Massen mit m_1, \dots, m_N bezeichnet werden, ist die Riemannsche Metrik \langle , \rangle , für die T die kinetische Energie ergibt,

$$\langle , \rangle = \sum_{n=1}^N m_n d\mathbf{q}_n \otimes d\mathbf{q}_n . \quad (59)$$

T ist dann

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n d\mathbf{q}_n(\dot{\mathbf{q}}) \otimes d\mathbf{q}_n(\dot{\mathbf{q}}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n d\mathbf{q}_n(\mathbf{v}^n \partial_i) \otimes d\mathbf{q}_n(\mathbf{v}^n \partial_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{v}^n)^2 .
\end{aligned} \tag{60}$$

Lokal ist das Vektorfeld gegeben mit $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}^i \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^i}$ [3].

In Analogie hierzu schreiben wir nun zunächst die Kinetische-Energie-Metrik für das $(N+1)$ -Teilchen-System

$$G = \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N G_{ab} d\mathbf{x}_a \otimes d\mathbf{x}_b := \sum_{a=0}^N m_a d\mathbf{x}_a \otimes d\mathbf{x}_a \tag{61}$$

unter Verwendung der Definitionen (41) und (42) um:

$$G' = M d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\beta . \tag{62}$$

Hier ist $H_{\alpha\beta}$ folgendermaßen definiert:

$$H_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_0} + m_\beta \delta_{\alpha\beta} . \tag{63}$$

Die Umformung von Gleichung (61) nach Gleichung (62) ist hier wiederge-

geben:

$$\begin{aligned}
G &= \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N G_{ab} d\mathbf{x}_a \otimes d\mathbf{x}_b := \sum_{a=0}^N m_a d\mathbf{x}_a \otimes d\mathbf{x}_a \\
&= m_0 d\mathbf{x}_0 \otimes d\mathbf{x}_0 + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{x}_\alpha \otimes d\mathbf{x}_\alpha \\
&= m_0 \left(d\mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} d\mathbf{r}_\beta \right) \otimes \left(d\mathbf{c} - \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{m_0} d\mathbf{r}_\gamma \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (d\mathbf{c} + d\mathbf{r}_\alpha) \otimes (d\mathbf{c} + d\mathbf{r}_\alpha) \\
&= m_0 d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N m_\beta \frac{m_0}{m_0} d\mathbf{r}_\beta \otimes d\mathbf{c} - \sum_{\gamma=1}^N m_\gamma \frac{m_0}{m_0} d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{r}_\gamma \\
&\quad + m_0 \left(- \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} d\mathbf{r}_\beta \right) \otimes \left(- \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\gamma}{m_0} d\mathbf{r}_\gamma \right) + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{c} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\alpha \\
&= \sum_{a=0}^N m_a d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} + \sum_{\gamma=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta m_\gamma}{m_0} d\mathbf{r}_\beta \otimes d\mathbf{r}_\gamma + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\alpha .
\end{aligned} \tag{64}$$

Wir ersetzen nun im zweiten Term β mit α und γ mit β . Zudem wird der letzte Term zu $\sum_{\alpha=1}^N \delta_{\alpha\beta} m_\beta d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\beta$ umgeschrieben. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
G' &= M d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{m_\alpha m_\beta}{m_0} + m_\beta \delta_{\alpha\beta} \right) d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\beta \\
&= M d\mathbf{c} \otimes d\mathbf{c} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta} d\mathbf{r}_\alpha \otimes d\mathbf{r}_\beta .
\end{aligned} \tag{65}$$

Bei einer Betrachtung von Gleichung (62) fällt zunächst auf, dass es keine Terme gibt, die ein Tensorprodukt zwischen $d\mathbf{c}$ und $d\mathbf{r}_\alpha$ enthalten. G' spaltet sich also in zwei separate Teile auf, einen von den Massenschwerpunkt-Koordinaten und einen von den Relativkoordinaten abhängigen [13].

Wir interessieren uns nun für die Determinante von $H_{\alpha\beta}$. Hierfür betrachten wir den Zusammenhang zwischen der Jacobi-Matrix

$$J_k^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} \tag{66}$$

einer Transformation zwischen den Koordinaten (x^0, \dots, x^N) und (x'^0, \dots, x'^N) und der transformierten Metrik $g'_{\alpha\beta}$ [9]. $g_{\mu\nu}$ transformiert dabei folgendermaßen:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} . \quad (67)$$

Ausgedrückt mit der Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation ergibt sich

$$g'_{\mu\nu} = J_\mu^\alpha g_{\alpha\beta} J_\nu^\beta . \quad (68)$$

Unter Verwendung des Determinantenproduktsatzes

$$\det\{AB\} = \det\{A\}\det\{B\} \quad (69)$$

für $n \times n$ -Matrizen A und B lässt sich die Relation

$$\det\{g'_{\mu\nu}\} = (\det\{J_\nu^\mu\})^2 \det\{g_{\alpha\beta}\} \quad (70)$$

finden. Wir verwenden nun, dass

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &:= G'_{ab} , \\ g_{\alpha\beta} &:= G_{ab} \text{ und} \\ \det\{J_\nu^\mu\} &:= J . \end{aligned} \quad (71)$$

Dabei ist zu bedenken, dass G'_{ab} eine Blockmatrixform hat. Zusammengefasst ergibt sich:

$$(\det\{G_{ab}\})^3 J^2 = M^3 (\det\{H_{\alpha\beta}\})^3 . \quad (72)$$

Aus (61) lässt sich ablesen, dass

$$\det\{G_{ab}\} = \det\{m_a \delta_{ab}\} = \prod_{a=0}^N m_a \quad (73)$$

und J wurde bereits in (55) berechnet. Wir formen nun Gleichung (72) um und setzen die bereits bekannten Terme ein.

$$\begin{aligned} \det\{H_{\alpha\beta}\} &= \left(\prod_{a=0}^N m_a^3 \frac{M^6}{m_0^6} \frac{1}{M^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{M}{m_0^2} \prod_{a=0}^N m_a \end{aligned} \quad (74)$$

Als Nächstes widmen wir uns der Inversen der Kinetischen-Energie-Metrik:

$$G^{-1} = \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N G^{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_b} := \sum_{a=0}^N \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} . \quad (75)$$

Wir verwenden nun (38) und (40) um Ausdrücke für $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}$ und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}$ zu finden. Dabei gehen wir vor wie bei einer normalen Transformation der partiellen Ableitungen zwischen zwei Koordinatensystemen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}_0} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial \mathbf{x}_0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{m_0}{M} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \left(-\frac{m_0}{M} \right) \\
&= \frac{m_0}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \right)
\end{aligned} \tag{76}$$

Für die partielle Ableitung nach \mathbf{x}_α lässt sich ein Muster erkennen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{x}_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_N} \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial \mathbf{x}_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \frac{m_1}{M} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \left(1 - \frac{m_1}{M} \right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \left(-\frac{m_1}{M} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_N} \left(-\frac{m_1}{M} \right)
\end{aligned} \tag{77}$$

Dadurch ergeben sich für $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0}$ und $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha}$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} &= \frac{m_0}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \right), \\
\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{m_\alpha}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \right).
\end{aligned} \tag{78}$$

Mit (78) kann nun die Inverse der Kinetischen-Energie-Metrik (75) in Abhängigkeit von der partiellen Ableitungen nach \mathbf{c} und \mathbf{r}_α ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
G'^{-1} &= \frac{1}{m_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \\
&= \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N H^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta}
\end{aligned} \tag{79}$$

Die genaue Umformung ist hier wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
G^{-1} &= \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N G^{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_b} = \sum_{a=0}^N \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \\
&= \frac{1}{m_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_\alpha} \\
&= \frac{1}{m_0} \frac{m_0}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \right) \otimes \frac{m_0}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \right) \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{m_\alpha}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \right) \right] \otimes \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{m_\alpha}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \right) \right] \\
&= \frac{1}{m_0} \frac{m_0^2}{M^2} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \right] \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{m_\alpha}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \frac{m_\alpha}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \right. \\
&\quad + \frac{m_\alpha}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \frac{m_\alpha^2}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \\
&\quad \left. - \frac{m_\alpha}{M} \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{m_\alpha^2}{M^2} \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \frac{m_\alpha^2}{M^2} \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \right] \\
&= \frac{m_0}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \frac{m_0}{M^2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} - \frac{m_0}{M^2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \frac{m_0}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \\
&\quad + \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\alpha}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \\
&\quad - \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\alpha}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \sum_{\gamma=1}^N \frac{m_\alpha}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\gamma} \\
&= \frac{m_0 + M - m_0}{M^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \\
&\quad + \left(\frac{m_0}{M^2} - \frac{1}{M} + \frac{M - m_0}{M} \right) \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} - \left(\frac{m_0}{M^2} - \frac{1}{M} + \frac{M - m_0}{M^2} \right) \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \\
&\quad - \left(\frac{m_0}{M^2} + \frac{1}{M} - \frac{M - m_0}{M^2} \right) \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \\
&= \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{1}{m_\alpha} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{M} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} .
\end{aligned}$$

