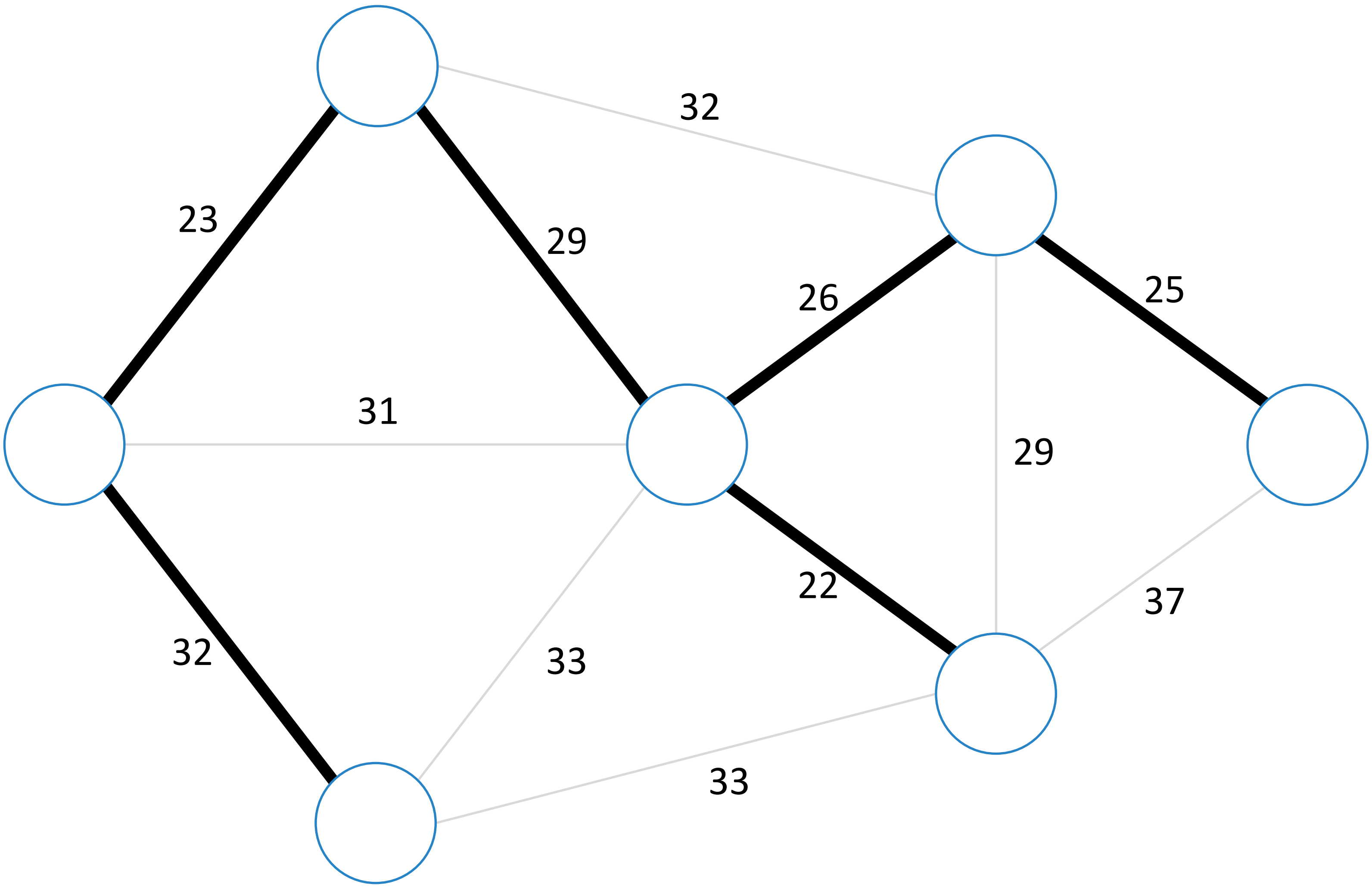
Propiedades del MST

¿Hay alguna arista que **siempre** pertenezca a un **MST**?

¿Se cumple esto recursivamente? ¿En qué casos?

¿Podremos aprovecharlo en un algoritmo **codicioso**?

Ejemplo de un MST para un grafo



El algoritmo de Kruskal

$\boldsymbol{kruskal}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})\big)$:

Ordenar $\boldsymbol{E}$ por costo, de menor a mayor

$\boldsymbol{T} \leftarrow \emptyset$

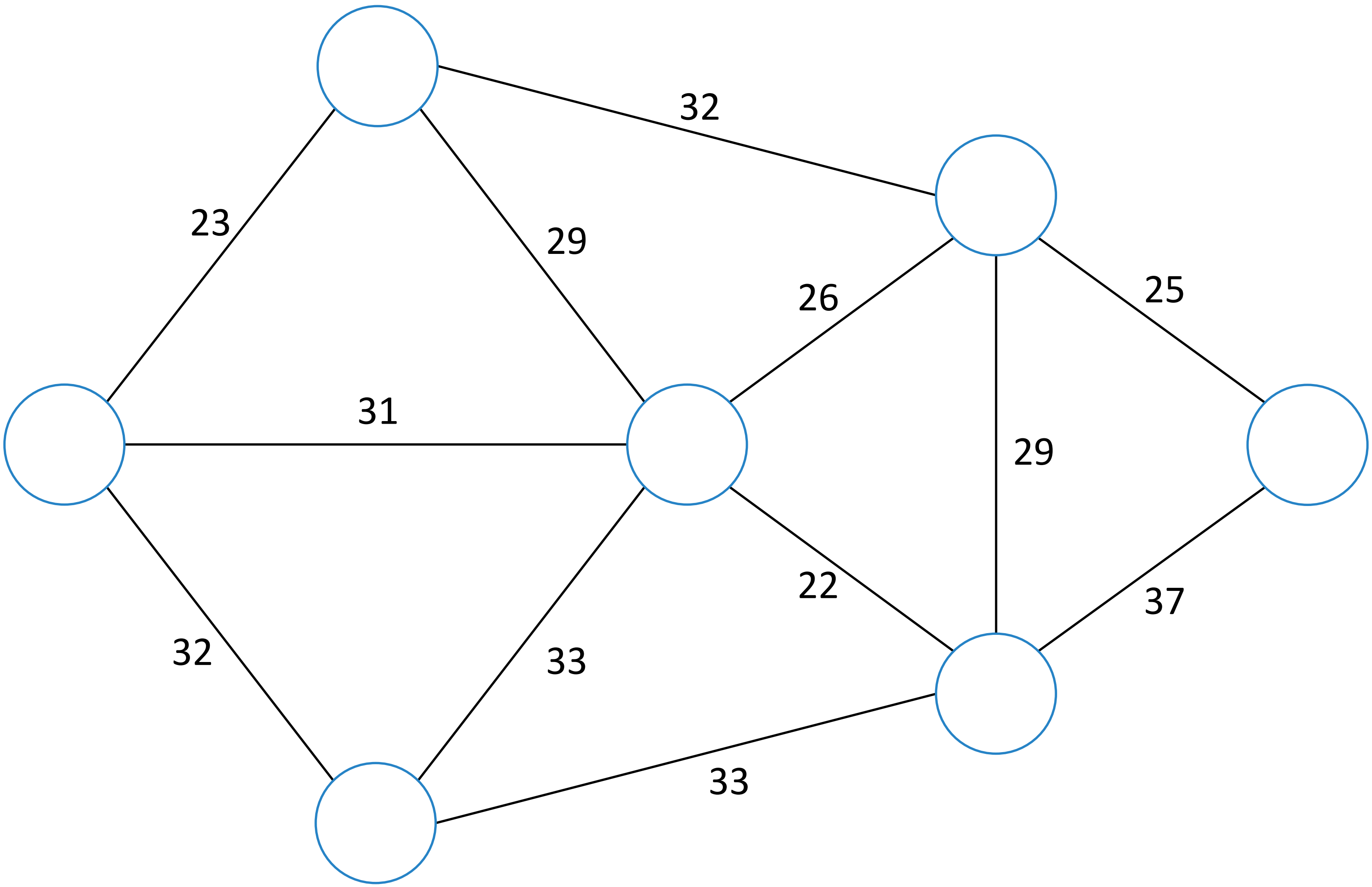
$\boldsymbol{foreach}\ \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$:

$\boldsymbol{if}$ agregar $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{T}$ no forma un ciclo:

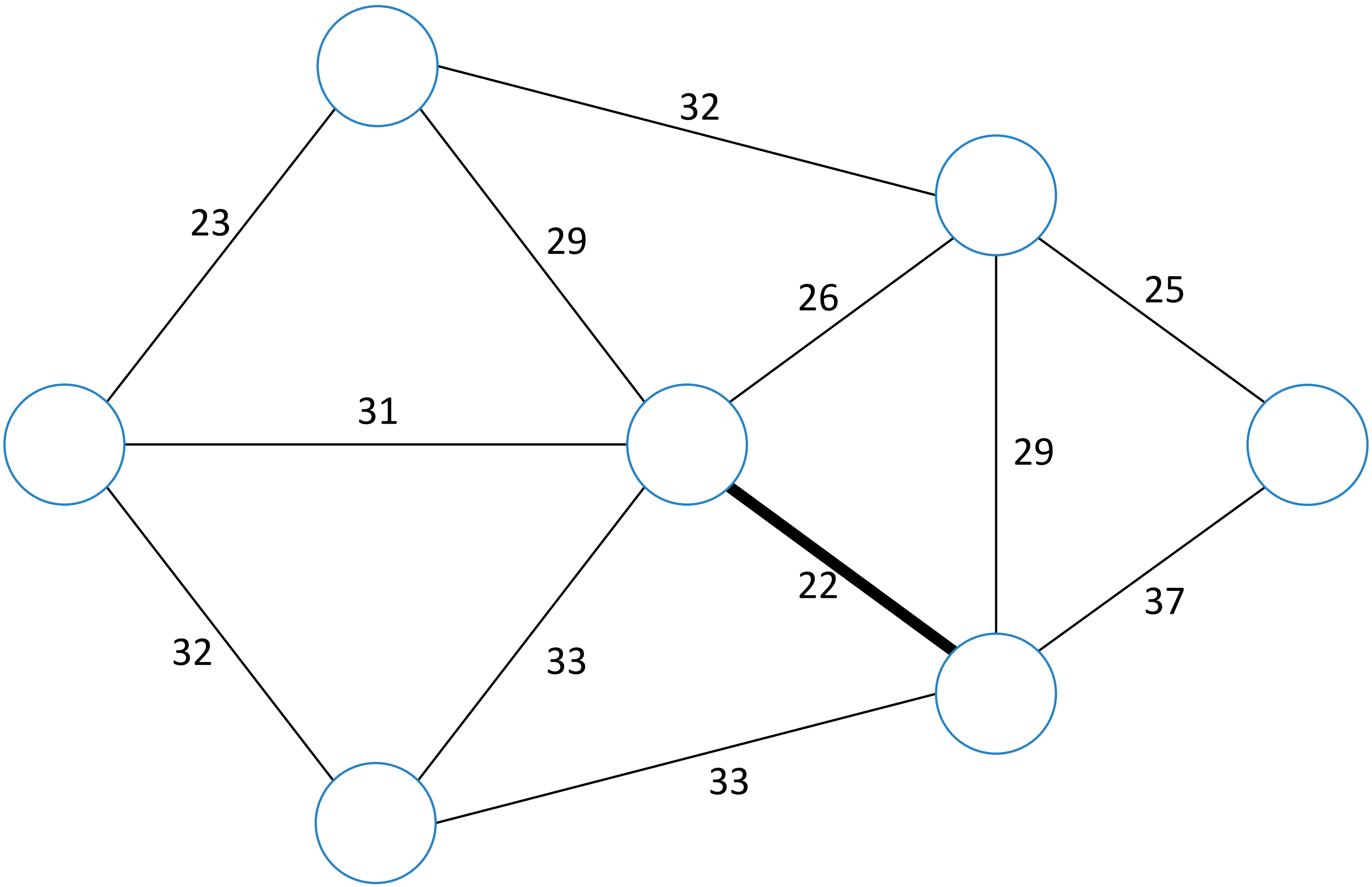
Agregar $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{T}$

$\boldsymbol{return}\ \boldsymbol{T}$

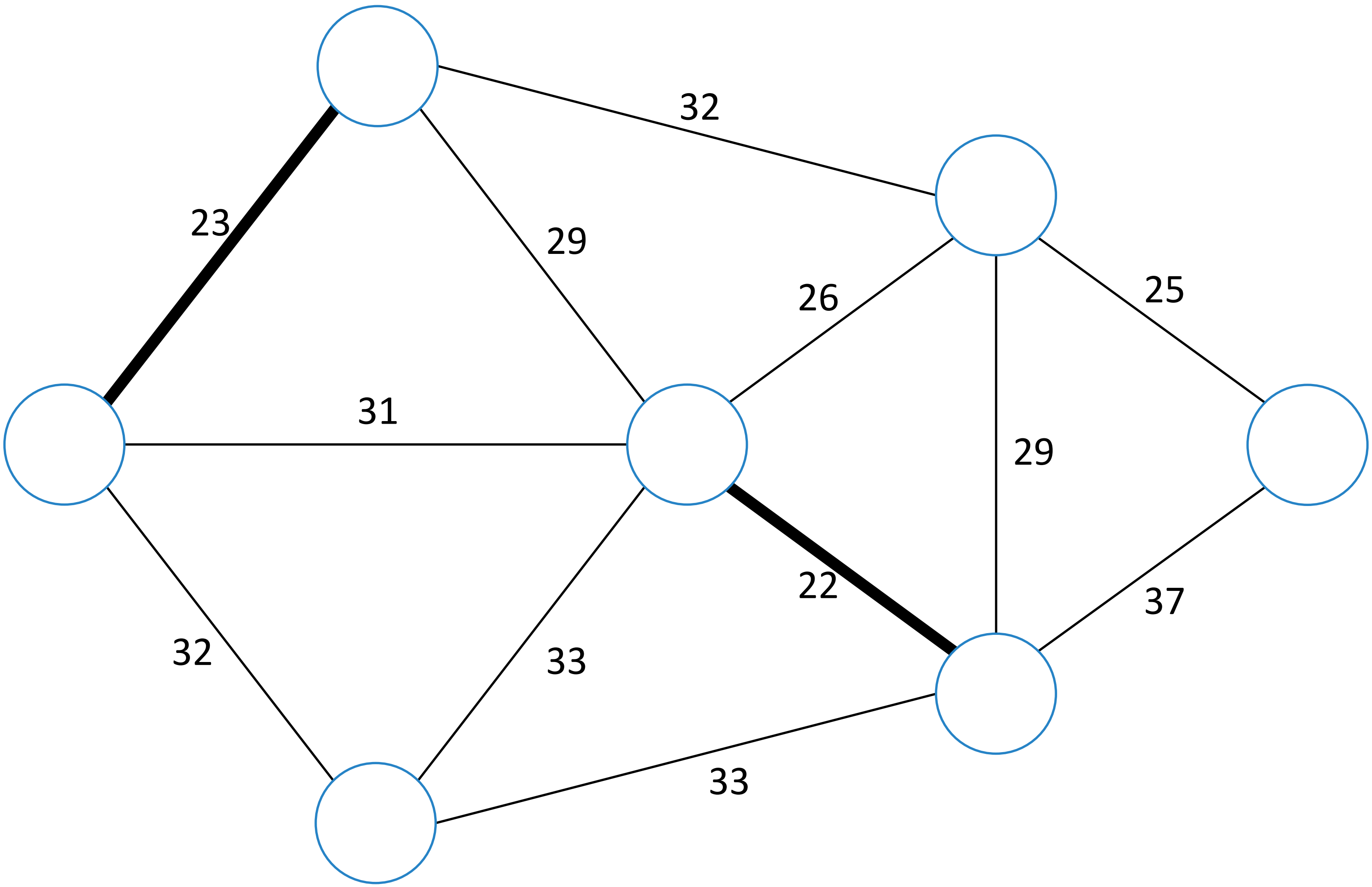
kruskal en acción



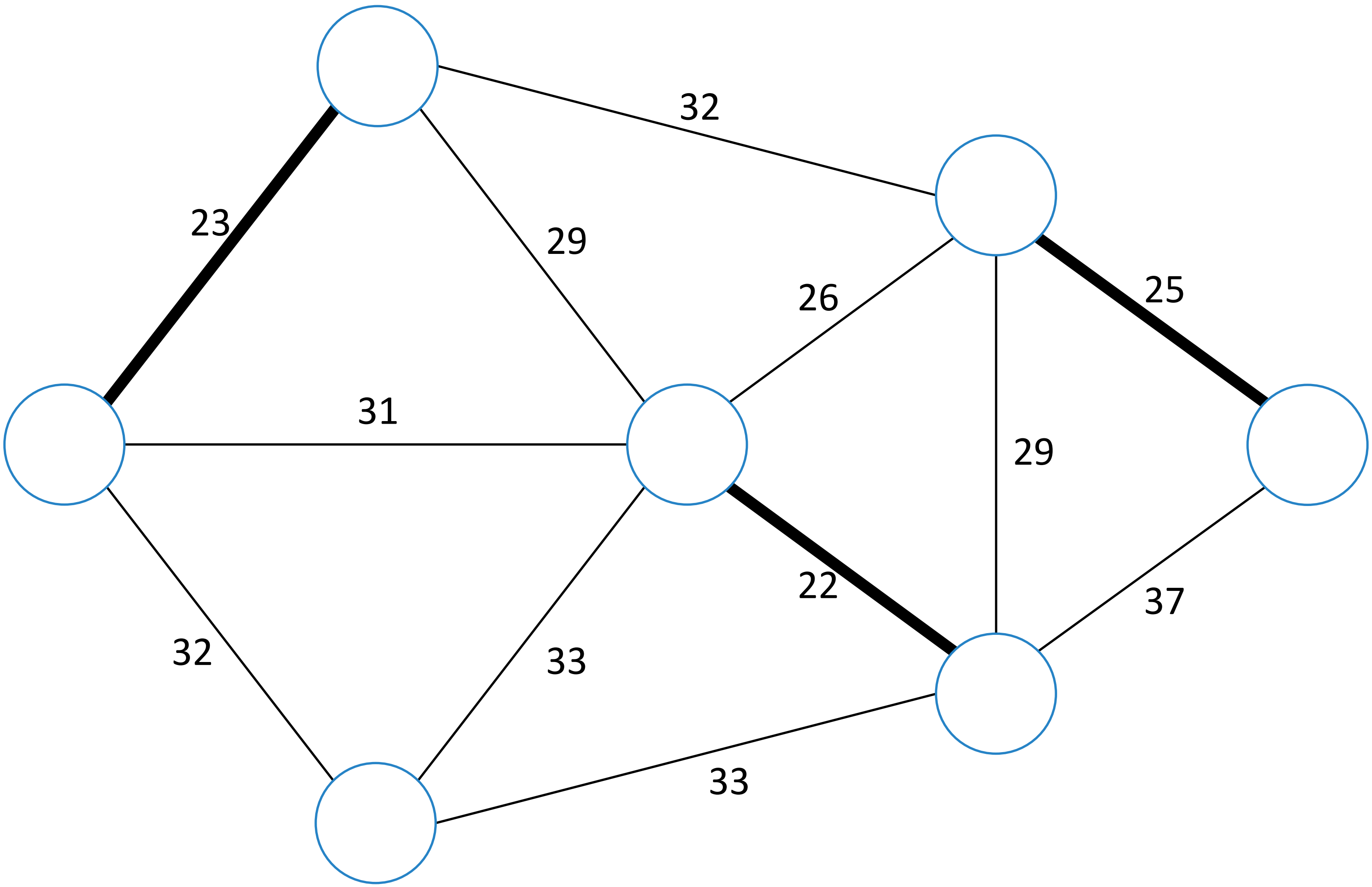
Partimos probando la arista de menor costo



