Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2018

Ayudantía 1

Lógica proposicional

Problema 1

Sean α y β fórmulas proposicionales y $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre o dé un contrajemplo para las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces $\alpha \equiv \neg\beta$

(b) Si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\neg\alpha \models \neg\varphi_i$ para cualquier fórmula φ_i en Σ

(c) Si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha\} \models \beta$

(d) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha\} \models \beta$, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$

Solución propuesta.

(a) La afirmación es falsa y basta mostrar un contraejemplo. Consideremos $\alpha = p \vee q$ y $\beta = p \wedge q$, que claramente no son equivalentes pues la valuación v que hace p verdadera y q falsa cumple

$$\alpha(v) = 1 \neq 0 = \beta(v)$$

Verificamos que $\neg\beta = \neg p \vee \neg q$ que no es equivalente a α, por lo que la afirmación es falsa.

(b) Consideremos el conjunto $\Sigma = \{p, p \to q\}$ y la fórmula $\alpha = q$. Por la regla de inferencia *modus ponens* sabemos que efectivamente

$$\{p, p \to q\} \models q$$

sin embargo,

$$\neg q \not\models \neg p$$

pues la valuación v que vuelve q falso y p verdadero es tal que satisface a $\neg q$ pero no a $\neg p$. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

(c) Si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, sabemos que toda valuación v que satisface a todas las φ_i además debe satisfacer a $\alpha \wedge \beta$. Como esta es una conjunción, tal valuación también cumple que

$$\alpha(v) = \beta(v) = 1$$

Luego, como toda valuación que satisface al conjunto de las φ_i también satisface a α y a β, tales valuaciones también satisfacen a $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha\}$. De aquí se concluye que

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \alpha\} \models \beta$$

(d) Consideremos nuevamente $\{p, p \to q\} \models q$, donde $\alpha = p$ y $\beta = q$. Verificamos que

$$\{p \to q\} \not\models p \wedge q$$

pues la valuación v que hace falsos a p y q, satisface a $p \to q$ pero no a la conjunción $p \wedge q$. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

Problema 2

Demuestre que una valuación $v_1, \ldots, v_n$ hace verdadera la fórmula

$$(\ldots((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3) \ldots \leftrightarrow p_n)$$

si, y solo si, el número de valores falsos en $v_1, \ldots, v_n$ es par.

Solución propuesta.

Llamaremos $\varphi = (\ldots((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3) \ldots \leftrightarrow p_n)$ para ambas partes de la demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Dada una valuación $v_1, \ldots, v_n$ tal que $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, probaremos que el número de falsos en la valuación es par. Para ello, utilizaremos la conmutatividad y asociatividad del conector bicondicional. Como estas propiedades no se demostraron en clase, las probamos a continuación:

- Usando la equivalencia del conector bicondicional,

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \land (q \to p) \\ &\equiv (q \to p) \land (p \to q) \\ &\equiv q \leftrightarrow p \end{aligned}$$

  donde en el segundo paso se usó la conmutatividad de la conjunción. Esto prueba que el bicondicional es conmutativo.

- Para probar la asociatividad, debemos probar que

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$

  Una forma es usar equivalencias como hicimos para la conmutatividad pero una forma más fácil es comprobar la tabla de verdad de ambas fórmulas y ver que son idénticas para cualquier valuación:

p	q	r	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Con esto, reescribimos $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ según:

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k}) \leftrightarrow \left(v_{j_1} \leftrightarrow v_{j_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{j_{n-k}}\right)$$

donde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ son los k índices de los valores falsos en la valuación, y $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$ son los $k-n$ índices de los valores verdaderos. Para los valores verdaderos, como el bicondicional cumple $1 \leftrightarrow 1 \equiv 1$, tenemos que

$$v_{j_1} \leftrightarrow v_{j_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{j_{n-k}} = 1$$

Por hipótesis, sabemos que $\varphi(v_1, \ldots, v_n) = 1$, i.e.

$$\varphi(v_1, \ldots, v_n) = (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k}) \leftrightarrow 1 = 1$$

de manera que los bicondicionales de valores falsos deben dar como resultado verdadero. Con esto, analizamos las opciones para k:

- Si la cantidad de falsos k es par, entonces podemos agrupar de a pares los valores falsos de φ:

$$v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k} \equiv (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2}) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (v_{i_{k-1}} \leftrightarrow v_{i_k})$$

  Cada par de falsos es de la forma $0 \leftrightarrow 0 = 1$ de manera que lo anterior es equivalente a

$$v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k} \equiv 1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 1 \equiv 1$$

  de forma que k.

- Si la cantidad k es impar, entonces al agrupar de a pares los falsos, se obtiene un falso sin pareja:

$$v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k} \equiv (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2}) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (v_{i_{k-2}} \leftrightarrow v_{i_{k-1}}) \leftrightarrow v_{i_k}$$

  Evaluando los falsos, obtenemos

$$v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k} \equiv 1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 0 \equiv 0$$

  lo cual no es consistente con que el bicondicional de falsos debe ser verdadero. Por lo tanto, k no puede ser impar.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $v_1, \dots, v_n$ una valuación tal que el número de falsos k es par. Debemos probar que tal valuación satisface a φ. Para ello agrupamos los valores de la valuación según:

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k}) \leftrightarrow \left(v_{j_1} \leftrightarrow v_{j_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{j_{n-k}}\right)$$

donde los índices se definen igual que en la parte anterior de la demostración. Los valores verdaderos entregan 1 por lo cual

$$\varphi(v_1, \dots, v_n) = (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k}) \leftrightarrow 1$$

Como k es par, podemos reordenar los falsos en pares:

$$\begin{array}{rcl} \varphi(v_1, \dots, v_n) & \equiv & (v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow v_{i_k}) \leftrightarrow 1 \\ & \equiv & \left(v_{i_1} \leftrightarrow v_{i_2}\right) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \left(v_{i_{k-1}} \leftrightarrow v_{i_k}\right) \leftrightarrow 1 \\ & \equiv & (0 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow (0 \leftrightarrow 0) \leftrightarrow 1 \\ & \equiv & 1 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 1 \\ & \equiv & 1 \end{array}$$

por lo cual, la valuación satisface a φ.

