Ordenes parciales

Clase 10

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

¿en qué se parecen estas relaciones?

- subconjunto: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- menor o igual: $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$
- divide a: $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$

Outline

Outline

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, a) \in R\big) \rightarrow\ a = b.$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow\ (a, c) \in R.$

Ejemplos

- subconjunto: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$
- menor o igual: $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$
- divide a: $\mathbf{a} \mid \mathbf{b}$

¿cómo comparamos el 6 con el 9 en la relación "divide a"?

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \ \rightarrow\ a = b.$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \ \rightarrow\ (a, c) \in R.$

Notación

Un orden parcial sobre A los denotaremos como $(\mathbf{A}, \preceq)$.

Ordenes totales

Sea A un conjunto y $(A, \preceq)$ un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial $(A, \preceq)$ es un **orden total** si $\preceq$ cumple ser:

- **Conexo**: $\forall a, b \in A.\ \ (a, b) \in R \ \vee\ (b, a) \in R$.

¿cuál de los ordenes parciales anteriores son **totales**?

Outline

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i, j) \ \leq_2 \ (i', j') \qquad \text{si, y solo si,} \qquad i < i' \ \vee \ (i = i' \wedge j \leq j')$$

Ejemplos

- $(2, 100) \leq_2 (3, 5)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 100)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 3)$?

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación $\leq_2$ entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i, j) \;\leq_2\; (i', j') \qquad \text{si, y solo si,} \qquad i < i' \;\vee\; (i = i' \wedge j \leq j')$$

¿qué propiedades cumple $\leq_2$?

1. ¿es $\leq_2$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_2$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_2$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_2$ es un **orden parcial**.

Orden lexicográfico

En general, si $(A, \preceq)$ es un orden parcial, entonces siempre podemos definir un orden parcial sobre $A \times A$.

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial.
Se define la relación $\preceq_2$ entre pares en $A \times A$ como:

$$(a, b) \ \preceq_2 \ (a', b') \qquad \text{si, y solo si,} \qquad (a \neq a' \rightarrow a \preceq a') \ \wedge \ (a = a' \rightarrow b \preceq b')$$

Demuestre que $\preceq_2$ es un **orden parcial**.

- La relación $\preceq_2$ se conoce como el **orden lexicográfico** en $A \times A$.
- Para todo k, es posible definir $\preceq_k$ sobre A^k. (¿cómo?)

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito de elementos.
- Un elemento $a \in \Sigma$ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** w sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ es un alfabeto con tres letras.
- aa, $abbca$, o $acaabaa$ son palabras.

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- El largo $|w|$ de una palabra w sobre Σ es el número de letras.

$$|w| \stackrel{\text{def}}{\equiv} \#\text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ϵ como la **palabra vacía** de largo 0.

$$|\epsilon| \stackrel{\text{def}}{\equiv} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ.

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b\}$ es un alfabeto con dos letras.
- $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \ldots\}$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} u \text{ **concatenado** con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Ejemplo

- $aab \cdot bab \; = \; aabbab$
- $bc \cdot aabbc \; = \; bcaabbc$
- $\epsilon \cdot abaca \; = \; abaca$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \overset{\text{def}}{\equiv} u \text{ **concatenado** con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v.

Preguntas

- ¿es la concatenación **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$?
- ¿es la concatenación **conmutativa**: $u \cdot v = v \cdot u$?

¿por qué nos podría interesar trabajar con **palabras**?

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{p}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w \in \Sigma^*. \ \ u \cdot w = v$$

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{s}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w \in \Sigma^*. \ \ w \cdot u = v$$

$$\mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{i}} \ \mathbf{v} \qquad \text{si, y solo si,} \qquad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*. \ \ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

Ejemplos

- $aaab \ \leq_p \ aaabba$? ✓
- $bab \ \leq_p \ abbab$? ✗
- $bab \ \leq_s \ baab$? ✗
- $cba \ \leq_i \ aabbcbaaa$? ✓

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^*:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{p}} \ \mathbf{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ \ u \cdot w = v \\ \mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{s}} \ \mathbf{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w \in \Sigma^*.\ \ w \cdot u = v \\ \mathbf{u} \ \leq_{\mathbf{i}} \ \mathbf{v} & \text{si, y solo si,} & \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*.\ \ w_1 \cdot u \cdot w_2 = v \end{array}$$

¿qué propiedades cumple $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$?