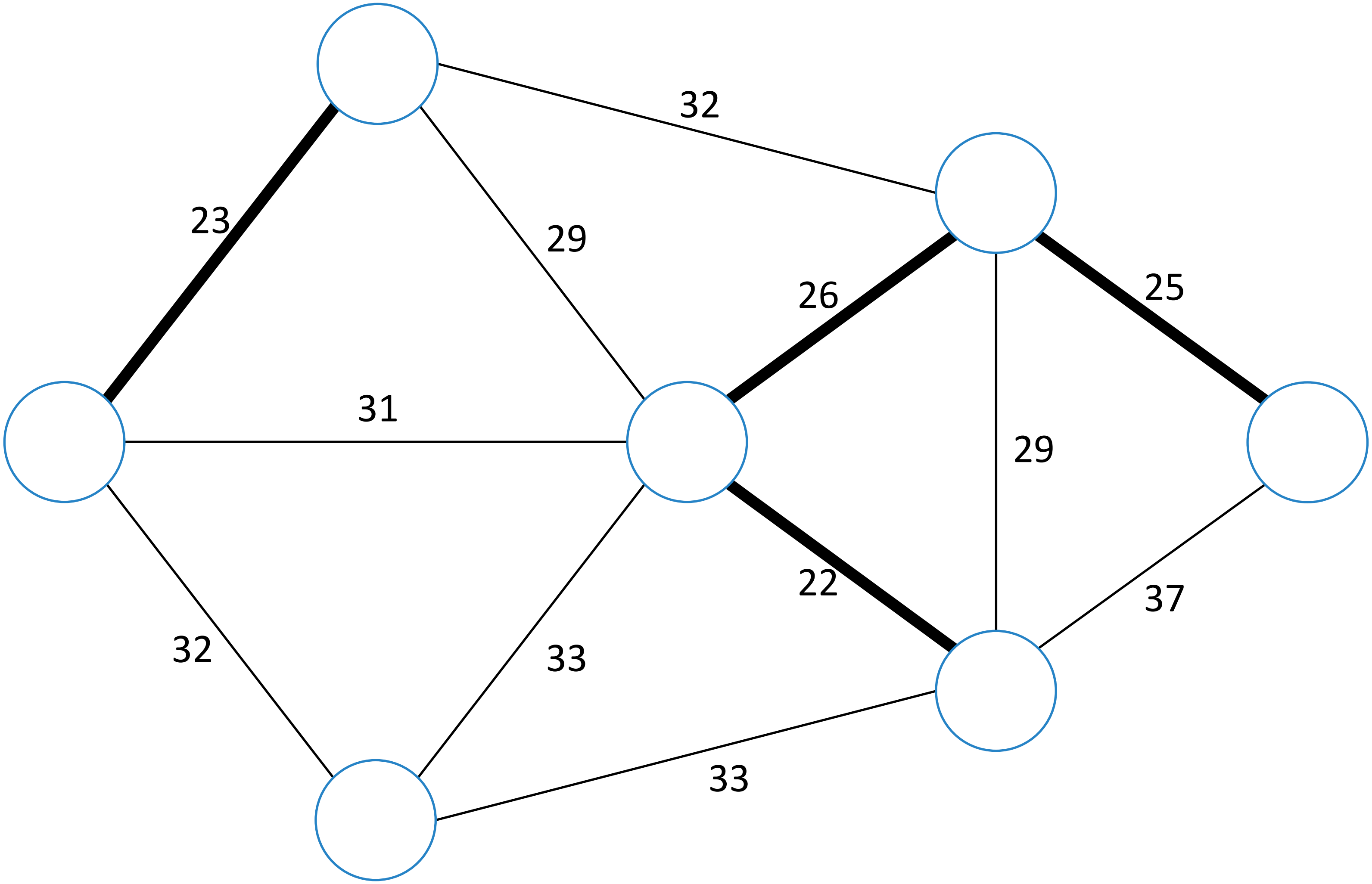
… y así sucesivamente



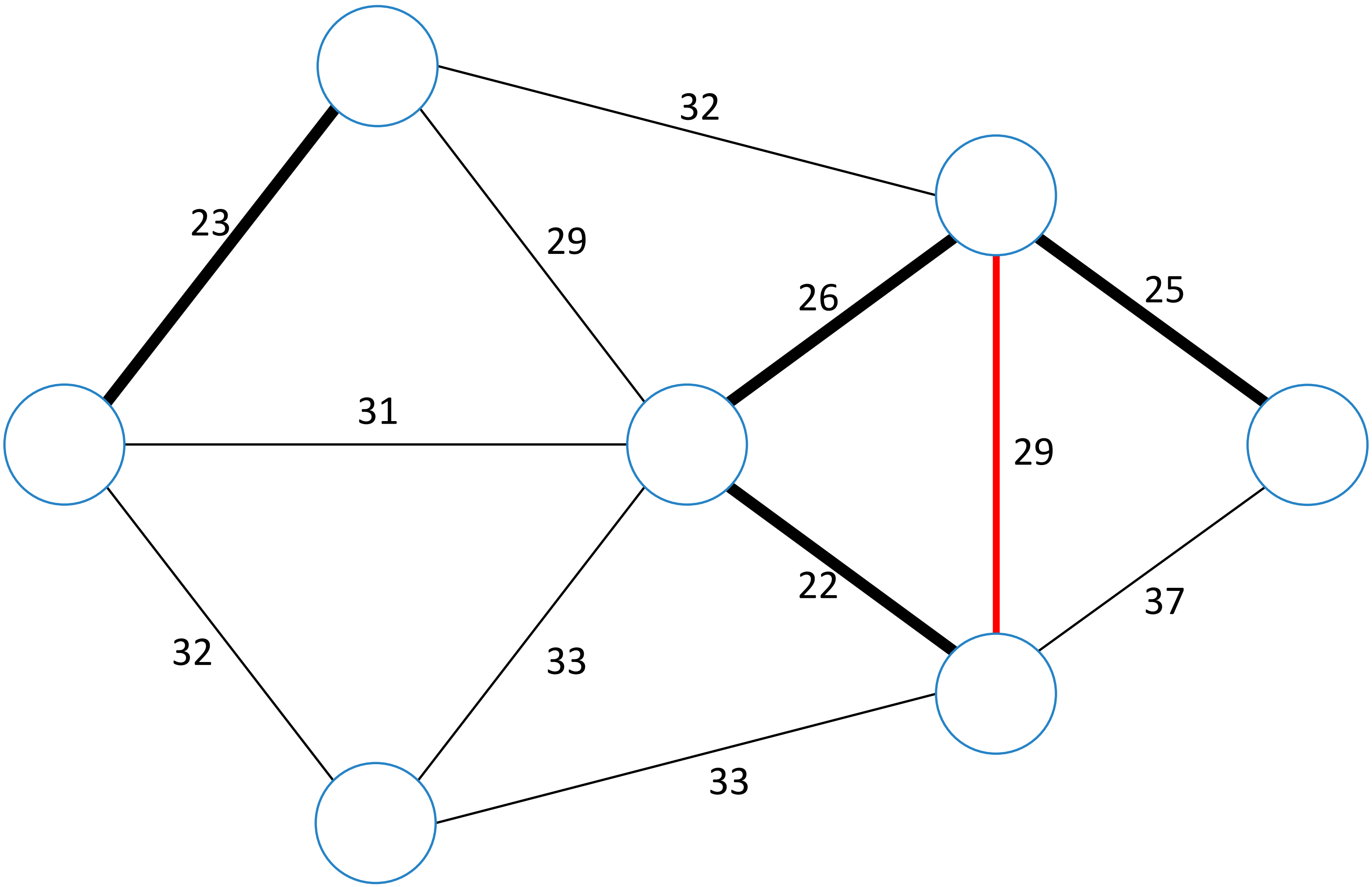
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

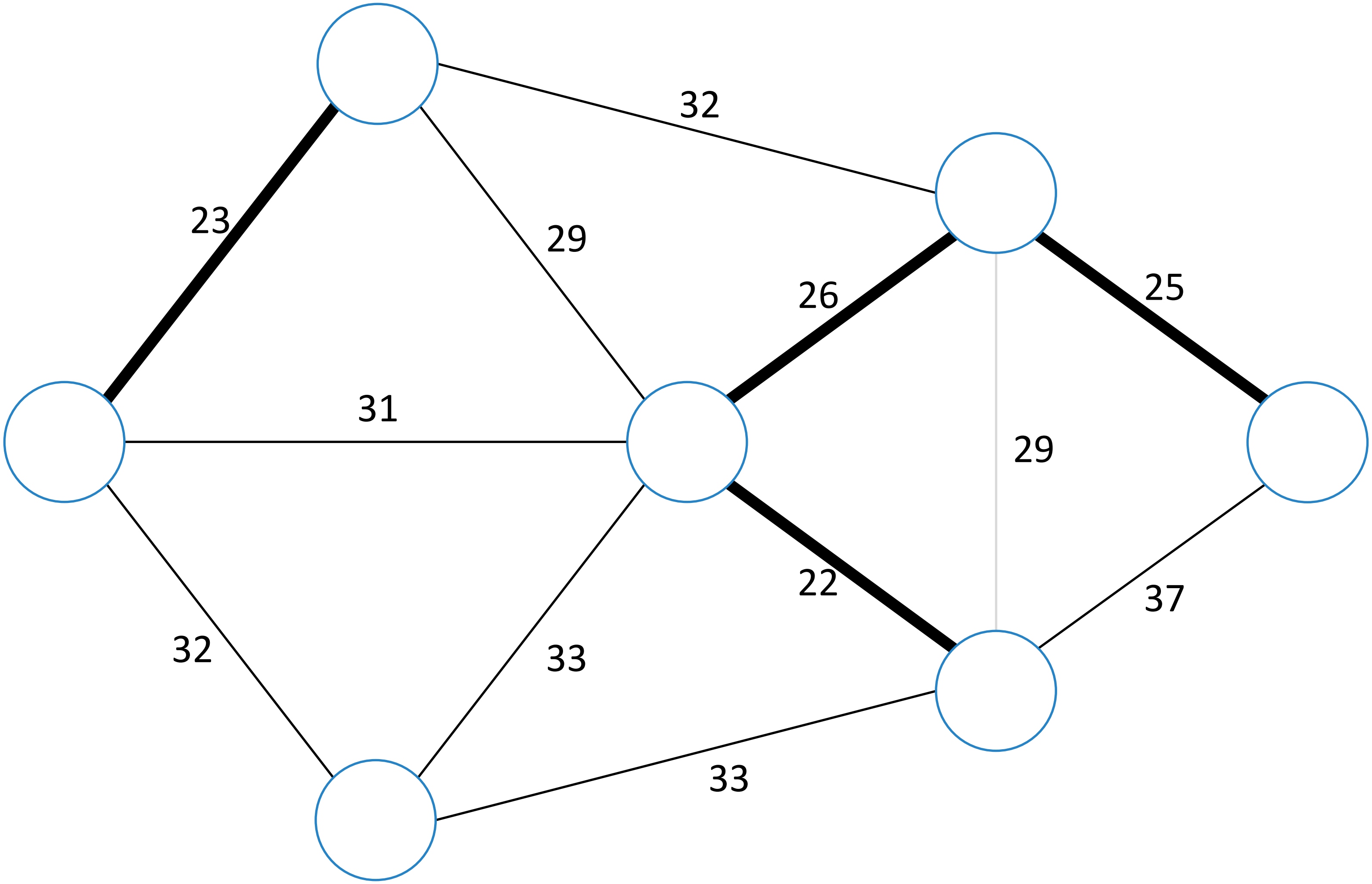
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

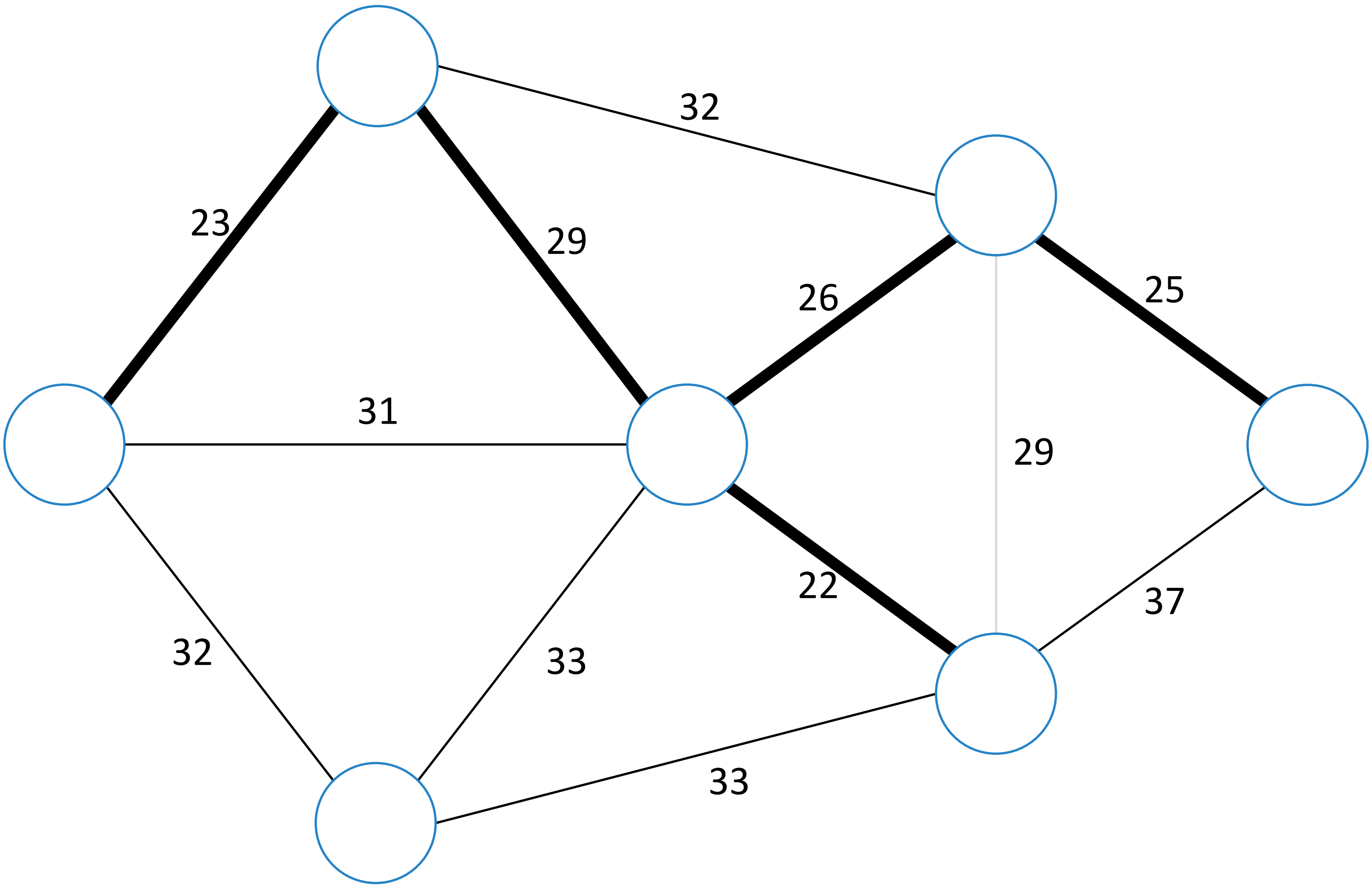
“probar” significa asegurarse de que la nueva arista no forme un ciclo