Problema 3

Sea V un conjunto de variables $p_1, \dots, p_n$. Una cadena de consecuencias lógicas de largo k es una secuencia de fórmulas proposicionales $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sobre el mismo conjunto de variables V tal que $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$ para todo $i < k$. Demuestre que existe una cadena de consecuencias lógicas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de largo 2^n tal que para todo par α_i y α_j con $i \neq j$ se tiene que $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$.

Buscando intuición...

Dado que queremos construir una secuencia de fórmulas tales que $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$, nos interesa que cada valuación que satisfaga a α_i también satisfaga a α_{i+1}. De esta forma, si α_i es satisfecha por n valuaciones, α_{i+1} puede ser satisfecha por al menos n. Si es satisfecha por las mismas n, entonces $\alpha_i \equiv \alpha_{i+1}$, mientras que si hay al menos una valuación que satisface a α_{i+1} y no a α_i, entonces $\alpha_i \not\equiv \alpha_{i+1}$. Luego, una idea para construir estas fórmulas es que cada fórmula en la secuencia sea satisfecha por una valuación más que la anterior.
Esto lo podemos garantizar construyendo

$$\alpha_{i+1} = \alpha_i \vee \varphi_{i+1}$$

donde la disyunción obliga a que se satisfaga α_i (dándonos las mismas valuaciones que α_i) o φ_{i+1} (que agregue una valuación que no se había considerado hasta la fórmula anterior). Para construir las fórmulas α_i, usaremos las ideas usadas al construir la CNF/DNF de una fórmula, pero tomando las primeras i valuaciones.
De esta forma, escogeremos la siguiente construcción. La primera fórmula de la cadena solo se satisface con la primera valuación $v_1^1, \ldots, v_n^1$. Para que esto se cumpla,

$$\alpha_1 = \left(\bigwedge_{j : v_j^1 = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^1 = 0} \neg p_j \right)$$

donde el primer paréntesis considera las proposiciones que son verdaderas con $v_1^1, \ldots, v_n^1$ y el segundo, aquellas que son falsas. Esta construcción obliga a que α_1 solo se satisfaga con dicha valuación. En efecto, si cambiamos solo una proposición, alguna de las conjunciones va a fallar.
Luego, la segunda fórmula sería

$$\alpha_2 = \alpha_1 \vee \left(\bigwedge_{j : v_j^2 = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^2 = 0} \neg p_j \right)$$

donde la disyunción permite que α_2 sea satisfecha por la primera valuación (gracias al α_1) y por la segunda (gracias a las conjunciones sobre $v_1^2, \ldots, v_n^2$).
De esta forma, la fórmula general es

$$\alpha_i = \bigvee_{m=1}^{i} \left(\bigwedge_{j : v_j^m = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^m = 0} \neg p_j \right)$$

Solución propuesta.

Sea $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la i-ésima valuación de la tabla de verdad para el conjunto de variables $V = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Definimos la fórmula i-ésima de la cadena de consecuencias lógicas de largo 2^n según

$$\alpha_i = \bigvee_{m=1}^{i} \left(\bigwedge_{j : v_j^m = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^m = 0} \neg p_j \right), \text{ con } i = 1, \ldots, 2^n$$

Ahora debemos demostrar que esta construcción satisface las propiedades pedidas:

- **Hay consecuencia $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$.** Por construcción, cada α_{i+1} se puede escribir como $\alpha_{i+1} = \alpha_i \vee \varphi_{i+1}$, donde φ_{i+1} es una conjunción que se satisface solo con la $(i+1)$-ésima valuación. Luego, dada cualquier valuación $\overline{v}$ tal que $\alpha_i(\overline{v}) = 1$, como α_{i+1} es disyunción de α_i, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}(\overline{v}) &= (\alpha_i \vee \varphi_{i+1})(\overline{v}) \\ &= \alpha_i(\overline{v}) \vee \varphi_{i+1}(\overline{v}) \\ &= 1 \vee \varphi_{i+1}(\overline{v}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

  por lo cual, $\alpha_i \models \alpha_{i+1}$.

- **La secuencia es de largo 2^n.** Esto es cierto pues construimos una fórmula por valuación, y para un conjunto de n variables proposicionales existen 2^n valuaciones diferentes.

- **Ninguna fórmula es equivalente a otra en la cadena.** Por construcción, cada α_i solo es satisfecha por las primeras i valuaciones. Supongamos que α_i, α_j son fórmulas tales que $i < j$ (o sea, α_j aparece después que α_i en la cadena). Sabemos que la j-ésima valuación satisface a α_j (pues tiene conjunciones para tal efecto), pero esta valuación es distinta a todas las otras $2^n - 1$ valuaciones posibles. En particular, es distinta al menos en una asignación a cada una de las primeras i valuaciones. Luego,

$$\alpha_i(v_1^j, \ldots, v_n^j) = 0 \neq 1 = \alpha_j(v_1^j, \ldots, v_n^j)$$

y por lo tanto, $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$.

Esto comprueba que existe una cadena de consecuencias lógicas que cumple lo pedido.