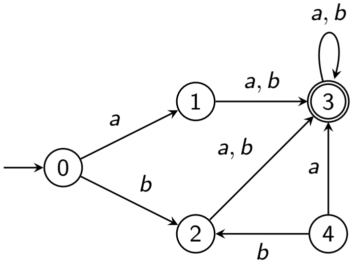
Minimización de autómatas

Clase 08

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

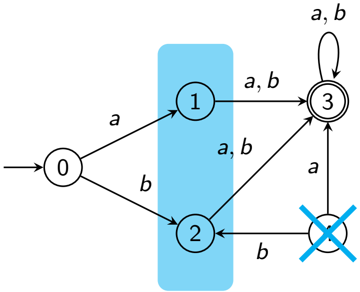
¿cómo minimizo un autómata finito?



1. Eliminar estados inaccesibles.
   - Fácil de realizar y no cambia el lenguaje del autómata finito.

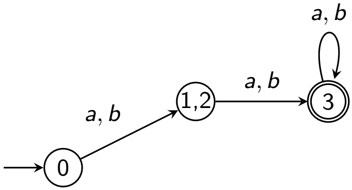
2. Colapsar estados "equivalentes".
   - ¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

¿cómo minimizo un autómata finito?



1. Eliminar estados inaccesibles.
    - Fácil de realizar y no cambia el lenguaje del autómata finito.
2. Colapsar estados "equivalentes".
    - ¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

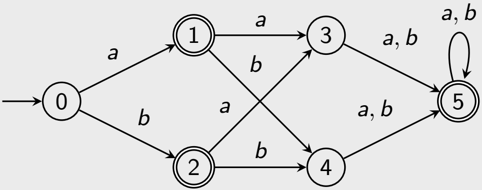
¿cómo minimizo un autómata finito?



1. Eliminar estados inaccesibles.
   - Fácil de realizar y no cambia el lenguaje del autómata finito.
2. Colapsar estados "equivalentes".
   - ¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

Ejemplo

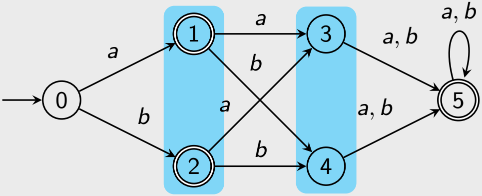


- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3 y 4.

¿podemos colapsar más estados?

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

Ejemplo

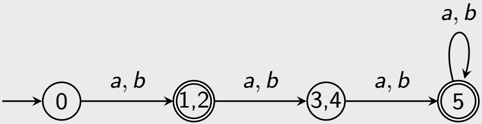


- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3 y 4.

¿podemos colapsar más estados?

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

Ejemplo

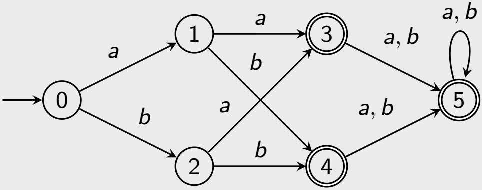


- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3 y 4.

¿podemos colapsar más estados?

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

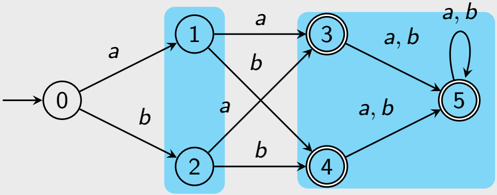
Ejemplo



- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3, 4 y 5.

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

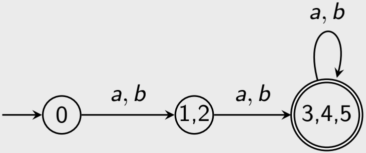
Ejemplo



- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3, 4 y 5.

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

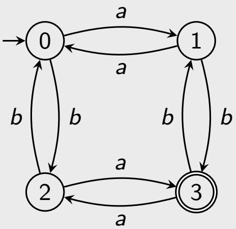
Ejemplo



- Podemos colapsar estados 1 y 2.
- Podemos colapsar estados 3, 4 y 5.

¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

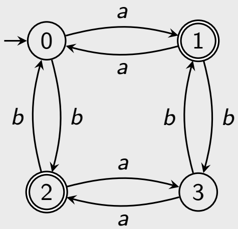
Ejemplo



¿qué estados podemos colapsar?

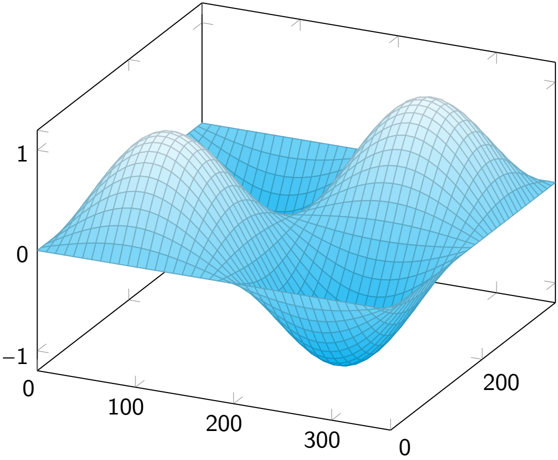
¿cómo sabemos cuales estados colapsar y cuales no?

Ejemplo



¿y ahora? ¿qué estados podemos colapsar?

Minimización de estados



Estrategia: "achicar" nuestro autómata colapsando estados.

Outline

Colapsar estados

Algoritmo de minimización

Outline

Función de transición extendida

Definición

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA.
Se define la **función de transición extendida**

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$$

inductivamente como:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \epsilon) &\overset{\text{def}}{\equiv} q \\ \hat{\delta}(q, w \cdot a) &\overset{\text{def}}{\equiv} \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \end{aligned}$$

¿cuándo podemos colapsar dos estados?

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA y $p, q \in Q$.

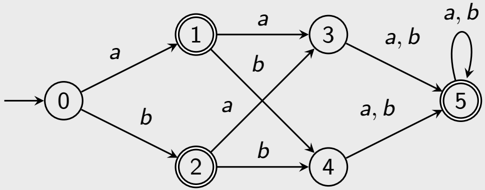
Definición

Decimos que p y q son **indistingibles** ($p \approx_{\mathcal{A}} q$) si:

$$p \approx_{\mathcal{A}} q \quad \text{ssi} \quad (\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F), \text{ para todo } w \in \Sigma^*.$$

Decimos que p y q son **distingibles** si NO son indistingibles ($p \not\approx_{\mathcal{A}} q$).

¿cuál par de estados son indistingibles?



(Paréntesis): relaciones de equivalencia

(Paréntesis): relaciones de equivalencia

Definición

Una relación $\approx_R$ sobre un conjunto X se dice de **equivalencia** si:

- **reflexiva**: $\forall p \in X.\ p \approx_R p$
- **simétrica**: $\forall p, q \in X.$ si $p \approx_R q$ entonces $q \approx_R p$.
- **transitiva**: $\forall p, q, r \in X.$ si $p \approx_R q$ y $q \approx_R r$, entonces $p \approx_R r$.

Para un elemento $p \in X$ se define su **clase de equivalencia** según $\approx_R$ como:

$$[p]_{\approx_R} = \{q \mid q \approx_R p\}$$

Una función $f : X \to X$ se dice **bien definida** sobre $\approx_R$ si:

$$p \approx_R q \text{ entonces } f(p) \approx_R f(q)$$

La relación $\approx_{\mathcal{A}}$ es una relación de equivalencia

Definición

Decimos que p y q son **indistingibles** ($p \approx_{\mathcal{A}} q$) si:

$$p \approx_{\mathcal{A}} q \quad \text{ssi} \quad (\hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F), \text{ para todo } w \in \Sigma^*$$

Propiedades

- $\approx_{\mathcal{A}}$ es una **relación de equivalencia** entre estados.
  - **reflexiva**: $\forall p \in Q.\ p \approx_{\mathcal{A}} p$
  - **simétrica**: $\forall p, q \in Q.$ si $p \approx_{\mathcal{A}} q$ entonces $q \approx_{\mathcal{A}} p$.
  - **transitiva**: $\forall p, q, r \in Q.$ si $p \approx_{\mathcal{A}} q$ y $q \approx_{\mathcal{A}} r$, entonces $p \approx_{\mathcal{A}} r$.

