# Teorema de Myhill-Nerode

Clase 09

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

# Minimización de autómatas

Dejamos varias preguntas abiertas:

1. ¿cómo sabemos si el autómata del algoritmo es un **mínimo**?
2. Dado $L$, ¿existe un **único** autómata mínimo?
3. Dado un $\mathcal{A}$, ¿és posible **construir** un autómata mínimo equivalente?

En esta clase responderemos estas preguntas **positivamente**

Demostraremos que:

- El autómata con el mínimo de estados es **único**.
- El algoritmo de minimización **siempre** construye el autómata mínimo.

# Estrategia de la demostración

1. Desde un DFA $\mathcal{A}$, definiremos una relación de equivalencia (RE) $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$.

2. Desde una RE $\equiv$ entre palabras, construiremos un DFA $\mathcal{A}_{\equiv}$.

3. A partir de un lenguaje $L$, definiremos una RE $\equiv_L$.

4. $\mathcal{A}_{\equiv_L}$ define el autómata con la **menor cantidad de estados**.

5. $\mathcal{A}_{\equiv_L}$ es equivalente al resultado de nuestro **algoritmo de minimización**.

# Outline

# Outline

Relaciones de Myhill-Nerode

Teorema de Myhill-Nerode

# Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

## Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$ como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

## ¿és $\equiv_{\mathcal{A}}$ una relación de equivalencia?

- **reflexiva**: $u \equiv_{\mathcal{A}} u$ para todo $u \in \Sigma^*$.
- **simétrica**: si $u \equiv_{\mathcal{A}} v$ entonces $v \equiv_{\mathcal{A}} u$.
- **transitiva**: si $u \equiv_{\mathcal{A}} v$ y $v \equiv_{\mathcal{A}} w$, entonces $u \equiv_{\mathcal{A}} w$.

Para $w \in \Sigma^*$ se define su **clase de equivalencia** según $\equiv_{\mathcal{A}}$ como:

$$[w]_{\equiv_{\mathcal{A}}} = \{u \mid u \equiv_{\mathcal{A}} w\}$$

# Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

## Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$ como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

No confundir la relación $\equiv_{\mathcal{A}}$ con la relación $\approx_{\mathcal{A}}$!

- $\approx_{\mathcal{A}}$ es sobre los estados en $Q$.
- $\equiv_{\mathcal{A}}$ es sobre todas las palabras en $\Sigma^*$.

# Relación de equivalencia dada por un DFA

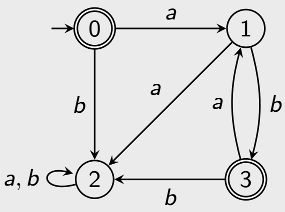
Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

## Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$ como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

## Ejemplo




$$
\begin{aligned}
[\epsilon]_{\mathcal{A}} &= \epsilon \\
[a]_{\mathcal{A}} &= a(ba)^* \\
[ab]_{\mathcal{A}} &= ab(ab)^* \\
[b]_{\mathcal{A}} &= b\Sigma^* + \Sigma^*(aa + bb)\Sigma^*
\end{aligned}
$$

# Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

## Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$ como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

## Propiedades

1. $\equiv_{\mathcal{A}}$ es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \ \text{ entonces } \ u \cdot w \equiv_{\mathcal{A}} v \cdot w \qquad \forall w \in \Sigma^*$$

2. $\equiv_{\mathcal{A}}$ **refina** $L$, esto es:

$$\text{si} \ \ u \equiv_{\mathcal{A}} v \ \text{ entonces } \ \big(u \in L \ \Leftrightarrow \ v \in L\big)$$

3. El número de clases de equivalencia de $\equiv_{\mathcal{A}}$ es **finito**. (¿por qué?)

# Relación de equivalencia dada por un DFA

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ un lenguaje regular y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

## Definición

Se define la **relación de equivalencia** $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$ como:

$$u \equiv_{\mathcal{A}} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$$

## Propiedades

1. $\equiv_{\mathcal{A}}$ es un **congruencia por la derecha**.
2. $\equiv_{\mathcal{A}}$ **refina** $L$.
3. El número de clases de equivalencia de $\equiv_{\mathcal{A}}$ es **finito**.

Todo DFA $\mathcal{A}$ de $L$ define
una **relación de equivalencia** que cumple estas 3 propiedades!