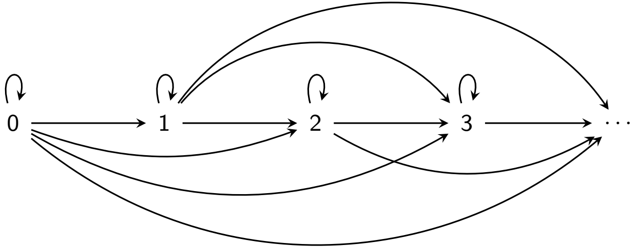
1. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **refleja**? ✓
2. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **anti-simétrica**? ✓
3. ¿es $\leq_p$, $\leq_s$ o $\leq_i$ **transitiva**? ✓

Por lo tanto, $\leq_p$, $\leq_s$ y $\leq_i$ son **ordenes parciales**.

Outline

¿cómo se ve un orden parcial?

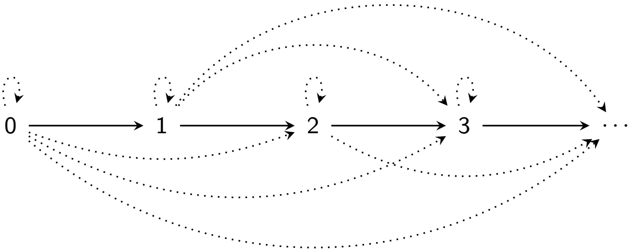
orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



¿podemos **simplificar** la visualización de este grafo?

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

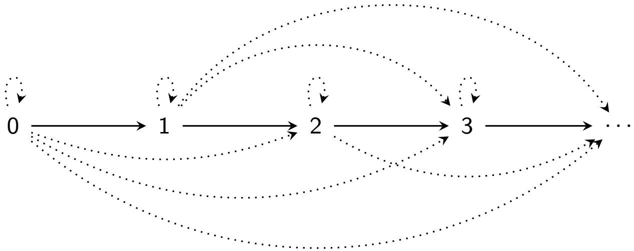


Para simplificar la visualización del grafo podemos:

- Remover **loops**.
- Remover aristas "**transitivas**"

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$



Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \leq)$ es el diagrama del grafo de $\leq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \leq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \leq$ y $(c, b) \in \leq$.

¿cómo se ve un orden parcial?

orden $\leq$ sobre $\mathbb{N}$

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Diagrama de Hasse de $(\mathbb{N}, \leq)$

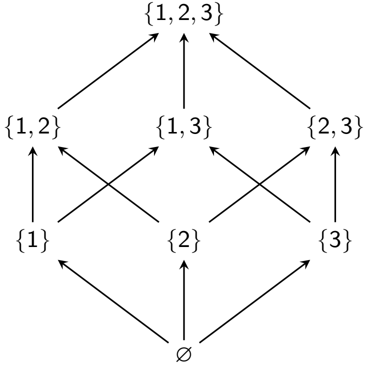
Definición

El **diagrama de Hasse** de $(A, \preceq)$ es el diagrama del grafo de $\preceq$ pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \preceq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \preceq$ y $(c, b) \in \preceq$.

¿cómo se ve el orden parcial $\subseteq$?

Diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}),\subseteq)$



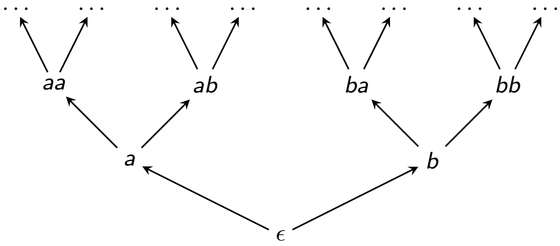
¿cómo se ve el orden lexicográfico $\leq_2$?

