

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Clase 14

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Problema de pattern matching

Problema

de una palabra Dado un **patrón** $w = w_1 \dots w_m$ y un **documento**

$d = d_1 \dots d_n$,

encontrar todas las posiciones donde aparece w en d , o sea, enumerar:

$$\{(i, j) \mid w = d_i d_{i+1} \dots d_j\}$$

Solución ingenua

for $i = 0$ **to** $n - m$ **do**

$j := 1$

while $j \leq m \wedge w_j = d_{i+j}$ **do**

$j := j + 1$

if $j > m$ **then**

output $(i + 1, i + m + 1)$

¿es posible hacerlo mejor?

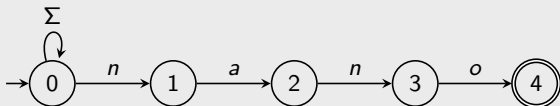
Recordatorio: Autómata de un patrón

Definición

Dado una palabra $w = w_1 \dots w_m$, sea el NFA $\mathcal{A}_w = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ tal que:

- $Q = \{0, 1, \dots, m\}$
- $\Delta = \{(0, a, 0) \mid a \in \Sigma\} \cup \{(i, w_{i+1}, i+1) \mid i < m\}$
- $I = \{0\}$ y $F = \{m\}$.

Ejemplo: palabra $w = \text{nano}$



¿cómo podemos usar \mathcal{A}_w para encontrar todas las apariciones de w en d ?

Recordatorio: Determinización de \mathcal{A}_w

Sea $\mathcal{A}_w^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ la determinización de \mathcal{A}_w tal que Q^{det} contiene **solo los estados alcanzables** desde $\{0\}$.

Recordatorio

Para un autómata no-determinista $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$, se define el autómata determinista (**determinización** de \mathcal{A}):

$$\mathcal{A}^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, q_0^{\text{det}}, F^{\text{det}})$$

- $Q^{\text{det}} = 2^Q = \{S \mid S \subseteq Q\}$
- $q_0^{\text{det}} = I$.
- $\delta^{\text{det}} : 2^Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ tal que:

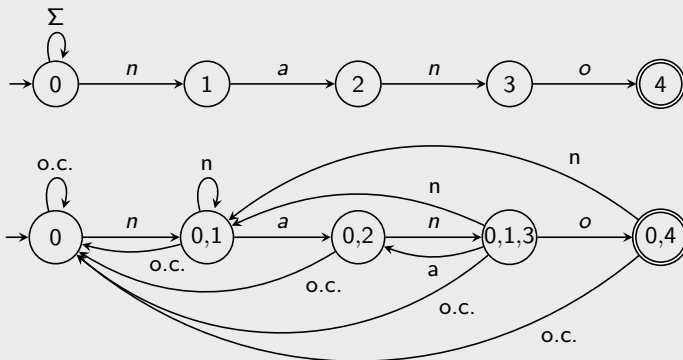
$$\delta^{\text{det}}(S, a) = \{q \in Q \mid \exists p \in S. (p, a, q) \in \Delta\}$$

- $F^{\text{det}} = \{S \in 2^Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$.

Recordatorio: Determinización de \mathcal{A}_w

Sea $\mathcal{A}_w^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ la determinización de \mathcal{A}_w tal que Q^{det} contiene **solo los estados alcanzables** desde $\{0\}$.

Ejemplo: palabra $w = \text{nano}$



¿cuál es el problema de construir $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$?

Recordatorio: ¿cuál es el tamaño de $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$?

Sea $w = w_1 \dots w_m$ y $\mathcal{A}_w^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ la determ. de \mathcal{A}_w .

Teorema

Para todo $S \in Q^{\text{det}}$ y $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ se cumple que:

$i \in S$ si, y solo si, $w_1 \dots w_i$ es un sufijo de $w_1 \dots w_{\max(S)}$.

Corolarios

$\mathcal{A}_w^{\text{det}}$ tiene $|w| + 1$ estados y $\mathcal{O}(|w|^2)$ transiciones.

Por lo tanto, encontrar todos los substrings de w en d
toma tiempo $\mathcal{O}(|d| + |w|^2)$

¿es posible hacerlo mejor?

Outline

Demostración del teorema

k-lookahead

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Outline

Demostración del teorema

k-lookahead

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Recordatorio de lo que queremos demostrar...