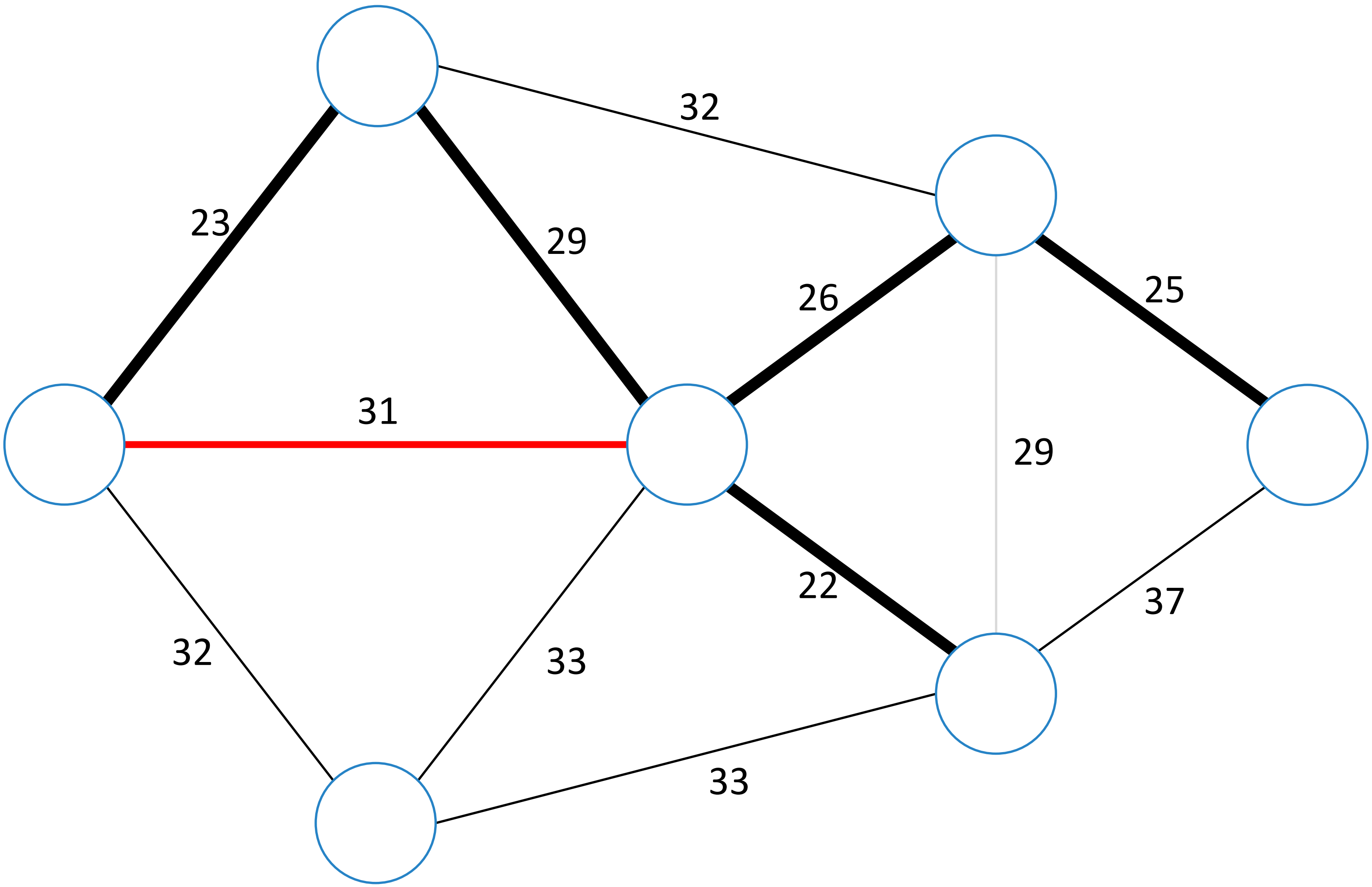
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

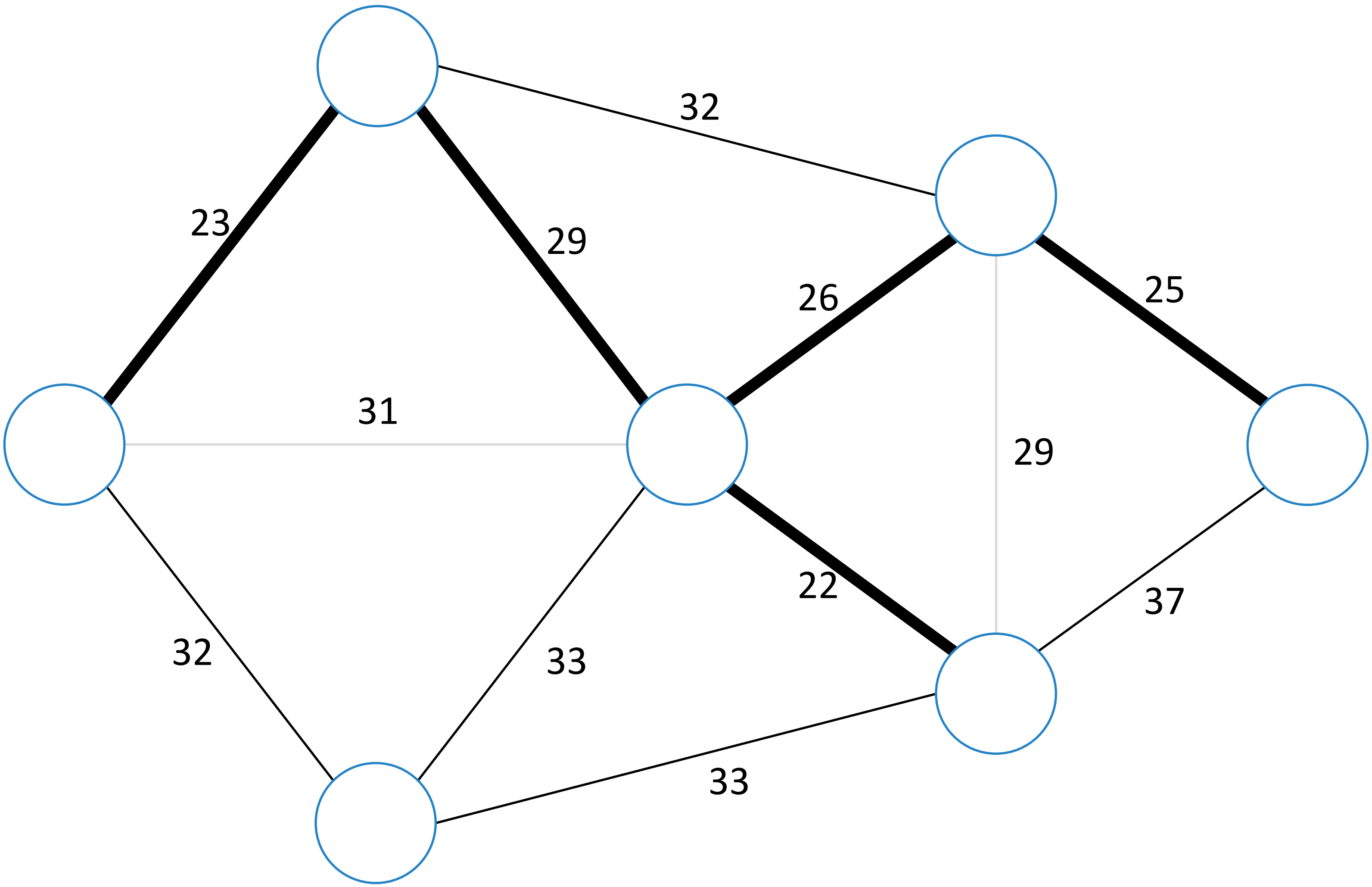
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

Si la nueva arista forma un ciclo, entonces la descartamos

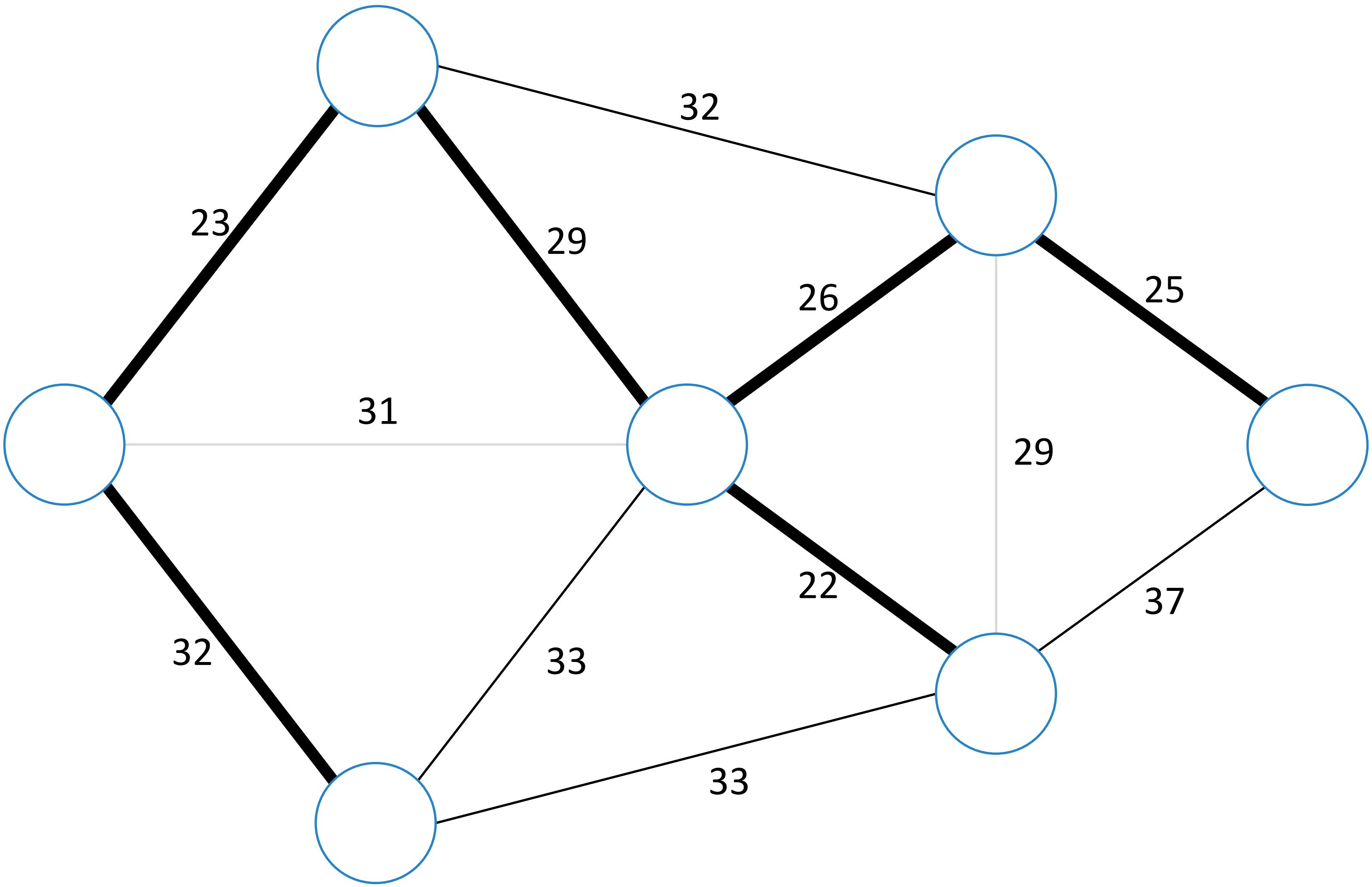


...

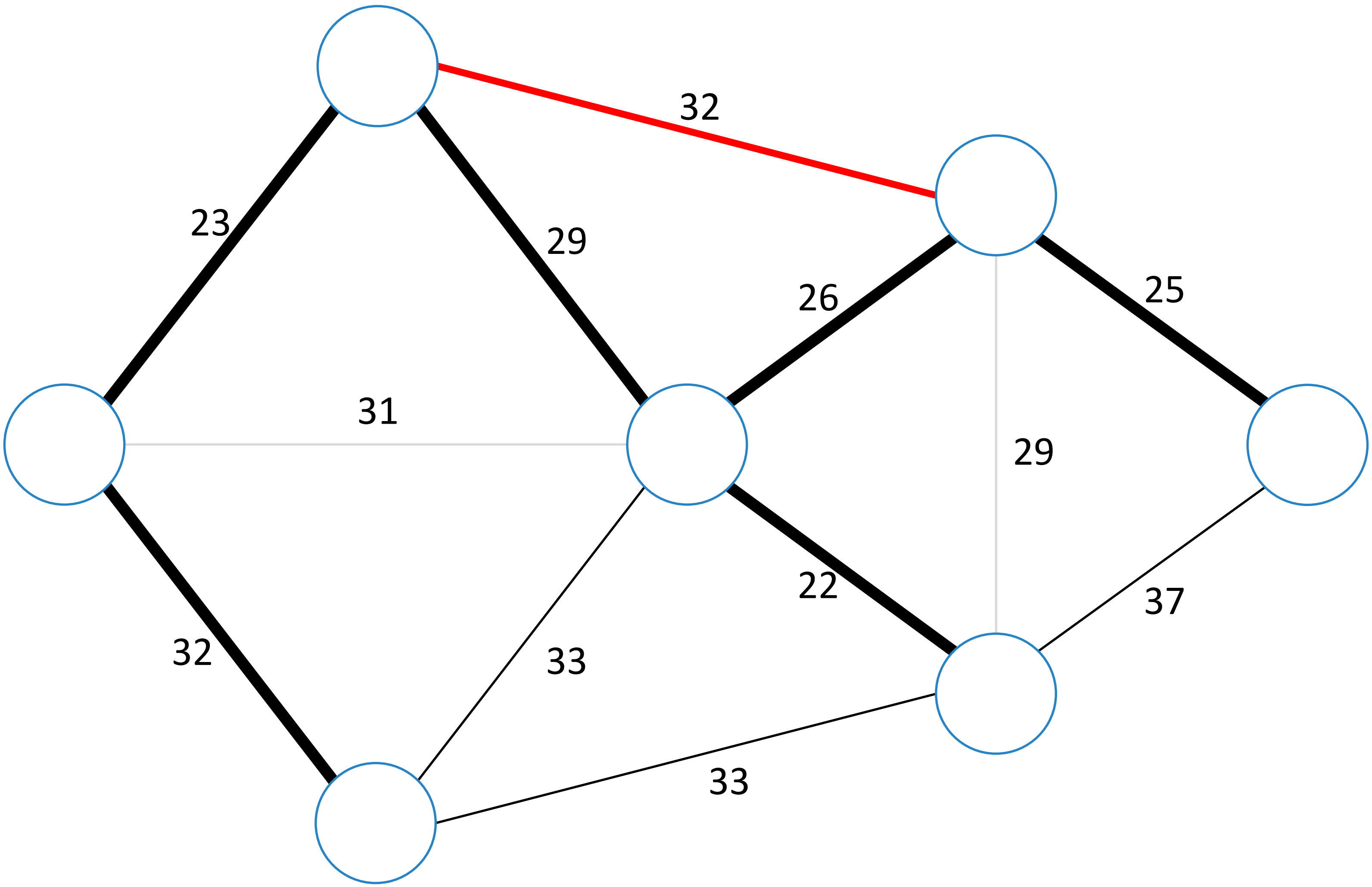


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

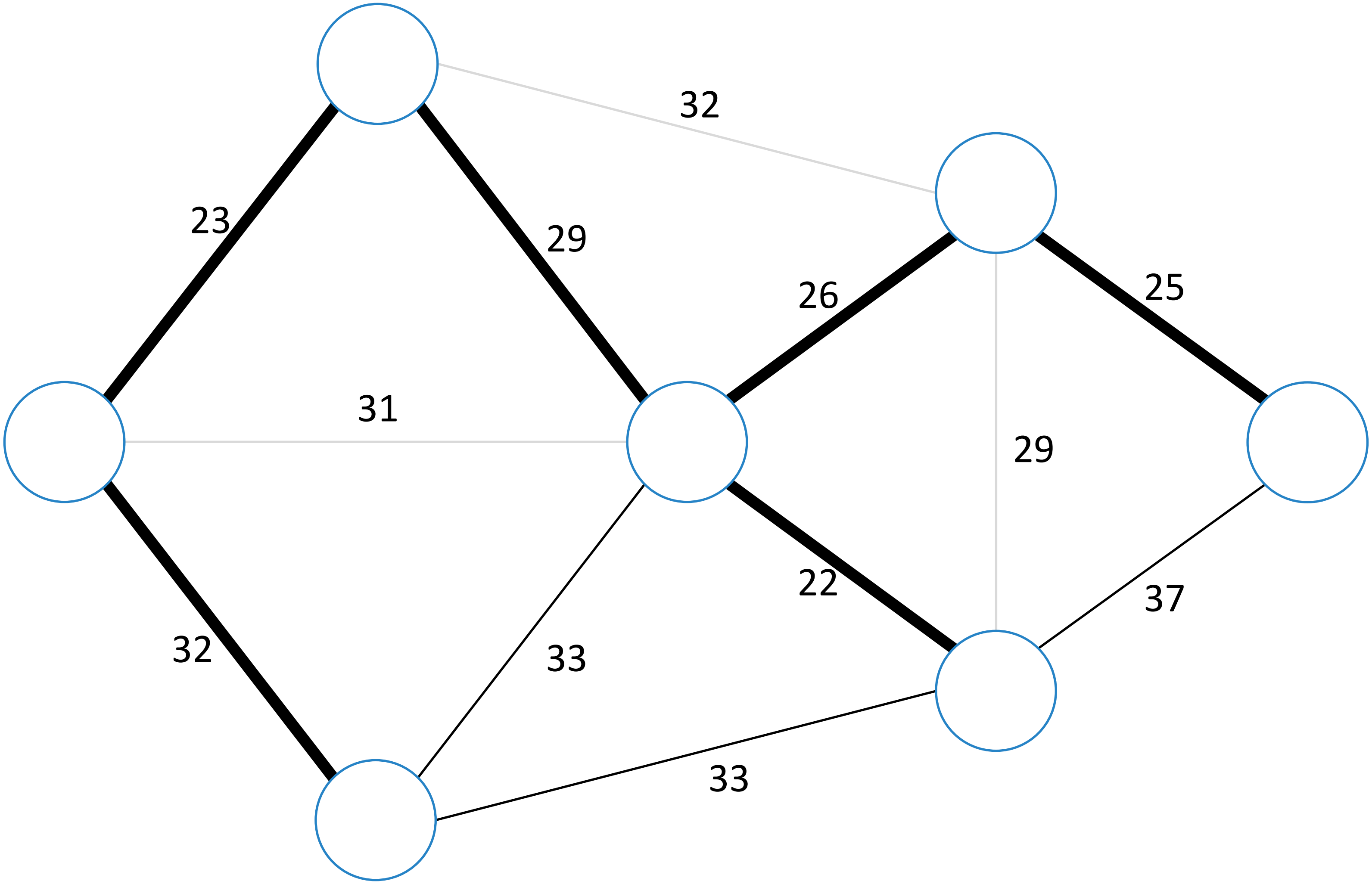
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

