Lema de bombeo

Clase 07

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Antes: ¿cómo obtener una exp. reg. desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Para $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$, considerar el conjunto:

$$\alpha_{p,q}^{X} \;\subseteq\; \Sigma^*$$

"el conjunto de todas las palabras w tal que existe un **camino** *(i.e. ejecución) desde p a q etiquetado por w y* **todos los estados** *en este camino están en X, con la posible* **excepción** *de p y q."*

Antes: ¿cómo obtener una exp. reg. desde un autómata?

Dado un autómata finito no-determinista (spdg. con un estado inicial):

$$\mathcal{A} \;=\; (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

Estrategia (algoritmo de McNaughton-Yamada)

1. Para cada $\alpha^X_{p,q}$, definir **inductivamente** una expresión regular $R^X_{p,q}$:

$$\mathcal{L}(R^X_{p,q}) \;=\; \alpha^X_{p,q}$$

2. Para $F = \{p_1, \ldots, p_k\}$ definir la **expresión regular**:

$$R_{\mathcal{A}} \;=\; R^Q_{q_0,p_1} + R^Q_{q_0,p_2} + \ldots + R^Q_{q_0,p_k}$$

3. Demostrar que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{L}(R_{\mathcal{A}})$$

Antes: Definición inductiva de $R^X_{p,q}$

Caso base: $X = \varnothing$

Sea $a_1, \ldots, a_k \in \Sigma$ todos las letras tal que:

$$(p, a_i, q) \ \in \ \Delta$$

- Si $p \neq q$, entonces:

$$R^{\varnothing}_{p,q} \ \stackrel{\text{def}}{\equiv} \ \begin{cases} a_1 + \cdots + a_k & \text{si } k \geq 1 \\ \varnothing & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

- Si $p = q$, entonces:

$$R^{\varnothing}_{p,q} \ \stackrel{\text{def}}{\equiv} \ \begin{cases} a_1 + \cdots + a_k + \epsilon & \text{si } k \geq 1 \\ \epsilon & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Antes: Definición inductiva de $R^X_{p,q}$

Caso general: $X \neq \varnothing$

Escoger un $r \in X$ cualquiera y construir:

$$R^X_{p,q} \stackrel{\text{def}}{\equiv} R^{X-\{r\}}_{p,q} + R^{X-\{r\}}_{p,r} \cdot \left(R^{X-\{r\}}_{r,r}\right)^* \cdot R^{X-\{r\}}_{r,q}$$

Proposición

Para todo $X \subseteq Q$ y $p, q \in Q$:

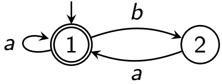
$$\mathcal{L}(R^X_{p,q}) = \alpha^X_{p,q}$$

Corolario

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(R_{\mathcal{A}})$$

Ejemplo de Algoritmo MNY

Considere el autómata:



$R^{\varnothing}$	1	2
1	$a^?$	b
2	a	ϵ

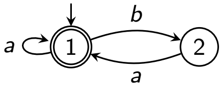
$R^{\{1\}}$	1	2
1	$a^? + a^? \cdot (a^?)^* \cdot a^?$	$b + a^? \cdot (a^?)^* \cdot b$
2	$a + a \cdot (a^?)^* \cdot a^?$	$\epsilon + a \cdot (a^?)^* \cdot b$

$$\equiv$$

$R^{\{1\}}$	1	2
1	a^*	$a^* b$
2	a^+	$\epsilon + a^+ b$

Ejemplo de Algoritmo MNY

Considere el autómata:



$R^{\{1\}}$	1	2
1	a^*	$a^* b$
2	a^+	$\epsilon + a^+ b$

$R^{\{1,2\}}$	1	2
1	$a^* + a^* b\,(\epsilon + a^+ b)^* a^+$	$a^* b + a^* b\,(\epsilon + a^+ b)^* (\epsilon + a^+ b)$
2	$a^+ + (\epsilon + a^+ b)(\epsilon + a^+ b)^* a^+$	$(\epsilon + a^+ b) + (\epsilon + a^+ b)(\epsilon + a^+ b)^* (\epsilon + a^+ b)$

$$\equiv$$

$R^{\{1,2\}}$	1	2
1	$a^*(ba^+)^*$	$(a^* b)(a^+ b)^*$
2	$(a^+ b)^* a^+$	$(a^+ b)^*$

Volviendo a la clase de hoy:
¿qué lenguajes no son regulares?

Supongamos que deseamos aceptar el siguiente lenguaje:

$$
\begin{aligned}
L &= \{\, a^i b^i \mid i \geq 0 \,\} \\
  &= \{\, \epsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots \,\}
\end{aligned}
$$

con un **autómata finito determinista**. ¿es posible?