Sea $w = w_1 \dots w_m$ y $\mathcal{A}_w^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ la determ. de \mathcal{A}_w .

Teorema

Para todo $S \in Q^{\text{det}}$ y $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ se cumple que:

$i \in S$ si, y solo si, $w_1 \dots w_i$ es un sufijo de $w_1 \dots w_{\max(S)}$.

Corolarios

- Para todo $S_1, S_2 \in Q^{\text{det}}$, si $\max(S_1) = \max(S_2)$, entonces $S_1 = S_2$.
- $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$ tiene $|w| + 1$ estados y $\mathcal{O}(|w|^2)$ transiciones.

Por lo tanto, encontrar todos los substrings de w en d
toma tiempo $\mathcal{O}(|d| + |w|^2)$

¿cuál es el tamaño de \mathcal{A}_w^{\det} ?

Demostración teorema

Sea $S \in Q^{\det}$ un conjunto de estados cualquiera alcanzable desde $\{0\}$.

Entonces existe una palabra $u = a_1 \dots a_k$ tal que $\hat{\delta}^{\det}(\{0\}, u) = S$.

Por la demostración que $\mathcal{L}(\mathcal{A}^{\det}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ para todo NFA \mathcal{A} (Clase 03), sabemos que $j \in S$ si, y solo si, existe una ejecución de \mathcal{A}_w sobre u :

$$0 = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_k} q_k = j.$$

Por la definición de \mathcal{A}_w esta ejecución es de la forma:

$$0 \xrightarrow{a_1} 0 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{k-j}} 0 \underbrace{\xrightarrow{a_{k-j+1}} 1 \xrightarrow{a_{k-j+2}} 2 \dots \xrightarrow{a_k} j}_{w_1 \dots w_j}.$$

Por lo tanto, $w_1 w_2 \dots w_j$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$.

Usaremos este último hecho para demostrar **ambas direcciones**.

¿cuál es el tamaño de \mathcal{A}_w^{\det} ?

Propiedad

Para toda $u = a_1 \dots a_k$ tal que $\hat{\delta}^{\det}(\{0\}, u) = S$, y para todo $j \leq m$:

$j \in S$ si, y solo si, $w_1 \dots w_j$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$

Demostración teorema (\Rightarrow)

Como S es alcanzable desde $\{0\}$,

entonces existe $u = a_1 \dots a_k$ tal que $\hat{\delta}^{\det}(\{0\}, u) = S$.

Como $\max(S) \in S$, entonces $w_1 \dots w_{\max(S)}$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$.

Suponga que $i \in S$. Entonces $w_1 \dots w_i$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$.

Como $i \leq \max(S)$, entonces:

$$a_1 a_2 \dots a_{k-\max(S)} \overbrace{a_{k-\max(S)+1} \dots a_{k-i}}^{w_1 \dots w_{\max(S)}} \underbrace{a_{k-i+1} \dots a_k}_{w_1 \dots w_i}$$

Por lo tanto, $w_1 \dots w_i$ es sufijo de $w_1 \dots w_{\max(S)}$.



¿cuál es el tamaño de \mathcal{A}_w^{\det} ?

Propiedad

Para toda $u = a_1 \dots a_k$ tal que $\hat{\delta}^{\det}(\{0\}, u) = S$, y para todo $j \leq m$:

$j \in S$ si, y solo si, $w_1 \dots w_j$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$

Demostración teorema (\Leftarrow)

Como S es alcanzable desde $\{0\}$,

entonces existe $u = a_1 \dots a_k$ tal que $\hat{\delta}^{\det}(\{0\}, u) = S$.

Como $\max(S) \in S$, entonces $w_1 \dots w_{\max(S)}$ es sufijo de $a_1 \dots a_k$.

Suponga que $w_1 \dots w_i$ es sufijo de $w_1 \dots w_{\max(S)}$.

Como $w_1 \dots w_i$ es sufijo de $w_1 \dots w_{\max(S)}$ y $w_1 \dots w_{\max(S)}$ es sufijo de u , entonces $w_1 \dots w_i$ es sufijo de $u = a_1 \dots a_k$.

Por la "Propiedad", concluimos que $i \in S$.



Outline

Demostración del teorema

k-lookahead

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Autómata finito con k -lookahead

Sea Σ un alfabeto finito.

