

Gramáticas LL

Clase 23

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Autómata apilador para una gramática libre de contexto

Para una gramática $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$

podemos construir un PDA alternativo \mathcal{D} que acepta $\mathcal{L}(\mathcal{G})$:

$$\mathcal{D} = (V \cup \Sigma \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma, \Delta, q_0, \{q_f\})$$

La relación de transición Δ se define como:

$$\begin{aligned} \Delta = & \{ (q_0, \epsilon, S \cdot q_f) \} && \cup \\ & \{ (X, \epsilon, \gamma) \mid X \rightarrow \gamma \in P \} && \cup \text{ (Expandir)} \\ & \{ (a, a, \epsilon) \mid a \in \Sigma \} && \text{(Reducir)} \end{aligned}$$

¿cómo elegir la siguiente producción para expandir?

¿cómo elegir la siguiente producción para expandir?

$$X \rightarrow \alpha \mid \beta$$

¿cómo elegir entre α o β ?

Estrategia (intuición)

1. Mirar k símbolos del resto del input v (k -**lookahead**).
2. Usar $v|_k$ y decidir cual regla $X \rightarrow \gamma$ para expandir.

¿cómo **caracterizamos** las gramáticas que cumplen con esta propiedad?

Gramáticas $LL(k)$

Significado

Primera L: leer el input de izquierda a derecha (**L**eft-right).

Segunda L: producir una derivación por la izquierda (**L**eftmost).

Parámetro k : el número de letras en adelante que utiliza (**lookahead**).

$LL(k)$ son las gramáticas que **caracterizan** la propiedad anterior.

Outline

Definición LL

Caracterización LL

Outline

Definición LL

Caracterización LL

Definición Gramáticas $LL(k)$

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto y $k \geq 1$.

Definición

Decimos que \mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ si para todas derivaciones:

- $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1$
- $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2$ y
- $v_1|_k = v_2|_k$

entonces se cumple que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Notar que la elección de $Y \rightarrow \gamma$ depende de Y , $v|_k$ y u .

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

Definición $LL(k)$

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\ \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\ \blacksquare v_1|_k = v_2|_k \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 1

$$\mathcal{G}_1: S \rightarrow (S) \mid n$$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(\dots)}^u \overbrace{(S)}^Y \overbrace{\dots)}^\beta & \Rightarrow_{\text{lm}} & (\dots(\gamma_1)\dots) & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(\dots)}^u \overbrace{(v'_1)\dots}^{v_1} \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & (\dots(\gamma_2)\dots) & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \underbrace{(\dots)}_u \underbrace{(v'_2)\dots}_{v_2} \end{array}$$

- Si $v_1|_1 = v_2|_1 = n$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = n$.
- Si $v_1|_1 = v_2|_1 = ($, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = (S)$.

En ambos casos, tenemos que $\gamma_1 = \gamma_2$ y \mathcal{G}_1 es una **gramática** $LL(1)$.

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

$$\text{Definición } LL(k) \left. \begin{array}{l} \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\ \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \text{ y} \\ \blacksquare v_1|_k = v_2|_k \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 2

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}_2: & S & \rightarrow (X) \mid n \\ & X & \rightarrow SX \mid \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uX\beta & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_1\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_1 \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_2\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_2 \end{array}$$

- Si $v_1|_1 = v_2|_1 = ($ o $'n'$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = SX$.
- Si $v_1|_1 = v_2|_1 =)$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = \epsilon$.

Por lo tanto, tenemos que $\gamma_1 = \gamma_2$ y \mathcal{G}_2 es **también** una gramática $LL(1)$.

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

Definición $LL(k)$

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\ \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\ \blacksquare v_1|_k = v_2|_k \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 3

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}_3: & S & \rightarrow (X) \mid n + S \mid n \\ & X & \rightarrow SX \mid \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(}^u \overbrace{S}^Y \overbrace{X)}^\beta & \Rightarrow_{\text{lm}} & \overbrace{(}^{\gamma_1} \overbrace{n+S}^{\gamma_1} \overbrace{X)}^{\gamma_1} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(}^u \overbrace{n+n}^{v_1} \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & \overbrace{(}^{\gamma_2} \overbrace{n}^{\gamma_2} \overbrace{X)}^{\gamma_2} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(}^u \overbrace{n}^{v_2} \end{array}$$

Como $v_1|_1 = v_2|_1 = n$ pero $\gamma_1 \neq \gamma_2$, entonces \mathcal{G}_3 **NO** es una gramática $LL(1)$.

