Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 - Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Ayudantía 9

Franco Bruña y Dante Pinto
19 de Noviembre, 2021

Pregunta 1

Demuestre que todo subconjunto infinito de $\{a^n b^n c^n | n > 0\}$ no es libre de contexto.

Supongamos que existe un subconjunto infinito de $L \subseteq \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ tal que L es libre de contexto. Sabemos, por el lema de bombeo, que debe existir un $N > 0$ para el cual toda palabra z en el lenguaje, tal que $|z| \geq N$ tendrá una descomposición $z = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$, con $v \cdot x \neq \varepsilon \wedge |v \cdot w \cdot x| \leq N$ de forma que para todo $i \geq 0$ se cumplirá que $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$.

Dado que L es infinito, sabemos que existirá $N' \geq N$ tal que $z = a^{N'} b^{N'} c^{N'} \in L$. Luego, tomando $z = u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y$, con $v \cdot x \neq \varepsilon \wedge |v \cdot w \cdot x| \leq N$, nos encontraremos con que los siguientes casos posibles:

- $vwx \in \mathcal{L}(a^+ b^+)$:
  - $|u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y|_{a,b} > 2N$
  - $|u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y|_c = N$

  y por tanto $u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y \notin L$, contradicción.
- $vwx \in \mathcal{L}(b^+ c^+)$:
  - $|u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y|_{b,c} > 2N$
  - $|u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y|_a = N$

  y $u \cdot v^2 \cdot w \cdot x^2 \cdot y \notin L$, contradicción.

Por lo tanto, todo subconjunto infinito de $\{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$ **no es** libre de contexto.

Pregunta 2

En clases definieron el lenguaje aceptado por un PDA $\mathcal{P} = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, \perp, F)$ como:

$$L(\mathcal{P}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0 \perp, w) \vdash_{\mathcal{P}}^{*} (q_f, \varepsilon) \ \wedge \ \exists q_f \in F\}$$

Sin embargo, en su versión más tradicional, los autómatas apiladores definen dos lenguajes. El lenguaje aceptado por estados finales ($M(\mathcal{P})$) y el lenguaje aceptado por stack vacío ($N(\mathcal{P})$) que definimos formalmente como:

$$M(\mathcal{P}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0 \perp, w) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q_f\gamma, \varepsilon \ \wedge \ \exists q_f \in F \ \wedge \ \gamma \in \Gamma^*)\}$$

$$N(\mathcal{P}) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0 \perp, w) \vdash^*_{\mathcal{P}} (q, \varepsilon) \ \wedge \ q \in Q\}$$

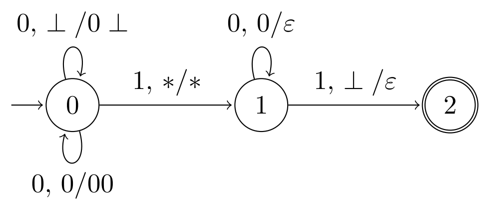
Demuestre que si existe un autómata apilador $\mathcal{P}$ tal que $L = N(\mathcal{P})$ entonces existe un autómata apilador $\mathcal{P}'$ tale que $N(\mathcal{P}) = M(\mathcal{P}')$

Propuesto: Si existen los dos autómatas anteriores, existirá $\mathcal{P}''$ tal que $N(\mathcal{P}) = M(\mathcal{P}') = L(\mathcal{P}'')$

Pregunta 3

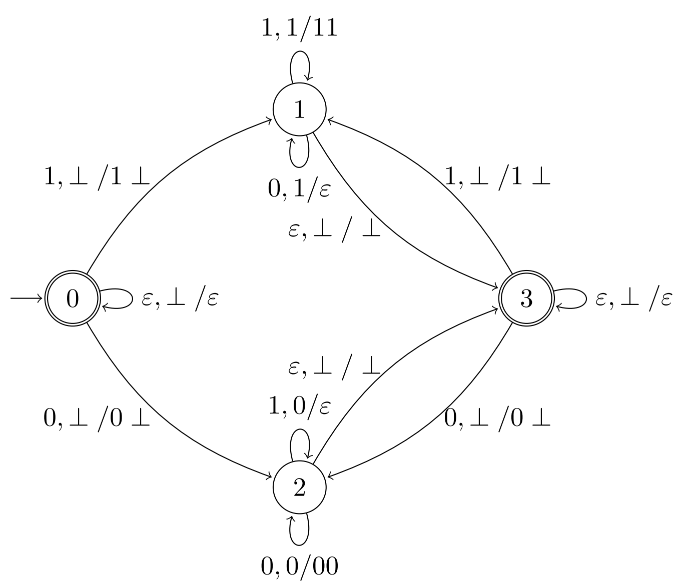
Sea $\Sigma = \{0, 1\}^*$ y $L \subseteq \Sigma$. Construya una gramática y un autómata apilador para cada uno de los siguientes lenguajes.

1. $L = \{w = 0^n 1 0^n 1 \mid n \geq 0\}$



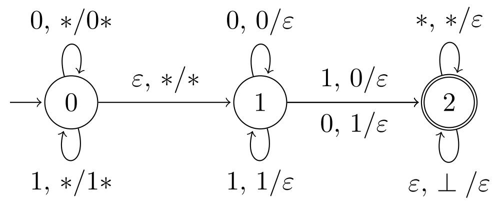
$$\begin{aligned} \mathcal{G}: \quad & S \to X1 \\ & X \to 0X0 \mid 1 \end{aligned}$$

2. $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1 \}$, dónde $|w|_a$ representa el número de símbolos a en w.



$$\mathcal{G}: \quad S \to 0S1 \mid 1S0 \mid SS \mid \varepsilon$$

3. $L = \{w \mid w \neq w^r\}$



$$\begin{aligned} \mathcal{G}: \quad & S \to 1S1 \mid 0S0 \mid E \\ & E \to 1F0 \mid 0F1 \\ & F \to 1F1 \mid 0F0 \mid 1F0 \mid 0F1 \mid 1 \mid 0 \end{aligned}$$

Pregunta 4

- Convierta el PDA de 1.1 en una CFG. ¿Cómo se compara con la gramática construida para este lenguaje?
- Convierta la CFG de 1.2 en un PDA. ¿Cómo se compara con el autómata construido para este lenguaje?