Hierbei identifizieren wir

$$H^{\alpha\beta} = \frac{1}{m_\alpha} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{M} \quad (81)$$

als die Inverse von (63), wodurch sich

$$G'^{-1} = \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N H^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \quad (82)$$

ergibt. Unter Verwendung von (63) und (81) lässt sich nachprüfen, dass $\sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta} H^{\beta\gamma}$ gleich δ_α^γ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta} H^{\beta\gamma} &= \sum_{\beta=1}^N \left(\frac{m_\alpha m_\beta}{m_0} + m_\beta \delta_{\alpha\beta} \right) \left(\frac{1}{m_\beta} \delta^{\beta\gamma} - \frac{1}{M} \right) \\ &= \frac{m_\alpha}{m_0} + \delta_\alpha^\gamma - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\alpha m_\beta}{m_0 M} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{M} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{m_\alpha}{m_0} + \delta_\alpha^\gamma - \frac{m_\alpha}{m_0 M} (M - m_0) - \frac{m_\alpha}{M} \\ &= \frac{m_\alpha}{m_0} + \delta_\alpha^\gamma - \frac{m_\alpha}{m_0} + \frac{m_\alpha}{M} - \frac{m_\alpha}{M} \\ &= \delta_\alpha^\gamma. \end{aligned} \quad (83)$$

Wir sehen im Vergleich, dass im kinetischen Anteil der Hamiltonfunktion aus Gleichung (36) der Term $\sum_{a=0}^N \frac{1}{m_a} \Delta_a$ der Inversen der Kinetischen-Energie-Metrik (75) entspricht. Zu erkennen ist folglich, dass sich der kinetische Anteil aufspaltet in einen von den Massenschwerpunkt- und einen von den Relativkoordinaten abhängigen Teil.

$$\begin{aligned} \Delta_G &= \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N G^{ab} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_b} \\ &= \sum_{a=0}^N \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_a} \\ &= \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N H^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} \\ &=: \Delta_c + \Delta_r \end{aligned} \quad (84)$$

3.3 Effekt der Schrödinger-Newton-Gleichung auf den Massenschwerpunkt

Dieses Kapitel steht unter der Annahme, dass sich die Wellenfunktion $\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N)$ unter Umständen in einen Term, der von der Zeit t und den Massenschwerpunkt-Koordinaten \mathbf{c} abhängt und einen, der von der Zeit t und den Relativkoordinaten $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ abhängt, aufspaltet. Eine solche Wellenfunktion hat die Form

$$\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N) \simeq \tilde{N} \psi(t, \mathbf{c}) \chi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (85)$$

wobei \tilde{N} eine passende Normierung darstellt. Diese soll so gewählt werden, dass

$$||\Psi|| = ||\psi|| = ||\chi|| = 1 . \quad (86)$$

Die Norm $||\Psi||$ der Wellenfunktion Ψ ist folgendermaßen definiert:

$$||\Psi|| = \sqrt{(\Psi, \Psi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{a=0}^N d\mathbf{x}_a \Psi^* \Psi , \quad (87)$$

wobei $(,)$ das innere Produkt und $*$ die komplexe Konjugation bezeichnet. Hat nun Ψ die Form aus Gleichung (85), so ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (54):

$$\begin{aligned} ||\Psi|| &= ||\tilde{N} \psi \chi|| \\ &= \tilde{N}^2 \left(\frac{M}{m_0} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(d^3 \mathbf{c} \wedge \prod_{\alpha=1}^N d^3 \mathbf{r}_{\alpha} \right) \psi^* \chi^* \psi \chi \end{aligned} \quad (88)$$

Nun sollen aber

$$||\psi|| = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{c} \psi^* \psi \stackrel{!}{=} 1 \quad (89)$$

und

$$||\chi|| = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^N d^3 \mathbf{r}_{\alpha} \chi^* \chi \stackrel{!}{=} 1 \quad (90)$$

sein, was die Forderung

$$\tilde{N}^2 \stackrel{!}{=} \left(\frac{m_0}{M} \right)^3 \quad (91)$$

impliziert und so die Normierung

$$\tilde{N} = \left(\frac{m_0}{M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (92)$$

zur Folge hat.

Soll sich die (N+1)-Teilchen-Wellenfunktion $\Psi(t, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N)$ nun im Zuge der Vielteilchen-SN-Gleichung (36) in einen Teil, der von den Massenschwerpunkt-Koordinaten abhängig ist und einen, der von den Relativkoordinaten abhängig ist, aufspalten, muss dies der gravitative Beitrag V_g zur Hamiltonfunktion aus Gleichung (34) erlauben. Diesen betrachten wir nun genauer.

Durch Ersetzen der von einer Koordinatentransformation betroffenen Terme mithilfe der Gleichungen (41), (42) und (54) sowie unter Verwendung der in Gleichung (85) definierten Wellenfunktion mit entsprechender Normierung ergibt sich für V_g folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
V_g &= G \sum_{a=0}^N \sum_{b=0}^N m_a m_b \left\{ \int \prod_{c=0}^N d^3 \mathbf{x}'_c \right\} \frac{|\Psi(t, \mathbf{x}'_0, \dots, \mathbf{x}'_N)|^2}{\|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}'_b\|} \\
&= -G m_0^2 \left(\frac{M}{m_0} \right)^3 \int d^3 \mathbf{c}' \wedge \prod_{\gamma=1}^N d^3 \mathbf{r}'_\gamma \left(\frac{m_0}{M} \right)^3 \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 |\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\|\mathbf{c} - \sum_{\delta=1}^N \frac{m_\delta}{m_0} \mathbf{r}_\delta - \mathbf{c}' + \sum_{\delta=1}^N \frac{m_\delta}{m_0} \mathbf{r}'_\delta\|} \\
&\quad - G m_0 \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left(\frac{M}{m_0} \right)^3 \int d^3 \mathbf{c}' \wedge \prod_{\gamma=1}^N d^3 \mathbf{r}'_\gamma \left(\frac{m_0}{M} \right)^3 \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 |\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\|\mathbf{c} - \sum_{\delta=1}^N \frac{m_\delta}{m_0} \mathbf{r}_\delta - \mathbf{c}' - \mathbf{r}'_\alpha\|} \\
&\quad - G m_0 \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \left(\frac{M}{m_0} \right)^3 \int d^3 \mathbf{c}' \wedge \prod_{\gamma=1}^N d^3 \mathbf{r}'_\gamma \left(\frac{m_0}{M} \right)^3 \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 |\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\|\mathbf{c} + \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{c}' + \sum_{\delta=1}^N \frac{m_\delta}{m_0} \mathbf{r}'_\delta\|} \\
&\quad - G \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N m_\alpha m_\beta \left(\frac{M}{m_0} \right)^3 \int d^3 \mathbf{c}' \wedge \prod_{\gamma=1}^N d^3 \mathbf{r}'_\gamma \left(\frac{m_0}{M} \right)^3 \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 |\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\|\mathbf{c} + \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{c}' - \mathbf{r}'_\beta\|} \\
&\hspace{15em} (93)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Annahme, dass sich Ψ in den von den Massenschwerpunkt-Koordinaten abhängigen Term ψ und den von den Relativkoordinaten abhängigen

gigen Term χ aufspaltet, kann V_g zu

$$\begin{aligned}
V_g(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = & -G \int d^3 \mathbf{c}' |\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \left\{ \int \prod_{\gamma=0}^N d^3 \mathbf{r}'_{\gamma} \right\} \\
& \cdot \left[m_0^2 \frac{|\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\left\| \mathbf{c} - \mathbf{c}' - \sum_{\delta=1}^N \frac{m_{\delta}}{m_0} (\mathbf{r}_{\delta} - \mathbf{r}'_{\delta}) \right\|} \right. \\
& + m_0 \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{|\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\left\| \mathbf{c} - \mathbf{c}' - \sum_{\delta=1}^N \frac{m_{\delta}}{m_0} \mathbf{r}_{\delta} - \mathbf{r}'_{\alpha} \right\|} \\
& + m_0 \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{|\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\left\| \mathbf{c} - \mathbf{c}' + \mathbf{r}_{\alpha} + \sum_{\delta=1}^N \frac{m_{\delta}}{m_0} \mathbf{r}'_{\delta} \right\|} \\
& \left. + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N m_{\alpha} m_{\beta} \frac{|\chi(t, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N)|^2}{\left\| \mathbf{c} - \mathbf{c}' + \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}'_{\beta} \right\|} \right] \quad (94)
\end{aligned}$$

vereinfacht werden. Zu sehen ist, dass $(2N+1)$ von den insgesamt $(N+1)^2$ Termen den Faktor m_0 beinhalten. Für große N ist

$$N^2 \gg N+1. \quad (95)$$

Unter dieser Annahme können die Terme mit dem Faktor m_0 vernachlässigt werden.

