Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 7

Numerabilidad

Problema 1

Sea $\{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que cada S_i, con $i \in \mathbb{N}$, es numerable. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$$

Solución propuesta.

Supondremos que cada conjunto S_i es infinito y que para todo $i \neq j$, se tiene que $S_i \cap S_j = \emptyset$. Podemos tomar estos supuestos gracias a lo siguiente:

- Si existen conjunto S_i finitos, podemos listar sus elementos y a continuación listar los demás conjuntos según la estrategia que detallaremos más adelante.
- Si existen conjuntos S_i y S_j, con $i \neq j$ que tienen elementos en común (i.e. no son disjuntos), podemos construir una nueva colección de conjuntos que sí son disjuntos. Como tenemos una enumeración de los S_i, para $i \geq 0$, definimos

  $$S'_0 = S_0, \quad S'_i = S_i \setminus (S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_{i-1}), i \geq 1$$

  Como $S'_i \subseteq S_i$, y S_i es numerable, entonces cada S'_i es numerable y además no se pierden elementos del conjunto S original.

A continuación demostramos la propiedad usada en el segundo punto anterior:

Prop. Sean A, B conjuntos infinitos tales que A es numerable y $B \subseteq A$. Entonces, B es numerable.
Demostración. Como A es numerable, existe un conjunto $C \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ y una biyección $f : A \to C$. Definimos el conjunto

$$D = \{d \in C \mid \exists b \in B. f(b) = d\}$$

Como $B \subseteq A$, $f(b)$ está bien definido. Por construcción, $D \subseteq C$ y por lo tanto $D \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Luego, se define la función $g : B \to D$ tal que

$$g(b) = f(b)$$

Es decir, g es f restringida a dominio B. Como f es inyectiva, g también lo es. Como D se definió como el conjunto de imágenes de B a través de f, entonces g es sobre. Por lo tanto, g es biyección entre B y un subconjunto de los naturales y por ello B es numerable. $\square$

Ahora, como cada S_i es infinito numerable, podemos construir una matriz donde numeramos todos los elementos de estos conjuntos *hacia la derecha,* de forma que s_{ij} representa el elemento j-ésimo del conjunto S_i:

$$\begin{matrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & \cdots \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & \cdots \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Luego, para poder numerar correctamente todos los elementos de la unión numerable de estos conjuntos, tomamos las sublistas definidas con las diagonales finitas de dicha matriz:

$$\begin{matrix} s_{00} & & & \\ s_{01} & s_{10} & & \\ s_{02} & s_{11} & s_{20} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

donde la i-ésima fila representa la i-ésima diagonal. Luego, una enumeración de los elementos de S es

$$s_{00}, s_{01}, s_{10}, s_{02}, s_{11}, s_{20}, \ldots$$

Esta lista cumple las tres propiedades que aseguran que S es numerable:

1. Cada elemento de la lista está en S, pues por construcción, proviene de una lista para algún S_i y $S_i \subseteq S$.
2. Como cada par de conjuntos S_i son disjuntos, en la matriz no aparece ningún elemento repetido y la lista cumple que cada elemento aparece solo una vez.
3. Para cualquier elemento $s \in S$, existe un S_i tal que $s \in S_i$ por definición de unión, y como S_i es numerable, tal elemento aparece en la lista i-ésima de la matriz. Luego, aparece en alguna diagonal y por lo tanto aparece en la lista que enumera los elementos de S.

Por lo tanto, S es numerable.

Problema 2

Demuestre que $[0, 1]$ es equinumeroso con $[0, 1)$.

Solución propuesta.

Para probar que ambos conjuntos son equinumerosos debemos encontrar una biyección $f : [0, 1] \to [0, 1)$. Para ello, y utilizando la idea de desplazar una cantidad numerable de elementos (usada en la paradoja del hotel de Hilbert), definimos

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2^{-n} \\ x & \text{si no} \end{cases}$$

Probaremos que esta función es biyectiva:

- **Inyectiva.** Para cualquier par de elementos $x, y \in [0, 1]$ tales que $x \neq y$, requerimos que $f(x) \neq f(y)$.
  - Si $x = \frac{1}{2^n}$ e $y = \frac{1}{2^k}$ para naturales $n \neq k$ (son distintos pues de lo contrario, $x = y$),

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \neq \frac{1}{2^{k+1}} = f(y)$$

- Si $x = \frac{1}{2^n}$ para algún natural n e $y \neq \frac{1}{2^k}$ para todo k natural, entonces

$$f(y) = y$$

que no es de la forma $\frac{1}{2^k}$ para ningún k. En particular, no es igual a $\frac{1}{2^{n+1}} = f(x)$.