# Relaciones de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ cualquier lenguaje.

## Definición (Relación de Myhill-Nerode)

Una relación de equivalencia $\equiv$ en $\Sigma^*$ es de **Myhill-Nerode** para $L$ si:

1. $\equiv$ es una **congruencia por la derecha**:

$$u \equiv v \ \text{ entonces } \ u \cdot w \equiv v \cdot w \qquad \forall w \in \Sigma^*$$

2. $\equiv$ **refina** $L$.

$$u \equiv v \ \text{ entonces } \ \big(u \in L \iff v \in L\big)$$

3. El número de clases de equivalencia de $\equiv$ es **finita**.

# Relaciones de Myhill-Nerode

Sea $L \subseteq \Sigma^*$ cualquier lenguaje.

## Definición (Relación de Myhill-Nerode)

Una relación de equivalencia $\equiv$ en $\Sigma^*$ es de **Myhill-Nerode** para $L$ si:

1. $\equiv$ es una **congruencia por la derecha**.
2. $\equiv$ **refina** $L$.
3. El número de clases de equivalencia de $\equiv$ es **finita**.

A partir de una relación $\equiv$ de Myhill-Nerode podemos construir un DFA $\mathcal{A}_{\equiv}$

$$\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}}$$

$$\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv}$$

# Construcción del DFA $\mathcal{A}_\equiv$

Dada una **relación de Myhill-Nerode** $\equiv$ para $L \subseteq \Sigma^*$, definimos el autómata:

$$\mathcal{A}_\equiv \;=\; (Q_\equiv, \Sigma, \delta_\equiv, q_\equiv, F_\equiv)$$

- $Q_\equiv \;=\; \{\, [w]_\equiv \;\mid\; w \in \Sigma^* \,\}$
- $q_\equiv \;=\; [\epsilon]_\equiv$
- $F_\equiv \;=\; \{\, [w]_\equiv \;\mid\; w \in L \,\}$ (¿por qué $F_\equiv$ esta bien definida?)
- $\delta_\equiv([w]_\equiv, a) \;=\; [wa]_\equiv$ (¿por qué $\delta_\equiv$ esta bien definida?)

## Teorema

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}_\equiv) \;=\; L$$

Demostración: ejercicio.

## $\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}}$ y $\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv}$ son procesos inversos

Teorema

1. Si $\mathcal{A}$ es un DFA que acepta $L$ y si construimos:

$$\mathcal{A} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv_{\mathcal{A}}}$$

entonces $\mathcal{A}$ es **isomorfo** ("equivalente") a $\mathcal{A}_{\equiv_{\mathcal{A}}}$.

2. Si $\equiv$ es una relación de Myhill-Nerode para $L$ y si construimos:

$$\equiv \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv} \longrightarrow \equiv_{\mathcal{A}_{\equiv}}$$

entonces la relación $\equiv$ es **equivalente** a $\equiv_{\mathcal{A}_{\equiv}}$.

Demostración: ejercicio

# Estrategia de la demostración

1. Desde un DFA $\mathcal{A}$, definiremos una relación de equivalencia (RE) $\equiv_{\mathcal{A}}$ entre palabras en $\Sigma^*$. ✓

2. Desde una RE $\equiv$ entre palabras, construiremos un DFA $\mathcal{A}_{\equiv}$. ✓

3. A partir de un lenguaje $L$, definiremos una RE $\equiv_L$.

4. $\mathcal{A}_{\equiv_L}$ define el autómata con la **menor cantidad de estados**.

5. $\mathcal{A}_{\equiv_L}$ es equivalente al resultado de nuestro **algoritmo de minimización**.

# Outline

Relaciones de Myhill-Nerode

Teorema de Myhill-Nerode

# La relación $\equiv_L$ de un lenguaje $L$

## Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia $\equiv_L$ como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad \big(\, u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L \,\big) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

¿es $\equiv_L$ una relación de equivalencia?

- **reflexiva**: $u \equiv_L u$ para todo $u \in \Sigma^*$.
- **simétrica**: si $u \equiv_L v$ entonces $v \equiv_L u$.
- **transitiva**: si $u \equiv_L v$ y $v \equiv_L w$, entonces $u \equiv_L w$.

# La relación $\equiv_L$ de un lenguaje $L$

## Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia $\equiv_L$ como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad \big( u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L \big) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

¿cuáles son las clases de equivalencia para $L = (ab)^*$?