In Analogie zu (31) können wir eine Massenverteilung $\rho_c(t, \mathbf{r})$, definieren:

$$\rho_c(t, \mathbf{r}_{\beta}) := \sum_{\beta=1}^N m_{\beta} \left\{ \int \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^N d^3 \mathbf{r}_{\gamma} \right\} |\chi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{\beta-1}, \mathbf{r}_{\beta}, \mathbf{r}_{\beta+1}, \dots, \mathbf{r}_N)|^2. \quad (96)$$

Im Falle einer stationären Lösung für χ , also wenn N Teilchen ihren Ort relativ zum Massenschwerpunkt über die Zeit beibehalten, entspricht $\rho_c(t, \mathbf{r})$ der Massenverteilung relativ zum Massenschwerpunkt. Ein Beispiel hierfür wäre ein Molekül.

Das noch ausständige Integral über $d^3 \mathbf{r}'_{\beta}$ benennen wir um:

$$\mathbf{r}'_{\beta} \rightarrow \mathbf{r}'. \quad (97)$$

In der Näherung für große N unter Verwendung der Definition (94) reduziert sich V_g für die Wellenfunktion (85) zu

$$V_g(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \simeq -G \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \int d^3 \mathbf{c}' \int d^3 \mathbf{r}' \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \rho_c(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{c} - \mathbf{c}' + \mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}'\|} . \quad (98)$$

3.4 Weite Wellenfunktion

Bei Betrachtung der genäherten analytischen Form in (98) ist ersichtlich, dass diese für eine Aufspaltung in einen Anteil, der vom Massenschwerpunkt abhängt und in einen, der von den Relativkoordinaten abhängt, nicht ausreicht. Hierfür müssen weitere Näherungsannahmen getroffen werden. In weiterer Folge betrachten wir eine Wellenfunktion, deren Ausdehnung weit über das aus den $(N+1)$ Teilchen bestehende Objekt, welches sie beschreibt, hinausreicht. Bei einer solchen Wellenfunktion kann die Annahme gemacht werden, dass sie sich über eine Distanz in der Größe eines Abstands eines Teilchens vom Massenschwerpunkt kaum verändert:

$$|\psi(t, \mathbf{c} + \mathbf{r}_\alpha)| \approx |\psi(t, \mathbf{c})| . \quad (99)$$

In diesem Fall ersetzen wir in (98) \mathbf{c}' mit $\mathbf{c}' + \mathbf{r}_\alpha$ und erhalten

$$V_g(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \simeq -G \sum_{\alpha=1}^N \int d^3 \mathbf{c}' \int d^3 \mathbf{r}' \frac{|\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \rho_c(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{c} - \mathbf{c}' - \mathbf{r}'\|} . \quad (100)$$

Bei Betrachtung von (96) ist zu erkennen, dass $\rho_c(t, \mathbf{r}_\beta)$ der Summe der Massendichten $\rho^{mat}(t, \mathbf{r}_\beta)$ der Teilchen 1 bis N relativ zum Massenschwerpunkt entspricht:

$$\rho_c(t, \mathbf{r}_\beta) = \sum_{\beta=1}^N \rho^{mat}(t, \mathbf{r}_\beta) . \quad (101)$$

Da das Gravitationspotential des β -ten Teilchens

$$\phi_\beta(t, \mathbf{x}) = -GM \int d^3 \mathbf{y} \frac{\rho^{mat}(t, \mathbf{x}_\beta)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \quad (102)$$

erfüllt, kann der betroffene Term in (98) identifiziert und ersetzt werden, sodass

$$V_g(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \simeq \int d^3 \mathbf{c}' |\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{M} \sum_{\beta=1}^N \phi_\beta(\mathbf{c} - \mathbf{c}' + \mathbf{r}_\alpha) . \quad (103)$$

Mit den in diesem Unterkapitel getätigten Näherungsannahmen verliert ϕ_β seine α -Abhängigkeit, weshalb sich die Summe über m_α ausführen lässt und mit

$$\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha = M - m_0 \simeq M \quad (104)$$

sich dieser Term wegekürzt. Schließlich ergibt sich für V_g eine alleinige Abhängigkeit von den Massenschwerpunkt-Koordinaten:

$$V_g(t, \mathbf{c}) \simeq \int d^3 \mathbf{c}' |\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \Phi(\mathbf{c} - \mathbf{c}') . \quad (105)$$

Unter Verwendung dieser Gravitationsenergie, der kinetischen Energie, die mit der inversen Kinetischen Energiemetrik aus (84) geschrieben wird und der Wellenfunktion aus (85) wird die (N+1)-Teilchen SN-Gleichung zu

$$i\hbar \partial_t \left[\tilde{N} \psi(t, \mathbf{c}) \chi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2} (\Delta_c + \Delta_r) + V_g(t, \mathbf{c}) \right] \tilde{N} \psi \chi \quad (106)$$

und unter Verwendung der Produktregel für Ableitungen und der Abhängigkeiten der einzelnen Komponenten von \mathbf{c} und \mathbf{r}_α zu

$$i\hbar \tilde{N} [\chi \partial_t \psi + \psi \partial_t \chi] = -\frac{\hbar^2}{2} \tilde{N} \chi \Delta_c \psi - \frac{\hbar^2}{2} \tilde{N} \psi \Delta_r \chi + \tilde{N} \chi V_g(t, \mathbf{c}) \psi . \quad (107)$$

Nach Wegkürzen von \tilde{N} lässt sich diese Gleichung in einen Teil, der die Entwicklung der von den Massenschwerpunkt-Koordinaten abhängigen Wellenfunktion ψ beschreibt, und einen, der die Entwicklung der von den Relativkoordinaten abhängigen Wellenfunktion χ , zerlegen:

$$\begin{aligned} i\hbar \chi \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2} \chi \Delta_c \psi + \chi V_g(t, \mathbf{c}) \psi , \\ i\hbar \psi \partial_t \chi &= -\frac{\hbar^2}{2} \psi \Delta_r \chi . \end{aligned} \quad (108)$$

Diese vereinfachen sich nach einer Division durch $\chi \neq 0$ bzw. $\psi \neq 0$ zu

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi &= -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_c \psi + V_g(t, \mathbf{c}) \psi , \\ i\hbar \partial_t \chi &= -\frac{\hbar^2}{2} \Delta_r \chi . \end{aligned} \quad (109)$$

Zu erkennen ist, dass sich χ wie ein freies Teilchen verhält, während ψ auch dem Einfluss des Gravitationspotentials unterliegt.

4 Näherungen für BEC-CDM-Halos

In diesem Unterkapitel werden Überlegungen für konkrete Fälle eines BEC-CDM-Halos angestellt.

Wagner beschreibt eine Näherung in [29], bei der DM-Halo (zwischen den Radien $r_{min} \neq 0$, dem minimalen Radius der Halo-Struktur und r_{max} , dem maximalen Radius der Halo-Struktur) als homogenes Fluid angenommen werden. Erforderlich ist für diese Näherung eine hohe Teilchenanzahl. Ein sphärischer DM-Halos mit homogener Massenverteilung würde folgendes Gravitationspotential erzeugen [2]:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 + const. \quad (110)$$

$\Phi(r)$ ist das Potential eines harmonischen Oszillators und somit für den Potentialterm in (105) geeignet. Ω ist die Oszillatorfrequenz und ist mit

$$\Omega = \left(\frac{4\pi G\rho}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (111)$$

gegeben. ρ ist die vom Radius innerhalb des Halos unabhängige konstante Massendichte.

Als Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ wird folgende, sphärisch symmetrische Wellenfunktion mit der Halbwertsbreite a verwendet [12]:

$$\psi(t = 0, r) = (\pi a^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right). \quad (112)$$

Ziel ist es, die Entwicklung der nur vom Massenschwerpunkt und der Zeit abhängigen Wellenfunktion ψ im Rahmen der SN-Gleichung (109) numerisch zu untersuchen. Von besonderem Interesse ist es, jenen Radius in Abhängigkeit von der Zeit zu eruieren, der 99% der Wahrscheinlichkeitsdichte beinhaltet. Im Weiteren wird die angewandte Numerik erörtert.

