

# Autómatas con transiciones sin lectura

Clase 05

IIC 2223

Prof. Cristian Riveros

# Recordatorio: cada expresión regular define un lenguaje

## Definición (Semántica)

Para una expresión regular  $R$  cualquiera,  
se define el lenguaje  $\mathcal{L}(R) \subseteq \Sigma^*$  **inductivamente** como:

1.  $\mathcal{L}(a) = \{a\}$  para toda letra  $a \in \Sigma$ .
2.  $\mathcal{L}(\epsilon) = \{\epsilon\}$ .
3.  $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$ .
4.  $\mathcal{L}(R_1 + R_2) = \mathcal{L}(R_1) \cup \mathcal{L}(R_2)$  donde  $R_1$  y  $R_2$  son expresiones regulares.
5.  $\mathcal{L}(R_1 \cdot R_2) = \mathcal{L}(R_1) \cdot \mathcal{L}(R_2)$  donde  $R_1$  y  $R_2$  son expresiones regulares.
6.  $\mathcal{L}(R_1^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}(R_1)^k$  donde  $R_1$  es una expresión regular.

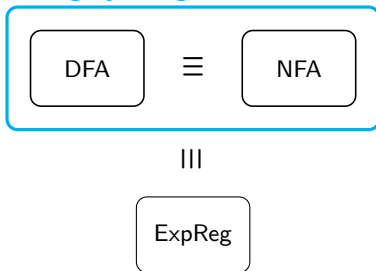
# Más ejemplos de expresiones regulares

Defina una ExpReg para los siguientes lenguajes

1. Todas las palabras sobre  $\{a, b\}$   
cuya ante-penúltima letra es una  $a$ -letra.
2. Todas las palabras sobre  $\{a, b\}$   
con una cantidad par de  $a$ -letras.
3. Todas las palabras sobre  $\{a, b\}$   
con a lo mas un par de  $a$ -letras consecutivas.

# Mapa actual de nuestros modelos de computación

## Lenguajes Regulares



Para demostrar  $\text{ExpReg} \subseteq \text{NFA}$ , primero necesitamos un nuevo modelo

# Outline

$\epsilon$ -NFA

NFA versus  $\epsilon$ -NFA

# Outline

$\epsilon$ -NFA

NFA versus  $\epsilon$ -NFA

# Autómata finito no-determinista con $\epsilon$ -transiciones

¿qué tiene de nuevo este autómata?

1. tiene transiciones no deterministas y
2. tiene transiciones leyendo la palabra  $\epsilon$ :

$$p \xrightarrow{\epsilon} q$$

¿Importancia?

- modelo **muy útil** para construir nuevos autómatas y
- **NO** agrega más poder de computación a los NFA.

# Autómata finito no-determinista con $\epsilon$ -transiciones

## Definición

Un autómata finito no-determinista con  $\epsilon$ -transiciones ( $\epsilon$ -NFA) es:

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$$

- $Q$  es un conjunto finito de estados.
- $\Sigma$  es el alfabeto de input.
- $I \subseteq Q$  es un conjunto de estados iniciales.
- $F \subseteq Q$  es el conjunto de estados finales (o aceptación).

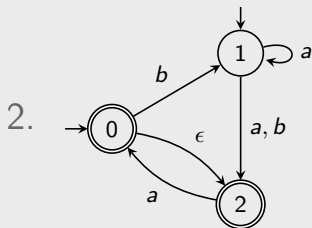
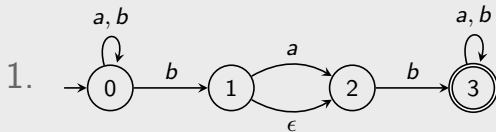
+

- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q$  es la relación de transición.



# Autómata finito no-determinista con $\epsilon$ -transiciones

## Algunos ejemplos



# Ejecución de $\epsilon$ -NFA

Para  $\epsilon$ -NFA veremos una **forma alternativa** para definir las nociones de ejecución y aceptación.

Sea  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  un  $\epsilon$ -NFA.