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

Definición $LL(k)$

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\ \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\ \blacksquare v_1|_k = v_2|_k \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 3: ¿ $LL(2)$?

$$\mathcal{G}_3: \begin{array}{l} S \rightarrow (X) \mid n + S \mid n \\ X \rightarrow SX \mid \epsilon \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uS\beta & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_1\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_1 \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_2\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_2 \end{array}$$

- Si $v_1|_2 = v_2|_2 = n+$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = n + S$.
- Si $v_1|_1 = v_2|_1 = na$ con $a \neq +$, entonces $\gamma_1 = \gamma_2 = n$.

Por lo tanto, tenemos que $\gamma_1 = \gamma_2$ y \mathcal{G}_2 es $LL(2)$ y **no** $LL(1)$.

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Definición } LL(k) \\
 \begin{array}{l}
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\
 \blacksquare v_1|_k = v_2|_k
 \end{array}
 \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 4

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{G}_4: \quad S \rightarrow (X) \mid (X)^e \mid n + S \mid n \\
 \quad \quad X \rightarrow SX \mid \epsilon
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(\quad)}^{u \quad Y \quad \beta} & \Rightarrow_{\text{lm}} & \overbrace{((S)^e X)}^{\gamma_1} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{((\dots^k(n)\dots^k)^e)}^{u \quad v_1} \\
 & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & \underbrace{((S) X)}_{\gamma_2} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \underbrace{((\dots^k(n)\dots^k))}_{u \quad v_2}
 \end{array}$$

Como $v_1|_k = v_2|_k = (\dots^k($ (pero $\gamma_1 \neq \gamma_2$, entonces

\mathcal{G}_3 **NO** es una gramática $LL(k)$ para todo k .

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

Definición $LL(k)$

$$\left. \begin{array}{l} \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\ \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\ \blacksquare v_1|_k = v_2|_k \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.$$

Ejemplo 4

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4: \quad S &\rightarrow (X) \mid (X)^e \mid n + S \mid n \\ X &\rightarrow SX \mid \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(\quad)}^{u \quad Y \quad \beta} & \Rightarrow_{\text{lm}} & \overbrace{((S)^e X)}^{\gamma_1} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \overbrace{(\dots (n) \dots)^e }^{u \quad v_1} \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & \underbrace{((S) X)}_{\gamma_2} & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & \underbrace{(\dots (n) \dots)}_{u \quad v_2} \end{array}$$

¿es posible **arreglar** \mathcal{G}_4 para que si sea $LL(k)$?

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

$$\begin{array}{l}
 \text{Definición } LL(k) \\
 \left. \begin{array}{l}
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\
 \blacksquare v_1|_k = v_2|_k
 \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.
 \end{array}$$

Ejemplo 4 (arreglo)

$$\begin{array}{lcl}
 \mathcal{G}'_4: & S & \rightarrow (XY \mid n + S \mid n \\
 & X & \rightarrow SX \mid \epsilon \\
 & Y & \rightarrow) \mid)^e
 \end{array}$$

...

Demuestre que \mathcal{G}'_4 es una gramática $LL(2)$.

Ejemplos y contra-ejemplos de gramáticas $LL(k)$

$$\begin{array}{l}
 \text{Definición } LL(k) \\
 \left. \begin{array}{l}
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_1\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_1 \\
 \blacksquare S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta \Rightarrow_{\text{lm}} u\gamma_2\beta \xRightarrow[\text{lm}]{*} uv_2 \quad y \\
 \blacksquare v_1|_k = v_2|_k
 \end{array} \right\} \text{ entonces } \gamma_1 = \gamma_2.
 \end{array}$$

Ejemplo 5

$$\begin{array}{lcl}
 \mathcal{G}_5: & S & \rightarrow X \mid Y \\
 & X & \rightarrow aXb \mid 0 \\
 & Y & \rightarrow aYbb \mid 1
 \end{array}
 \quad
 \mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \{a^n 0 b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^n 1 b^{2n} \mid n \geq 0\}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & S & \Rightarrow_{\text{lm}} & X & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & a^k 0 b^k \\
 & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & Y & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & a^k 1 b^{2k}
 \end{array}$$

Para todo $k \geq 1$, se tiene que \mathcal{G}_5 **NO** es una gramática $LL(k)$.

Es posible demostrar que, para toda gramática \mathcal{G} con $\mathcal{L}(\mathcal{G}_5) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$,
 \mathcal{G} **NO** es una gramática $LL(k)$ para todo $k \geq 1$.

