Lema de bombeo para lenguajes libres de contexto

Clase 18

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Lema de bombeo para lenguajes libres de contexto

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es **libre de contexto** entonces:

$(\mathrm{LB}^{\mathrm{CFL}})$ existe un $N > 0$ tal que

para toda palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$

existe una descomposición $z = u\, v\, w\, x\, y$

con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que

para todo $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$.

Demostración

(PIZARRA)

Contrapositivo del lema de bombeo para CFL

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es libre de contexto entonces:

$(\mathrm{LB}^{\mathrm{CFL}})$

existe un $N > 0$ tal que
para toda palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
existe una descomposición $z = u\,v\,w\,x\,y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
para todo $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si:

$(\neg\,\mathrm{LB}^{\mathrm{CFL}})$

para todo $N > 0$ tal que
existe una palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
para toda descomposición $z = u\,v\,w\,x\,y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
existe $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.

entonces L **NO** es libre de contexto.

Jugando contra un demonio (versión CFL)

"L **NO es** CFL" "L **es** CFL"

El escoge un $N > 0$

Uno escoge $z \in L$ **con** $|z| \geq N$

El escoge $u\,v\,w\,x\,y = z$ **con** $vx \neq \epsilon$ **y** $|vwx| \leq N$

Uno escoge $i \geq 0$

Uno gana si $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$ **El gana** si $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$

Jugando contra un demonio (a^{n^2})

"a^{n^2} **NO es** CFL"

"a^{n^2} **es** CFL"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $a^{N^2} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{a^j}_{u}\underbrace{a^k}_{v}\underbrace{a^l}_{w}\underbrace{a^m}_{x}\underbrace{a^n}_{y} = a^{N^2}$

con $k + m \neq 0$ **y** $k + l + m \leq N$

Yo escojo $i = 2$

¿quién gana el juego?

Jugando contra un demonio ($a^n b^n c^n$)

“$a^n b^n c^n$ **NO es** CFL” | “$a^n b^n c^n$ **es** CFL”

Escojo $N > 0$

Yo escojo $a^N b^N c^N \in L$

Entonces escojo $uvwxy = a^N b^N c^N$ **con** $vx \neq \epsilon$ **y** $|vwx| \leq N$

Yo escojo $i = 2$

¿quién gana el juego?

Jugando contra un demonio ($a^n b^n c^n$)

Como $uvwxy = a^N b^N c^N$ con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$, entonces:

$$vwx \in \mathcal{L}(a^* b^*) \quad \text{o} \quad vwx \in \mathcal{L}(b^* c^*)$$

¿ por qué ?

- Si $vwx \in \mathcal{L}(a^+ b^+)$, entonces:
  - $|u\,v^2\,w\,x^2\,y|_{a,b} > 2N$
  - $|u\,v^2\,w\,x^2\,y|_{c} = N$

  por lo tanto $z' \notin L$.

- Si $vwx \in \mathcal{L}(b^+ c^+)$, entonces:
  - $|u\,v^2\,w\,x^2\,y|_{b,c} > 2N$
  - $|u\,v^2\,w\,x^2\,y|_{a} = N$

  por lo tanto $z' \notin L$.

En ambos casos, $uv^2wx^2y \notin L$

Jugando contra un demonio

$(\neg\,\mathrm{LB}^{\mathrm{CFL}})$

para todo $N > 0$ tal que
existe una palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
para toda descomposición $z = u\,v\,w\,x\,y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
existe $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.

entonces L **NO** es libre de contexto.

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, si UNO *tiene una estrategia ganadora en el juego $(\neg\,\mathrm{LB}^{\mathrm{CFL}})$ para toda estrategia posible del* demonio, *entonces L* NO *es libre de contexto."*

Consecuencias: unión, intersección y complemento

Proposición

Para todo lenguajes libres de contexto L_1 y L_2,
$L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre de contexto.

Existen lenguajes libres de contexto L, L_1 y L_2:

- $L_1 \cap L_2$ **NO** es un lenguaje libre de contexto.
- L^c **NO** es un lenguaje libre de contexto.

Demostración

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{ a^n b^n c^m \;\middle|\; n \geq 0, m \geq 0 \right\} \\ L_2 &= \left\{ a^m b^n c^n \;\middle|\; n \geq 0, m \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

¿son L_1 y L_2 lenguajes libres de contexto? ¿y $L_1 \cap L_2$?

Ejercicio: demuestre el caso de L^c.