La relación $\approx_{\mathcal{A}}$ es una relación de equivalencia

Definición

Decimos que p y q son **indistingibles** ($p \approx_{\mathcal{A}} q$) si:

$$p \approx_{\mathcal{A}} q \quad \text{ssi} \quad (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F), \text{ para todo } w \in \Sigma^*$$

Propiedades

- $\approx_{\mathcal{A}}$ es una **relación de equivalencia** entre estados.
- Cada estado $p \in Q$ esta en exactamente una clase de equivalencia:

$$[p]_{\approx_{\mathcal{A}}} = \{q \mid q \approx_{\mathcal{A}} p\}$$

- Para todo $a \in \Sigma$ la función $\delta(\cdot, a) : Q \to Q$ esta **bien definida** sobre $\approx_{\mathcal{A}}$.

$$p \approx_{\mathcal{A}} q \ \text{ entonces } \ \delta(p, a) \approx_{\mathcal{A}} \delta(q, a)$$

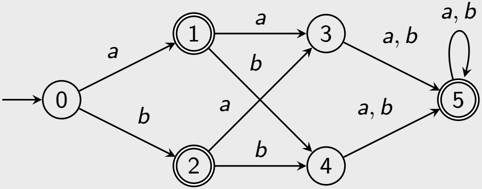
El autómata cuociente

Para un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se define el DFA:

$$\mathcal{A}/\approx \;=\; (Q_\approx, \Sigma, \delta_\approx, q_\approx, F_\approx)$$

- $Q_\approx \;=\; \{\, [p]_{\approx_\mathcal{A}} \;|\; p \in Q \,\}$
- $\delta_\approx([p]_{\approx_\mathcal{A}}, a) \;=\; [\delta(p, a)]_{\approx_\mathcal{A}}$
- $q_\approx \;=\; [q_0]_{\approx_\mathcal{A}}$
- $F_\approx \;=\; \left\{\, [p]_{\approx_\mathcal{A}} \;|\; p \in F \,\right\}$

¿cuál es el autómata cuociente para $\mathcal{A}$?



El autómata cuociente

Para un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se define el DFA:

$$\mathcal{A}/\approx \;=\; (Q_{\approx}, \Sigma, \delta_{\approx}, q_{\approx}, F_{\approx})$$

- $Q_{\approx} \;=\; \{\, [p]_{\approx_{\mathcal{A}}} \;|\; p \in Q \,\}$
- $\delta_{\approx}([p]_{\approx_{\mathcal{A}}}, a) \;=\; [\delta(p, a)]_{\approx_{\mathcal{A}}}$
- $q_{\approx} \;=\; [q_0]_{\approx_{\mathcal{A}}}$
- $F_{\approx} \;=\; \left\{\, [p]_{\approx_{\mathcal{A}}} \mid p \in F \,\right\}$

¿está $\mathcal{A}/\approx$ bien definido? ¿depende la definición de $\delta_{\approx}$ de p?

El autómata cuociente define el mismo lenguaje

Teorema

Para todo autómata finito determinista $\mathcal{A}$ se cumple que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \;=\; \mathcal{L}(\mathcal{A}/\approx)$$

El autómata cuociente define el mismo lenguaje

Demostración

Sea $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$.

PD: $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \;\; \Leftrightarrow \;\; w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}/\approx)$

Existe una ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

- $p_0 = q_0$.
- $\delta(p_i, a_{i+1}) = p_{i+1} \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Existe una ejecución $\rho_\approx$ de $\mathcal{A}/\approx$ sobre w:

$$\rho_\approx : X_0 \xrightarrow{a_1} X_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} X_n$$

- $X_0 = q_\approx$.
- $\delta_\approx(X_i, a_{i+1}) = X_{i+1} \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

¿qué relación hay entre p_i y X_i?