- Si ninguno de los elementos es de la forma $\frac{1}{2^n}$, entonces

$$f(x) = x \neq y = f(y)$$

Con estos tres casos, comprobamos que f es inyectiva.

- **Sobre.** Sea $y \in [0, 1)$.

  - Si $y = \frac{1}{2^n}$ para algún natural $n \geq 1$ (nótese que no puede ser $n = 0$ pues $y = 1$ no está en $[0, 1)$), entonces su preimagen es

$$x = \frac{1}{2^{n-1}} \to f(x) = \frac{1}{2^{n-1+1}} = \frac{1}{2^n} = y$$

  - Si y no es de la forma anterior, entonces su preimagen es sí mismo:

$$x = y \to f(x) = x = y$$

Como cada elemento de $[0, 1)$ tiene preimagen en $[0, 1]$, f es sobre.

Por lo tanto, f es biyección y los conjuntos son equinumerosos.

Problema 3

Sea $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es una función monótona}\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un conjunto no numerable.

Solución propuesta.

Supongamos que $\mathcal{F}$ es numerable. Entonces, existe una forma de listar sus elementos (que son funciones). Por ejemplo,

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$$

Construimos una matriz M con entradas $M(i, j) = f_i(j)$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$ según

$$\begin{matrix} f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & \cdots \\ f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & \cdots \\ f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

donde la fila i representa las imágenes de la función i-ésima y la columna j contiene las imágenes del natural j para cada función.

Definimos la función

$$f_d(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n} f_i(i)$$

Como

$$f_d(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} f_i(i) + 1 = \sum_{i=0}^{n} f_i(i) + 1 + f_{n+1}(n+1) = f_d(n) + f_{n+1}(n+1)$$

y $f_{n+1}(n+1) \geq 0$ pues toda imagen es natural, entonces

$$f_d(n+1) \geq f_d(n)$$

para todo n, y por lo tanto f_d es monótona. Como f_d es monótona, debe aparecer en alguna fila de la matriz M que construimos. Sea k el índice de la fila en la cual aparece. Luego, debe ocurrir que $f_d(j) = f_k(j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, pero tomando $j = k$, si $k > 0$

$$f_d(k) = \sum_{i=0}^{k} f_i(i) + 1 = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(i) + 1 + f_k(k) > f_k(k)$$

y si $k = 0$

$$f_d(0) = f_0(0) + 1 > f_0(0)$$

de forma que para todo k, $f_d(k) \neq f_k(k)$ y por lo tanto, $f_d \neq f_k$ y no aparece en la lista. Como esto contradice que cada función monótona en los naturales debe estar en la lista, concluimos que $\mathcal{F}$ no es numerable.

Problema 4

Sea $\{0,1\}^\omega$ el conjunto de todos los strings binarios de largo infinito.

(a) Suponga que $L_1 = \{s \in \{0,1\}^\omega \mid s \text{ contiene una cantidad finita de símbolos } 1\}$. Demuestre que L_1 es un conjunto numerable.

(b) Suponga que $L_2 = \{s \in \{0,1\}^\omega \mid s \text{ contiene una cantidad infinita de símbolos } 1\}$. Demuestre que L_2 es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$.

Solución propuesta.

(a) La idea principal es representar cada secuencia infinta $s = s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots$ con finitos 1's con el conjunto de las posiciones en que aparecen sus símbolos 1's, es decir, definimos la biyección $f : L_1 \to L_1' \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$f(s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) = \{i \in \mathbb{N} \mid s_i \text{ tiene un símbolo } 1\}$$

Como cada string s queda determinado por la posición de sus símbolos 1, entonces f es inyectiva. Para mostrar que es sobre, definiremos correctamente el conjunto L_1'.