4.1 Numerische Methode

Die numerische Methode stützt sich zur Gänze auf die Dissertation Peter Jay Salzmans [26], lediglich das verwendete Potential ist ein anderes.

Um die Schrödinger-Newton-Gleichung für die ψ aus (109) zu lösen, wird zunächst festgestellt, dass die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $n + 1$, um $-\frac{\Delta t}{2}$ in der Zeit zurücktranslatiert, gleich der Wellenfunktion zum Zeitpunkt n ist, die um $\frac{\Delta t}{2}$ in der Zeit voraustranslatiert wird. In Operatorschreibweise ergibt dies die Gleichung

$$\exp\left(\frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right)\psi_j^{n+1} = \exp\left(\frac{-i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right)\psi_j^n. \quad (113)$$

Dabei bezeichnet \hat{H} den Hamiltonoperator, und $\exp\left(\frac{i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right)$ bzw. $\exp\left(\frac{-i\hat{H}\Delta t}{2\hbar}\right)$ den Zeitentwicklungsoperator für die zeitliche Entwicklung um $\frac{\Delta t}{2}$ in die Vergangenheit bzw. Zukunft. Die Wellenfunktion wird hier angeschrieben als

$$\psi_j^n = \psi(j\Delta r, n\Delta t) . \quad (114)$$

Der Index j bezeichnet somit den j -ten räumlichen Schritt der Schrittgröße Δr und n den n -ten zeitlichen Schritt der Schrittgröße Δt . Hierbei wird sphärische Symmetrie der Wellenfunktion angenommen.

Nun wird auf beiden Seiten eine Näherung durchgeführt, die Operatoren werden nach dem zweiten Glied abgebrochen:

$$\left[\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right] \psi_j^{n+1} \simeq \left[\hat{\mathbb{1}} - \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right] \psi_j^n . \quad (115)$$

Nun wird Gleichung (115) für ψ_j^n gelöst:

$$\begin{aligned} \psi_j^{n+1} &= \left(\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right)^{-1} \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right) \psi_j^n \\ &= \left(\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right)^{-1} \left(\hat{\mathbb{2}} - \left[\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right] \right) \psi_j^n \\ &= \left(2 \left[\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right]^{-1} - \hat{\mathbb{1}} \right) \psi_j^n . \end{aligned} \quad (116)$$

Die hochgestellte -1 bezeichnet hier die inverse Operation zu dem in Klammer gesetzten Operator. Es wird nun der Operator \hat{Q} definiert, dessen Inverse in Gleichung (116) identifiziert werden kann.

$$\hat{Q} := \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right) \iff \hat{Q}^{-1} = 2 \left(\hat{\mathbb{1}} + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \hat{H} \right)^{-1} \quad (117)$$

Wird nun \hat{Q}^{-1} in (116) eingesetzt und

$$\hat{Q}^{-1} \psi_j^n := \Upsilon_j^n \quad (118)$$

definiert, so ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} \psi_j^{n+1} &= \left(\hat{Q}^{-1} - \hat{\mathbb{1}} \right) \psi_j^n \\ &= \hat{Q}^{-1} \psi_j^n - \psi_j^n \\ &= \Upsilon_j^n - \psi_j^n . \end{aligned} \quad (119)$$

Um bei bekannter Wellenfunktion ψ^n beim Zeitschritt n die unbekannte Wellenfunktion ψ^{n+1} beim Zeitschritt $n+1$ zu erhalten, wird wie folgt vorgegangen. Zunächst wird \hat{Q} auf beide Seiten der Gleichung (118) angewandt:

$$\hat{Q} \Upsilon_j^n = \psi_j^n . \quad (120)$$

Dieses lineare Gleichungssystem (es gibt je eine Gleichung für den Raumschritt j) wird für die unbekannte Funktion Υ^n gelöst. Anschließend wird davon die bekannte Wellenfunktion ψ^n subtrahiert:

$$\psi^{n+1} = \Upsilon^n - \psi^n . \quad (121)$$

Nun gehen wir auf \hat{Q} näher ein. Wir betrachten \hat{Q} nun nicht mehr als Operator, sondern als Funktion in Analogie dazu, dass wir für \hat{H} nun die Hamiltonfunktion der SN-Gleichung für die Massenschwerpunkt-Koordinaten aus (109) verwendet wird.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} H \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_c^2 + V_g \right) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n - \frac{i\hbar\Delta t}{4M} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] , & r \neq 0 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n - \frac{3i\hbar\Delta t}{4M} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] , & r = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (122)$$

Hier wurde der Laplace-Operator für Kugelkoordinaten verwendet, unter der Annahme sphärischer Symmetrie. Die Gravitationsenergie V_g erhält wie die Wellenfunktion Indizes in Abhängigkeit der räumlichen und zeitlichen Position. Es müssen nun drei Fälle unterschieden werden: Jener bei $r = 0$, der letzte räumliche Punkt und alle Fälle dazwischen. Zunächst betrachten wir die Fälle im Intervall $(0, N - 1)$. Unter Verwendung des Falles für $r \neq 0$ von (122) ergibt sich

$$\begin{aligned} Q\Upsilon_j^n &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n - \frac{i\hbar\Delta t}{4M} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \Upsilon_j^n \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_j^n \right] \Upsilon_j^n - \frac{i\hbar\Delta t}{4M} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Upsilon_j^n}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Upsilon_j^n}{\partial r^2} \right] . \end{aligned} \quad (123)$$

Nun werden die Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach r genähert.

$$\begin{aligned} Q\Upsilon_j^n &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_j^n \right] \Upsilon_j^n - \frac{i\hbar\Delta t}{4M} \left[\frac{1}{j\Delta r} \left(\frac{\Upsilon_{j+1}^n - \Upsilon_{j-1}^n}{2\Delta r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\Upsilon_{j+1}^n - 2\Upsilon_j^n + \Upsilon_{j-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) \right] \\ &= -\frac{i\hbar\Delta t}{8M(\Delta r)^2} \left(\frac{j-1}{j} \right) \Upsilon_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n + \frac{i\hbar\Delta t}{4M(\Delta r)^2} \right] \Upsilon_j^n \\ &\quad - \frac{i\hbar\Delta t}{8M(\Delta r)^2} \left(\frac{j+1}{j} \right) \Upsilon_{j+1}^n \end{aligned} \quad (124)$$

Dabei werden folgende Konstanten definiert:

$$R := \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} , \quad K := \frac{i\hbar}{8M} , \quad P := \frac{i\Delta t}{2\hbar} . \quad (125)$$

Dadurch kann Gleichung (124) in kompakter Form geschrieben werden:

für $j \in (0, N-1)$:

$$Q\Upsilon_j^n = -KR \left(\frac{j-1}{j} \right) \Upsilon_{j-1}^n + \frac{1}{2} [1 + PV_{gj}^n + 2KR] \Upsilon_j^n - KR \left(\frac{j+1}{j} \right) \Upsilon_{j+1}^n. \quad (126)$$

Als nächstes betrachten wir den Fall bei $j = N-1$. Eine notwendige Bedingung einer quadratintegriblen Funktion ist, dass ihr Wert bei Unendlich Null wird. Im Fall eines Computerprogrammes muss ein Punkt definiert werden, der diese Unendlichkeit repräsentiert, in diesem Fall $j = N$. Somit ist $j = N-1$ der Punkt davor, also der letzte Punkt, der einen Wert hat, der ungleich Null ist. Gleichung (126) ergibt in diesem speziellen Fall:

für $j = N-1$:

$$Q\Upsilon_{N-1}^n = -KR \left(\frac{N-2}{N-1} \right) \Upsilon_{N-2}^n + \frac{1}{2} [1 + PV_{g(N-1)}^n + 2KR] \Upsilon_{N-1}^n. \quad (127)$$

Als dritter Fall bleibt noch jener bei $j = 0$. Hierfür verwenden wir den Ausdruck von Q für $r = 0$ aus (122) und nähern die Ableitungen zweiter Ordnung nach r analog zu (124).