El autómata cuociente define el mismo lenguaje

Demostración

PD: $[p_i]_{\approx_{\mathcal{A}}} = X_i \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$

Por inducción sobre i. (¿cómo?)

PD: $p_n \in F$ si, y solo si, $[p_n]_{\approx_{\mathcal{A}}} \in F_{\approx}$

(¿cómo?)

Por lo tanto, $w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \iff w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}/\approx)$ $\square$

Outline

Colapsar estados

Algoritmo de minimización

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

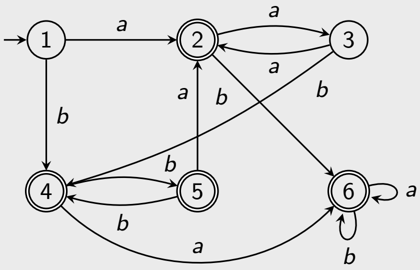
Buscamos los pares que son **distingibles**.

Busqueda de clase de estados distingibles

1. Construya una tabla con los pares $\{p, q\}$ inicialmente sin marcar.
2. Marque $\{p, q\}$ si $p \in F$ y $q \notin F$ o viceversa.
3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.
4. Al terminar, $p \not\approx_{\mathcal{A}} q$ ssi la entrada $\{p, q\}$ está marcada.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

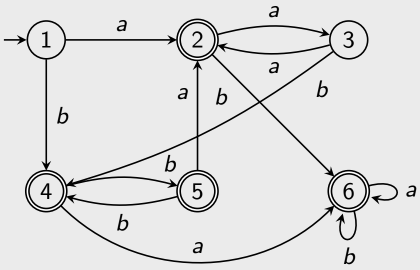


	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

1. Construya una tabla con los pares $\{p, q\}$ inicialmente sin marcar.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

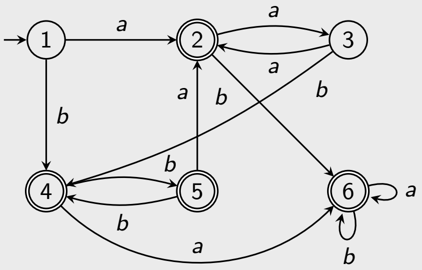


	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

1. Construya una tabla con los pares $\{p, q\}$ inicialmente sin marcar.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

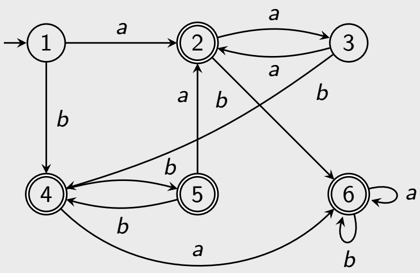


	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Marque $\{p, q\}$ si $p \in F$ y $q \notin F$ o viceversa.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

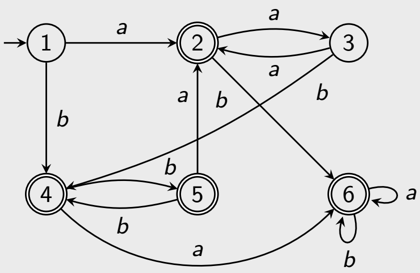


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓			
3				✓	✓	✓
4						
5						
6						

2. Marque $\{p, q\}$ si $p \in F$ y $q \notin F$ o viceversa.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

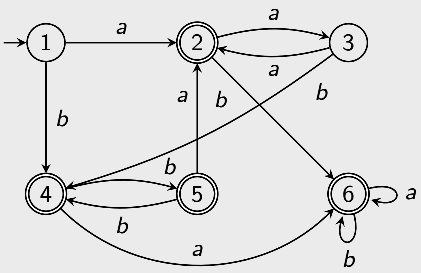


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓			
3				✓	✓	✓
4						
5						
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