Outline

Definición LL

Caracterización LL

Definiciones de prefijos (recordatorio)

Definiciones

$$w|_k = \begin{cases} a_1 \dots a_n & \text{si } n \leq k \\ a_1 \dots a_k & \text{si } k < n \end{cases} \quad L|_k = \{w|_k \mid w \in L\}$$

$$u \odot_k v = (u \cdot v)|_k \quad L_1 \odot_k L_2 = \{w_1 \odot_k w_2 \mid w_1 \in L_1 \text{ y } w_2 \in L_2\}$$

Los operadores $|_k$ y \odot_k “miran” hasta un prefijo k .

Definición de first_k y follow_k (recordatorio)

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto y $k \geq 1$.

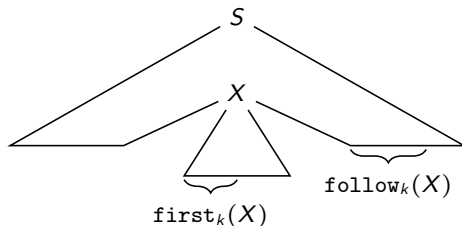
Definiciones

Se define la función $\text{first}_k : (V \cup \Sigma)^* \rightarrow 2^{\Sigma^{\leq k}}$ tal que, para $\gamma \in (V \cup \Sigma)^*$:

$$\text{first}_k(\gamma) = \{u|_k \mid \gamma \xRightarrow{*} u\}$$

Se define la función $\text{follow}_k : V \rightarrow 2^{\Sigma^{\leq k}_{\#}}$ como:

$$\text{follow}_k(X) = \{w \mid S \xRightarrow{*} \alpha X \beta \text{ y } w \in \text{first}_k(\beta\#)\}$$



Caracterización de gramáticas $LL(k)$

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto **reducida** y $k \geq 1$.

Teorema

\mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ si, y solo si, para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ y para todo $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta$, se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta) = \emptyset$$

Demostración (\Rightarrow)

Por contra-positivo, supongamos que $v \in \text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta)$.

Como \mathcal{G} es reducida (sin variables inútiles), entonces:

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uY\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{} & u\gamma_1\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uvv_1 \\ & & & \xRightarrow[\text{lm}]{} & u\gamma_2\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uvv_2 \end{array}$$

para algún $v_1, v_2 \in \Sigma^*$. Como $\gamma_1 \neq \gamma_2$, entonces \mathcal{G} **NO** es $LL(k)$.

Caracterización de gramáticas $LL(k)$

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto **reducida** y $k \geq 1$.

Teorema

\mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ si, y solo si, para todas dos reglas distintas

$Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ y para todo $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta$, se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta) = \emptyset$$

Demostración (\Leftarrow)

Por contra-positivo (de nuevo), supongamos que \mathcal{G} no es $LL(k)$.

Como \mathcal{G} no es $LL(k)$, entonces tenemos derivaciones de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} S & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uY\beta & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_1\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_1 \\ & & & \Rightarrow_{\text{lm}} & u\gamma_2\beta & \xRightarrow[\text{lm}]{*} & uv_2 \end{array}$$

$v_1|_k = v_2|_k = v$, pero $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Por lo tanto, $v \in \text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta)$.



Caracterización de gramáticas $LL(k)$

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto **reducida** y $k \geq 1$.

Teorema

\mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ si, y solo si, para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ y para todo $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta$, se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta) = \emptyset$$

¿cómo usamos esta **caracterización**
para demostrar que una gramática es $LL(k)$?

... buscaremos condiciones más simples
para verificar si una gramática es $LL(k)$.

Gramáticas $LL(k)$ fuerte

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$ una gramática libre de contexto y $k \geq 1$.

Definición

\mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ **fuerte** si para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1) \odot_k \text{follow}_k(Y) \cap \text{first}_k(\gamma_2) \odot_k \text{follow}_k(Y) = \emptyset$$

¿Si \mathcal{G} es $LL(k)$ **fuerte**, entonces es \mathcal{G} un gramática $LL(k)$?

$$\text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta) =$$

$$\text{first}_k(\gamma_1) \odot_k \text{first}_k(\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2) \odot_k \text{first}_k(\beta) \subseteq$$

$$\text{first}_k(\gamma_1) \odot_k \text{follow}_k(Y) \cap \text{first}_k(\gamma_2) \odot_k \text{follow}_k(Y) = \emptyset$$

¿si \mathcal{G} es $LL(k)$, entonces es $LL(k)$ fuerte?