Definiciones

Se definen los siguientes conjuntos de palabra:

- $\Sigma_{\bullet} = \Sigma^* \times \Sigma^*$
- $\Sigma_{\bullet}^k = \{ (u, v) \in \Sigma_{\bullet} \mid |uv| = k \}$

Notación

En vez de $(u, v) \in \Sigma_{\bullet}$, escribiremos $u.v \in \Sigma_{\bullet}$.

Ejemplos

Si $\Sigma = \{a, b\}$ entonces:

- $ab.ba \in \Sigma_{\bullet}$ y $.aba \in \Sigma_{\bullet}$
- $ab.ba \in \Sigma_{\bullet}^4$ y $.aba \in \Sigma_{\bullet}^3$

Autómata finito con k -lookahead

Definición

Un autómata finito determinista con k -lookahead es:

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de input.
- q_0 es el estado inicial
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

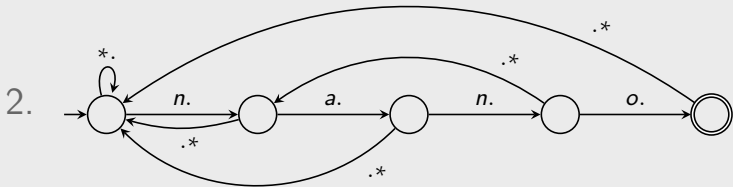
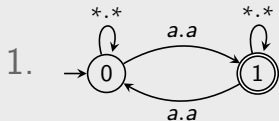
+

- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\$ \})^k \rightarrow Q$ es una función parcial, tal que:

para todo $p \in Q$ y $w \in (\Sigma \cup \{\$ \})^k : |\{u.v \mid \delta(p, u.v) = q \text{ y } uv = w\}| \leq 1$.

Autómata finito con k -lookahead

Algunos ejemplos



Ejecución de DFA con k -lookahead

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA con k -lookahead.

Definiciones

- Un par $(q, w) \in Q \times (\Sigma \cup \{\$\})^*$ es una **configuración** de \mathcal{A} .
- Una configuración $(q_0, w\$^k)$ es **inicial**.
- Una configuración $(q, \$^k)$ es **final** si $q \in F$.

El sufijo $\k no sirve para marcar el final del input
(y simplificar la definición de lookahead al leer el final de la palabra)

Ejecución de DFA con k -lookahead

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA con k -lookahead.

Definición

Se define la relación $\vdash_{\mathcal{A}}$ de **siguiente-paso** entre configuraciones de \mathcal{A} :

$$(p_1, w_1) \vdash_{\mathcal{A}} (p_2, w_2)$$

si, y solo si, $\delta(p_1, u.v) = p_2$ y existe $w \in \Sigma^*$ tal que $w_1 = uvw$ y $w_2 = vw$.

Se define $\vdash_{\mathcal{A}}^*$ como la clausura **refleja** y **transitiva** de $\vdash_{\mathcal{A}}$:

$$\text{para toda configuración } (p, w) : \quad (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p, w)$$

$$\text{si } (p_1, w_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p_2, w_2) \text{ y } (p_2, w_2) \vdash_{\mathcal{A}} (p_3, w_3) : \quad (p_1, w_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p_3, w_3)$$

$(p, u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$ si uno puede ir de (p, u) a (q, v) en **0 o más pasos**.

Ejecución de DFA con k -lookahead

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA con k -lookahead.

Definiciones

- \mathcal{A} **acepta** w si existe una configuración **inicial** $(q_0, w\$^k)$ y una configuración **final** $(q_f, \$^k)$ tal que:

$$(q_0, w\$^k) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q_f, \$^k)$$

- El **lenguaje aceptado** por \mathcal{A} se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

Mismas definiciones que para ϵ -NFA.

k -lookahead y lenguajes regulares

Teorema

Para todo DFA con k -lookahead \mathcal{A}
se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ es un **lenguaje regular**.

Demostración: ejercicio.

Definición

Llamaremos un **lazy automata** a un DFA con 1-lookahead.

¿cuál es la ventaja de un lazy autómeta?

Outline

Demostración del teorema

k-lookahead

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Construcción de un lazy autómeta a partir de $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$

Sea $w = w_1 \dots w_m$ y $\mathcal{A}_w^{\text{det}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{det}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ la determ. de \mathcal{A}_w .

Definición

Para $i \in [0, m]$, sea S_i el **único estado** en Q^{det} tal que $i = \max(S_i)$.

(¿por qué S_i es único?)

