

Simplificación de gramáticas libres de contexto

Clase 16

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

¿cómo podemos simplificar esta gramática?

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aAa \mid aBD \mid aBH \\ A &\rightarrow B \mid D \\ B &\rightarrow aBa \mid b \\ C &\rightarrow aCC \mid bC \\ D &\rightarrow aDCa \mid CFa \\ F &\rightarrow aFDa \mid aab \\ H &\rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

Algunos aspectos a considerar:

- Dada una variable X , ¿es X **útil** para producir palabras?
- Dada una producción $p : X \rightarrow \gamma$, ¿es p **útil** para producir palabras?

Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Diremos que una variable $X \in V$ es **útil** si existe una derivación:

$$S \xRightarrow{*} \alpha X \beta \xRightarrow{*} w$$

Al contrario, diremos que una variable X es **inútil** si NO es útil.

¿qué variables son inútiles?

| | | |
|---|---|-----------|
| S | → | aAa aBC |
| A | → | aS bD |
| B | → | aBa b |
| C | → | abb DD |
| D | → | aDa |

Variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Diremos que una variable $X \in V$ es **útil** si existe una derivación:

$$S \xRightarrow{*} \alpha X \beta \xRightarrow{*} w$$

Al contrario, diremos que una variable X es **inútil** si NO es útil.

¿cómo podemos determinar si un símbolo es **inútil**?

Desde el lado positivo: símbolos útiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

Para una variable $X \in V$:

1. Decimos que X es **alcanzable** si existe una derivación:

$$S \xRightarrow{*} \alpha X \beta$$

2. Decimos que X es **generadora** si existe una derivación:

$$X \xRightarrow{*} w$$

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable** o **generadora**?

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Propiedad

Para toda variable $X \in V$:

existe una regla $X \rightarrow \alpha$ tal que
todas las variables en α son generadoras si, y solo si, X es **generadora**.

Demostración: ejercicio.

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

input : Gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$

output: Conjunto G de variables generadoras

Function Generadores (\mathcal{G})

let $G_0 := \{X \in V \mid (X \rightarrow w) \in P\}$

let $G := \emptyset$

while $G_0 \neq G$ do

$G := G_0$

 foreach $(X \rightarrow \alpha) \in P$ do

 if *todas las variables en α estan en G* then

$G_0 := G_0 \cup \{X\}$

return G

¿cómo determinamos si una variable es **generadora**?

¿cuáles son las variables generadoras?

$S \rightarrow aAa \mid aBD$

$A \rightarrow aB \mid bD$

$B \rightarrow aBa \mid b$

$C \rightarrow abb \mid DD$

$D \rightarrow aDCa$

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Propiedad

Para toda variable $X \in V - \{S\}$,

existe una producción $Y \rightarrow \alpha X \beta$ en P si, y solo si, X es **alcanzable**.
tal que $Y \in V$ es alcanzable

Demostración: ejercicio.

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

input : Gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$

output: Conjunto C de variables alcanzables

Function alcanzables (\mathcal{G})

let $C_0 := \{S\}$

let $C := \emptyset$

while $C_0 \neq \emptyset$ **do**

take $Y \in C_0$

$C_0 := C_0 - \{Y\}$

$C := C \cup \{Y\}$

foreach $X \in V - C$ tal que existe una regla $(Y \rightarrow \alpha X \beta) \in P$ **do**

└ $C_0 := C_0 \cup \{X\}$

return C

¿cómo determinamos si una variable es **alcanzable**?

¿cuáles son las variables alcanzables?

$S \rightarrow aAa$

$A \rightarrow aB$

$B \rightarrow aBa \mid b$

$C \rightarrow abb$

Eliminación de variables inútiles

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Teorema

Sea \mathcal{G}'' una gramática creada a partir de \mathcal{G} después de:

- eliminar todos la variables y reglas **NO generadoras**.
- eliminar todas las variables y reglas **NO alcanzables**.

Entonces, $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y \mathcal{G}'' no contiene variables inútiles.

Eliminación de variables inútiles

Demostración

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Sea $\mathcal{G}' = (V', \Sigma, P', S)$ al eliminar las variables **no generadoras** de \mathcal{G} :

$$V' = \{ X \in V \mid \exists w. X \xRightarrow[\mathcal{G}]{*} w \}$$

$$P' = \{ X \rightarrow \alpha \in P \mid X \in V' \wedge \alpha \in (V' \cup \Sigma)^* \}$$

Sea $\mathcal{G}'' = (V'', \Sigma, P'', S)$ al eliminar las variables **no alcanzables** de \mathcal{G}' :

$$V'' = \{ X \in V' \mid \exists \alpha, \beta. S \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} \alpha X \beta \}$$

$$P'' = \{ X \rightarrow \alpha \in P' \mid X \in V'' \wedge \alpha \in (V'' \cup \Sigma)^* \}$$

Eliminación de variables inútiles

Demostración

Sea $\mathcal{G}' = (V', \Sigma, P', S)$ tal que $V' = \{X \in V \mid \exists w. X \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} w\}$.