## Definiciones

- Un par  $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$  es una **configuración** de  $\mathcal{A}$ .
- Una configuración  $(q, w)$  es **inicial** si  $q \in I$ .
- Una configuración  $(q, w)$  es **final** si  $q \in F$  y  $w = \epsilon$ .

*“Intuitivamente, una configuración  $(q, aw)$  representa que  $\mathcal{A}$  se encuentra en el estado  $q$  procesando la palabra  $aw$  y leyendo  $a$ .”*

# Ejecución de $\epsilon$ -NFA

Sea  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  un  $\epsilon$ -NFA.

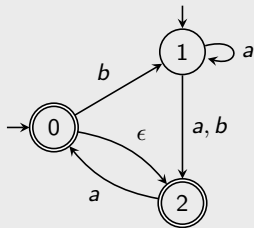
## Definición

Se define la relación  $\vdash_{\mathcal{A}}$  de **siguiente-paso** entre configuraciones de  $\mathcal{A}$ :

$$(p, u) \vdash_{\mathcal{A}} (q, v)$$

si, y solo si, existe  $(p, c, q) \in \Delta$  con  $c \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$  tal que  $u = c \cdot v$ .

## Ejemplo



$$(1, baa) \vdash_{\mathcal{A}} (2, aa)$$

$$(2, aa) \vdash_{\mathcal{A}} (0, a) \vdash_{\mathcal{A}} (2, a) \vdash_{\mathcal{A}} (0, \epsilon)$$

# Ejecución de $\epsilon$ -NFA

Sea  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  un  $\epsilon$ -NFA.

## Definición

Se define la relación  $\vdash_{\mathcal{A}}$  de **siguiente-paso** entre configuraciones de  $\mathcal{A}$ :

$$(p, u) \vdash_{\mathcal{A}} (q, v)$$

si, y solo si, existe  $(p, c, q) \in \Delta$  con  $c \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$  tal que  $u = c \cdot v$ .

Notar que  $\vdash_{\mathcal{A}} \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$ .

Se define  $\vdash_{\mathcal{A}}^*$  como la clausura **refleja** y **transitiva** de  $\vdash_{\mathcal{A}}$ :

para toda configuración  $(q, w)$ :  $(q, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, w)$

si  $(p, u) \vdash_{\mathcal{A}} (p', w)$  y  $(p', w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$ :  $(p, u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$

$(p, u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$  si uno puede ir de  $(p, u)$  a  $(q, v)$  en **0 o más pasos**.

# Ejecución de $\epsilon$ -NFA

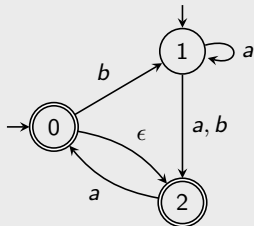
Se define  $\vdash_{\mathcal{A}}^*$  como la clausura **refleja** y **transitiva** de  $\vdash_{\mathcal{A}}$ :

para toda configuración  $(q, w)$ :  $(q, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, w)$

si  $(p, u) \vdash_{\mathcal{A}} (p', w)$  y  $(p', w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$ :  $(p, u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$

$(p, u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v)$  si uno puede ir de  $(p, u)$  a  $(q, v)$  en **0 o más pasos**.

## Ejemplo



$$(1, baa) \vdash_{\mathcal{A}} (2, aa)$$

$$(2, aa) \vdash_{\mathcal{A}} (0, a) \vdash_{\mathcal{A}} (2, a) \vdash_{\mathcal{A}} (0, \epsilon)$$

---

$$(2, aa) \vdash_{\mathcal{A}}^* (0, \epsilon) \quad \text{y} \quad (1, baa) \vdash_{\mathcal{A}}^* (0, \epsilon)$$

# Lenguaje aceptado por un $\epsilon$ -NFA

Sea  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  un  $\epsilon$ -NFA y  $w \in \Sigma^*$ .

