

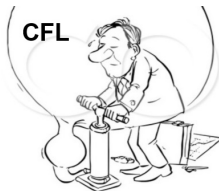
Lema de bombeo para lenguajes libres de contexto

Clase 18

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

Lema de bombeo para lenguajes libres de contexto



Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es **libre de contexto** entonces:

(LB^{CFL}) existe un $N > 0$ tal que
para toda palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
existe una descomposición $z = u v w x y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
para todo $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$.

Demostración

(PIZARRA)

Contrapositivo del lema de bombeo para CFL

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si L es libre de contexto entonces:

(LB^{CFL}) **existe** un $N > 0$ tal que
para toda palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
existe una descomposición $z = uvwx y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
para todo $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$.

Sea $L \subseteq \Sigma^*$. Si:

$(\neg LB^{CFL})$ **para todo** $N > 0$ tal que
existe una palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
para toda descomposición $z = uvwx y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
existe $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.
entonces L **NO** es libre de contexto.

Jugando contra un demonio (versión CFL)



“ L **NO** es CFL”



“ L es CFL”

El escoge un $N > 0$

Uno escoge $z \in L$ con $|z| \geq N$

El escoge $u v w x y = z$ con $v x \neq \epsilon$ y $|v w x| \leq N$

Uno escoge $i \geq 0$

Uno gana si $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$

El gana si $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \in L$

Jugando contra un demonio (a^{n^2})



" a^{n^2} NO es CFL"



" a^{n^2} es CFL"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $a^{N^2} \in L$

Entonces escojo $\underbrace{a^j}_u \underbrace{a^k}_v \underbrace{a^l}_w \underbrace{a^m}_x \underbrace{a^n}_y = a^{N^2}$

con $k + m \neq 0$ y $k + l + m \leq N$

Yo escojo $i = 2$

¿quién gana el juego?

Jugando contra un demonio ($a^n b^n c^n$)



" $a^n b^n c^n$ **NO** es CFL"



" $a^n b^n c^n$ es CFL"

Escojo $N > 0$

Yo escojo $a^N b^N c^N \in L$

Entonces escojo $uvwx y = a^N b^N c^N$ con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$

Yo escojo $i = 2$

¿quién gana el juego?

Jugando contra un demonio ($a^n b^n c^n$)

Como $uvwxy = a^N b^N c^N$ con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$, entonces:

$$vwx \in \mathcal{L}(a^+ b^+) \quad \text{o} \quad vwx \in \mathcal{L}(b^+ c^+)$$

¿ por qué ?

■ Si $vwx \in \mathcal{L}(a^+ b^+)$, entonces:

- $|u v^2 w x^2 y|_{a,b} > 2N$
- $|u v^2 w x^2 y|_c = N$

por lo tanto $z' \notin L$.

■ Si $vwx \in \mathcal{L}(b^+ c^+)$, entonces:

- $|u v^2 w x^2 y|_{b,c} > 2N$
- $|u v^2 w x^2 y|_a = N$

por lo tanto $z' \notin L$.

En ambos casos, $uv^2wx^2y \notin L$

Jugando contra un demonio

$(\neg \text{LB}^{\text{CFL}})$ **para todo** $N > 0$ tal que
existe una palabra $z \in L$ con $|z| \geq N$
para toda descomposición $z = uvwx y$
con $vx \neq \epsilon$ y $|vwx| \leq N$ tal que
existe $i \geq 0$, $u \cdot v^i \cdot w \cdot x^i \cdot y \notin L$.
entonces L **NO** es libre de contexto.

Lema de bombeo (version juego)

"Dado un lenguaje $L \subseteq \Sigma^$, si **UNO** tiene una estrategia ganadora en el juego $(\neg \text{LB}^{\text{CFL}})$ para toda estrategia posible del demonio, entonces L **NO** es libre de contexto."*

Consecuencias: unión, intersección y complemento

Proposición

Para todo lenguajes libres de contexto L_1 y L_2 ,
 $L_1 \cup L_2$ es un lenguaje libre de contexto.

Existen lenguajes libres de contexto L , L_1 y L_2 :

- $L_1 \cap L_2$ **NO** es un lenguaje libre de contexto.
- L^c **NO** es un lenguaje libre de contexto.

Demostración

$$\begin{aligned} L_1 &= \{ a^n b^n c^m \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \\ L_2 &= \{ a^m b^n c^n \mid n \geq 0, m \geq 0 \} \end{aligned}$$

¿son L_1 y L_2 lenguajes libres de contexto? ¿y $L_1 \cap L_2$?



Ejercicio: demuestre el caso de L^c .