Sea S_n el conjunto de naturales que pueden representar strings con su último 1 en la posición n:

$$S_n = \{\{n\} \cup X \mid X \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

¡Nótese que este conjunto es finito y sus elementos también lo son! Además, agregamos $S_0 = \{\emptyset\}$ para codificar el string solo con ceros. Con esto, el conjunto de codificaciones de strings con finitos 1's es

$$L_1' = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$$

Como cada S_n es finito, es numerable y por lo tanto la unión numerable de los S_n también lo es. Además, como cada $S_n \in 2^{\mathbb{N}}$, entonces $L_1' \subseteq 2^{\mathbb{N}}$.

Para probar que la función f definida antes es sobre, tomamos un conjunto de naturales $X \in L_1'$. Por su construcción, $X \in S_n$ para algún n. Luego, la preimagen de X en L_1 es el string $s_X = s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots$ tal que

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in X \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Como X es finito, el string s_X solo puede tener una cantidad finita de símbolos 1. Dado que X es un elemento arbitrario de L_1' y tiene preimagen en L_1, f es sobre y por tanto, biyectiva.

La existencia de esta biyección y que $L_1' \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ demuestra que L_1 es numerable.

(b) Usando la misma idea de la parte anterior, definimos la función $g : L_2 \to L_2'$ tal que

$$g(s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) = \{i \in \mathbb{N} \mid s_i \text{ tiene un símbolo 1}\}$$

pero a diferencia de la parte (a), L_2' es el conjunto de subconjuntos de naturales de tamaño infinito. Es decir, es el complemento de L_1' en $2^{\mathbb{N}}$:

$$L_2' = 2^{\mathbb{N}} \setminus L_1'$$

Ahora, usaremos la siguiente propiedad:

Prop. Sean A, B conjuntos numerables. Entonces, $A \cup B$ es numerable.
Demostración. SPDG, supongamos A, B disjuntos e infinitos (como en la propiedad de la pregunta 1 de la ayudantía). Como A y B son numerables, existen listas $a_0, a_1, a_2, \ldots$ y $b_0, b_1, b_2, \ldots$ de los elementos de cada conjunto. Considerando esta listas de la siguiente manera,

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \end{matrix}$$

podemos tomar la lista $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$. Esta cumple:

1. Cada elemento de ella está en $A \cup B$ pues pertenece a A o a B.
2. Cada elemento del par de listas aparece solo una vez pues A y B son disjuntos.
3. Un elemento $c \in A \cup B$ aparece en la lista de A o en la de B y por lo tanto aparece en la lista propuesta.

Como existe una forma de enumerar sus elementos, $A \cup B$ es numerable.
. $\square$

Supongamos que L_2' es numerable. Dado que L_1' lo es (lo probamos en (a)), la unión de ambos debe serlo y por lo tanto,

$$L_1' \cup L_2' = 2^{\mathbb{N}}$$

es numerable. Esto es una contradicción y por lo tanto L_2' no es numerable.

La función g definida es una biyección pues

- Dados dos strings $s, s' \in L_2$, si estos son diferentes, difieren en al menos una posición. SPDG, supongamos que solo difieren un la posición i y son tales que $s_1 = 0$ y $s_1' = 1$. Luego,

$$1 \in g(s') \quad 1 \notin g(s)$$

  y por lo tanto, $g(s) \neq g(s')$. Por lo tanto, g es inyectiva.
- Dado $X \in L_2'$, X es un conjunto de infinitos naturales. Luego, la preimagen de X en L_2 es el string $s_X = s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots$ tal que

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in X \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

  Como X tiene infinitos elementos, s_X tiene infinitos 1's. Como la elección de X es arbitraria y tiene preimagen, g es sobre.

Con esto, sabemos que $|L_2| = |L_2'|$. Ahora, dado que L_2' no es numerable, $|L_2'| > |\mathbb{N}|$ y como $L_2' \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, $|L_2'| \leq |2^{\mathbb{N}}|$. Suponiendo la hipótesis del continuo, la cardinalidad de L_2' no puede ser intermedia entre $\mathbb{N}$ y $2^{\mathbb{N}}$ y por ello, $|L_2'| = |2^{\mathbb{N}}|$. De esto se concluye lo pedido.

Si no se asume la hipótesis del continuo, este ejercicio se puede resolver usando lo que veremos esta semana!!