## Definiciones

- $\mathcal{A}$  **acepta**  $w$  si existe una configuración **inicial**  $(q_0, w)$  y una configuración **final**  $(q_f, \epsilon)$  tal que:

$$(q_0, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q_f, \epsilon)$$

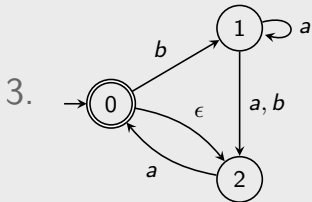
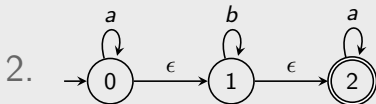
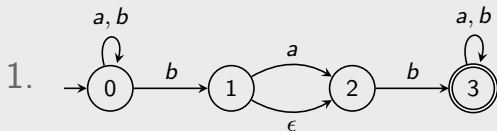
- El **lenguaje aceptado** por  $\mathcal{A}$  se define como:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

OJO: si  $\mathcal{A}$  no tiene  $\epsilon$ -transiciones o no-determinismo, esta es una **alternativa** para definir ejecución y aceptación para NFA y DFA.

# Lenguaje aceptado por un $\epsilon$ -NFA

¿que lenguaje acepta cada  $\epsilon$ -NFA?



# Outline

$\epsilon$ -NFA

NFA versus  $\epsilon$ -NFA



# Equivalencia entre NFA y $\epsilon$ -NFA

## Teorema

Para todo autómata finito no-determinista con  $\epsilon$ -transiciones  $\mathcal{A}$ , existe un autómata no-determinista  $\mathcal{A}'$  tal que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

En otras palabras,  $\text{NFA} \equiv \epsilon\text{-NFA}$ .

¿cómo simulamos las  $\epsilon$ -transiciones, esto es, sin leer el input?

## Demostración

Para demostrar este teorema, mostraremos como construir un autómata no-determinista a partir de un  $\epsilon$ -NFA removiendo las  $\epsilon$ -transiciones.

# Desde un $\epsilon$ -NFA a un NFA

## Construcción

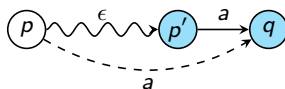
Dado un  $\epsilon$ -NFA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  se define el NFA:

$$\mathcal{A}^\sharp = (Q, \Sigma, \Delta^\sharp, I, F^\sharp)$$

■ para todo  $p, q \in Q$ ,  $(p, a, q) \in \Delta^\sharp$  si, y solo si, existe  $p' \in Q$  tal que:

- $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p', \epsilon)$  y

- $(p', a, q) \in \Delta$ .

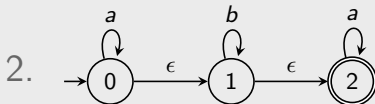
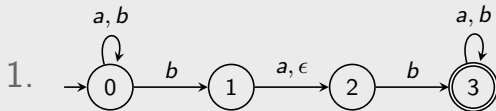


■  $F^\sharp = \{ p \in Q \mid \exists q \in F. (p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \}$

Por definición, si  $(p, a, q) \in \Delta$  entonces  $(p, a, q) \in \Delta^\sharp$  para todo  $a \in \Sigma$ .

## Desde un $\epsilon$ -NFA a un NFA

¿cuál es el autómata  $\mathcal{A}^\epsilon$  para cada caso?



# Desde un $\epsilon$ -NFA a un NFA

## Teorema

Dado un  $\epsilon$ -NFA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$  se tiene que:

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^{\neq})$$

## Demostración

Demostrar que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \iff \exists q' \in F^{\neq}. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^{\neq}}^* (q', \epsilon)$$

De aquí **concluimos** que  $\mathcal{A}$  acepta  $w$  si, y solo si,  $\mathcal{A}^{\neq}$  acepta  $w$ .

# Demostración $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ell)$

Demostraremos que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \Leftrightarrow \exists q' \in F^\ell. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

Por **inducción** sobre el largo de  $w$ .

**Caso base:** Para  $w = \epsilon$ :

( $\Rightarrow$ ) Sea  $q \in F$  tal que  $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$ .

Por definición de  $F^\ell$ , se tiene que  $p \in F^\ell$ .

Por lo tanto,  $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (p, \epsilon)$ . ✓

( $\Leftarrow$ ) Sea  $q' \in F^\ell$  tal que  $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$ .