$$\begin{aligned} Q\Upsilon_j^n &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n - \frac{3i\hbar\Delta t}{4M} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \Upsilon_j^n \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n \right] \Upsilon_j^n - \frac{3i\hbar\Delta t}{8M} \left(\frac{\Upsilon_{j+1}^n - 2\Upsilon_j^n + \Upsilon_{j-1}^n}{(\Delta r)^2} \right) \\ &= -\frac{3i\hbar\Delta t}{8M(\Delta r)^2} \Upsilon_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{i\Delta t}{2\hbar} V_{gj}^n + \frac{3i\hbar\Delta t}{2M(\Delta r)^2} \right] \Upsilon_j^n \\ &\quad - \frac{3i\hbar\Delta t}{8M(\Delta r)^2} \Upsilon_{j+1}^n \end{aligned} \quad (128)$$

Für $j = 0$ unter Verwendung der Konstanten aus (125) ergibt dies:

$$Q\Upsilon_0^n = -3KR\Upsilon_{-1}^n + \frac{1}{2} [1 + PV_{g0}^n + 12KR] \Upsilon_0^n - 3KR\Upsilon_1^n. \quad (129)$$

Aufgrund der Forderung sphärischer Symmetrie muss

$$\Upsilon_{-1} = \Upsilon_1 \quad (130)$$

gelten, weshalb sich (129) folgendermaßen schreiben lässt:

für $j = 0$:

$$\hat{Q}\Upsilon_0^n = \frac{1}{2} [1 + PV_{g0}^n + 12KR] \Upsilon_0^n - 6KR\Upsilon_1^n. \quad (131)$$

Insgesamt ergibt sich ein Gleichungssystem, welches mithilfe einer tridiagonalen Matrix und zwei Vektoren, die die Wellenfunktion ψ^n und die Funktion Υ^n zu den jeweiligen Ortsschritten beinhalten.

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & & \dots \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & & \dots \\ & & & \ddots & & \\ & & \dots & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & \dots & & & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Upsilon_1^n \\ \Upsilon_2^n \\ \Upsilon_3^n \\ \vdots \\ \Upsilon_{N-2}^n \\ \Upsilon_{N-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^n \\ \psi_1^n \\ \psi_2^n \\ \vdots \\ \psi_{N-2}^n \\ \psi_{N-1}^n \end{pmatrix} \quad (132)$$

Die Matrixeinträge sind von j und der potentiellen Energie V_{gj}^n abhängig. Wird als Konvention $a_0 = c_{N-1} := 0$ definiert, so lassen sich die restlichen Einträge, die sich auf die Faktoren in den Gleichungen (126), (127) und (131) beziehen, folgendermaßen anschreiben:

$$\begin{aligned} \text{für } j = 0: \quad b_0 &= \frac{1}{2} [1 + PV_{g0}^n + 12KR] \quad , \quad c_0 = -6KR \\ \text{für } 0 < j < N-1: \quad a_j &= -KR \left(\frac{j-1}{j} \right) \quad , \quad b_j = \frac{1}{2} [1 + PV_{gj}^n + 2KR] \quad , \\ &\quad c_j = -KR \left(\frac{j+1}{j} \right) \\ \text{für } j = N-1: \quad a_{N-1} &= -KR \left(\frac{N-2}{N-1} \right) \quad , \quad b_{N-1} = \frac{1}{2} [1 + PV_{g(N-1)}^n] \quad . \end{aligned} \quad (133)$$

Als potentielle Energie verwenden wir jene aus der Näherung von (105) mit $\Phi(\mathbf{c} - \mathbf{c}')$ als das harmonische Oszillator-Potential (110):

$$V_g(t, \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \Omega^2 \int d^3 \mathbf{c}' |\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|^2 \quad . \quad (134)$$

Ω kann im Fall einer konstanten Massendichte ρ vor das Integral gezogen werden.

Wir analysieren nun den Integralterm von (134). Wir bezeichnen diesen Term mit I :

$$I = \int d^3 \mathbf{c}' |\psi(t, \mathbf{c}')|^2 \|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|^2 \quad . \quad (135)$$

Wir berechnen nun zunächst $\|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|^2$, wobei \mathbf{c} die Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) und \mathbf{c}' die Kugelkoordinaten (r', θ', ϕ') . Zu beachten ist, dass $\|\mathbf{c}\| = r$ bzw. $\|\mathbf{c}'\| = r'$ nicht mit einem Bezug auf die Relativkoordinaten aus dem vorigen

Kapitel verwechselt wird.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi - r' \sin \theta' \cos \phi' \\ r \sin \theta \sin \phi - r' \sin \theta' \sin \phi' \\ r \cos \theta - r' \cos \theta' \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r'^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \cos \phi \cos \phi' \\
&\quad + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r'^2 \sin^2 \theta' \sin^2 \phi' - 2rr' \sin \theta \sin \theta' \sin \phi \sin \phi' \\
&\quad + r^2 \cos^2 \theta + r'^2 \cos^2 \theta' - 2rr' \cos \theta \cos \theta'
\end{aligned} \tag{136}$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Formeln für beliebige Winkel α und β ,

$$\begin{aligned}
\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 , \\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta , \\
\sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] , \\
\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] ,
\end{aligned} \tag{137}$$

lässt sich (136) weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{c} - \mathbf{c}'\|^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' [\sin \theta \sin \theta' (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') + \cos \theta \cos \theta'] \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr' [\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'] \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr' \left[\frac{1}{2} (\cos(\theta - \theta') - \cos(\theta + \theta')) \cos(\phi - \phi') \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\cos(\theta - \theta') + \cos(\theta + \theta')) \right] \\
&= r^2 + r'^2 - rr' [\cos(\theta - \theta') (\cos(\phi - \phi') + 1) \\
&\quad - \cos(\theta + \theta') (\cos(\phi - \phi') - 1)] .
\end{aligned} \tag{138}$$

Nach Einsetzen dieses Ergebnisses in (135) erhalten wir für das Integral I unter Berücksichtigung der Annahme, dass die Wellenfunktion sphärische Symmetrie aufweist, also $\psi(t, \mathbf{c}') = \psi(t, r')$ gilt und somit θ' - und ϕ' -unabhängig ist,

eine Summe aus folgenden Integralen:

$$\begin{aligned}
A &:= \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^2 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 r^2 , \\
B &:= \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^4 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 , \\
C &:= - \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 r \cos(\theta - \theta') \cos(\phi - \phi') , \\
D &:= - \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 r \cos(\theta - \theta') , \\
E &:= \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 r \cos(\theta + \theta') \cos(\phi - \phi') , \\
F &:= - \int_0^\infty dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' r'^3 \sin \theta' |\psi(t, r')|^2 r \cos(\theta + \theta') .
\end{aligned} \tag{139}$$

Für A und B ergibt die Integration über den Winkelanteil je den Faktor 4π . Der ϕ' -abhängige Term in C und E liefert jeweils das Integral

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\phi' \cos(\phi - \phi') &= [-\sin(\phi - \phi')]_0^{2\pi} \\
&= -\sin(\phi - 2\pi) + \sin(\phi) \\
&= 0 ,
\end{aligned} \tag{140}$$

welches aufgrund der 2π -Periodizität der Sinusfunktion Null ist. Damit sind auch $C = E = 0$. Bei den Integralen D und F sind zwei unterschiedliche Integrale zu lösen.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \cos(\theta - \theta') &= \int_0^\pi d\theta' \frac{1}{2} [\sin(2\theta' - \theta) + \sin(\theta)] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\theta' - \theta) + \sin(\theta) \theta' \right]_0^\pi \\
&= -\frac{1}{4} \cos(2\pi - \theta) - \frac{\pi}{2} \sin(\theta) + \frac{1}{4} \cos(-\theta) \\
&= -\frac{\pi}{2} \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{141}$$

Hier wurde im ersten Schritt die symmetrische Eigenschaft der Kosinus-Funktion ausgenutzt und die trigonometrische Formel

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} [\sin(\beta + \alpha) - \sin(\beta - \alpha)] \quad (142)$$

für beliebige Winkel α und β verwendet. Der dazu analoge Integralterm in F ergibt ebenfalls $-\frac{\pi}{2} \sin \theta$, weshalb $D = -F$ und sich diese Terme wegkürzen. Zusammengefasst ergibt sich nun für das Integral I :

$$I = 4\pi r^2 \int_0^\infty dr' r'^2 |\psi(t, r')|^2 + 4\pi \int_0^\infty dr' r'^4 |\psi(t, r')|^2 . \quad (143)$$

Mit diesem Ergebnis kann nun die potentielle Energie aus (134) in pseudo-numerischem Code angeschrieben werden:

$$V_{gj}^n = 2\pi\Omega^2 \left[(j\Delta r)^2 \sum_{i=0}^\infty i^2 (\Delta r)^3 |\psi_i^n|^2 + \sum_{i=0}^\infty i^4 (\Delta r)^5 |\psi_i^n|^2 \right] . \quad (144)$$

Als letzter Punkt wird nun die Lösung des Gleichungssystems aus (132) beschrieben, wiederum in Anlehnung an die Dissertation von Salzman [26]. Verwendet wird der sogenannte *Thomas-Algorithmus*. Für jeden Zeitschritt t wird ein Gleichungssystem von N linearen Gleichungen mit N Unbekannten generiert, welches folgende Form hat:

$$\begin{aligned} b_0 x_0 + c_0 x_1 &= d_0 \\ a_1 x_0 + b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{N-2} x_{N-3} + b_{N-2} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1} &= d_{N-2} \\ a_{N-1} x_{N-2} + b_{N-1} x_{N-1} &= d_{N-1} . \end{aligned} \quad (145)$$

Ein Gleichungssystem dieser Form wird *triagonal* genannt, wobei a_i die *super-diagonalen*, b_i die *diagonalen* und c_i die *sub-diagonalen* Koeffizienten sind. Während die Koeffizienten d_i die Wellenfunktion ψ zum Zeitpunkt t repräsentieren, bezeichnen x_i die unbekannte Wellenfunktion Υ zum Zeitpunkt $t + \Delta t$. Der Index i bezeichnet die räumliche Position.