- $[\epsilon]_{\equiv_L} = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\}$
- $[a]_{\equiv_L} = \{a, aba, ababa, abababa, \ldots\}$
- $[b]_{\equiv_L} = \{b, bb, ba, abb, \ldots\}$

# La relación $\equiv_L$ de un lenguaje $L$

## Definición

Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define la relación de equivalencia $\equiv_L$ como:

$$u \equiv_L v \quad \text{ssi} \quad \big(\, u \cdot w \in L \Leftrightarrow v \cdot w \in L \,\big) \quad \forall w \in \Sigma^*$$

## Propiedades

1. $\equiv_L$ es una **congruencia por la derecha**:

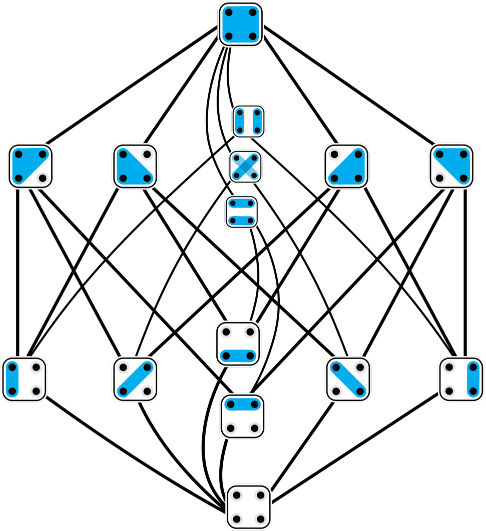
$$u \equiv_L v \;\; \text{entonces} \;\; u \cdot w \equiv_L v \cdot w \qquad \forall w \in \Sigma^*$$

2. $\equiv_L$ **refina** $L$: $\quad u \equiv_L v \;\; \text{entonces} \;\; \big(u \in L \;\Leftrightarrow\; v \in L\big)$
3. Si $\equiv$ es una congruencia por la derecha y refina $L$ entonces $\equiv$ **refina** $\equiv_L$:

$$u \equiv v \;\; \text{entonces} \;\; u \equiv_L v.$$

$\equiv_L$ es la congruencia por la derecha **más gruesa** que refina a $L$.

# (paréntesis): Refinamiento entre relaciones



(diagrama de wikipedia)

# Teorema de Myhill-Nerode

## Teorema

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. $L$ es **regular**.
2. existe una **relación de Myhill-Nerode** para $L$.
3. la relación $\equiv_L$ tiene una cantidad **finita** de clases de equivalencia.

# Teorema de Myhill-Nerode

## Demostración

1. $\Rightarrow$ 2. Si $L$ es regular, entonces:

- existe un autómata finito $\mathcal{A}$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.
- $\equiv_{\mathcal{A}}$ es una relación de Myhill-Nerode para $L$.

2. $\Rightarrow$ 3. Sea $\equiv$ una relación de Myhill-Nerode para $L$, entonces:

- $\equiv$ tiene una cant. finita de clases de equivalencia.
- $\equiv_L$ tiene una cant. finita de clases de equivalencia. (¿por qué?)

3. $\Rightarrow$ 1. Si $\equiv_L$ tiene una cantidad **finita** de clases de equiv., entonces:

- $\equiv_L$ es una relación de Myhill-Nerode para $L$.
- $\mathcal{A}_{\equiv_L}$ es un autómata finito para $L$.

$\square$

# Teorema de Myhill-Nerode

## Conclusiones del teorema

1. $\equiv_L \longrightarrow \mathcal{A}_{\equiv_L}$ produce el autómata con la menor cantidad de estados.
2. Todo autómata $\mathcal{A}$ tal que $\equiv_{\mathcal{A}} \; = \; \equiv_L$ son **isomorfos** ("equivalentes").
3. El **algoritmo de minimización** produce un autómata isomorfo a $\mathcal{A}_{\equiv_L}$.

### Demostración (punto 3)

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un autómata que acepta $L$ ya **minimizado** :

$$
\begin{aligned}
u \equiv_L v \quad & \Leftrightarrow \quad \big(\, u \cdot w \in L \;\Leftrightarrow\; v \cdot w \in L \,\big) \quad \forall w \in \Sigma^* \\
& \Leftrightarrow \quad \big(\, \hat{\delta}(q_0, u \cdot w) \in F \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}(q_0, v \cdot w) \in F \,\big) \quad \forall w \in \Sigma^* \\
& \Leftrightarrow \quad \big(\, \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, u), w) \in F \;\Leftrightarrow\; \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, v), w) \in F \,\big) \quad \forall w \in \Sigma^* \\
& \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) \approx_{\mathcal{A}} \hat{\delta}(q_0, v) \\
& \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v) \qquad \text{(¿por qué?)} \\
& \Leftrightarrow \quad u \equiv_{\mathcal{A}} v
\end{aligned}
$$

□