Expresiones regulares

Clase 04

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio:
¿qué tan poderoso es el no-determinismo en autómatas?

Teorema

Para todo autómata finito no-determinista $\mathcal{A}$, existe un autómata determinista $\mathcal{A}'$ tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

En otras palabras, DFA $\equiv$ NFA.

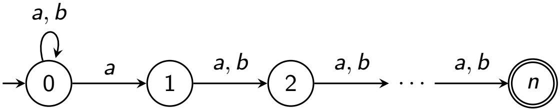
Ambos modelos computan lo mismo

¿cuál es la ventaja de los autómatas no-deterministas?

Ventajas

1. Su representación es más sencilla para algunos lenguajes.

2. Son **exponencialmente** más compactos.



- ¿cuántos estados tiene la determinización?

- ¿es posible hacerlo con menos estados?

Demostración: ejercicio.

Outline

Outline

ExpReg

Simplificaciones

Expresiones regulares

Definición (Sintaxis)

R es una **expresión regular** sobre Σ si R es igual a:

1. a para alguna letra $a \in \Sigma$.
2. ϵ
3. $\varnothing$
4. $(R_1 + R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
5. $(R_1 \cdot R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
6. (R_1^*) donde R_1 es una expresión regular.

Denotaremos como ExpReg el conjunto de
todas las expresiones regulares sobre Σ

Expresiones regulares

Ejemplos de expresiones regulares

- $(a + b)$
- $((a \cdot b) \cdot c)$
- (a^*)
- $(b \cdot (a^*))$
- $((a + b)^*)$
- $((a \cdot ((b \cdot a)^*)) + \epsilon)$
- $((a \cdot ((b \cdot a)^*)) + \varnothing)$

Expresiones regulares

Para reducir la cantidad de paréntesis, se define el **orden de precedencia**:

1. estrella $(\cdot)^*$
2. concatenación $\cdot$
3. unión $+$

Ejemplos

Considere el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$.

- $a \cdot b + a^* \quad = \; ?$
- $(a + b) \cdot c + a \quad = \; ?$

Cada expresión regular define un lenguaje

Definición (Semántica)

Para una expresión regular R cualquiera,
se define el lenguaje $\mathcal{L}(R) \subseteq \Sigma^*$ **inductivamente** como:

1. $\mathcal{L}(a) = \{a\}$ para toda letra $a \in \Sigma$.
2. $\mathcal{L}(\epsilon) = \{\epsilon\}$.
3. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$.
4. $\mathcal{L}(R_1 + R_2) = \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.

Cada expresión regular define un lenguaje

Definición (Semántica)

- Para dos lenguajes $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, se define el **producto** de L_1 y L_2:

$$L_1 \cdot L_2 \;=\; \left\{ w_1 \cdot w_2 \;\middle|\; w_1 \in L_1 \;\wedge\; w_2 \in L_2 \right\}$$

¿cuál es el resultado del producto de estos lenguajes?

- $\{aa, bb\} \cdot \{cc, dd\}$
- $\{a, ab, \epsilon\} \cdot \{ba, a\}$
- $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$
- $\{a\}^* \cdot \varnothing$

Cada expresión regular define un lenguaje

Definición (Semántica)

- Para dos lenguajes $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, se define el **producto** de L_1 y L_2:

$$L_1 \cdot L_2 \;=\; \left\{ w_1 \cdot w_2 \;\middle|\; w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \right\}$$

- Para un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se define la **potencia** a la $n \geq 0$:

$$L^n \;=\; \left\{ w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n \;\middle|\; \forall i \leq n.\; w_i \in L \right\}$$

¿cuál es el resultado de la potencia de estos lenguajes?

- $\{0,1\}^{32}$
- $\{aa, \epsilon\}^{10}$
- $\left(\{a\}^*\right)^4$
- $\left(\{a\}^*\right)^0$

Cada expresión regular define un lenguaje

Definición (Semántica)

- Para dos lenguajes $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, se define el **producto** de L_1 y L_2:

$$L_1 \cdot L_2 \;\;=\;\; \left\{ \, w_1 \cdot w_2 \;\;\middle|\;\; w_1 \in L_1 \;\wedge\; w_2 \in L_2 \, \right\}$$

- Para un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se define la **potencia** a la $n \geq 0$:

$$L^n \;\;=\;\; \left\{ \, w_1 \cdot w_2 \cdot \ldots \cdot w_n \;\;\middle|\;\; \forall\, i \leq n.\;\, w_i \in L \, \right\}$$

- Para un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ se define la **potencia** a la 0:

$$L^0 \;\;=\;\; \left\{ \epsilon \right\}$$

Cada expresión regular define un lenguaje

Definición (Semántica)

Para una expresión regular R cualquiera,
se define el lenguaje $\mathcal{L}(R) \subseteq \Sigma^*$ **inductivamente** como:

1. $\mathcal{L}(a) = \{a\}$ para toda letra $a \in \Sigma$.
2. $\mathcal{L}(\epsilon) = \{\epsilon\}$.
3. $\mathcal{L}(\varnothing) = \varnothing$.
4. $\mathcal{L}(R_1 + R_2) = \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
5. $\mathcal{L}(R_1 \cdot R_2) = \mathcal{L}(R_1) \cdot \mathcal{L}(R_2)$ donde R_1 y R_2 son expresiones regulares.
6. $\mathcal{L}(R_1^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}(R_1)^k$ donde R_1 es una expresión regular.