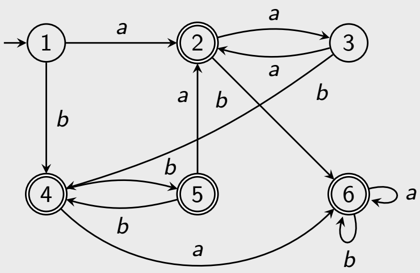


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	a (3,6)	a (3,2)	a (3,6)
3				✓	✓	✓
4						
5						
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

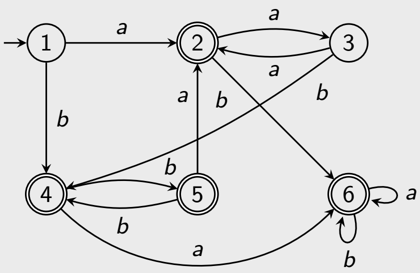


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4						
5						
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

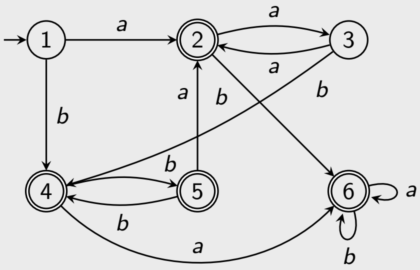


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					a (6,2)	
5						a (2,6)
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p,a), \delta(q,a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

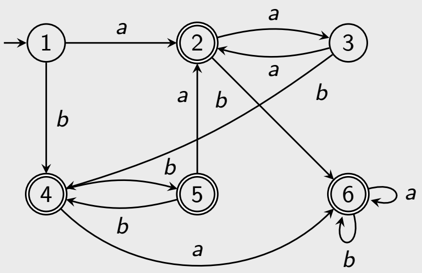


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	
5						✓
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

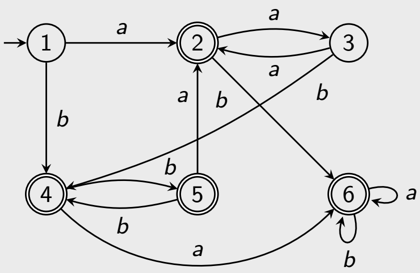


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	b (5,6)
5						✓
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles

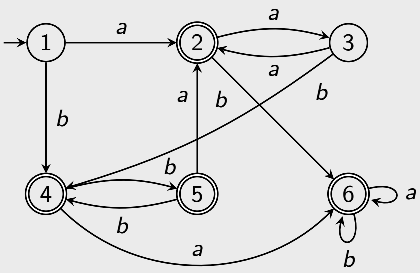


	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	✓
5						✓
6						

3. Repita este paso hasta que no hayan mas cambios:
   - Si $\{p, q\}$ no están marcados y $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ estan marcados para algún $a \in \Sigma$, entonces marque $\{p, q\}$.

Algoritmo para encontrar las clases de equivalencia

Encuentre los estados distinguibles



	1	2	3	4	5	6
1		✓		✓	✓	✓
2			✓	✓	✓	✓
3				✓	✓	✓
4					✓	✓
5						✓
6						

4. Al terminar, $p \not\approx_{\mathcal{A}} q$ ssi la entrada $\{p, q\}$ está marcada.

Los pares indistinguibles serán todas las entradas **NO marcadas.**

Algunos detalles del algoritmo

- ¿siempre termina el algoritmo anterior?
- ¿és el algoritmo anterior correcto?
- ¿cómo construimos nuestro autómata cuociente?
- ¿cuál es el tiempo del algoritmo en relación a la cantidad de estados?

Demostración: ejercicio.

Varias preguntas sin resolver sobre minimización

1. ¿cómo sabemos si el autómata del algoritmo es un **mínimo**?
2. Dado L, ¿existe un **único** autómata mínimo?
3. Dado un $\mathcal{A}$, ¿és posible **construir** un autómata mínimo equivalente?

Estas preguntas las responderemos la próxima clase!