Dieses Gleichungssystem wird nun so modifiziert, dass es einfach gelöst werden kann. Zunächst wird die oberste Gleichung mit $\frac{a_1}{b_0}$ multipliziert und anschließend von der darunter liegenden Gleichung subtrahiert. Zudem werden neue Definitionen eingeführt:

$$\begin{aligned} B_0 &:= b_0 , \quad D_0 := d_0 \\ B_1 &:= b_1 - \frac{a_1}{B_0} c_0 , \quad D_1 := d_1 - \frac{a_1}{B_0} D_0 . \end{aligned} \quad (146)$$

Daraus resultiert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
B_0 x_0 + c_0 x_1 &= D_0 \\
B_1 x_2 + c_1 x_2 &= D_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\
&\vdots \\
a_{N-2} x_{N-3} + b_{N-2} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1} &= d_{N-2} \\
a_{N-1} x_{N-2} + b_{N-1} x_{N-1} &= d_{N-1} .
\end{aligned} \tag{147}$$

Nun wird die zweite Gleichung von oben mit $\frac{a_2}{B_1}$ multipliziert und von der dritten Gleichung subtrahiert, wobei abermals definiert wird:

$$B_2 := b_2 - \frac{a_2}{B_1} c_1 , \quad D_2 := d_2 - \frac{a_2}{B_1} D_1 . \tag{148}$$

Dieses Schema wird so oft wiederholt, bis alle a_i eliminiert sind und

$$\begin{aligned}
B_0 x_0 + c_0 x_1 &= D_0 \\
B_1 x_1 + c_1 x_2 &= D_1 \\
B_2 x_2 + c_2 x_3 &= D_2 \\
&\vdots \\
B_{N-2} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1} &= D_{N-2} \\
B_{N-1} x_{N-1} &= D_{N-1}
\end{aligned} \tag{149}$$

bleibt. Das Gleichungssystem kann nun rekursiv gelöst werden, indem x_{N-1} aus der letzten Gleichung eruiert wird, für die Berechnung von x_{N-2} aus der vorletzten Gleichung verwendet wird usw.

Zusammengefasst ergibt dies mit der Konvention, dass

$$a_0 = c_{N-1} := 0 , \tag{150}$$

und für $i = 0, \dots, N-1$,

$$B_i = b_i - \frac{a_i}{B_{i-1}} c_{i-1} , \quad D_i = d_i - \frac{a_i}{B_{i-1}} D_{i-1} , \tag{151}$$

folgende x_i für $i = N-1, \dots, 0$:

$$x_i = \frac{D_i - c_i x_{i+1}}{B_i} . \tag{152}$$

Die numerische Lösung der SN-Gleichung der Massenschwerpunkt-Wellenfunktion ψ wird also in folgenden sechs Schritten bewältigt:

1. Die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ aus (112) wird in einen $N \times 1$ -Vektor, ψ_j^0 an N unterschiedlichen Raumschritten geladen.

2. Die potentielle Energie V_{jj}^0 wird mithilfe von ψ_j^0 berechnet.
3. Die triagonale Matrix (132) wird aufgestellt.
4. Mit dem Thomas Algorithmus wird das Gleichungssystem (132) gelöst.
5. Mit $\psi_j^1 = \Upsilon_j^0 - \psi_j^0$ wird die neue Wellenfunktion eruiert.
6. Für beliebig viele Zeitschritte werden die Punkte 2.-5. wiederholt.

4.2 Python-Skript

In diesem Unterkapitel wird ein Vorschlag für den tatsächlichen Python Code, der für die Version Python 3.7 geschrieben wurde, Stück für Stück und in chronologischer Reihenfolge angeführt und erklärt. Aufgrund der geringen Leistung der im Rahmen dieser Arbeit zur Verfügung gestandenen Rechner konnten keine tatsächlichen Ergebnisse für einen DM-Halo erhalten werden.

1. Importierte Module:

```
import math
import numpy as np
```

Importiert werden hier zunächst die Module `math` und `numpy`. Ersteres liefert den im Weiteren verwendeten Wert für die Zahl Pi (`math.pi`) sowie die Exponentialfunktion `math.exp()`. Die `numpy`-Funktion `np.array()` wird später für die Subtraktion zweier Vektoren voneinander gebraucht.

2. Naturkonstanten und definierte konkrete Werte:

```
G = 6.67430*10**(-11)
h = 1.054571817*10**(-34)

rho = 1
M = 1
a = 1
om_sq = (4*math.pi*G*rho/3)

dr = 0.0001
dt = 0.01
R = dt/dr**2
K = h/(8*M)*1j
P = dt/(2*h)*1j

N = 3000
t = 1
```

Hier werden einige Definitionen vorgenommen, derer man sich im Laufe des Programmes bedient. G ist die Newtonsche Gravitationskonstante in $[\frac{m^3}{kg s^2}]$ und \hbar das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum in Js . ρ in $\frac{kg}{m^3}$, M in kg und a in m bezeichnen die konstante mittlere Dichte und die Gesamtmasse des DM-Halos bzw. die Halbwertsbreite, die als Größe des Halo-Radius angenommen wird, in (112). Diese können praktisch beliebig gewählt werden. Als Beispiel seien hier Werte vorgeschlagen, die sich an eine Abschätzung der Masse und Ausdehnung der Milchstraße [24] anlehnen:

$$\begin{aligned} M(< 20kpc) &= 1.37 \cdot 10^{11} M_{\odot} \\ a &= 6.171 \cdot 10^{20} m \\ \rho &= 2.77 \cdot 10^{-22} \frac{kg}{m^3} . \end{aligned} \tag{153}$$

M_{\odot} bezeichnet die Sonnenmasse. Anderenfalls können beispielsweise auch als Näherungswerte für Zwerggalaxien, die von Dunkler Materie dominiert sind, für die Gesamtmasse $10^{10} M_{\odot}$ und für den Radius $1 - 10kpc$ angenommen werden. ω_{sq} bezeichnet die in (111) definierte Oszillatorfrequenz quadriert. dr und dt sind die definierten räumlichen bzw. zeitlichen Schrittgrößen. Je nach dem Anspruch des Maßes an Genauigkeit, können diese variiert werden. Allerdings muss dr so klein gewählt werden, dass die über den Raum integrierte Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenfunktion stets rund 1 ergibt. Die darauf folgenden Konstanten treten in den Einträgen der triagonalen Matrix (132) auf. Zuletzt sind noch die Anzahl der Raumschritte N (j läuft von 0 bis $N - 1$) und Zeitschritte n definiert. N muss so auf dr abgestimmt sein, dass der letzte errechnete Wert von ψ_{N-1}^n Null ist. Dann ist nämlich die gesamte Wellenfunktion erfasst.

3. Berechnung des Wellenfunktion-Vektors mit Werten ψ_j^0 :

```
psi_n_j = []

for J in range(0, N):
    psi_n_j[0].append((math.pi*a**2)**(-3/4)
                      *math.exp(-(J*dr)**2/(2*a**2)))
```

Hier wird zunächst die Liste `psi_n_j` vorbereitet, in die im Weiteren alle Vektoren ψ_j^n in Form von Listen gespeichert werden. Dann wird für jeden Raumschritt der Eintrag für den Wellenvektor zum Zeitpunkt 0 unter Verwendung der Wellenfunktion aus (112) berechnet und gespeichert. Um in Python eine Verwechslung mit komplexen Zahlen zu vermeiden, wird innerhalb des Programmes für Zeitschritte j das große J verwendet.