¿si \mathcal{G} es $LL(k)$, entonces es $LL(k)$ fuerte?

Contra-ejemplo

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}: & S & \rightarrow aXaa \mid bXba \\ & X & \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

Recordatorio: \mathcal{G} es $LL(k)$ si para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ y para todo $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta$, se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_k(\gamma_2\beta) = \emptyset$$

- Si $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} aXaa$, entonces $\text{first}_2(baa) \cap \text{first}_2(aa) = \emptyset$.
- Si $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} bXba$, entonces $\text{first}_2(bba) \cap \text{first}_2(ba) = \emptyset$.

Por lo tanto, \mathcal{G} es $LL(2)$.

¿si \mathcal{G} es $LL(k)$, entonces es $LL(k)$ fuerte?

Contra-ejemplo

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{G}: & S & \rightarrow aXaa \mid bXba \\ & X & \rightarrow b \mid \epsilon \end{array}$$

Recordatorio: \mathcal{G} es una gramática $LL(k)$ **fuerte** si para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ se tiene que:

$$\text{first}_k(\gamma_1) \odot_k \text{follow}_k(Y) \cap \text{first}_k(\gamma_2) \odot_k \text{follow}_k(Y) = \emptyset$$

Si vemos $X \rightarrow b$ y $X \rightarrow \epsilon$:

$$\begin{aligned} & \text{first}_2(b) \odot_2 \text{follow}_2(X) \cap \text{first}_2(\epsilon) \odot_2 \text{follow}_2(X) \\ &= \{b\} \odot_2 \{aa, ba\} \cap \{\epsilon\} \odot_2 \{aa, ba\} \\ &= \{ba, bb\} \cap \{aa, ba\} \\ &= \{ba\} \end{aligned}$$

...y \mathcal{G} no es $LL(2)$ fuerte.

Caso LL(1)

Supongamos que \mathcal{G} es LL(1) y $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ son reglas distintas.

1. Si $\epsilon \notin \text{first}_1(\gamma_1)$ y $\epsilon \notin \text{first}_1(\gamma_2)$, entonces (por caract. de LL(1)):

$$\begin{aligned}\emptyset &= \text{first}_1(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_1(\gamma_2\beta) \\ &= \text{first}_1(\gamma_1) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \\ &= \text{first}_1(\gamma_1) \odot_1 \text{follow}_1(Y) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \odot_1 \text{follow}_1(Y)\end{aligned}$$

Caso LL(1)

Supongamos que \mathcal{G} es LL(1) y $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$ son reglas distintas.

1. Si $\epsilon \notin \text{first}_1(\gamma_1)$ y $\epsilon \notin \text{first}_1(\gamma_2)$, entonces (por caract. de LL(1)):

$$\emptyset = \text{first}_1(\gamma_1) \odot_1 \text{follow}_1(Y) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \odot_1 \text{follow}_1(Y)$$

2. Si $\epsilon \in \text{first}_1(\gamma_1)$ y $\epsilon \notin \text{first}_1(\gamma_2)$, entonces (por caract. de LL(1)):

$$\begin{aligned}\emptyset &= \text{first}_1(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_1(\gamma_2\beta) \\ &= \text{first}_1(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \\ &= \text{first}_1(\gamma_1\beta) \cap \text{first}_1(\gamma_2\beta')\end{aligned}$$

para todo $\beta' \in (V \cup \Sigma)^*$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}&\text{first}_1(\gamma_1) \odot_1 \text{follow}_1(Y) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \odot_1 \text{follow}_1(Y) \\ &= \bigcup_{S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta} \text{first}(\gamma_1\beta) \cap \bigcup_{S \xRightarrow[\text{lm}]{*} uY\beta'} \text{first}(\gamma_2\beta') = \emptyset\end{aligned}$$

Caso LL(1)

Teorema

Una gramática \mathcal{G} es LL(1) si, y solo si, \mathcal{G} es LL(1) **fuerte**, esto es, para todas dos reglas distintas $Y \rightarrow \gamma_1, Y \rightarrow \gamma_2 \in P$:

$$\text{first}_1(\gamma_1) \odot_1 \text{follow}_1(Y) \cap \text{first}_1(\gamma_2) \odot_1 \text{follow}_1(Y) = \emptyset$$

Podemos verificar esta condición en **tiempo polinomial** en \mathcal{G} .