Propiedad 2

Para todo $a \in \{w_1, \dots, w_m\}$ y $i \in [0, m-1]$:

1. $S_i - \{i\} \in Q^{\text{det}}$.
2. $a = w_{i+1}$, entonces $\delta^{\text{det}}(S_i, a) = S_{i+1}$.
3. $a \neq w_{i+1}$, entonces $\delta^{\text{det}}(S_i, a) = \delta^{\text{det}}(S_i - \{i\}, a)$.

Demostración: ejercicio.

¿cómo podemos construir un lazy autómeta usando la Propiedad 2?

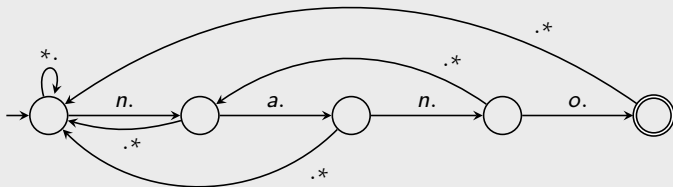
Construcción de un lazy autómat a partir de $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$

Construcción

Se define el lazy autómat $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{lazy}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ tal que:

- para todo $a \neq w_1$: $\delta^{\text{lazy}}(\{0\}, a) = \{0\}$.
- para todo $a \in \{w_1, \dots, w_m\}$ y $i \in [0, m-1]$:
 - si $a = w_{i+1}$, entonces $\delta^{\text{lazy}}(S_i, a) = S_{i+1}$
 - si $a \neq w_{i+1}$ y $i \neq 0$, entonces $\delta^{\text{lazy}}(S_i, .a) = S_i - \{i\}$.

Ejemplo



Construcción de un lazy autómatas a partir de $\mathcal{A}_w^{\text{det}}$

Construcción

Se define el lazy autómatas $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}} = (Q^{\text{det}}, \Sigma, \delta^{\text{lazy}}, \{0\}, F^{\text{det}})$ tal que:

- para todo $a \neq w_1$: $\delta^{\text{lazy}}(\{0\}, a) = \{0\}$.
- para todo $a \in \{w_1, \dots, w_m\}$ y $i \in [0, m-1]$:
 - si $a = w_{i+1}$, entonces $\delta^{\text{lazy}}(S_i, a) = S_{i+1}$
 - si $a \neq w_{i+1}$ y $i \neq 0$, entonces $\delta^{\text{lazy}}(S_i, a) = S_i - \{i\}$.

Teorema

Para todo w se cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_w^{\text{det}}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_w^{\text{lazy}})$.

Demostración: ejercicio. (usando Propiedad 2)

¿cuántos pasos toma $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ sobre un documento d ?

Considere la **ejecución** de $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ sobre un documento d con $|d| = n$:

$$(\{0\}, d) = (P_0, u_0) \vdash_{\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}} (P_1, u_1) \vdash_{\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}} \dots \vdash_{\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}} (P_k, u_k) = (P_k, \epsilon)$$

tal que j_0, \dots, j_n con $j_0 = 0$ son las posiciones que se movió **hacia adelante** y $\Delta_i = j_i - j_{i-1}$ la **cantidad de pasos** de $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ entre posiciones de avance.

- Si $\Delta_i = 1$ entonces: $\Delta_i \leq \max(P_{j_{i-1}}) - \max(P_{j_i}) + 2$. (avanzo uno)
- Si $\Delta_i > 1$ entonces: $\Delta_i \leq \max(P_{j_{i-1}}) - \max(P_{j_i}) + 2$. (retrocedió)

Si sumamos la cantidad de pasos, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^m \Delta_i \leq \sum_{i=1}^n (\max(P_{j_{i-1}}) - \max(P_{j_i}) + 2) = \max(P_{j_0}) - \max(P_{j_n}) + 2n \leq 2n$$

Por lo tanto, la cantidad de pasos es lineal en $\mathcal{O}(|d|)$.

Algoritmo de Knuth-Morris-Prat

Algoritmo

Dado una palabra w y un documento d :

- Construimos $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ desde \mathcal{A}_w . $\mathcal{O}(|w|)$
- Ejecutamos $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ sobre d . $\mathcal{O}(|d|)$

Tiempo del algoritmo: $\mathcal{O}(|w| + |d|)$

Ejercicio: demuestre como construir $\mathcal{A}_w^{\text{lazy}}$ en tiempo $\mathcal{O}(|w|)$