4. Berechnung der potentiellen Energie:

```
for n in range(0, t):
    V_n_j = []
```

```

for J in range(0, N):
    sum1 = 0
    sum2 = 0
    i = 0
    while i < N:
        sum1 += i**2*dr**3*abs(psi_n_j[n][i])**2
        sum2 += i**4*dr**5*abs(psi_n_j[n][i])**2
        i += 1
    V_n_j.append(2*math.pi*om_sq*((J*dr)**2)*sum1
                                     +sum2)

```

Ab hier werden die oben genannten Schritte 2.-5. berechnet und für alle Zeitschritte wiederholt. Gestartet wird mit einer leeren Liste, in der im Weiteren die potentiellen Energien für jeden Raumschritt gespeichert werden. Letzteres geschieht hier in der letzten Zeile, wobei die Formel (144) verwendet wird.

5. Lösung des triagonalen Gleichungssystems mithilfe des Thomas Algorithmus:

```

a_0 = 0
c_Nminus1 = 0

Y_n_j = []
B = []
D = []

for i in range(0, N):
    if i == 0:
        B.append(B_j[i])
        D.append(psi_n_j[n][i])
    else:
        B.append(B_j[i]-A_j[i]*C_j[i-1]/B[i-1])
        D.append((psi_n_j[n][i]-A_j[i]*D[i-1])
                  /B[i-1])

for i in range(0, N):
    if i == 0:
        Y_n_j.append(D[N-1-i]/B[N-1-i])
    else:
        Y_n_j.append((D[N-1-i]-C_j[N-1-i]
                      *X[i-1])/B[N-1-i])

Y_n_j.reverse()

del(A_j, B_j, C_j, B, D)

```


Als vorletzter Schritt wird die Wellenfunktion Υ_j^n berechnet. Hierfür werden die Definitionen aus (151) und (152) verwendet. Zuletzt werden auch die Listen, in denen die Koeffizienten gespeichert wurden, gelöscht, da diese nicht mehr gebraucht werden.

6. Berechnung der neuen Wellenfunktion:

```
psi_n_j.append(list(np.array(Y_n_j)
                      -np.array(psi_n_j[n])))

del(Y_n_j)
```

Zuletzt wird die neue Wellenfunktion für den darauffolgenden Zeitschritt berechnet und in der Liste für alle Wellenfunktionen abgespeichert. Die Hilfs-wellenfunktion Υ_j^n wird gelöscht, da auch sie nicht mehr benötigt wird.

Da die Wellenfunktion-Vektoren ψ_j^n in der Liste **psi_n_j** in Form von Listen abgespeichert werden, kann am Ende des Programms auch die über das gesamte Volumen integrierte Wahrscheinlichkeitsdichte sowie beispielsweise jener Radius **r99**, innerhalb der sich 99% der Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenfunktion befindet, berechnet werden.

7. Berechnung der **r99**-Radien:

```
k = 0
r99=[]

while k < n:
    i = 0
    s = 0
    for k in psi_n_j[k]:
        s += 4*math.pi*(i)**2*dr**3*abs(k)**2
        i += 1
        if s > 0.99:
            r99.append((i-1)*dr)
            break
        else:
            continue
    k += 1
```

Hier wird wiederum eine leere Liste vorbereitet, bevor mithilfe der Listeneinträge der Wellenvektoren für jeden Zeitschritt berechnet wird, für welchen Radius **r99** gilt:

$$4\pi \int_0^{r99} dr' r'^2 |\psi^n| = 0,99 . \quad (154)$$

4.3 Weite Wellenfunktion in der Hartree-Fock-Näherung

In diesem Unterkapitel wird analysiert, wann eine Näherung wie in Gleichung (85) für die Beschreibung eines BEC-Halos in der Hartree-Fock-Näherung (10) zulässig ist. Dafür betrachten wir zwei unterschiedliche Beschreibungen der 1-Teilchen-Wellenfunktionen $\phi(t, \mathbf{x})$.

Im ersten Fall wird die Annahme getroffen, dass der Zustand der einzelnen Teilchen je mit einer ebenen Materiewelle beschrieben werden kann:

$$\phi(t, \mathbf{x}_a) = A_i \exp \left(-\frac{i}{\hbar} [Et - \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{x}_a] \right). \quad (155)$$

Die Energie E des Teilchens besitzt hier keinen Index, da sich innerhalb des BEC-Halos näherungsweise alle Teilchen in demselben Energiezustand befinden. \mathbf{x}_a wird nun durch die Ausdrücke (41) und (42) ersetzt und es wird die dadurch resultierende $(N+1)$ -Teilchen-Wellenfunktion $\hat{\Psi}(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ analog zu (10) angeschrieben.

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= A_0 \exp \left(-\frac{i}{\hbar} Et \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \left[\mathbf{c} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_\alpha}{m_0} \mathbf{r}_\alpha \right] \right) \\ &\cdot \prod_{\beta=1}^N A_\beta \exp \left(-N \frac{i}{\hbar} Et \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_\beta [\mathbf{c} + \mathbf{r}_\beta] \right) \end{aligned} \quad (156)$$

Dies lässt sich unter Verwendung, dass alle Teilchen dieselbe Masse haben, umschreiben:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(t, \mathbf{c}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) &= \exp \left(-(N+1) \frac{i}{\hbar} Et \right) \prod_{a=0}^N A_a \exp \left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{c} \right) \\ &\cdot \prod_{\alpha=1}^N \exp \left(\frac{i}{\hbar} [\mathbf{p}_\alpha - \mathbf{p}_0] \cdot \mathbf{r}_\alpha \right). \end{aligned} \quad (157)$$

Es ist zu erkennen dass sich die Wellenfunktion in diesem Fall in Produktterme aufspaltet, die separat von den Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten abhängen und damit die Näherung einer weiten Wellenfunktion wie in (85) zulässig ist.

Als Zweites betrachten wir den Fall, in dem $\phi(t, \mathbf{x}_a)$ als sphärisch symmetrisches Gaußpaket [11] die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen erfüllt:

$$\phi(t, r_a) = (\pi a^2)^{-\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{i\hbar t}{ma^2} \right)^2 \exp \left(-\frac{r_a^2}{2a^2 \left(1 + \frac{i\hbar t}{ma^2} \right)} \right). \quad (158)$$

Hier bezeichnet $r_a := \|\mathbf{x}_a\|$ und a die Halbwertsbreite. Wir betrachten nun r_a^2 für die Fälle, dass x_a in Abhängigkeit von den Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten aus (41) und (42) geschrieben wird.

$$\begin{aligned}
r_0^2 &= \|\mathbf{x}_0\|^2 \\
&= \left\| \mathbf{c} - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} \mathbf{r}_\beta \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 \left(c^i - \sum_{\beta=1}^N \frac{m_\beta}{m_0} r_\beta^i \right)^2
\end{aligned} \tag{159}$$

Der Index i bezeichnet hier die i -te Vektorkomponente.

$$\begin{aligned}
r_\alpha^2 &= \|\mathbf{x}_\alpha\|^2 \\
&= \|\mathbf{c} + \mathbf{r}_\alpha\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 (c^i + r_\alpha^i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^3 ((c^i)^2 + 2c^i r_\alpha^i + (r_\alpha^i)^2)
\end{aligned} \tag{160}$$

Zu erkennen ist, dass in (160) Mischterme auftreten, die Produkte von Komponenten von \mathbf{c} und \mathbf{r}_α enthalten. Solche Mischterme treten auch in (159) auf. Aus diesem Grund kann die Vielteilchen-Wellenfunktion in der Hartree-Fock-Näherung aus (10) nicht in der Form von (85) geschrieben werden, wenn die Einteilchen-Wellenfunktionen als Gaußpaket der Form (158) angenommen werden.

5 Diskussion

Die Vielteilchen-SN-Gleichung wurde nun dahingehend untersucht, wie ihre Terme in Abhängigkeit von Massenschwerpunkt- und Relativkoordinaten aussehen. Festgestellt wurde, dass unter bestimmten Näherungsannahmen bezogen auf Wellenfunktion und potentielle Energie, ein Gleichungssystem gefunden werden kann, mit dem die zeitliche Entwicklung zweier Teile der Vielteilchen-Wellenfunktion beschrieben wird: Eine Einteilchen-SN-Gleichung, die eine Wellenfunktion in Abhängigkeit von den Massenschwerpunkt-Koordinaten beschreibt und eine Schrödinger-Gleichung für freie Teilchen, die die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion in Abhängigkeit von den Relativkoordinaten beschreibt.