Sea $\mathcal{G}'' = (V'', \Sigma, P'', S)$ tal que $V'' = \{X \in V' \mid \exists \alpha, \beta. S \xrightarrow[\mathcal{G}']{*} \alpha X \beta\}$.

Considere las siguientes propiedades de \mathcal{G} , \mathcal{G}' y \mathcal{G}'' .

1. Para todo $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$, si $\alpha \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} w$ entonces $\alpha \xrightarrow[\mathcal{G}']{*} w$.
2. Para todo $\alpha \in (V' \cup \Sigma)^*$, si $S \xrightarrow[\mathcal{G}']{*} \alpha$ entonces $S \xrightarrow[\mathcal{G}'']{*} \alpha$.
3. Para todo $\alpha \in (V'' \cup \Sigma)^*$, si $\alpha \xrightarrow[\mathcal{G}']{*} w$ entonces $\alpha \xrightarrow[\mathcal{G}'']{*} w$.

Ejercicio: demuestre las propiedades.

Eliminación de variables inútiles

Demostración

PD: $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Como $V'' \subseteq V$ y $P'' \subseteq P$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

PD: $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$.

Sea $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ tal que $S \xRightarrow[\mathcal{G}]{}^* w$.

■ Por la propiedad 1. tenemos que $S \xRightarrow[\mathcal{G}']{}^* w$.

■ Por la propiedad 2. tenemos que $S \xRightarrow[\mathcal{G}'']{}^* w$.

Por lo tanto $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$ y concluimos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}'')$.

Eliminación de variables inútiles

Demostración

PD: Para todo $X \in V''$, X es **útil en \mathcal{G}''** .

Como $X \in V''$, entonces $S \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} \alpha X \beta$ para algún $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$.

Por la propiedad 2. se tiene que: $S \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} \alpha X \beta$ y $\alpha, \beta \in (V'' \cup \Sigma)^*$.

Como $X \in V'$ y $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma)^*$, entonces existen u, v, w tal que:

$$\alpha \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} u, \quad X \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} v, \quad \beta \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} w$$

Por la propiedad 1. se tiene que: $\alpha \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} u, X \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} v, \beta \xRightarrow[\mathcal{G}']{*} w$.

Por la propiedad 3. se tiene que: $\alpha \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} u, X \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} v, \beta \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} w$.

Juntando todo $S \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} \alpha X \beta \xRightarrow[\mathcal{G}'']{*} uvw$ y X es útil en \mathcal{G}'' .



¿qué falla al eliminar primero las no alcanzables y después las no generadoras?

Ejemplo

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}: & S & \rightarrow AB \mid b \\ & A & \rightarrow a \\ & B & \rightarrow B \end{array}$$

Al eliminar variables **no alcanzables** en \mathcal{G} :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}': & S & \rightarrow AB \mid b \\ & A & \rightarrow a \\ & B & \rightarrow B \end{array}$$

Al eliminar variables **no generadoras** en \mathcal{G}' :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}'': & S & \rightarrow b \\ & A & \rightarrow a \end{array}$$



Outline

Eliminación de variables inútiles

Eliminación de producciones inútiles

Producciones en vacío y unitarias

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG.

Definición

- Decimos que una producción de la forma: $X \rightarrow \epsilon$ es **en vacío**.
- Decimos que una producción de la forma: $X \rightarrow Y$ es **unitaria**.

Deseamos eliminar este tipo de producciones!

¿por qué?

Producciones en vacío y unitarias

Ejemplo

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aAa \mid aBC \\ A & \rightarrow & aD \mid S \\ B & \rightarrow & aBa \mid \epsilon \\ C & \rightarrow & abb \mid D \\ D & \rightarrow & aDa \mid a \end{array}$$

- ¿cuáles producciones son **en vacío**?
- ¿cuáles producciones son **unitarias**?

¿cómo eliminamos las producciones **en vacío** y **unitarias**?

¿podemos eliminar siempre las producciones en vacío?