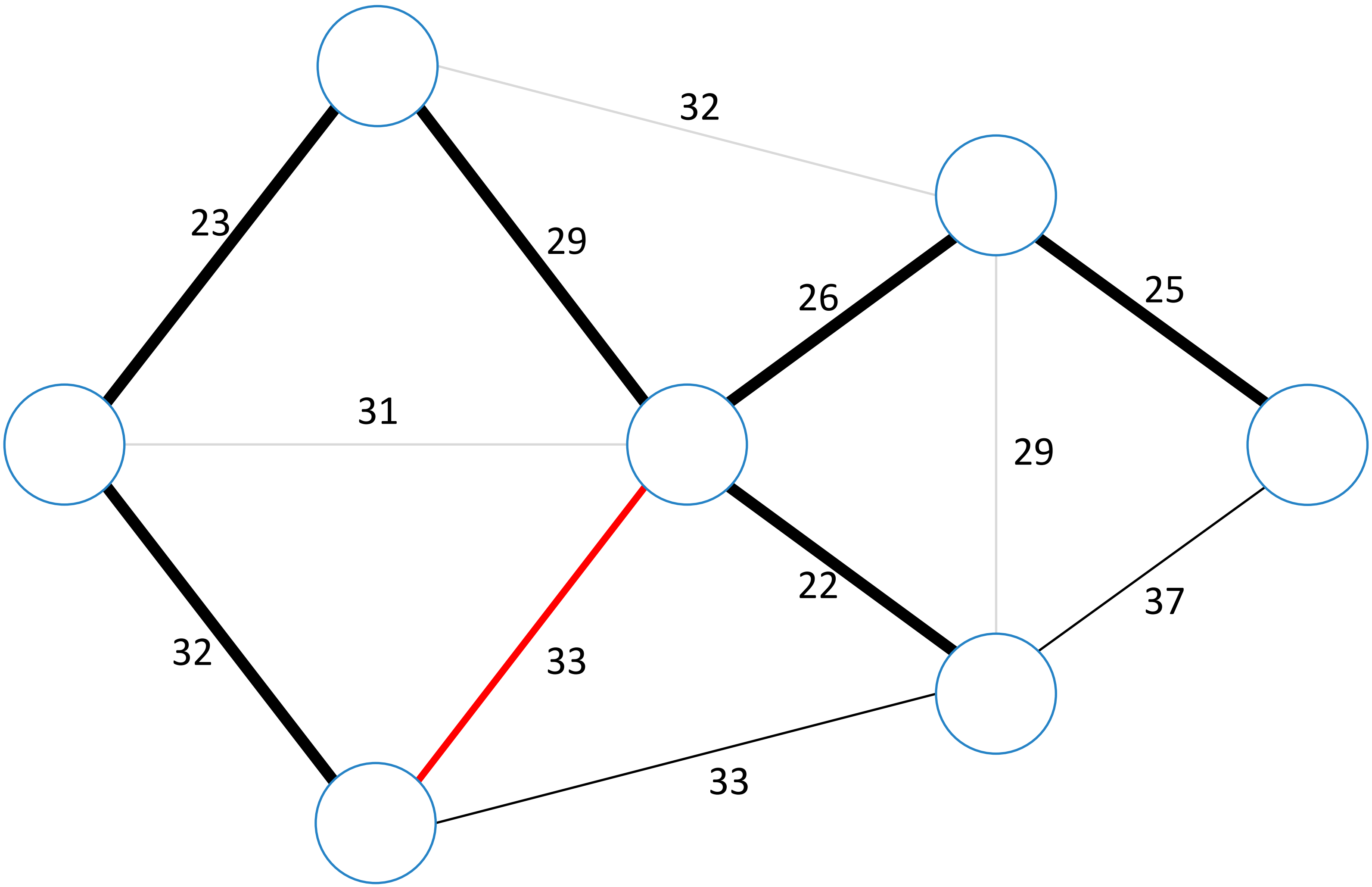
Si el grafo tiene $|V|$ vértices, entonces el MST tiene $|V|-1$ aristas



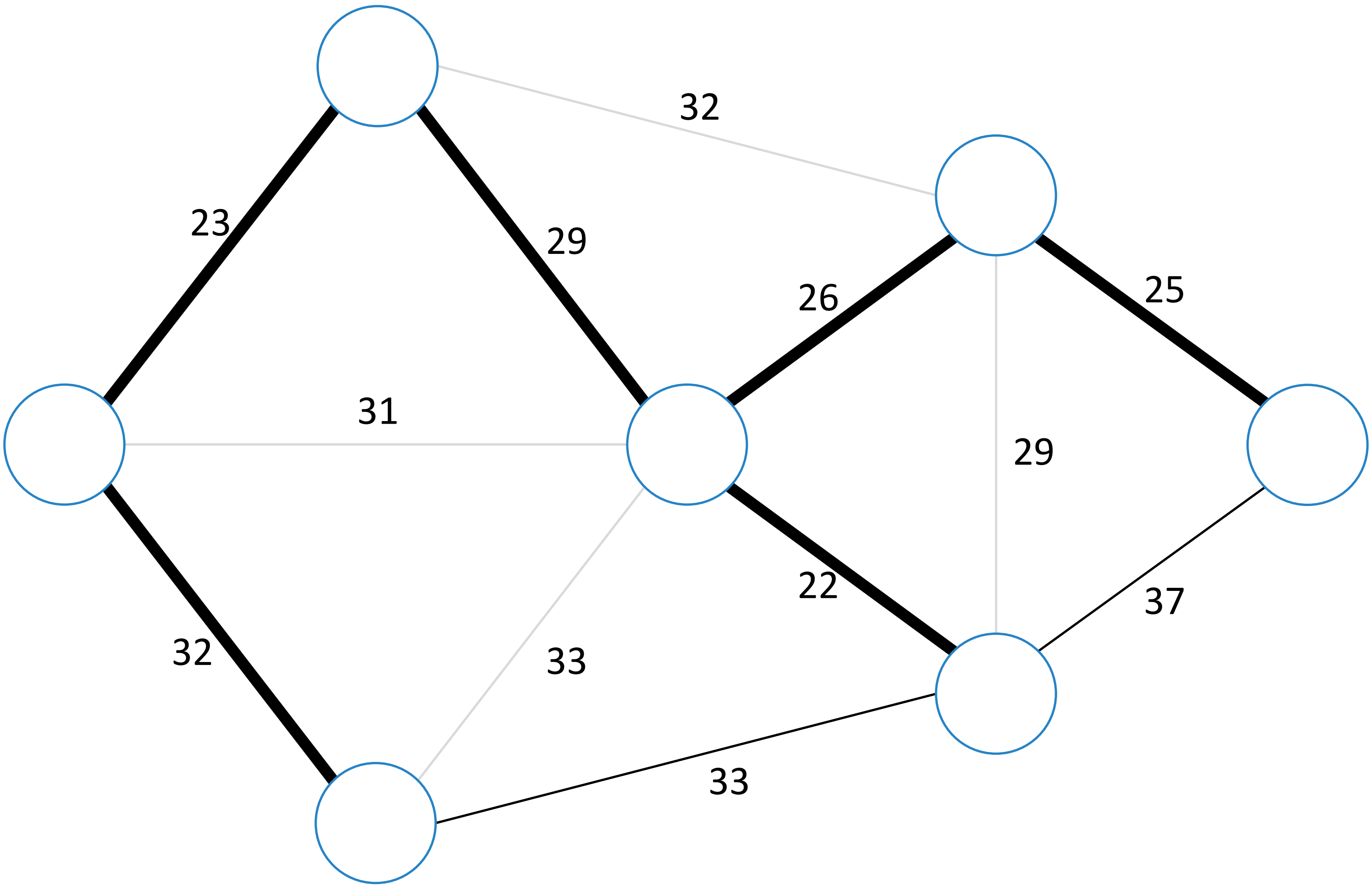
A partir de ahí,
todas las aristas restantes forman ciclos



… y en la práctica no es necesario revisarlas

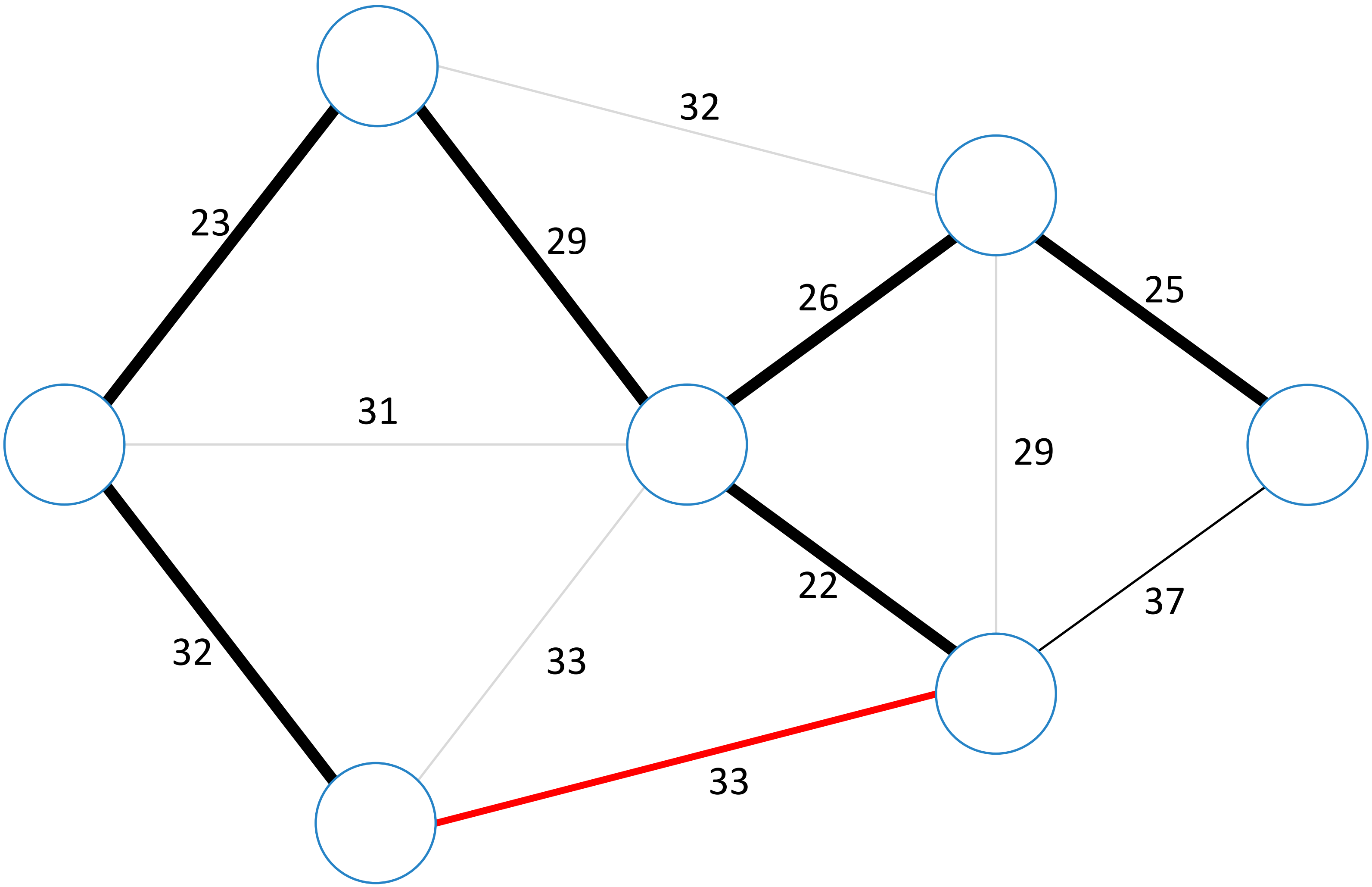


…



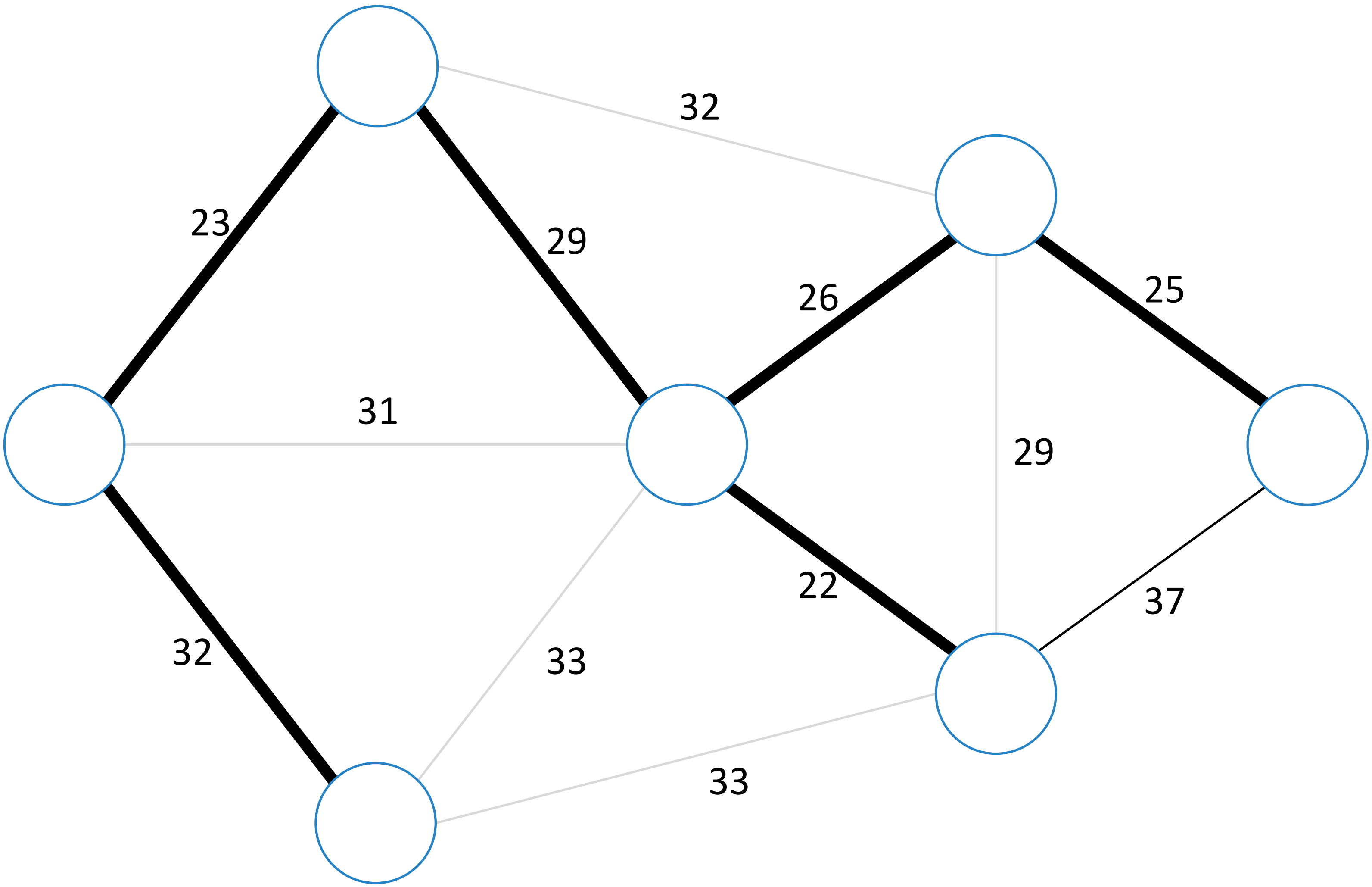
32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

...