Bezogen auf die Dispersion der Wellenfunktion, die einen BEC-Halo beschreibt, ist erstere von Interesse. Könnte gezeigt werden, dass der Radius, in dem sich 99% der Wahrscheinlichkeitsdichte befindet, über die Zeit sich nicht wesentlich verändert, würde dies bedeuten, dass das Wellenpaket nicht zerfließt.

Auf einen BEC-Halo würde diese Beschreibung passen, da dieser über lange Zeiträume stabil bleibt, also weder kollabiert noch sich auflöst.

In diesem Zusammenhang wäre noch genauer zu prüfen, ob die Annahme einer weiten Wellenfunktion aus (99) für (bestimmte) BEC-Halos eine passable Näherung ist. Grundsätzlich wird in diesem Kontext (99) so interpretiert, dass sich die Dichte des Halos über weite Strecken kaum von der Zentralsdichte unterscheidet. Für näherungsweise homogene Massenverteilungen würde diese Annahme passen. Hier tritt allerdings das Problem auf, bei welchem Radius der Rand des Halos zu definieren ist. Vorzuschlagen wäre beispielsweise jener Radius, in dem sich 99% der Masse befindet [19].

Konkret wurde die Einteilchen-SN-Gleichung, welche die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion abhängig von der Massenschwerpunkt-Koordinate des DM-Halos beschreibt analysiert. Angenommen wurde, dass diese Wellenfunktion die Form eines Gaußprofils hat (112) und das Gravitationspotential des Halos dem harmonischen Oszillatorpotential einer homogenen Massenverteilung entspricht. Zur Lösung der Differentialgleichung wurde ein Python-Code geschrieben, der bis dato noch nicht getestet werden konnte. Die Schrittweite \mathbf{dr} müsste wahrscheinlich außergewöhnlich klein sein, um sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Hierbei tritt allerdings möglicherweise das Problem von starken Rundungsfehlern auf. Vorzuschlagen wäre, mit dimensionslosen Größen zu arbeiten. In diesem Fall müsste der Python-Code dementsprechend adaptiert werden.

Von besonderem Interesse wäre es mittels des Programmes herauszufinden, wie sich der Radius r_{99} , der 99% der Wahrscheinlichkeitsdichte enthält, sich über die Zeit verändert. Würde beispielsweise beobachtet werden, dass r_{99} über längere Zeiträume näherungsweise konstant bleibt, würde dies einen Hinweis darauf geben, dass die Selbstgravitation des DM-Halos mithilfe der Vielteilchen-SN-Gleichung beschrieben werden kann.

Da von besonderem Interesse das DM-Modell eines BEC-Halos war, wurde analysiert, welche Form die Einteilchen-Wellenfunktionen in der Hartree-Fock-Näherung haben müssten, um die getanen Näherungsannahmen zulässig zu machen. Gefunden wurde, dass die Beschreibung mittels einer ebenen Materiewelle solche legitimieren würde. Fraglich bleibt allerdings, wie realistisch diese Beschreibung wäre, da eine ebene Welle die Lösung der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen ist.

Die Beschreibung der Einteilchen-Wellenfunktionen durch sphärisch symmetrische Gaußpakete führen hingegen zu unerwünschten Mischtermen. Hier wäre es überlegenswert, wann diese Mischterme vernachlässigt werden könnten. Ebenso zeigt Gleichung (160), dass grundsätzlich in jeder Einteilchen-Wellenfunktion, für die gilt, dass

$$\phi(t, \mathbf{x}_a) \propto \exp(-r_a^\sigma), \quad (161)$$

wobei $\sigma \in \mathbb{N}$, Mischterme auftreten.

Bei erfolgreichen numerischen Berechnungen wäre desweiteren zu untersuchen, inwiefern sich **r99** verhält, wenn in (105) für Φ anstelle des harmonischen Oszillatorpotentials das selbst-konsistente, zum Gaußprofil gehörige Φ eingesetzt wird.

Literatur

- [1] BAHRAMI, M., GROSSARDT, A., DONADI, S., AND BASSI, A. The Schrödinger-Newton equation and its foundations. *New Journal of Physics* 16, 11 (nov 2014), 115007.
- [2] BINNEY, J., AND TREMAINE, S. *Galactic Dynamics: Second Edition*. 2008.
- [3] BISHOP, R. L. *Tensor Analysis on Manifolds*, 1. print.. ed. Macmillan, New York, NY [u.a.], 1968.
- [4] CHAVANIS, P.-H., AND KUMAR, S. Comparison between the Logotropic and Λ CDM models at the cosmological scale. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2017, 05 (may 2017), 018–018.
- [5] DEL POPOLO, A., AND LE DELLIOU, M. Small scale problems of the Λ CDM model: a short review. *Galaxies* 5, 1 (Feb 2017), 17.
- [6] DINE, M. The strong CP problem. In *Flavor Physics For The Millennium*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001, pp. 349–369.
- [7] DIÓSI, L. Gravitation and quantummechanical localization of macroobjects. *Physics Letters A* 105, 4 (1984), 199 – 202.
- [8] ELLIS, R. S. Gravitational Lensing: A Unique Probe of Dark Matter and Dark Energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 368, 1914 (2010), 967–987.
- [9] FLIESSBACH, T. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer Berlin Heidelberg, 2016.
- [10] FRÖHLICH, J., AND LENZMANN, E. Mean-Field Limit of Quantum Bose Gases and Nonlinear Hartree Equation. *Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (2003-2004). talk:18.
- [11] GIULINI, D., AND GROSSARDT, A. Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to the Schrödinger–Newton equation. *Classical and Quantum Gravity* 28, 19 (Sep 2011), 195026.
- [12] GIULINI, D., AND GROSSARDT, A. Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to a modified Schrödinger–Newton equation for a homogeneous-sphere potential. *Classical and Quantum Gravity* 30, 15 (Jul 2013), 155018.
- [13] GIULINI, D., AND GROSSARDT, A. Centre-of-mass motion in multi-particle Schrödinger–Newton dynamics. *New Journal of Physics* 16, 7 (Jul 2014), 075005.
- [14] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., AND SAFKO, J. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.

- [15] KAMIONKOWSKI, M. Possible Relics from New Physics in the Early Universe: Inflation, the Cosmic Microwave Background, and Particle Dark Matter, 1998.
- [16] KAPFERER, W. *Das Rätsel Dunkle Materie : Auf der Suche nach dem Unsichtbaren*. Springer Berlin Heidelberg Imprint: Springer, Berlin, Heidelberg, 2018.
- [17] MAGAÑA, J., AND MATOS, T. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. *Journal of Physics: Conference Series* 378 (Aug 2012), 012012.
- [18] MASSEY, R., KITCHING, T., AND RICHARD, J. The Dark Matter of Gravitational Lensing, 2010.
- [19] MEMBRADO, M., PACHECO, A. F., AND SAÑUDO, J. Hartree solutions for the self-Yukawian boson sphere. *Phys. Rev. A* 39 (Apr 1989), 4207–4211.
- [20] PENROSE, R. On gravity’s role in quantum state reduction. *Gen. Rel. Grav.* 28 (1996), 581–600.
- [21] PENROSE, R. Quantum computation, entanglement and state reduction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A* 356 (1998).
- [22] PENROSE, R. On the Gravitization of Quantum Mechanics 1: Quantum State Reduction. *Found. Phys.* 44 (2014), 557–575.
- [23] PETHICK, C. J., AND SMITH, H. *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, 2 ed. Cambridge University Press, 2008.
- [24] POSTI, LORENZO, AND HELMI, AMINA. Mass and shape of the Milky Way’s Dark Matter halo with globular clusters from Gaia and Hubble. *A&A* 621 (2019), A56.
- [25] RINDLER-DALLER, T., AND SHAPIRO, P. R. Angular momentum and vortex formation in Bose-Einstein-condensed cold dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 422, 1 (Mar 2012), 135–161.
- [26] SALZMAN, P. J. *Investigation of the Time Dependent Schrödinger-Newton Equation*. Dissertation, University of California, 2005.
- [27] SANDERS, R. H. *The Dark Matter Problem : A Historical Perspective*. Cambridge University Press, 2010.
- [28] SOMMEREGGER, A. Hydrodynamische Modellierung dunkler Materie in Galaxien. Bachelorarbeit. Universität Wien, 2018.
- [29] WAGNER, J. Cosmic structures from a mathematical perspective 1: dark matter halo mass density profiles. *General Relativity and Gravitation* 52, 6 (Jun 2020).
- [30] ZWICKY, F. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. 86 (Oct. 1937), 217.