¿es posible eliminar las producciones **en vacío**?

$$S \rightarrow a S b \mid \epsilon$$

Conclusión

Si $\epsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$, entonces

NO se pueden borrar las producciones en vacío sin alterar el lenguaje \mathcal{G} .

Desde ahora supondremos que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$

¿es razonable?

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Observación

Suponga las reglas $X \rightarrow Y$ y $Y \rightarrow \gamma$ en P .

■ Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{X \rightarrow \gamma\}, S)$ $\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})?$ ✓

■ Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{X \rightarrow \gamma\} - \{X \rightarrow Y\}, S)$ $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})?$ ✗

Suponga las reglas $X \rightarrow \epsilon$ y $Z \rightarrow \alpha X \beta$ en P .

■ Si $\mathcal{G}' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \rightarrow \alpha \beta\}, S)$ $\mathcal{L}(\mathcal{G}') = \mathcal{L}(\mathcal{G})?$ ✓

■ Si $\mathcal{G}'' = (V, \Sigma, P \cup \{Z \rightarrow \alpha \beta\} - \{X \rightarrow \epsilon\}, S)$ $\mathcal{L}(\mathcal{G}'') = \mathcal{L}(\mathcal{G})?$ ✗

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Clausura de producciones unitarias y en vacío

Sea P^* el **menor conjunto de producciones** que contiene a P y **cerrado bajo** las siguientes reglas:

1. Si $X \rightarrow Y \in P^*$ y $Y \rightarrow \gamma \in P^*$, entonces $X \rightarrow \gamma \in P^*$.
2. Si $X \rightarrow \epsilon \in P^*$ y $Z \rightarrow \alpha X \beta \in P^*$, entonces $Z \rightarrow \alpha \beta \in P^*$.

Defina $\mathcal{G}^* = (V, \Sigma, P^*, S)$. Entonces:

- P^* es finito. (¿por qué?)
- $\mathcal{L}(\mathcal{G}^*) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$. (¿por qué?)

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,

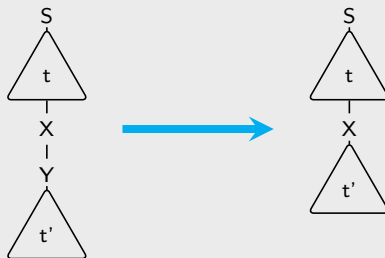
sea \mathcal{T} un árbol de derivación de w en \mathcal{G}^* de **tamaño mínimo**.

Propiedad 1

El árbol de derivación \mathcal{T} NO usa una **producción unitaria**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que \mathcal{T} usa una producción unitaria:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Para cualquier palabra $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^*)$,

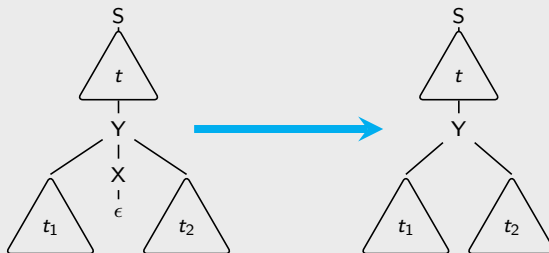
sea \mathcal{T} un árbol de derivación de w en \mathcal{G}^* de **tamaño mínimo**.

Propiedad 2

El árbol de derivación \mathcal{T} NO usa una producción **en vacío**.

Demostración (por contradicción)

Suponemos que \mathcal{T} usa una producción en vacío:



¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Por la **Propiedad 1** y **Propiedad 2** tenemos que:

Para todo $w \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^)$, existe una derivación de w en \mathcal{G} que NO usa producciones en vacío ni producciones unitarias.*

Podemos eliminar las producciones en vacío y unitarias de \mathcal{G}^* !

Teorema

Para toda CFG \mathcal{G} tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$, sea:

- \mathcal{G}^* la clausura de producciones unitarias y en vacío.
- $\hat{\mathcal{G}}$ el resultado de remover toda producción unitaria o en vacío de \mathcal{G}^* .

Entonces $\mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\hat{\mathcal{G}}$ no tiene producciones unitarias o en vacío.

¿cómo eliminamos las producciones en vacío y unitarias?

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una CFG tal que $\epsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Para eliminar las producciones en vacío o unitarias de \mathcal{G} :

- construimos \mathcal{G}^* haciendo la **clausura** de prod. unitarias y en vacío,
- construimos $\hat{\mathcal{G}}$ **removiendo** todas las prod. unitarias o en vacío de \mathcal{G}^* .

Por el resultado anterior sabemos que $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\hat{\mathcal{G}})$.

Importante: es posible que $\hat{\mathcal{G}}$ contenga símbolos inútiles.