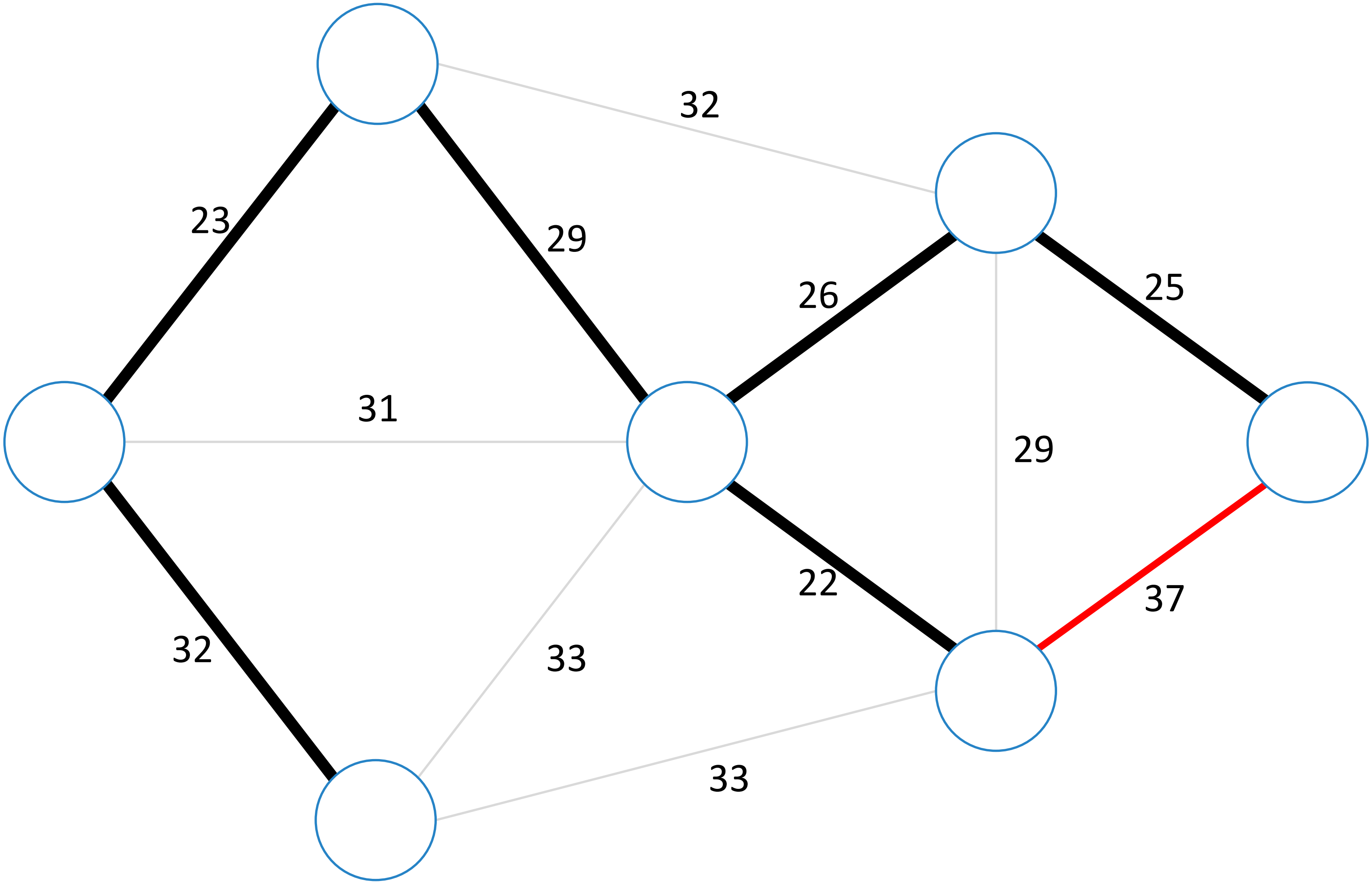


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

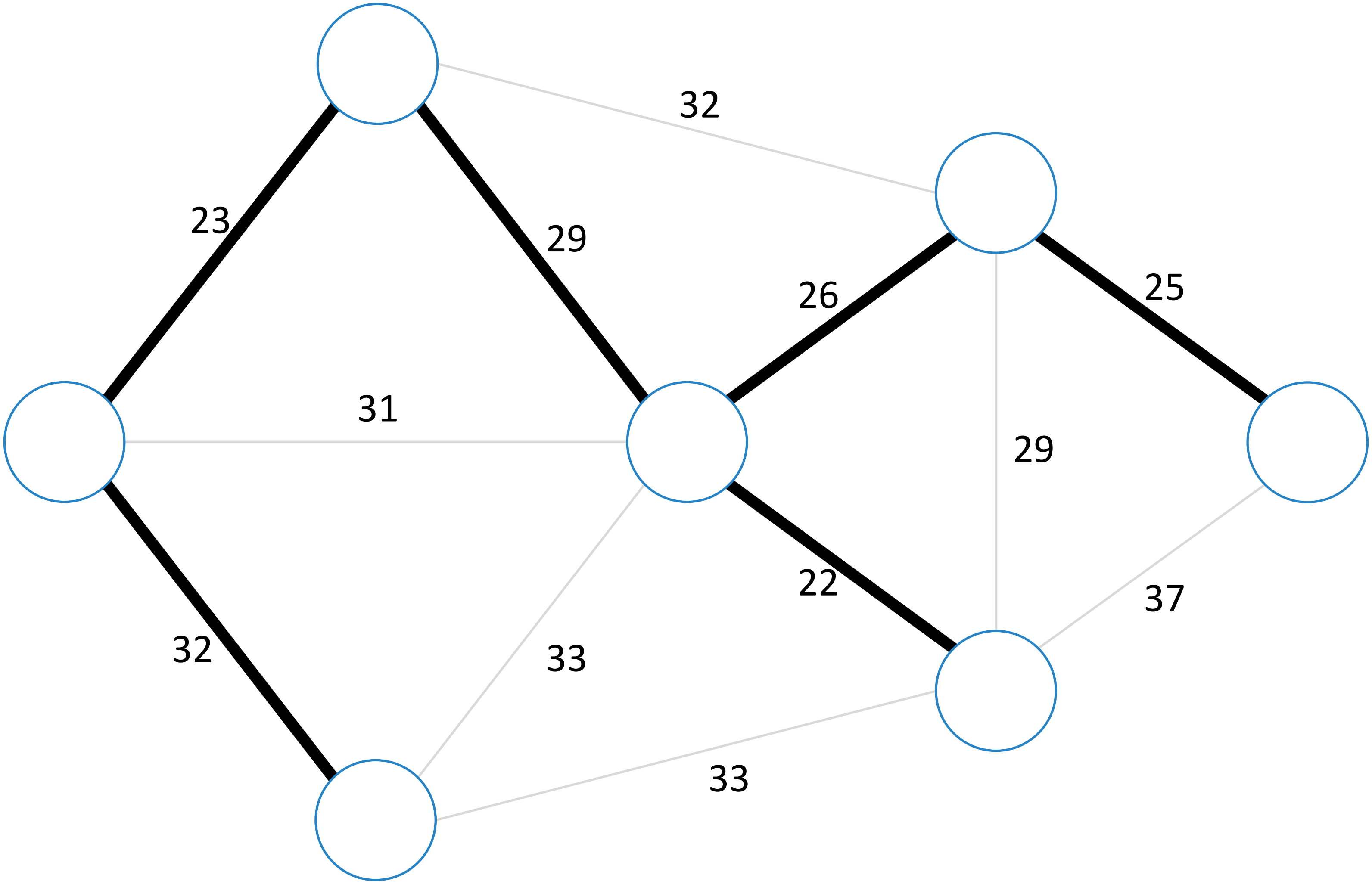
...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

...


32
23
29
26
25
31
29
22
37
32
33
33

Corrección de *kruskal*

Para demostrar que el algoritmo de Kruskal es correcto

… demostramos por separado que el resultado es

- un árbol
- una cobertura
- de costo total mínimo (entre todos los árboles de cobertura)

Un “detalle” no menor

$kruskal(G(V,E))$:

Ordenar E por costo, de menor a mayor

$T \leftarrow \emptyset$

$foreach\ e \in E$:

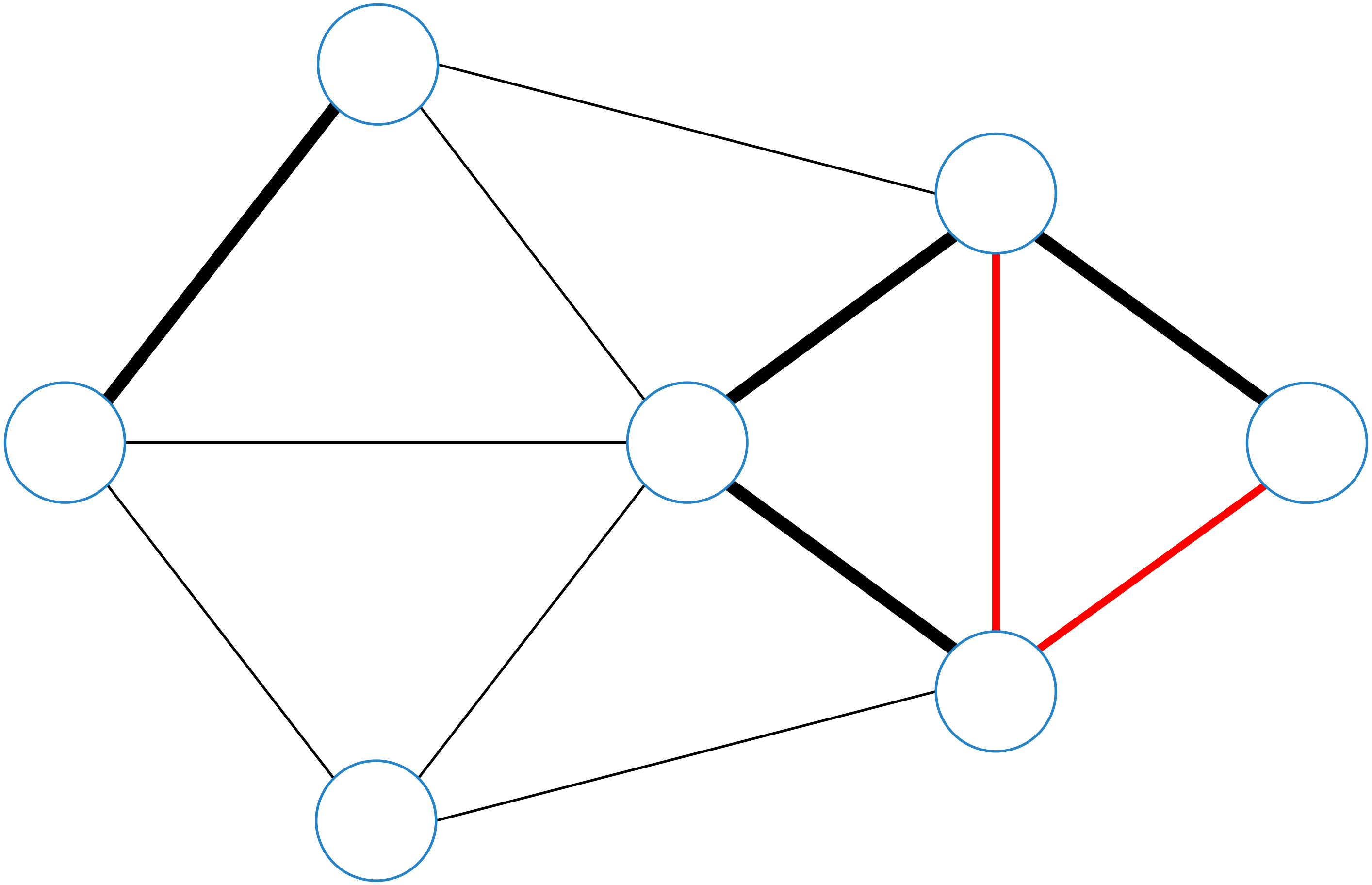
if agregar e a T no forma un ciclo:

Agregar e a T

$return\ T$

¿Cómo revisamos esto de manera eficiente?

Observación



Agregar (u, v) forma un ciclo **ssi** u y v están en el mismo **sub-árbol**

Conjuntos disjuntos

Un nodo puede pertenecer a un solo **sub-árbol** del grafo

Los **conjuntos** de nodos de cada sub-árbol son **disjuntos**

¿Cómo podemos modelar esto para aprovecharlo?

kruskal con conjuntos disjuntos

$\boldsymbol{kruskal}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})\big)$:

Ordenar $\boldsymbol{E}$ por costo, de menor a mayor

Considerar cada nodo como formando un conjunto por sí mismo

$\boldsymbol{T} \leftarrow \emptyset$

$\boldsymbol{foreach}\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}$:

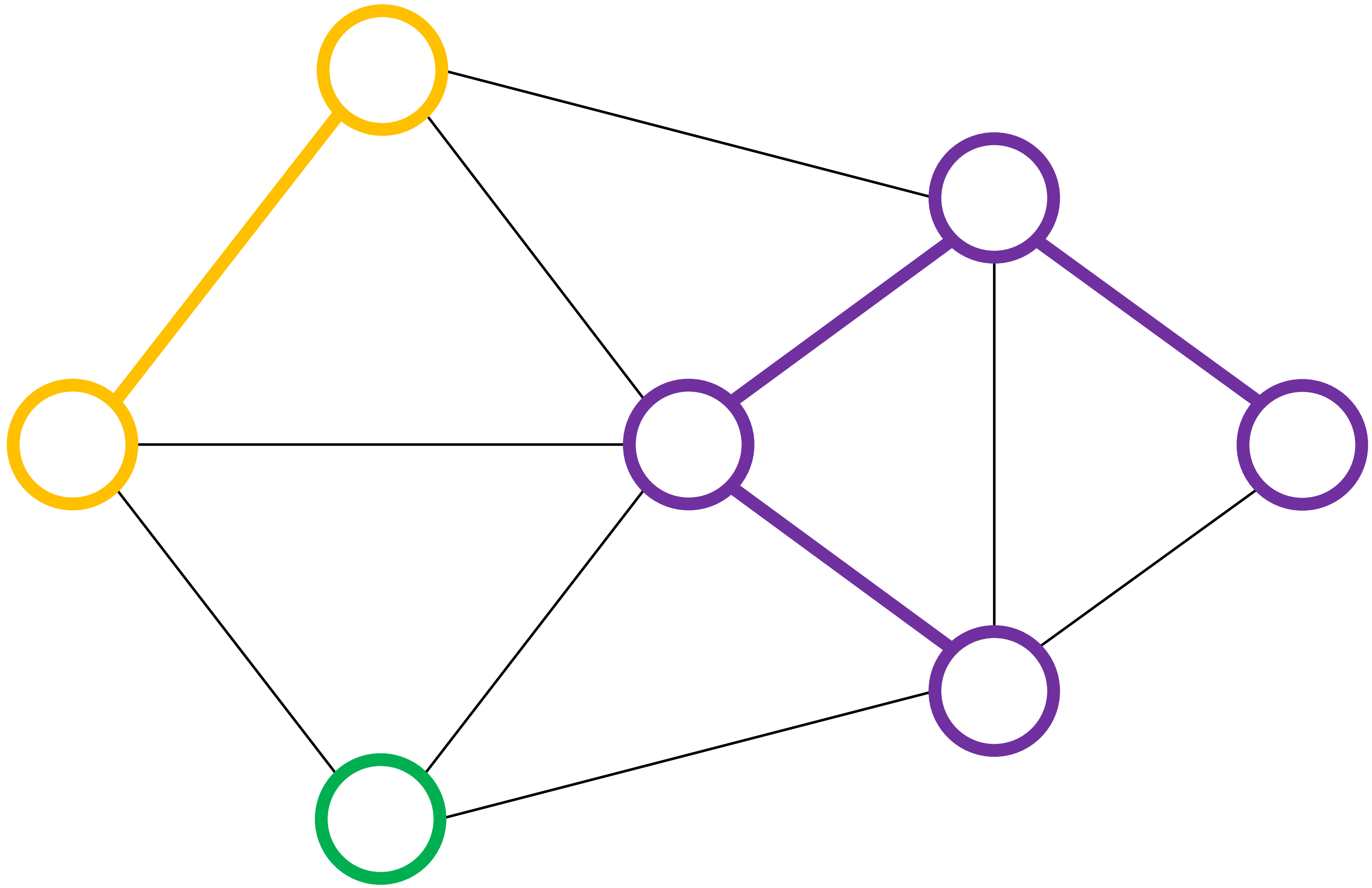
$\boldsymbol{if}$ si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no están en el mismo conjunto:

Agregar $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ a $\boldsymbol{T}$

Unir los conjuntos de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$

$\boldsymbol{return}\ \boldsymbol{T}$

Sub-árboles como conjuntos



Agregar una arista significa unir dos conjuntos

Operaciones necesarias sobre conjuntos disjuntos

Nos interesan dos cosas:

- **Identificar** en qué conjunto está un elemento
- **Unir** dos conjuntos (y que sólo quede la unión y no los conjuntos originales)

¿Cómo podemos hacer esto de manera eficiente?