Como  $\mathcal{A}^\ell$  no tiene  $\epsilon$ -transiciones, entonces  $p = q'$  y  $p \in F^\ell$ .

Por definición de  $F^\ell$ , existe  $q \in F$  tal que  $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$  ✓

## Demostración $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ell)$

Demostraremos que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \iff \exists q' \in F^\ell. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

**Caso inductivo:** Sea  $w = a \cdot u$  y  $p \in Q$ :

( $\Rightarrow$ ) Sea  $q \in F$  tal que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$ .

Por definición de  $\vdash_{\mathcal{A}}^*$  existen  $p', p'' \in Q$  tal que:

$$(p, au) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p', au) \vdash_{\mathcal{A}} (p'', u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$$

# Demostración $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ell)$

Demostraremos que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \Leftrightarrow \exists q' \in F^\ell. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

**Caso inductivo:** Sea  $w = a \cdot u$  y  $p \in Q$ :

( $\Rightarrow$ ) Sea  $q \in F$  tal que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$ .

Por definición de  $\vdash_{\mathcal{A}}^*$  existen  $p', p'' \in Q$  tal que:


$$(p, au) \stackrel{(1)}{\vdash_{\mathcal{A}}^*} (p', au) \stackrel{(2)}{\vdash_{\mathcal{A}}} (p'', u) \stackrel{(3)}{\vdash_{\mathcal{A}}^*} (q, \epsilon)$$

Por (1) tenemos que  $(p, \epsilon) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p', \epsilon)$ . (4)

Por (2) tenemos que  $(p', a, p'') \in \Delta$ . (5)

Por (4) y (5), sabemos que  $(p, a, p'') \in \Delta^\ell$  y  $(p, a \cdot u) \vdash_{\mathcal{A}^\ell} (p'', u)$ . (6)

Como  $|u| < |au|$  y (3), **por HI** existe  $q' \in F^\ell$ :  $(p'', u) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$ . (7)

Juntando (6) y (7), tenemos que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$ . 

## Demostración $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ell)$

Demostraremos que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \iff \exists q' \in F^\ell. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

**Caso inductivo:** Sea  $w = a \cdot u$  y  $p \in Q$ :

( $\Leftarrow$ ) Sea  $q' \in F^\ell$  tal que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$ .

Por definición de  $\vdash_{\mathcal{A}^\ell}^*$  existen  $p' \in Q$  tal que:

$$(p, au) \vdash_{\mathcal{A}^\ell} (p', u) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$



# Demostración $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}^\ell)$

Demostraremos que para todo  $p \in Q$  y  $w \in \Sigma^*$ :

$$\exists q \in F. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon) \iff \exists q' \in F^\ell. (p, w) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

**Caso inductivo:** Sea  $w = a \cdot u$  y  $p \in Q$ :


( $\Leftarrow$ ) Sea  $q' \in F^\ell$  tal que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$ .

Por definición de  $\vdash_{\mathcal{A}^\ell}^*$  existen  $p' \in Q$  tal que:

$$(p, au) \stackrel{(1)}{\vdash}_{\mathcal{A}^\ell} (p', u) \stackrel{(2)}{\vdash}_{\mathcal{A}^\ell}^* (q', \epsilon)$$

Por (1) sabemos que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}}^* (p', u)$ . (3)

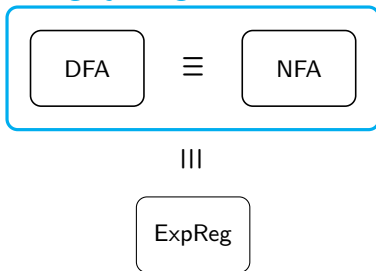
Como  $|u| < |au|$  y (2), **por HI** existe  $q \in F$ :  $(p', u) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$ . (4)

Juntando (3) y (4), tenemos que  $(p, au) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \epsilon)$ . 

Complete los pasos que faltan.

# Mapa actual de nuestros modelos de computación

## Lenguajes Regulares



Para demostrar  $\text{ExpReg} \subseteq \text{NFA}$ , primero necesitamos un nuevo modelo