Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 3

Repaso I1

Problema 1

Sean Σ un conjunto de fórmulas proposicionales y φ, ψ, θ fórmulas proposicionales. Demuestre que si $\varphi \to \psi$ es tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y solo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.

Solución propuesta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sabemos que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$, por lo que para toda valuación v, si $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}(v) = 1$ entonces $\theta(v) = 1$. En particular, tal valuación cumple $\Sigma(v) = \varphi(v) = \psi(v) = 1$.
Ahora consideramos una valuación v^* tal que $\Sigma \cup \{\varphi\}(v^*) = 1$. En particular, tal valuación también cumple $\Sigma(v^*) = \varphi(v^*) = 1$. Como sabemos por hipótesis que $\varphi \to \psi$ es tautología, v^* también cumple $(\varphi \to \psi)(v^*) = 1$. Como $\varphi(v^*) = 1$ se deduce que $\psi(v^*) = 1$ y en consecuencia, la valuación v^* satisface

$$\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}(v^*) = 1$$

Luego, por hipótesis, $\theta(v^*) = 1$ y por lo tanto, como v^* es cualquier valuación que satisface $\Sigma \cup \{\varphi\}$,

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sabemos que $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$, por lo que para toda valuación v, si $\Sigma \cup \{\varphi\}(v) = 1$ entonces $\theta(v) = 1$. En particular, esta valuación cumple $\Sigma(v) = \varphi(v) = 1$.
Tomemos ahora una valuación v^* tal que $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\}(v^*) = 1$. Esta valuación cumple por lo tanto que $\Sigma(v^*) = \varphi(v^*) = \psi(v^*) = 1$ y por hipótesis, también se tiene que $\theta(v^*) = 1$. Con esto se concluye que

$$\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$$

Problema 2

Una *palabra infinita* w sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ es una secuencia de la forma: $w = x_0x_1x_2x_3\ldots$ donde $x_i \in \{a, b, c\}$ para todo $i \geq 0$. Considere los símbolos de predicados $\leq$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ con A, B, y C símbolos unarios. Toda palabra infinita $w = x_0x_1x_2x_3\ldots$ es posible representarla como una interpretación $\mathcal{I}_w$ con dominio $\mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_w(dom) &:= \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_w(\leq) &:= \text{orden sobre los naturales.} \\
\mathcal{I}_w(A) &:= A(i) = 1 \text{ si y solo si } x_i = a \\
\mathcal{I}_w(B) &:= B(i) = 1 \text{ si y solo si } x_i = b \\
\mathcal{I}_w(C) &:= C(i) = 1 \text{ si y solo si } x_i = c
\end{aligned}$$

Sea w una palabra infinita cualquiera y $\mathcal{I}_w$ la interpretación que representa w. Para cada propiedad X de más abajo usted debe escribir una formula φ_X en lógica de predicados tal que la palabra infinita w cumple la propiedad X si, y solo si, $\mathcal{I}_w \models \varphi_X$.

(a) La palabra infinita contiene una cantidad infinita de letras a.

(b) La palabra infinita contiene la subpalabra finita de la forma $abb\dots bc$, esto es, una letra a seguido de una secuencia finita de una o más letras b y terminada en una c.

(c) En cada posición par, la palabra infinita tiene una letra a y, en cada posición impar, la palabra infinita tiene una letra b.

Solución propuesta.

(a) Para exigir que la cantidad de letras a sea infinita, necesitamos que al encontrar cualquier posición i con $A(i) = 1$, podamos encontrar un $j > i$ tal que $A(j)$. Si este proceso es siempre posible, entonces hay infinitas letras a sin importar cuánto espacio queda entre ellas. Para las tres subpreguntas usaremos las siguientes fórmulas auxiliares para exigir que cada ubicación tiene una y solo una letra asignada

$$\begin{aligned}\overline{A}(x) &= A(x) \land \neg B(x) \land \neg C(x) \\ \overline{B}(x) &= \neg A(x) \land B(x) \land \neg C(x) \\ \overline{C}(x) &= \neg A(x) \land \neg B(x) \land C(x)\end{aligned}$$

$$\varphi_{unico} = \forall x.\, \overline{A}(x) \lor \overline{B}(x) \lor \overline{C}(x)$$

La fórmula que exige cantidad infinita de letras a es

$$\varphi_1 = \varphi_{unico} \land \forall i\, (A(i) \to (\exists j.\, \neg j \leq i \land A(j)))$$

(b) Usaremos una fórmula auxiliar para exigir que un par de posiciones sean consecutivas:

$$\psi(x, y) = (\neg y \leq x) \land \forall z\, (z \leq x \lor y \leq z)$$

Esta fórmula pide que $x < y$ y que además cualquier número que se escoja no puede ser $x < z < y$, de forma que y es sucesor de x.

Ahora, para exigir que haya una subpalabra $ab \cdots bc$ con al menos una b,

$$\varphi_2 = \varphi_{unico} \land \exists i.\exists j.\exists k.\exists \ell.\, (\psi(i, j) \land (i \leq k) \land \psi(k, \ell) \land A(i) \land C(\ell) \land [\forall m.\, (j \leq m \land m \leq k) \to B(m)])$$

(c) Para que cada posición par tenga a y cada impar tenga b, setearemos en las primeras dos posiciones un ab y luego exigiremos una regla de propagación. La primera parte de la fórmula, se encarga de instanciar el cero y fijar en él una a :

$$\varphi_3^1 = \exists x \forall y\, (x \leq y) \land A(x)$$

Ahora, creamos la regla que asigna letras según el antecesor:

$$\varphi_3^2 = \forall i \forall j\, (\psi(i, j) \to [(A(i) \land B(j)) \lor (B(i) \land A(j))])$$

Finalmente, la fórmula pedida es

$$\varphi_3 = \varphi_{unico} \land \varphi_3^1 \land \varphi_3^2$$

Problema 3

Considere $E(x, y) := x = y$ como un símbolo de predicado binario que se interpreta como la igualdad de elementos.

(a) Escriba una fórmula φ en lógica de predicados usando el símbolo E tal que φ se haga verdad si, y solo si el dominio tiene dos o más elementos.

(b) Escriba una fórmula φ_k en lógica de predicados usando el símbolo E tal que φ_k se haga verdad si, y solo si el dominio tiene k o más elementos.

(c) Muestre un conjunto de fórmulas Σ, que puede ser infinito, tal que todas las fórmulas de Σ se hagan verdaderas si, y solo si el dominio es infinito.

Solución propuesta.

(a) Exigimos que sea posible tomar dos puntos del dominio tal que sean diferentes

$$\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \neg E(x_1, x_2)$$

(b) Exigimos que sea posible tomar k elementos del dominio y que estos sean diferentes de a pares

$$\varphi_k = \exists x_1 \cdots \exists x_k \bigwedge_{i,j \in \{1,\ldots,j\} \wedge i \neq i} \neg E(x_i, x_j)$$

(c) En el conjunto colocaremos todas las φ_k fórmulas posibles, de manera que exigimos que hayan 2, 3,... elementos diferentes. Nótese que este conjunto es infinito pero cada fórmula es finita y bien definida

$$\Sigma = \bigcup_{k=2}^{\infty} \{\varphi_k\}$$