Representación

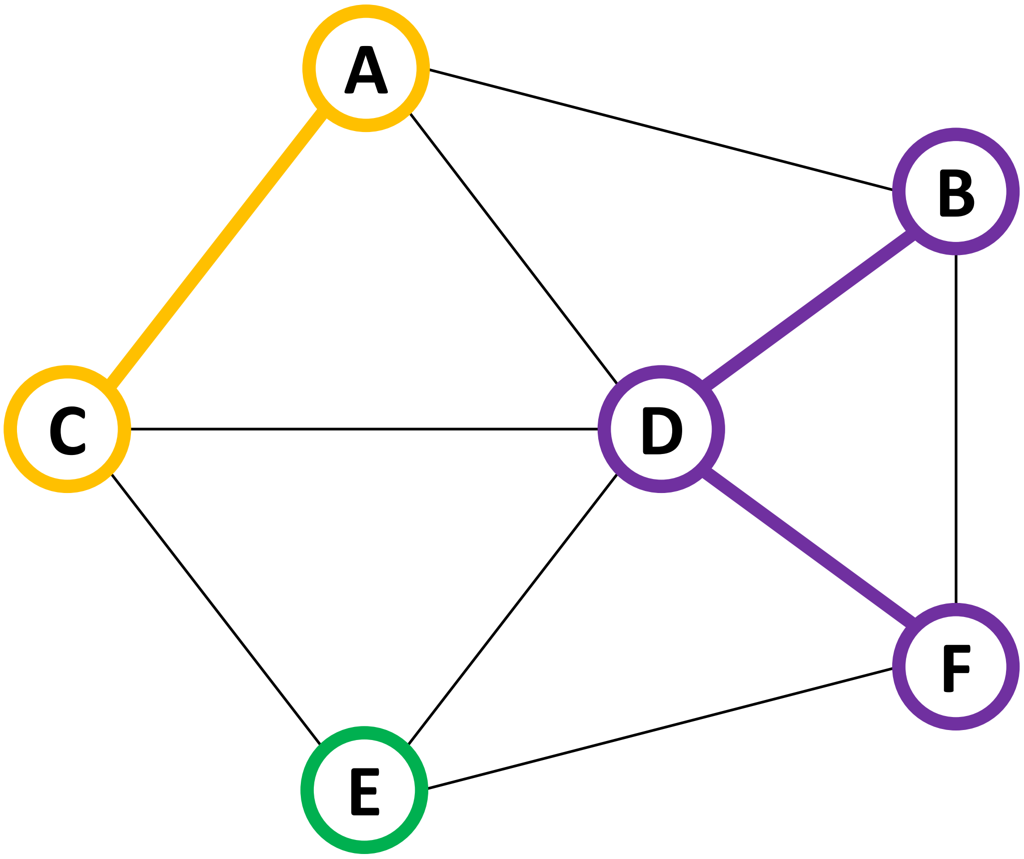
Para cada conjunto, escogemos un **representante** : uno de sus elementos

Cada nodo tiene una **referencia** a su representante, incluyendo el propio representante

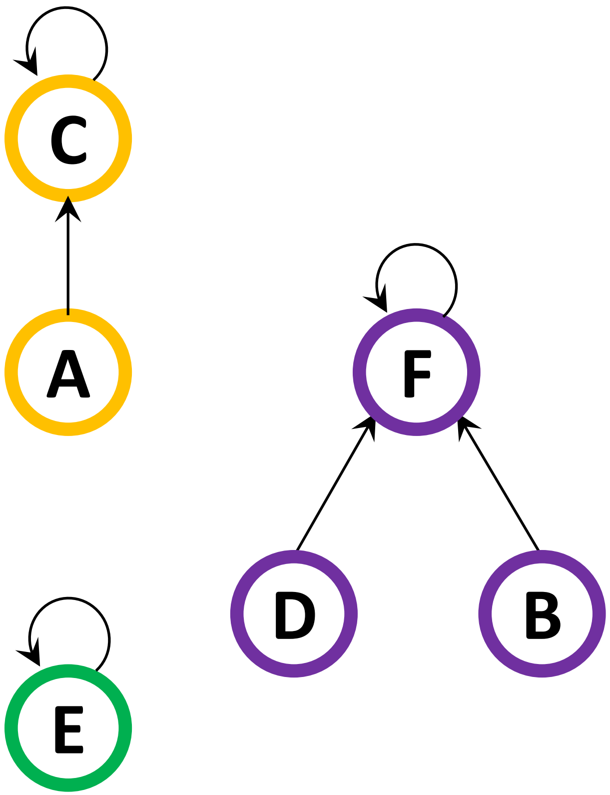
Dos nodos están en el **mismo** conjunto si y sólo si tienen el mismo representante

Conjuntos disjuntos

Sub-árboles



Conjuntos



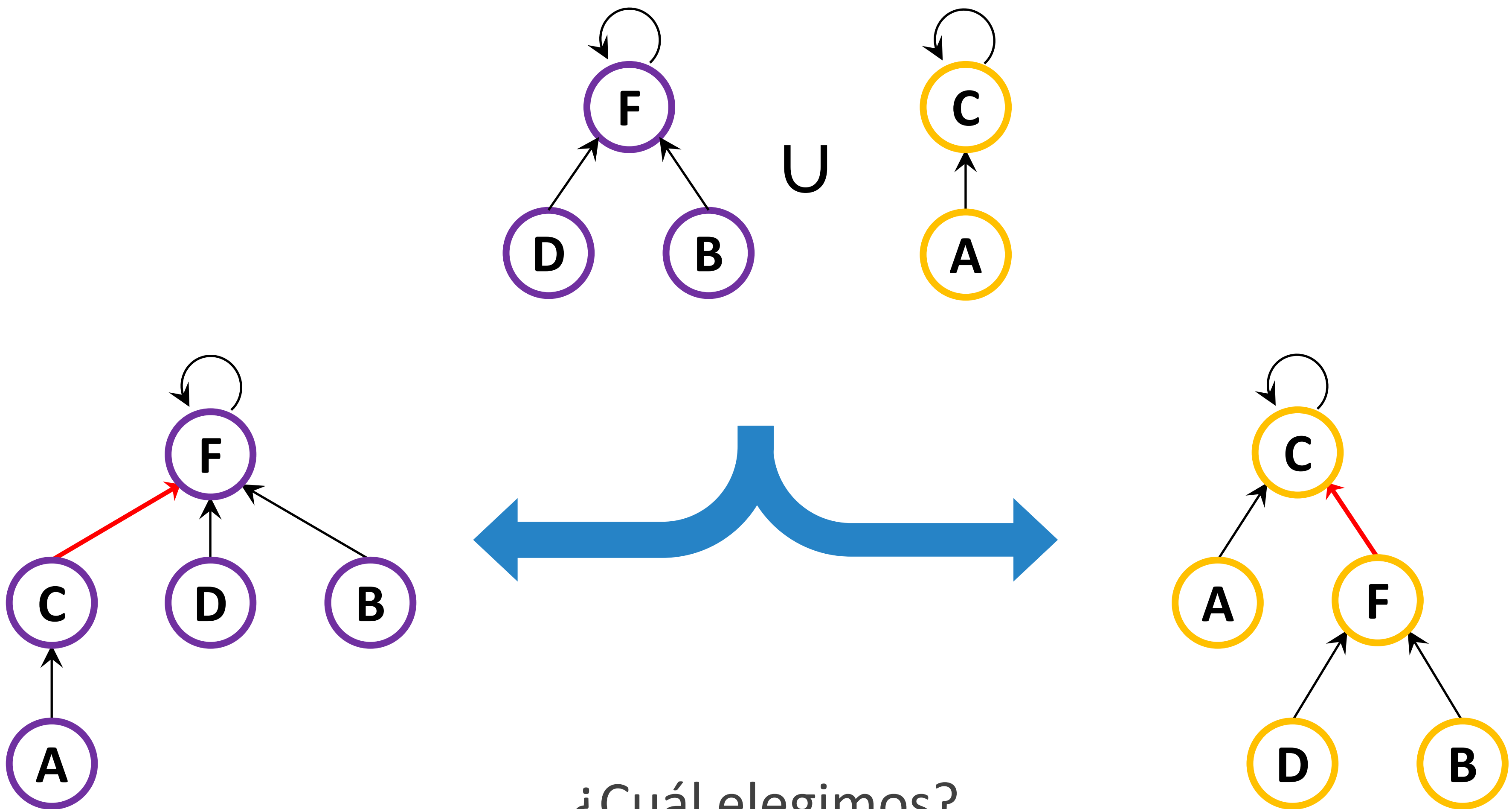
Operaciones sobre conjuntos disjuntos

Definimos 3 funciones para esta estructura:

- $\boldsymbol{make\ set}(\boldsymbol{x})$: inicializa $\boldsymbol{x}$ como su propio representante —cada $\boldsymbol{x}$ está en un conjunto por sí solo inicialmente
- $\boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{x})$: retorna el representante del nodo $\boldsymbol{x}$ —el conjunto al que pertenece $\boldsymbol{x}$
- $\boldsymbol{union}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: une los conjuntos a los que pertenecen $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ —quedando sólo la unión y desapareciendo los conjuntos originales

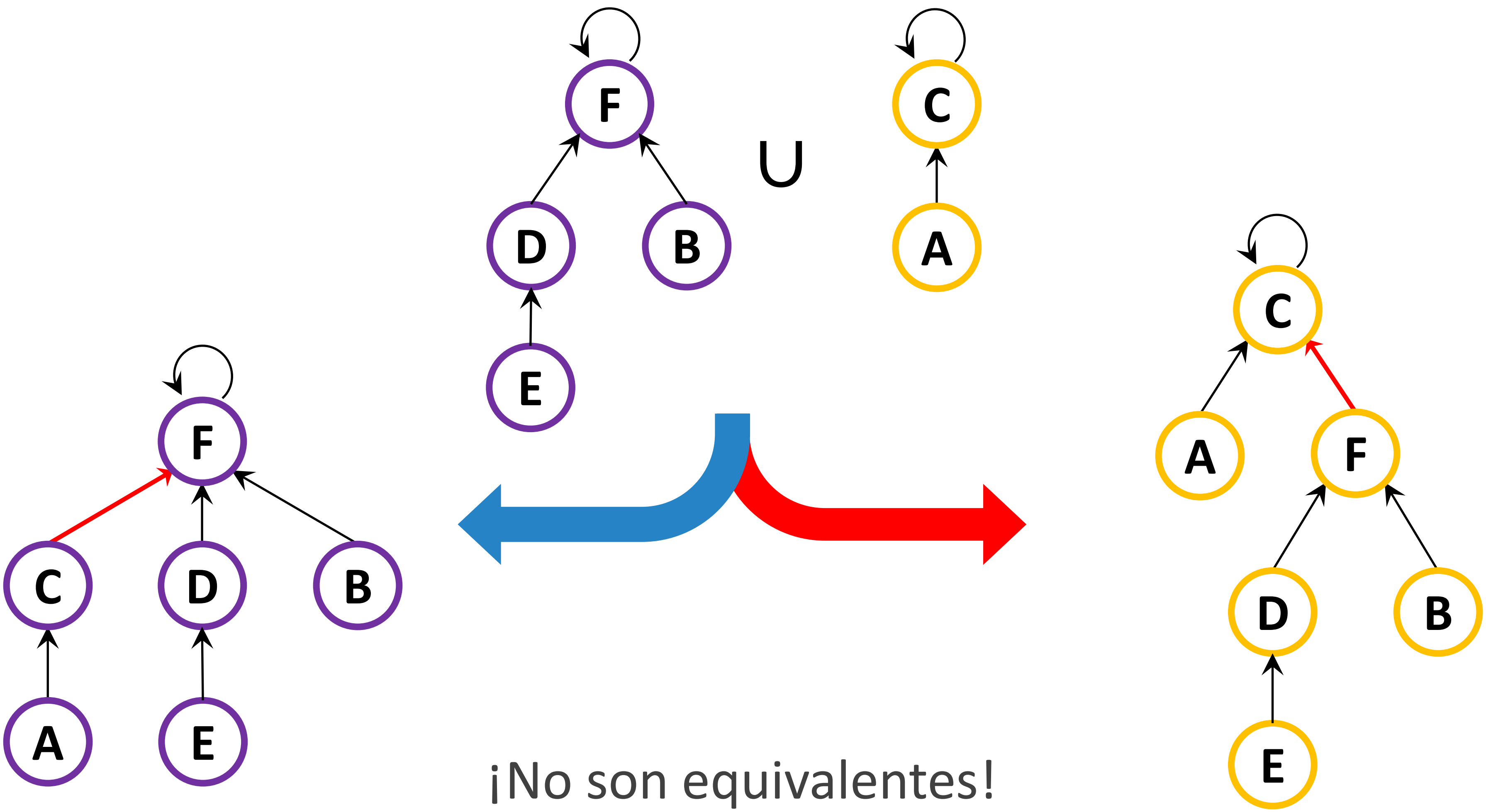
Todas son bastante directas, y pueden implementarse eficientemente; ¿cómo?

Unión



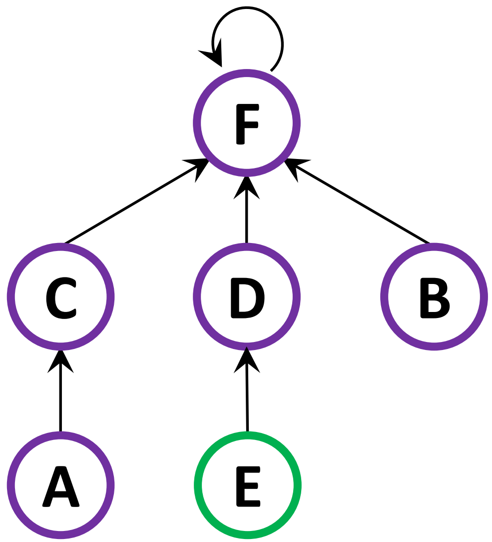
¿Cuál elegimos?

Unión

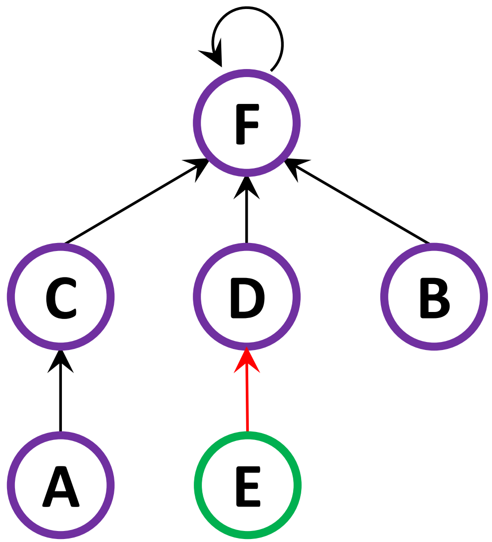


¡No son equivalentes!

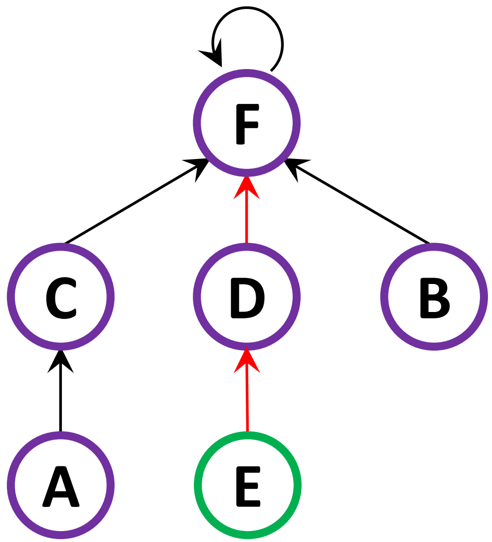
find-set(E) = ...