Diagrama de Hasse del orden lexicográfico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
(0,4) \arrow[u] & (1,4) \arrow[u] & (2,4) \arrow[u] & (3,4) \arrow[u] & (4,4) \arrow[u] & \cdots \\
(0,3) \arrow[u] & (1,3) \arrow[u] & (2,3) \arrow[u] & (3,3) \arrow[u] & (4,3) \arrow[u] & \cdots \\
(0,2) \arrow[u] & (1,2) \arrow[u] & (2,2) \arrow[u] & (3,2) \arrow[u] & (4,2) \arrow[u] & \cdots \\
(0,1) \arrow[u] & (1,1) \arrow[u] & (2,1) \arrow[u] & (3,1) \arrow[u] & (4,1) \arrow[u] & \cdots \\
(0,0) \arrow[u] & (1,0) \arrow[u] & (2,0) \arrow[u] & (3,0) \arrow[u] & (4,0) \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

¿cómo se ve el orden parcial $\leq_p$ sobre palabras?

Diagrama de Hasse de $(\Sigma^*, \leq_p)$



¿qué tienen de parecido todos estos grafos?

Caminos y ciclos de un grafo

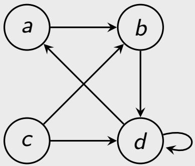
Definiciones (recordatorio)

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en V tal que:
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.

  Decimos que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es un **camino de v_0 a v_n**.
- Un **camino simple** es un camino donde todos los vértices son distintos.
- Dos nodos u y v estan **conectados en G** si existe un camino de u a v

Ejemplo



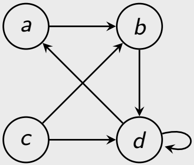
Caminos y ciclos de un grafo

Definiciones

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- Un **ciclo** en G es un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ donde $v_0 = v_n$.
- Un **ciclo simple** en G es un ciclo $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que todos los vértices son distintos, exceptuando el primero y el último.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n (el número de aristas que atraviesa).

Ejemplo



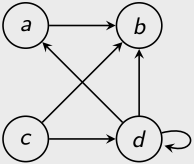
Grafos acíclicos o DAGs

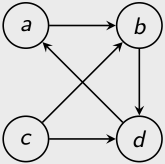
Definición

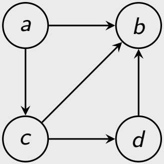
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigído.

- G se dice **acíclico** si NO tiene ciclos.
- Si G es acíclico decimos que G es un **DAG** (**D**irect **A**cyclic **G**raph).

¿cuáles grafos son DAGs?







¿es un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \preceq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \preceq)$ es un DAG.

¿es un orden parcial un DAG?

Demostración: orden parcial $\Rightarrow (A, \preceq)$ NO tiene ciclos ≥ 2

Por contradicción, suponga que:

- $(A, \preceq)$ es un orden parcial.
- el grafo $(A, \preceq)$ tiene un ciclo de largo mayor o igual a 2.

Sea $v_0, v_1, \ldots, v_n$ con $n \geq 2$ el ciclo simple en $(A, \preceq)$ tal que:

- $v_i \preceq v_{i+1}$ para todo $i < n$,
- $v_i \neq v_j$ para todo $i < j < n$, y
- $v_0 = v_n$.

PD: $v_0 \preceq v_i$ para todo $i < n$. (demostración: ejercicio)

De lo anterior, podemos deducir que:

$$v_0 \preceq v_{n-1}, \quad v_{n-1} \preceq v_0 \quad \text{y} \quad v_0 \neq v_{n-1}$$

por lo tanto, tenemos una **contradicción** (¿por qué?).

□

¿es un orden parcial un DAG?

Teorema

Si $(A, \leq)$ es un orden parcial,
entonces el grafo dirigido $(A, \leq)$ NO tiene ciclos ≥ 2.

En otras palabras, el diagrama de Hasse de $(A, \leq)$ es un DAG.

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$.

Si (A, R) es un DAG, entonces ¿es (A, R) un orden parcial?