Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA TAREA 3

Pregunta 1

Pregunta 1.1

La solución consistía en notar que no se cumple la transitividad en este caso. Esto se puede demostrar con cualquier contraejemplo que cumpla con que exista $a, b, c \in A$ distintos tal que $(a, b) \in R \cup R \circ R$ y $(b, c) \in R \cup R \circ R$, pero $(a, c) \notin R \cup R \circ R$ Un ejemplo que cumple con lo anterior puede ser un grafo G con vertices V y aristas E donde:

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d\} \\ E &= \{(a, c), (c, a), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, d), (d, a), (b, d), (d, b), (b, c), (c, b), (c, d)\} \end{aligned}$$

Donde se puede notar que se cumple la conexidad, pero no la transitividad dado que $(d, b) \in R \cup R \circ R$ y $(b, c) \in R \cup R \circ R$, pero $(d, c) \notin R \cup R \circ R$.

Dado lo anterior, la asignación del puntaje es el siguiente:

- **(0 puntos)** Por argumentar existencia de transitividad o error grave.
- **(3 puntos)** Por argumentar la no existencia de transitividad y error leve.
- **(4 puntos)** Por argumentar la no existencia de transitividad.

Pregunta 1.2

Suponiendo R transitiva, se debe demostrar que $R \cap R^{-1}$ también lo es. Sea $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ y $(b, c) \in R \cap R^{-1}$. Por definición de intersección, tenemos que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ y, por transitividad de R, $(a, c) \in R$. Análogamente, tenemos que $(a, b) \in R^{-1}$ y $(b, c) \in R^{-1}$, lo que significa que $(b, a) \in R$ y $(c, b) \in R$. Dado que R es transitiva, $(c, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $(c, a) \in R$. Esto implica que, $(a, c) \in R^{-1}$. Dado que $(a, c) \in R$ y $(a, c) \in R^{-1}$, entonces $(a, c) \in R \cap R^{-1}$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0 puntos)** Por no argumentar existencia de transitividad o error grave.
- **(3 puntos)** Por argumentar la existencia de transitividad y error leve.
- **(4 puntos)** Por argumentar la existencia de transitividad de manera completa y correcta.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Para demostrar que la relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{G}$, se debe demostrar que $\preceq$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

- $\preceq$ es Refleja.
$$\forall G \in \mathcal{G}. \quad (G, G) \in \preceq$$

  Basta tomar la secuencia vacía $S_0 = \{\epsilon\}$, y cualquier grafo G se relaciona con si mismo $G \preceq G$.

- $\preceq$ es Antisimétrica.
$$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}. \quad ((G_1, G_2) \in \preceq \wedge (G_2, G_1) \in \preceq) \rightarrow G_1 = G_2$$

  Supongamos que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_1$, y además $G_1 \neq G_2$. Sin perdida de generalidad, tomamos que G_1 y G_2 tienen la misma cantidad de nodos $V(G_1) = V(G_2)$, pues, no hay operaciones que agreguen nodos. Como los grafos son distintos, se tiene:
$$\exists e \in E(G_1) \text{ pero } e \notin E(G_2)$$
  Al hacer operaciones a G_2 para llegar a G_1, solo se podrá eliminar aristas. Por lo tanto, no se cumple que $G_1 \preceq G_2$ y llegamos a una contradicción. Luego: $G_1 = G_2$.

- $\preceq$ es Transitiva.
$$\forall G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}. \quad ((G_1, G_2) \in \preceq \wedge (G_2, G_3) \in \preceq) \rightarrow (G_1, G_3) \in \preceq$$

  Sean G_1, G_2, G_3 tres grafos $\in \mathcal{G}$, tal que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_3$. Además, existen las siguientes secuencias de operaciones y conjuntos de aristas, respectivamente:
$$S_1, S_2, \ldots, S_n \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$$
$$T_1, T_2, \ldots, T_m \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$$
$$e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1 \in 2^{\mathbb{N}}$$
$$e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2 \in 2^{\mathbb{N}}$$

  Por definición de la relación, tenemos lo siguiente:
$$G_1 = S_1(e_1^1, S_2(e_2^1, S_3(\ldots, e_{n-1}^1, S_n(e_n^1, G_2))))$$
$$G_2 = T_1(e_1^2, T_2(e_2^2, T_3(\ldots, e_{m-1}^2, T_m(e_m^2, G_3))))$$
  Luego:
$$G_1 = S_1(e_1^1, \ldots, S_n(e_n^1, T_1(e_1^2, \ldots, T_m(e_m^2, G_3))))$$
  y se cumple que $G_1 \preceq G_3$.

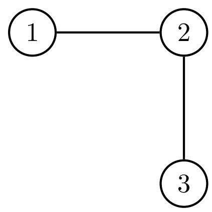
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración de tres subítems correcta y claramente.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.

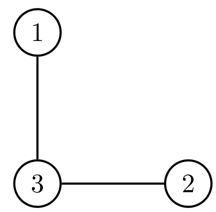
Pregunta 2.2

Para esta pregunta había que encontrar un contraejemplo que invalide la conexidad de la relación $\preceq$. Tomamos el siguiente caso con los grafos G_1 y G_2:

G_1 :



G_2 :



De la mano con el argumento de la parte 2.1, tengo que con las operaciones de la relación $\preceq$ no puedo agregar aristas, no podré agregar la arista $(1,3)$ a G_1 para transformarlo a G_2 ni la arista $(1,2)$ a G_2 para transformarlo en G_1. Por lo tanto:

$$G_1 \npreceq G_2$$

$$G_2 \npreceq G_1$$

Al no ser conexa, se demuestra que $(\mathcal{G}, \preceq)$ no es un orden total.

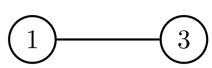
Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.

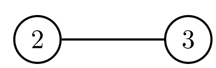
Pregunta 2.3

S no siempre tendrá un supremo, demostraremos a través de un contraejemplo. Tomamos el siguiente conjunto $S = \{H_1, H_2\}$ donde:

H_1 :

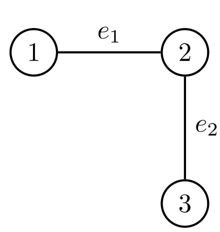


H_2 :



Si tomamos el grafo G_1 podemos verificar que es cota superior de S, pues se cumple que $H_1 \preceq G_1$ y $H_2 \preceq G_1$, al contraer una e_2 y e_1, respectivamente:

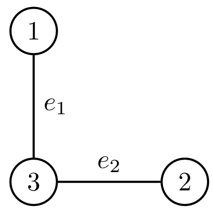
G_1 :



$$\textsc{Contract}(e_2, G_1) = H_1$$
$$\textsc{Contract}(e_1, G_1) = H_2$$

Análogamente, el grafo G_2 también es cota superior de S ya que $H_1 \preceq G_2$ y $H_2 \preceq G_2$, al contraer una e_2 y e_1, respectivamente:

G_2 :



$$\textsc{Contract}(e_2, G_2) = H_1$$
$$\textsc{Contract}(e_1, G_2) = H_2$$

Sin embargo, en el incisco 2.2 se demuestra que $G_1 \not\preceq G_2$ y $G_2 \not\preceq G_1$. Como las cotas superiores no son comparables, no hay una menor que la otra y por lo tanto el conjunto S no tiene supremo.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.