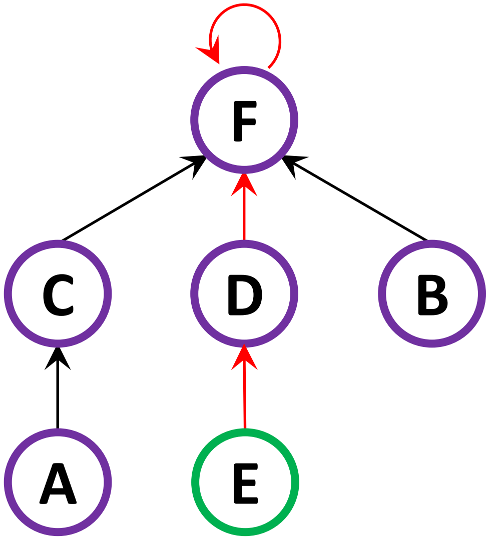
find-set(E) = find-set(D)



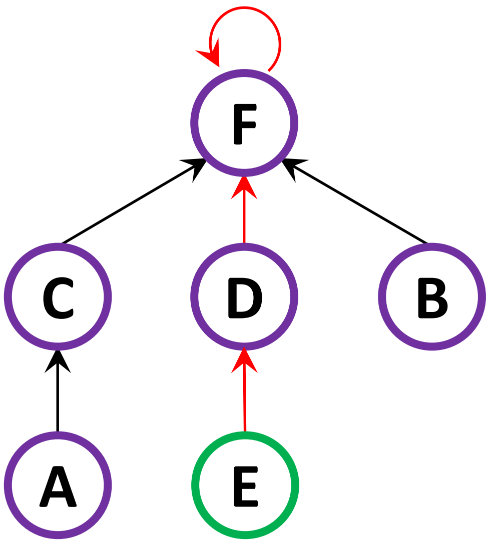
find-set(E) = find-set(F)



find-set(E) = F

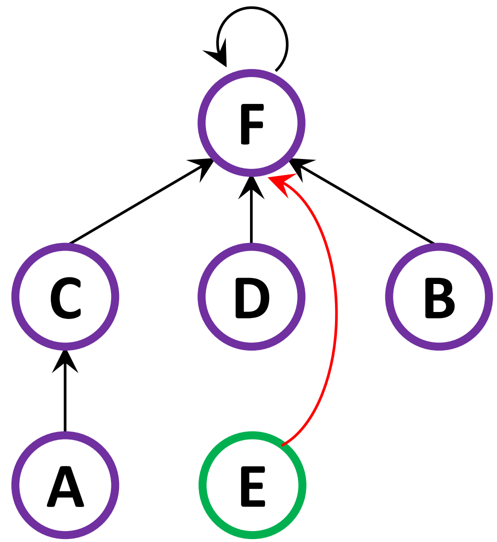


¿Cómo podemos aprovechar esta información una vez que la tenemos?



$$\boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{E}) = \text{F}$$

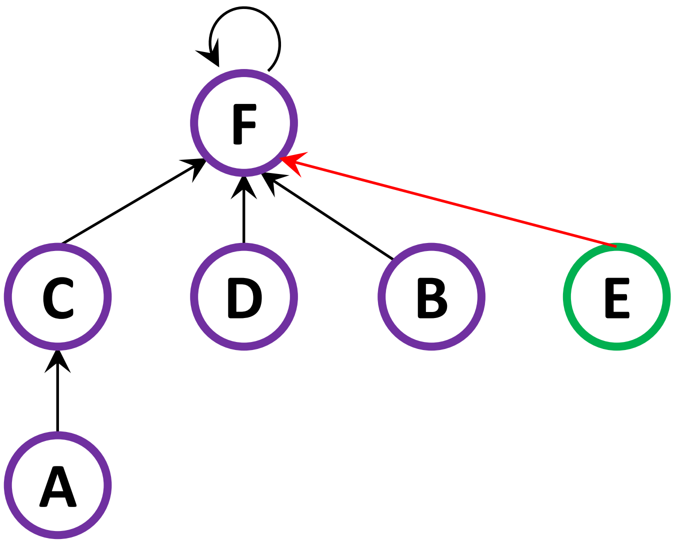
Compresión de caminos



$$\boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{E}) = \text{F}$$

¡Acortando el camino al representante!

Compresión de caminos



$\boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{E}) =$ F

Complejidad de *kruskal*

Si pretendemos operar sobre n conjuntos disjuntos

… ¿cuál es la complejidad de estas operaciones?

… ¿y usando las mejoras?

kruskal con conjuntos disjuntos
(como los acabmos de ver)

$\boldsymbol{kruskal}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})\big)$:

Ordenar $\boldsymbol{E}$ por costo, de menor a mayor

$\boldsymbol{foreach}\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$: $\boldsymbol{make\ set}(\boldsymbol{v})$

$\boldsymbol{T} \leftarrow \emptyset$

$\boldsymbol{foreach}\ (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{E}$:

$\boldsymbol{if}\ \boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{find\ set}(\boldsymbol{v})$:

$\boldsymbol{T} \leftarrow \boldsymbol{T} \cup \{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\}$

$\boldsymbol{union}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

$\boldsymbol{return}\ \boldsymbol{T}$

¿Cuál es la complejidad de *kruskal* con cojuntos disjuntos y compresión de caminos?

Primero, hay que ordenar las $|E|$ aristas → $O(E\log E)$

Luego, hay que construir $|V|$ conjuntos (de un elemento cada uno) → $O(V)$

Durante la ejecución del segundo *loop*, se realizan $|V|-1$ uniones

… y $2|E|$ operaciones *find set*

Cada operación *union* toma $O(1)$ → $O(V)$ para el total de $|V|-1$ operaciones *union*

¿Cuánto toman en total las $2|E|$ operaciones *find set*?

¿Cuánto toman en total las 2|*E*| operaciones *find set*?

La complejidad de una operación *find set* depende de a cuál elemento se aplica

… aunque en el largo plazo todos los árboles podrían terminar teniendo profundidad 1, si hay suficientes operaciones *find set*

Se puede demostrar que el costo promedio de una operación *find set* en un conjunto de n elementos es $O(\log^* n)$

… en que log* es el número de veces que $\log_2$ tiene que ser aplicado iterativamente hasta que el resultado sea ≤ 1

P.ej., leyendo de derecha a izquierda

$$0.54 = \log_2(\ 1.45 = \log_2(\ 2.73 = \log_2(6.\ 64 = \log_2(\ 100\ ))))$$

… de modo que $\log^*(100) = 4$

La función log* crece muy lentamente

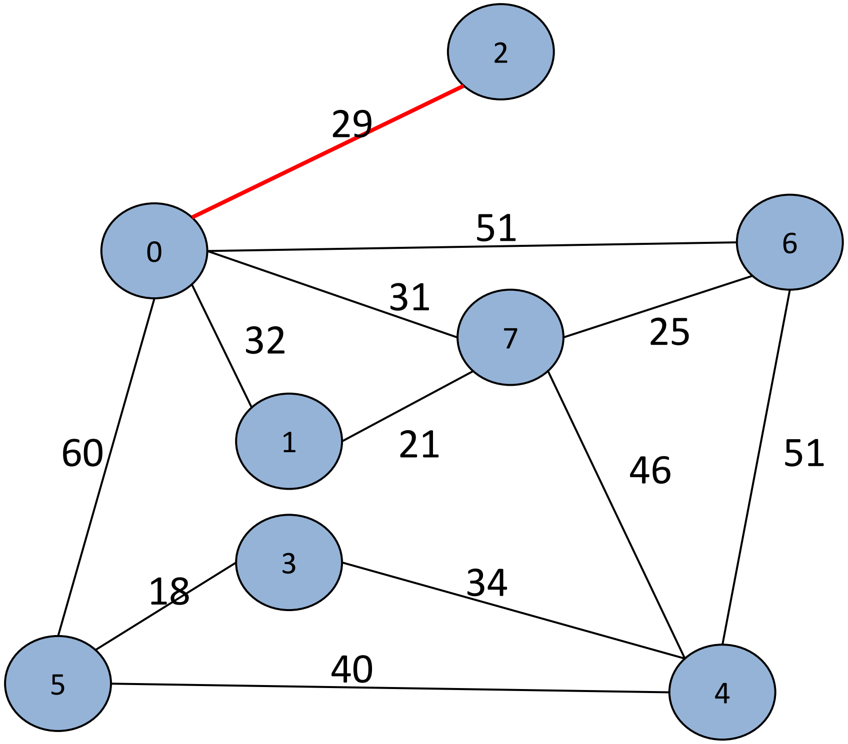
El n más pequeño para el cual log*n es 5 es $n = 2^{16} = 65536$

... y va a quedarse en 5 para todos los números razonables (hasta 2^{65536})

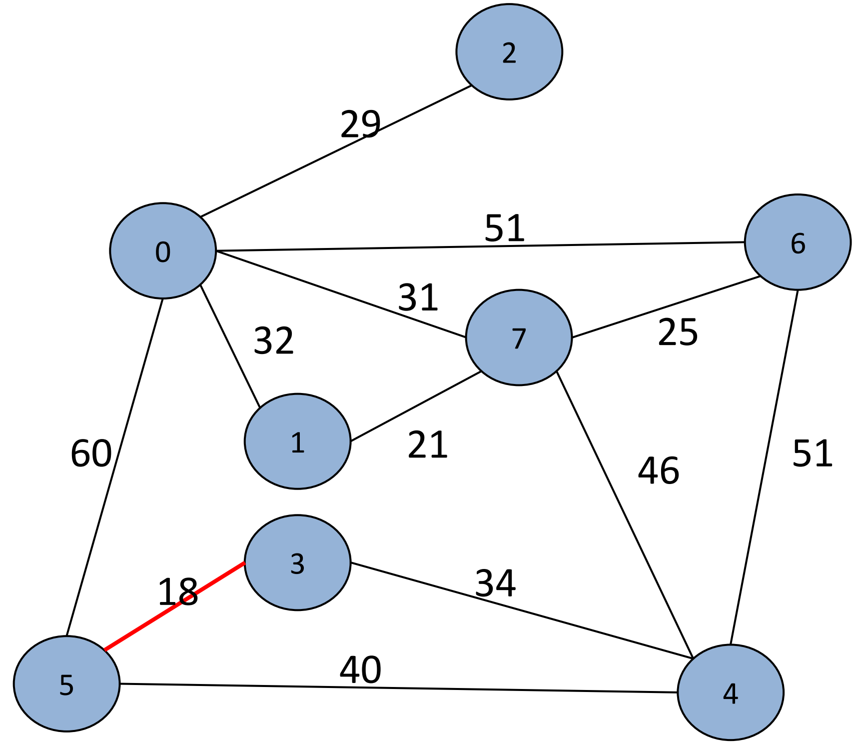
(→ Para cualquier uso práctico, consideramos que log*n es casi constante, aunque teóricamente tiende a ∞)

Así, las 2|E| operaciones *find set* toman O(Elog*E)

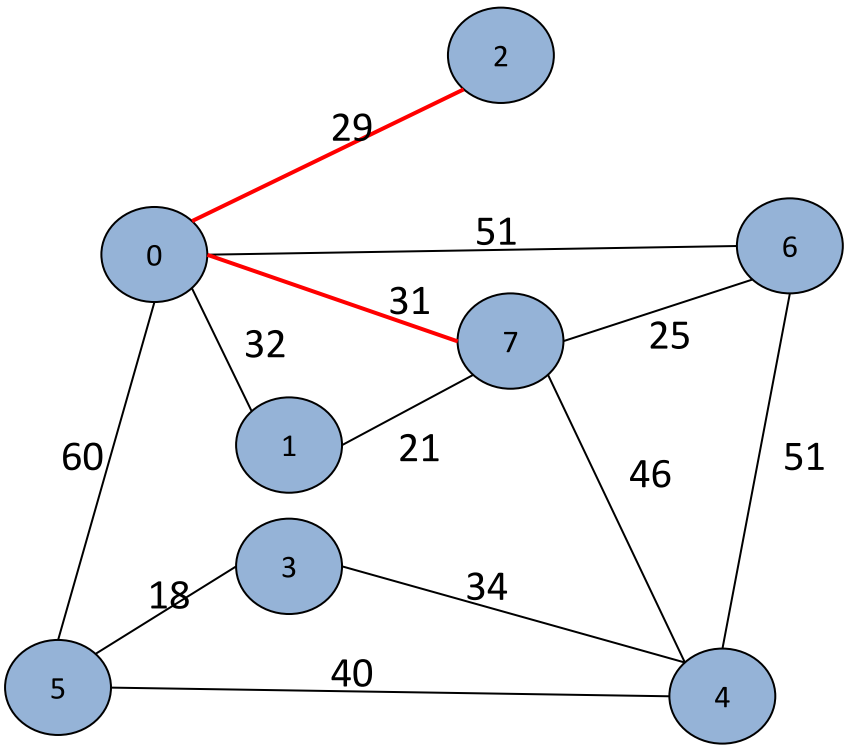
... y la complejidad de *kruskal* es O(Elog$E$) + O(V) + O(Elog*E) = O(Elog$E$) = **O(Elog$V$)**, ya que |E| = O(V^2)

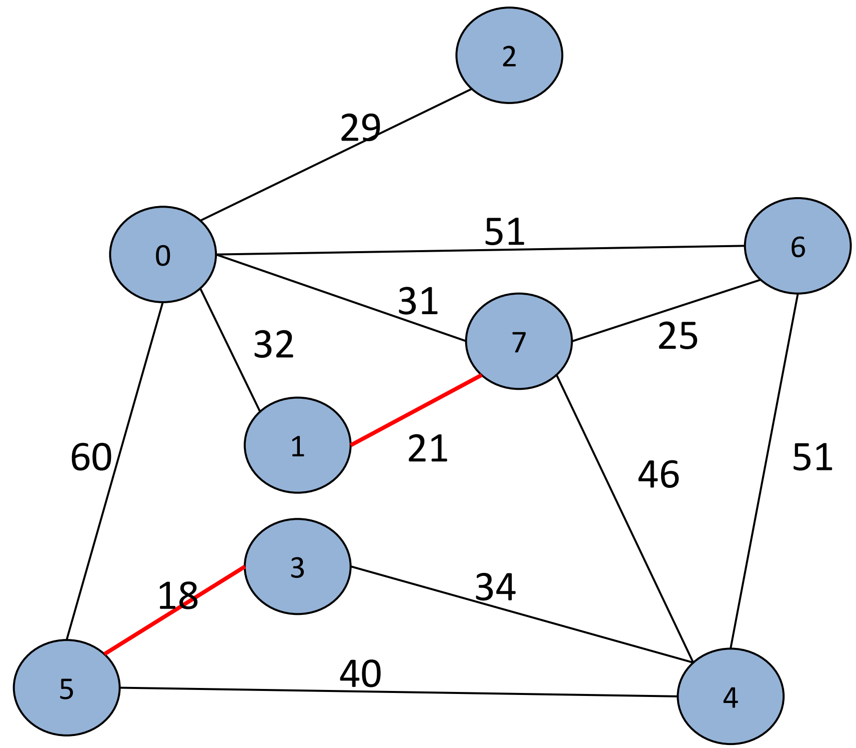


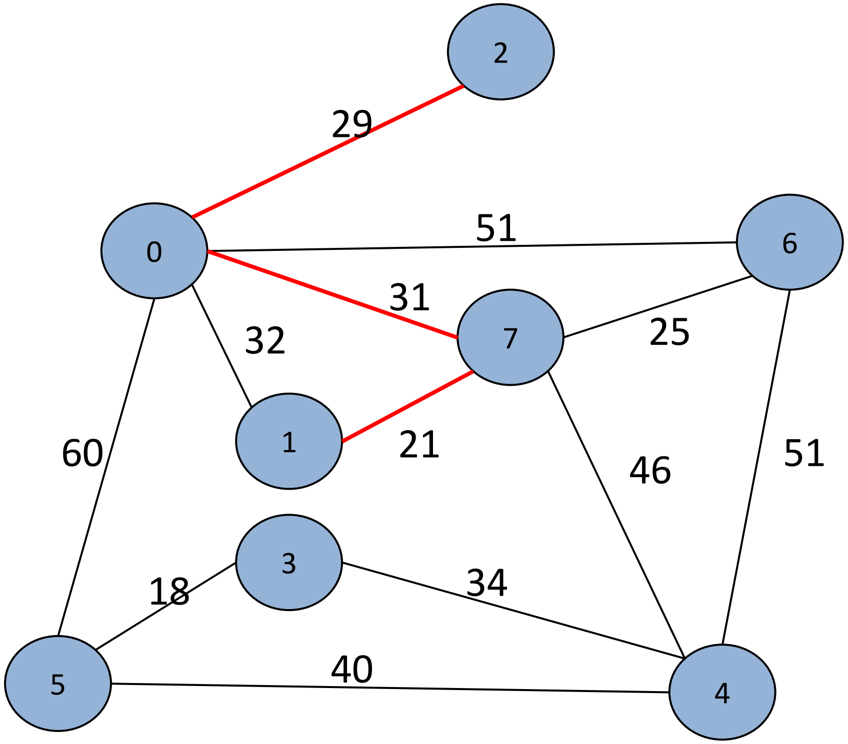
2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