Cada expresión regular define un lenguaje

¿cuál es el lenguaje definido por las siguientes ExpReg?

- $\mathcal{L}(\ (a+b)^*\ ) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}\big(\ (a \cdot b) \cdot (b \cdot a)\ \big) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}(\ a \cdot (b \cdot a) + b \cdot a + (a \cdot b) \cdot a\ ) \ = \ ?$

Simplificación de expresiones regulares

Definición

- R_1 es **equivalente** a R_2 si, y solo si, $\mathcal{L}(R_1) = \mathcal{L}(R_2)$.
- Si R_1 es equivalente a R_2, escribiremos $R_1 \equiv R_2$.

Lema

Los operadores de unión $+$ y producto $\cdot$ son **asociativos**.

$$
\begin{aligned}
(R_1 + R_2) + R_3 &\equiv R_1 + (R_2 + R_3) \\
(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 &\equiv R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)
\end{aligned}
$$

Demostración: ejercicio.

Más ejemplos de expresiones regulares

¿cuál es el lenguaje definido por las siguientes ExpReg?

- $\mathcal{L}(\ a^* \cdot b \cdot a^*\ ) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}(\ (a+b)^* \cdot b \cdot (a+b)^*\ ) \ = \ ?$

Abreviaciones útiles para expresiones regulares

Definición

Usamos las siguientes **abreviaciones** de expresiones regulares:

$$
\begin{aligned}
R^{+} &\equiv R \cdot R^{*} \\
R^{k} &\equiv R \cdot \overset{k}{\cdots} \cdot R \\
R^{?} &\equiv R + \epsilon \\
\Sigma &\equiv a_1 + \ldots + a_n
\end{aligned}
$$

para $R \in \text{ExpReg}$ y $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Más ejemplos de expresiones regulares

¿cuál es el lenguaje definido por las siguientes ExpReg?

- $\mathcal{L}(\ \Sigma^* \cdot b \cdot \Sigma^*\ ) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}\left(\ b^* \cdot (a \cdot b^*)^5\ \right) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}\left(\ a^* \cdot (b + c)^?\ \right) \ = \ ?$
- $\mathcal{L}(\ (a \cdot b^+)^*\ ) \ = \ ?$

Más ejemplos de expresiones regulares

Defina una ExpReg para los siguientes lenguajes

1. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$
   cuya ante-penúltima letra es una a-letra.

2. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$
   con una cantidad par de a-letras.

3. Todas las palabras sobre $\{a, b\}$
   con a lo mas un par de a-letras consecutivas.

Outline

Simplificación de expresiones

Para expresiones regulares R, S y T.

Las siguientes expresiones son **equivalentes**:

$$
\begin{aligned}
R + \varnothing &\equiv R \\
R \cdot \varnothing &\equiv \varnothing \cdot R \equiv \varnothing \\
\epsilon \cdot R &\equiv R \cdot \epsilon \equiv R \\
R + R &\equiv R \\
R \cdot (S + T) &\equiv R \cdot S + R \cdot T \\
(S + T) \cdot R &\equiv S \cdot R + T \cdot R \\
R^* &\equiv \epsilon + R \cdot R^* \\
R^* &\equiv \epsilon + R^* \cdot R
\end{aligned}
$$

Más simplificación de expresiones

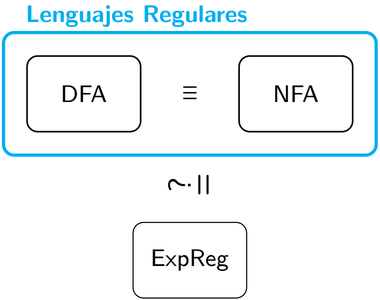
Sean R, S y T expresiones regulares.

Las siguientes expresiones son **equivalentes**:

$$
\begin{aligned}
R \cdot R^* &\equiv R^* \cdot R \\
(\epsilon + R)^* &\equiv R^* \\
(R \cdot S)^* \cdot R &\equiv R \cdot (S \cdot R)^* \\
(R^* \cdot S)^* \cdot R^* &\equiv (R + S)^* \\
R^* \cdot (S \cdot R^*)^* &\equiv (R + S)^*
\end{aligned}
$$

Estas reglas serán útiles para simplificar expresiones complejas

Mapa actual de nuestros modelos de computación



¿son las **ExpReg** equivalentes a los **lenguajes regulares**?