Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 - Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales

Ayudantía 10

Franco Bruña y Dante Pinto
26 de Noviembre, 2021

Pregunta 1

1. Demuestre que para todo k, existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$.

   Sea $\mathcal{G}$ la siguiente gramática:

$$\begin{aligned} S &\to a^k X \mid a^k Y \\ X &\to b \\ Y &\to c \end{aligned}$$

   Dado que $L(\mathcal{G})$ es un lenguaje finito, es claro que será regular, por lo que bastará demostrar que $\mathcal{G}$ o es $LL(k)$.

   Sabemos que $\mathcal{G}$ será $LL(k)$ si para todas las derivaciones:

   - $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot Y \cdot \beta \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot \gamma_1 \cdot \beta \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_1$
   - $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot Y \cdot \beta \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot \gamma_2 \cdot \beta \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_2$
   - $v_1|_k = v_2|_k$

   Se cumple que $\gamma_1 = \gamma_2$.

   Observando nuestra gramática, podemos considerar:

   - $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot S \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} \varepsilon \cdot a^k X \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot a^k b$
   - $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot S \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} \varepsilon \cdot a^k Y \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot a^k c$

   Luego $v_1 = a^k b \wedge v_2 = a^k c$, por lo que $v_1|_k = v_2|_k = a^k$, sin embargo, observando los γ, tenemos $\gamma_1 = a^k X \neq a^k Y = \gamma_2$, lo que significa que $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$.

   Por lo tanto, para todo k, existirá $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ es regular y $\mathcal{G}$ no es $LL(k)$

2. Demuestre que para todo lenguaje regular L, existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G}$ es $LL(k)$ para algún k.

   Como L es regular, sabemos que existirá un DFA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, por lo que podemos construir la gramática $\mathcal{G} = (Q, \Sigma, P, q_0)$, con P dado por:

$$\begin{aligned} P = &\{p \to aq \mid \delta(p,a) = q\} \\ \cup &\{p \to \varepsilon \quad \mid p \in F\} \end{aligned}$$

   Demostramos anteriormente (AY07 - P2) que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$, por lo que solamente necesitaremos demostrar que $\mathcal{G}$ es $LL(k)$ para algún k.

   Tomando dos derivaciones cualquiera de la forma:

   - $S = q_0 \overset{*}{\underset{lm}{\Longrightarrow}} u \cdot q \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot a_1 q_1 \cdot \varepsilon \overset{*}{\underset{lm}{\Longrightarrow}} u \cdot v_1$
   - $S = q_0 \overset{*}{\underset{lm}{\Longrightarrow}} u \cdot q \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot a_2 q_2 \cdot \varepsilon \overset{*}{\underset{lm}{\Longrightarrow}} u \cdot v_2$

   Como $\mathcal{G}$ está hecha en base a un DFA, sabemos que para un par estado, letra (p, a) existirá una única transición dada por $\delta(p, a) = q$, lo que a su vez significa que la gramática tendrá una única producción que a partir de la variable p entregará la letra a y esta siempre producirá aq.

   Aplicando esto a las derivaciones anteriores, podemos ver que para $k = 1$, si $v_1|_1 = v_2|_1$, entonces $a_1 = a_2$, y ya que fueron obtenidos a partir de una misma variable q, necesariamente se cumplirá que $q_1 = q_2$, lo que significa que $a_1 q_1 = a_2 q_2 \to \gamma_1 = \gamma_2$ y, por tanto, $\mathcal{G}$ será $LL(1)$.

Pregunta 2

Considere la gramática

$$\mathcal{G} = \left(\{S', S, B, E, J, L\}, \{;, :=, a, (,), ,\}, \left\{ \begin{array}{lcl} S' & \to & S \\ S & \to & LB \\ B & \to & ;S;L \mid := L \\ E & \to & a \mid L \\ J & \to & ,EJ \mid \;\;) \\ L & \to & (EJ \end{array} \right\}, S' \right)$$

Para cada variable X de $\mathcal{G}$, calcule $\texttt{first}_1(X)$ y $\texttt{follow}_1(X)$ usando los algoritmos vistos en clases.

Pregunta 3

Sea $\mathcal{G} = (V, \Sigma, P, S)$. Demuestre que si i^* es el menor número tal que $\texttt{follow}_k^{i^*}(X) = \texttt{follow}_k^{i^*+1}(X)$ para todo $X \in V$. Entonces para todo $X \in V$:

$$\texttt{follow}_k^{i^*}(X) = \texttt{follow}_k(X)$$