¿cómo demostramos que L no es regular?

Outline

Outline

Lema de bombeo

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es **regular** entonces:

(LB) existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$

existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que

para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \in L$.

Demostración

(PIZARRA)

Contrapositivo del lema de bombeo

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB) **existe** un $N > 0$ tal que
para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$
existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que
para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \in L$.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si:

($\neg$LB) **para todo** $N > 0$
existe una palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$ tal que
para todo $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$
existe un $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \notin L$

entonces L **NO** es regular.

Jugando contra un demonio

"L **NO es** regular"

"L **es** regular"

El escoge un $N > 0$

Uno escoge $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$

El escoge $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$

Uno escoge $i \geq 0$

Uno gana si $xuv^i wz \notin L$

El gana si $xuv^i wz \in L$

Jugando contra un demonio (ejemplo)

"$a^n b^n$ **NO es** regular" — "$a^n b^n$ **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N}_{x} \cdot \underbrace{b^N}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{b^n}_{u} \cdot \underbrace{b^m}_{v} \cdot \underbrace{b^l}_{w} = \underbrace{b^N}_{y}$ con $m > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Jugando contra un demonio

$(\neg\text{LB})$ **para todo** $N > 0$

existe una palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$ tal que

para todo $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$

existe un $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot z \notin L$

entonces L **NO** es regular.

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si **UNO** *tiene una estrategia ganadora en el juego ($\neg$ LB) para toda estrategia posible del* **demonio**, *entonces L* **NO es** *regular."*

Con **estrategia** nos referimos a
todas las movidas posibles que podría ejecutar el **demonio**

Outline

Ejemplos: $L = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$

"$a^n b^m$ **NO es** regular" | "$a^n b^m$ **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N}_{x} \cdot \underbrace{b^N}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{b^j}_{u} \cdot \underbrace{b^k}_{v} \cdot \underbrace{b^l}_{w} = \underbrace{b^N}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Mas ejemplos: $L = \{ w \cdot w \mid w \in \{a, b\}^* \}$

"L **NO es** regular" | "L **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^N b}_{x} \cdot \underbrace{a^N}_{y} \cdot \underbrace{b}_{z} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{a^j}_{u} \cdot \underbrace{a^k}_{v} \cdot \underbrace{a^l}_{w} = \underbrace{a^N}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 0$

¿quién ganó el juego?

Otro ejemplo: $L = \{a^{2^n} \mid N > 0\}$

"a^{2^n} **NO es** regular" "a^{2^n} **es** regular"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $\underbrace{a^{2^n - N}}_{x} \cdot \underbrace{a^N}_{y} \cdot \underbrace{\epsilon}_{z} \in L$ con $N < 2^n$

Entonces escojo $\underbrace{a^j}_{u} \cdot \underbrace{a^k}_{v} \cdot \underbrace{a^l}_{w} = \underbrace{a^N}_{y}$ con $k > 0$

Yo escojo $i = 2$

¿quién ganó el juego?

Outline

¿qué pasa si el demonio tiene una estrategia ganadora?

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si **UNO** *tiene una estrategia ganadora en el juego ($\neg LB$) para toda estrategia posible del* **demonio**, *entonces L* **NO es** *regular."*

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB) existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $x \cdot y \cdot z \in L$ con $|y| \geq N$

existen palabras $u \cdot v \cdot w = y$ con $v \neq \epsilon$ tal que

para todo $i \geq 0$, $x \cdot u \cdot v^i \cdot w \cdot y \in L$.

(LB) es necesaria, pero NO suficiente

Otras versiones del lema de bombeo

Lema de bombeo 2 (versión de libros, internet, etc...)

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es regular entonces:

(LB')
existe un $N > 0$ tal que
para toda palabra $w \in L$ con $|w| \geq N$
existen palabras $x \cdot y \cdot z = w$ con $y \neq \epsilon$ tal que
para todo $i \geq 0$, $x \cdot y^i \cdot z \in L$.

¿cuál es la ventaja de la versión (LB)?

The Pumping Lemma (poema)

Any regular language L has a magic number p
And any long-enough word in L has the following property:
Amongst its first p symbols is a segment you can find
Whose repetition or omission leaves x amongst its kind.

So if you find a language L which fails this acid test,
And some long word you pump becomes distinct from all the rest,
By contradiction you have shown that language L is not
A regular guy, resiliant to the damage you have wrought.

But if, upon the other hand, x stays within its L,
Then either L is regular, or else you chose not well.
For w is xyz, and y cannot be null,
And y must come before p symbols have been read in full.

As mathematical postscript, an addendum to the wise:
The basic proof we outlined here does certainly generalize.
So there is a pumping lemma for all languages context-free,
Although we do not have the same for those that are r.e.