PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

TAREA 3

Publicación:	Viernes 19 de Abril.
Entrega:	**Viernes 26 de Abril hasta las 10:15 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre, sección y número de lista en cada hoja de respuesta.
- Si usa más de una hoja para una misma pregunta corchetelas.
- Debe entregar una copia escrita durante la ayudantía asignada y una copia digital por el buzón del curso, ambas antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

Sea A un conjunto no vacío y $R \subseteq A \times A$. Para cada afirmación siguiente, responda si es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera, demuestrelo y, en caso de ser falsa, de un contraejemplo.

1. Si R es conexa, entonces $R \cup R \circ R$ es transitiva.
2. Si R es transitiva, entonces $R \cap R^{-1}$ es transitiva.

Pregunta 2

Dado un grafo finito no dirigido $G = (V, E)$ con $V \subseteq \mathbb{N}$, se definen las siguientes operaciones sobre G:

- Dada una arista $e = \{u, v\} \in E$, se define la operacion *eliminación* de e en G:

  $$\textsc{Delete}(e, G) = H$$

  donde $H = (V, E - \{e\})$, esto es, H es el grafo al eliminar la arista e de G.

- Dada una arista $e = \{u, v\} \in E$ con $u < v$, se define la operación de *contracción* de e en G:

  $$\textsc{Contract}(e, G) = H$$

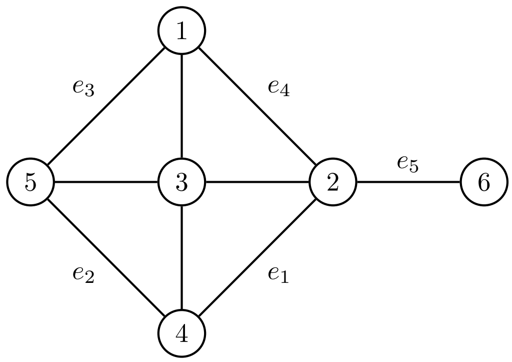
  donde $H = (V - \{u\}, (E - E') \cup E'')$ es un nuevo grafo tal que $E' = \{\{u, x\} \mid \{u, x\} \in E\}$ y $E'' = \{\{v, x\} \mid \{u, x\} \in E \wedge x \neq v\}$. Es decir, el grafo que se conforma al "fusionar" u en v: se eliminan las aristas asociadas a u y se agregan a v (notar que no se repiten aristas en el grafo H).

Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todos los grafos finitos no dirigidos $G = (V, E)$ con $V \subseteq \mathbb{N}$. Se define la relación binaria $\preceq$ sobre $\mathcal{G}$ tal que $H \preceq G$ si existe una secuencia de operaciones de eliminación o contracción $\textsc{Op}_1, \textsc{Op}_2, \ldots, \textsc{Op}_n \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$ (ϵ significa no realizar operación) y aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tales que:

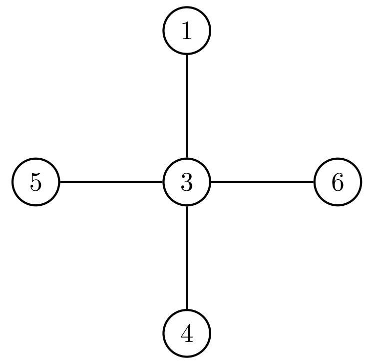
$$H = \textsc{Op}_1(e_1,\ \textsc{Op}_2(e_2,\ \ldots\ \textsc{Op}_n(e_n, G)\ \ldots))$$

En otras palabras, una secuencia de operaciones de eliminación y contracción que transforman a G en H. Por ejemplo, considere los siguientes grafos G y H:

G :



H :



Es fácil ver que $H \preceq G$ dado que uno puede obtener H a partir de G con la siguiente secuencia de operaciones:

$$H = \textsc{Delete}(e_1, \textsc{Delete}(e_2, \textsc{Delete}(e_3, \textsc{Delete}(e_4, \textsc{Contract}(e_5, G))))).$$

1. Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{G}$.

2. Demuestre que $\preceq$ NO es un orden total sobre $\mathcal{G}$.

3. Dado $S \subseteq \mathcal{G}$, conjunto finito con $S \neq \emptyset$, ¿es verdad que S siempre tiene un supremo bajo $\preceq$?

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **item** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta),
- 3 (con errores menores),
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.