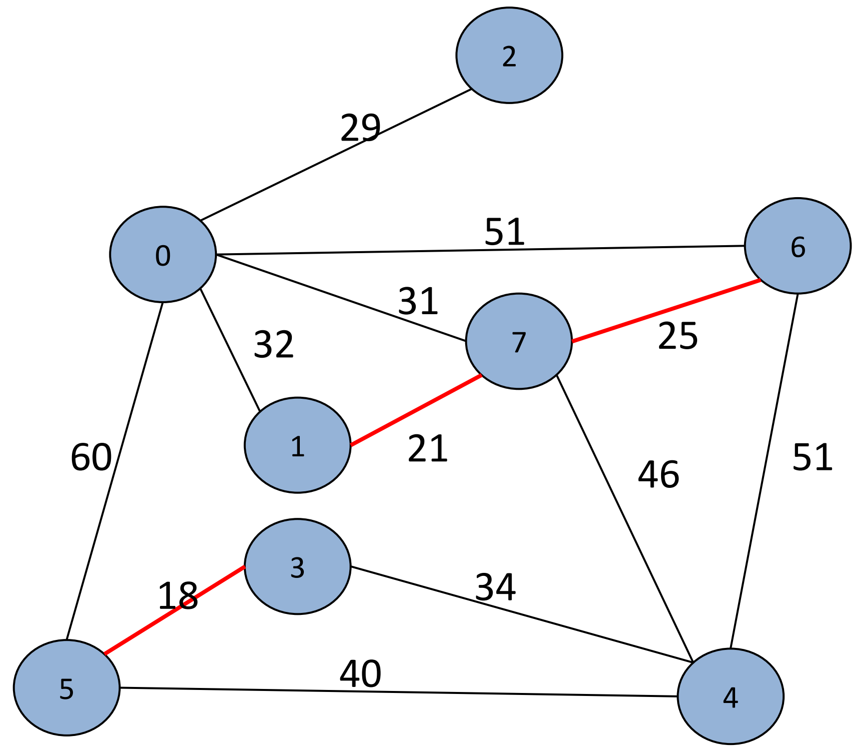


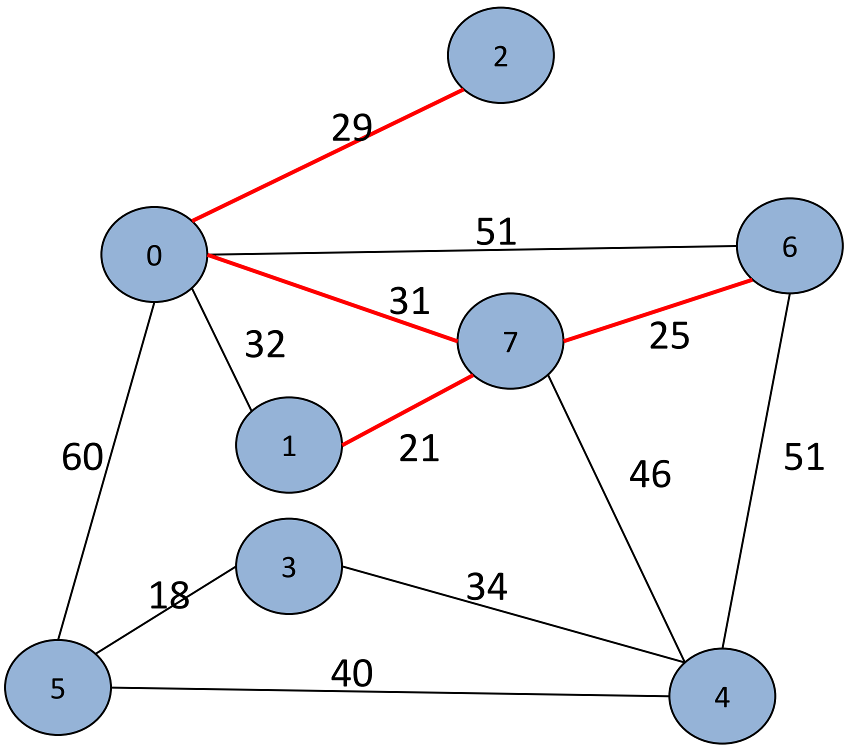
2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

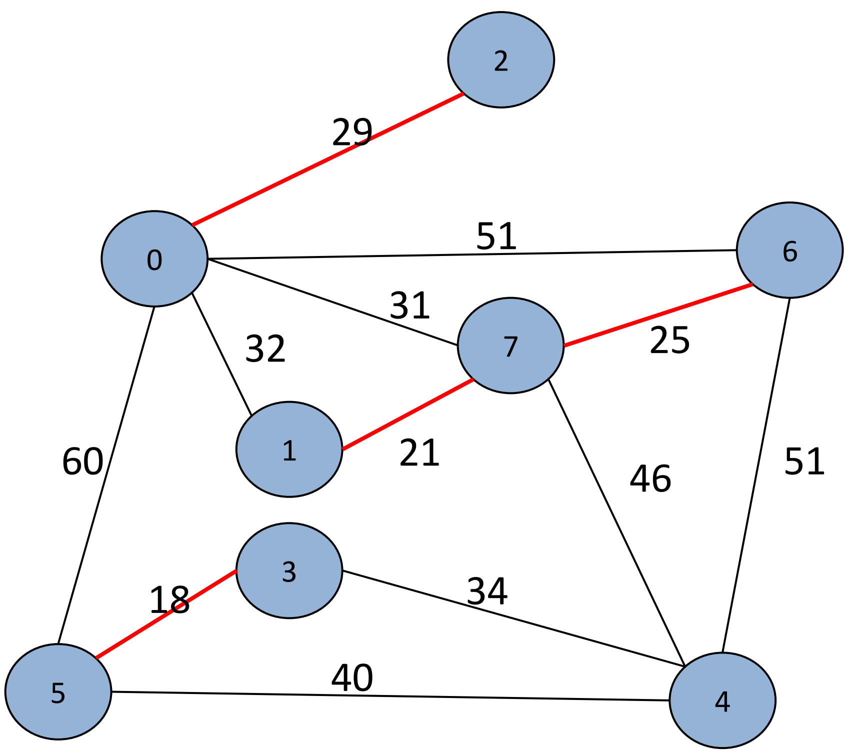

2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

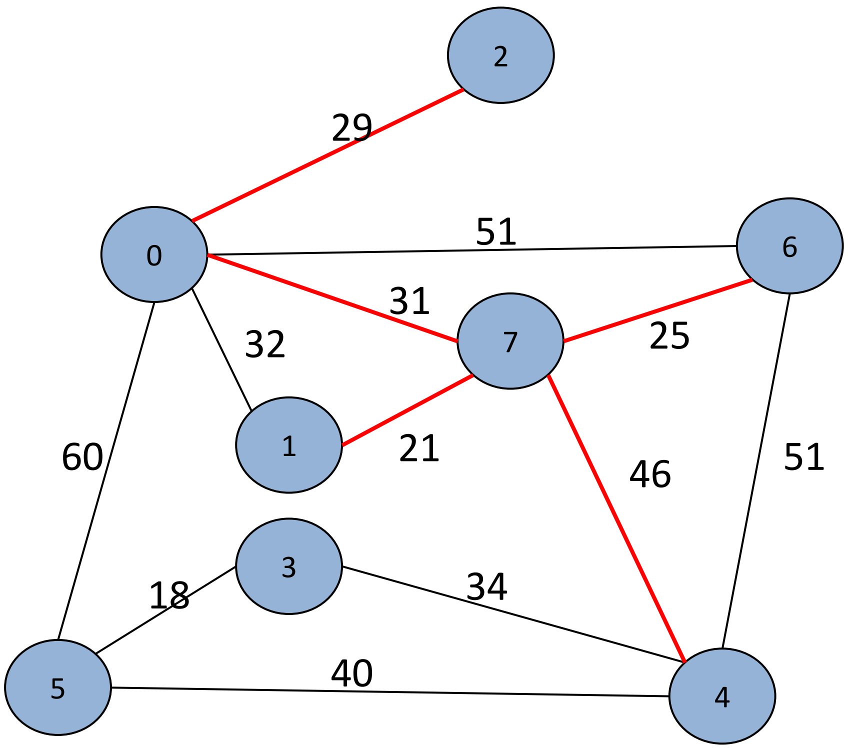

2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

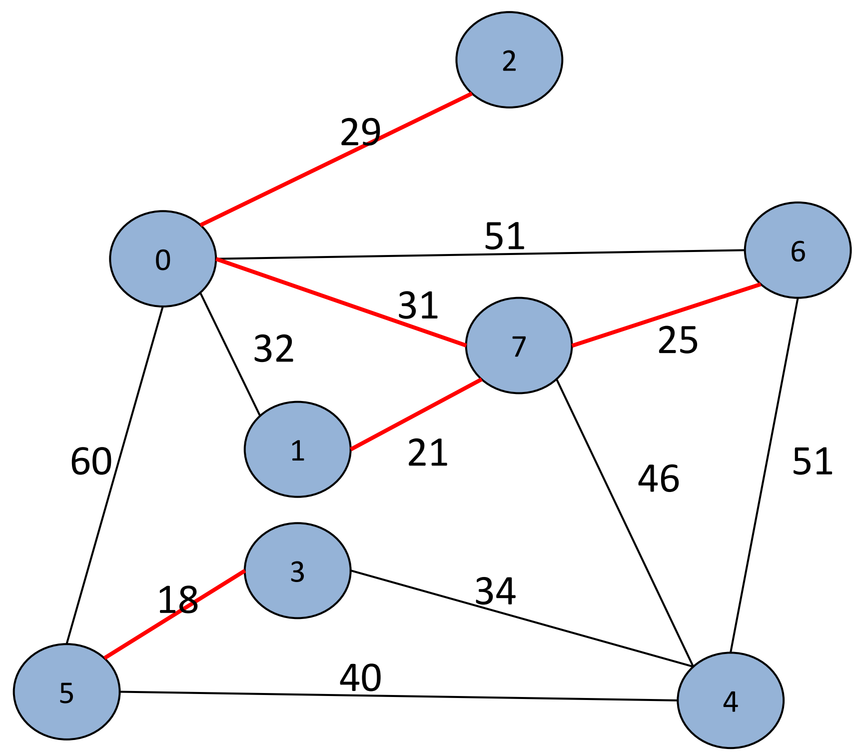

2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

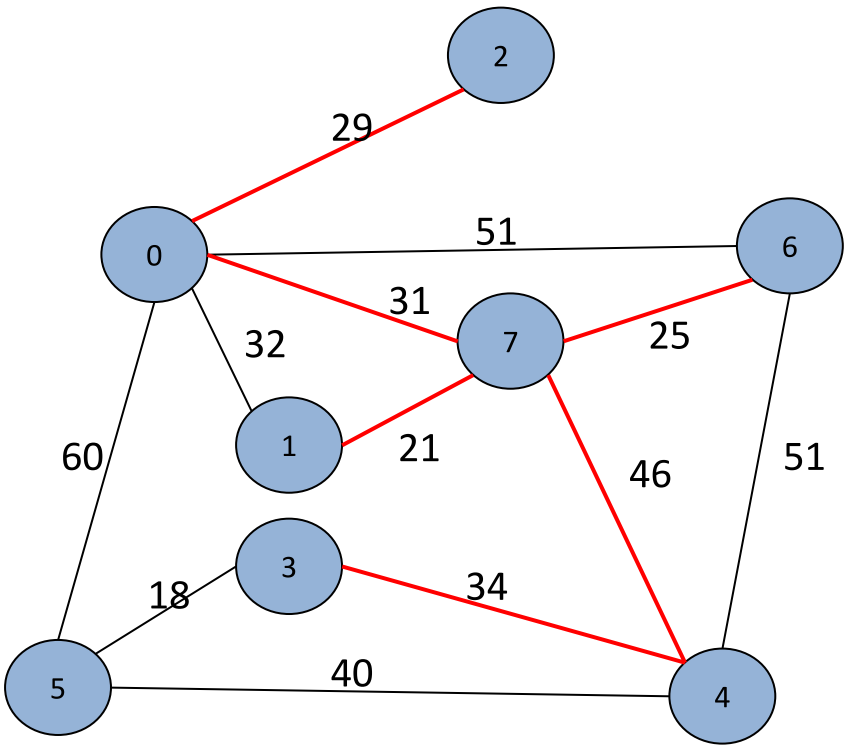

2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

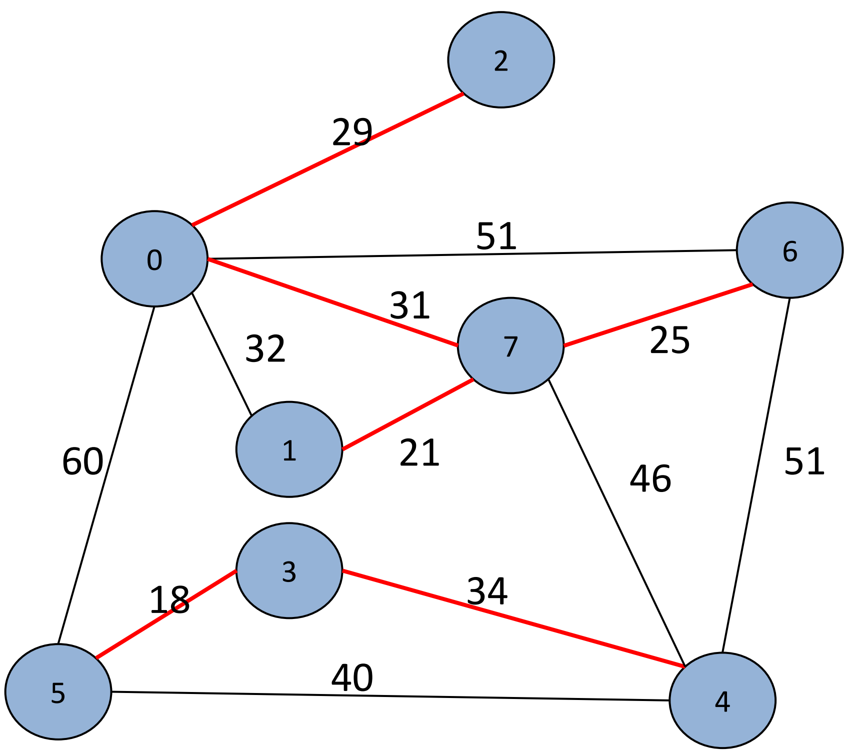

2
29
0
51
6
31
7
25
32
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

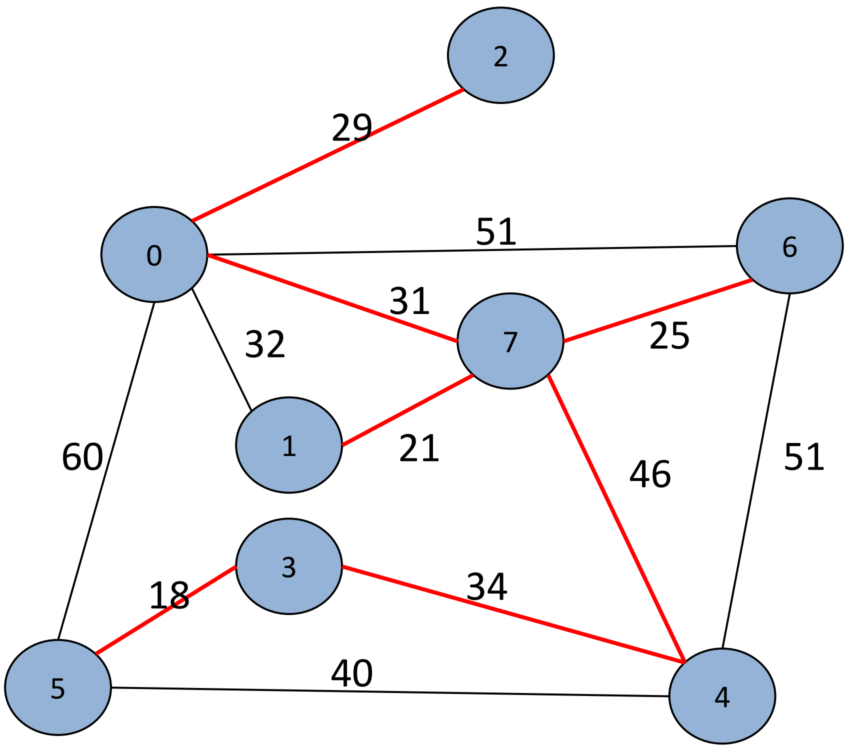

2
29
0
51
6
31
7
25
32
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4

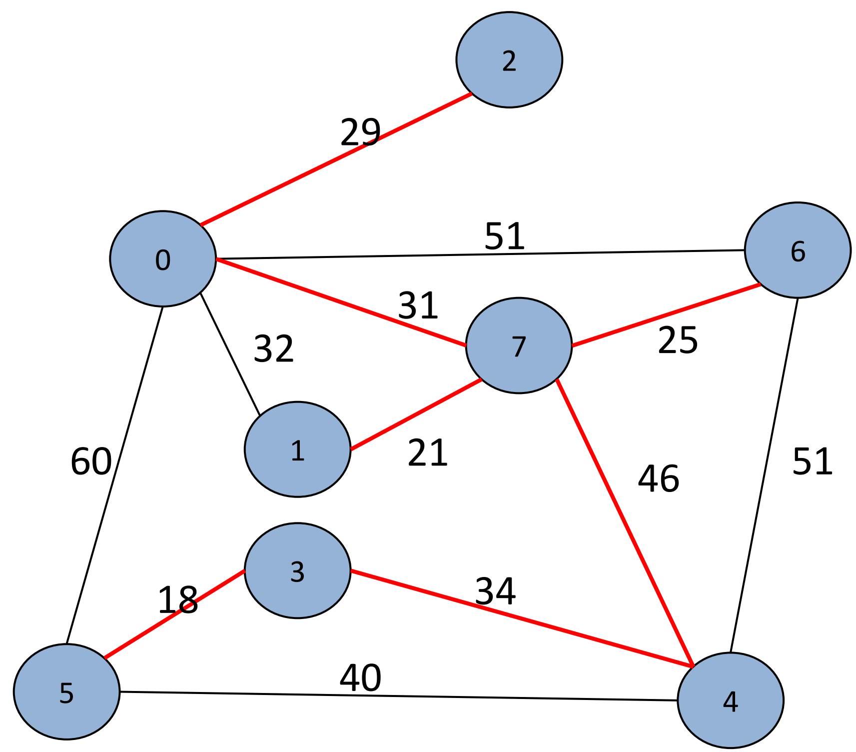

2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4


2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4


2
29
0
51
6
31
7
25
32
1
21
46
51
60
3
34
18
5
40
4


2
29
0
51
6
31
7
25
32
1
21
46
51
60
3
34
18
5
40
4


2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4


2
29
0
51
6
31
7
32
25
1
21
60
46
51
3
18
34
5
40
4