Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas – 1'2018

GUIA 6
Inducción

Los siguientes ejercicios son una recopilación de guías de ejercicios del curso de Matemáticas Discretas dictado por Marcelo Arenas y Jorge Pérez en años anteriores.

1. Demuestre que para todo número natural $n \geq 4$, se tiene que $2^n < n!$.

2. La función de Fibonacci se define de la siguiente forma:

$$F(n) \quad = \quad \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

   Así, por ejemplo, se tiene que $F(2) = 1$ y $F(3) = 2$. Demuestre que para todo número natural n, se tiene que $F(n)$ es par si y sólo si n es divisible por 3.

3. Suponga que $F(n)$ es la función de Fibonacci definida en la pregunta anterior.

   a) Demuestre que para todo $n \geq 1$
   $$F(n) \leq 2^n - 1$$

   b) Demuestre que para todo $n \geq 1$
   $$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1$$

   c) Demuestre que para todo $n \geq 1$
   $$F^2(n) = F(n-1) \cdot F(n+1) + (-1)^{n-1}$$

   d) Demuestre que para todo $n \geq 6$
   $$F(n) > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

4. Demuestre que para todo número natural $n \geq 4$, existen números naturales k y ℓ tales que $n = k \cdot 2 + \ell \cdot 5$. Por ejemplo, tenemos que $k = 3$ y $\ell = 1$ para el número 11, puesto que $11 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5$.

5. Demuestre que para todo número natural $n \geq 14$, existen números naturales k y ℓ tales que $n = k \cdot 3 + \ell \cdot 8$.

6. Demuestre la fórmula para la suma de una progresión geométrica:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

7. Demuestre que para todo natural n se cumple que $7^n - 2^n$ es un múltiplo de 5.

8. Demuestre que, si se tiene un conjunto de n líneas rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes (tres que se intersecten en el mismo punto), entonces ellas dan lugar a $(n^2 + n + 2)/2$ regiones.

9. Sea n un número natural cualquiera. Definimos $d_i(n)$ como el dígito que aparece en la posición i en n con $d_1(n)$ el dígito más significativo, por ejemplo $d_3(1850) = 5$. Demuestre que para todo n con k dígitos se cumple que
$$n - \sum_{i=1}^{k} d_i(n) = 9r \quad \text{para algún } r \text{ natural,}$$
o sea que n menos la suma de sus dígitos es siempre un múltipo de 9.

10. Dado un alfabeto Σ, sea $\textsc{PalPar}(\Sigma)$ el conjunto de todos los strings sobre Σ que son palíndromos de largo par. Demuestre que para todo $w \in \textsc{PalPar}(\Sigma)$, se tiene que $w = \varepsilon$ o w tiene dos posiciones consecutivas con el mismo símbolo de Σ.

11. El siguiente juego se juega con piedras. El juego comienza con las piedras agrupadas en dos montones no necesariamente del mismo tamaño. Una movida del juego consiste en que uno de los jugadores saca todas las piedras de uno de los montones y divide las piedras que quedan en dos montones (no necesariamente del mismo tamaño). Los jugadores se turnan en hacer sus movidas y gana el último que puede hacer una movida válida (el último que es capaz de sacar un montón y dividir el otro).

    Demuestre que, si uno de los montones iniciales tiene una cantidad par de piedras, entonces el jugador que parte puede ganar sin importar cómo juegue su adversario, o sea que el jugador que parte tiene una *estrategia ganadora*.

    (Ayuda: Use inducción fuerte sobre la cantidad de piedras que tiene el montón par de piedras iniciales. Note como la demostración por inducción le indica además un método para siempre ganar el juego dadas las condiciones del enunciado.)

12. Un lista enlazadas de naturales $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ se define inductivamente como:

    - $\emptyset$ es una lista y representa a la lista vacía ($\emptyset \in \mathcal{L}_\mathbb{N}$).
    - Si L es una lista y k es un natural, entonces $L \to k$ es una lista ($L \in \mathcal{L}_\mathbb{N} \Rightarrow L \to k \in \mathcal{L}_\mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{N}$).

    a) Defina inductivamente la *concatenación* de listas, $\circ : \mathcal{L}_\mathbb{N} \times \mathcal{L}_\mathbb{N} \to \mathcal{L}_\mathbb{N}$, que toma dos listas y entrega la lista que se forma a partir de las otras dos listas agregando todos los valores de la segunda al final de la primera. Por ejemplo:
    $$(\to 10 \to 6) \ \circ \ (\to 1 \to 0 \to 8) \ = \ \to 10 \to 6 \to 1 \to 0 \to 8$$

    b) Demuestre usando inducción estructural en la construcción de $\mathcal{L}_\mathbb{N}$ que
    $$\forall L \in \mathcal{L}_\mathbb{N} \qquad L = (\to \mathit{Head}(L)) \circ \mathit{Suf}(L)$$
    (para las definiciones de Head y Suf ver los apuntes)

    c) Demuestre usando inducción estructural en la construcción de las listas que la operación $\circ$ de concatenación es asociativa, es decir que $(L_1 \circ L_2) \circ L_3 = L_1 \circ (L_2 \circ L_3)$.
    (Ayuda: Fije las listas L_1 y L_2 y haga inducción sobre L_3. Si no puede demostrarlo, al menos justifique por qué esto debiera ocurrir.)

13. En esta pregunta definirá y usará el operador *reverso*. El operador *reverso* de una lista $(\ )^r : \mathcal{L}_\mathbb{N} \to \mathcal{L}_\mathbb{N}$, es tal que toma una lista y entrega otra lista cuyos valores se encuentran en el orden contrario. Por ejemplo:
$$(\to 10 \to 6 \to 1 \to 0 \to 8)^r \ = \ \to 8 \to 0 \to 1 \to 6 \to 10$$

a) Defina inductivamente el operador reverso usando solo las funciones $Head$ y Suf.

b) Defina inductivamente el operador reverso usando el operador $\circ$ de concatenación de listas.

c) Demuestre (usando cualquiera de sus definiciones anteriores) por inducción en la construcción de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ que si L_1 y L_2 son listas entonces

$$(L_1 \circ L_2)^r = L_2^r \circ L_1^r$$

(Ayuda: Fije la lista L_1 y haga inducción sobre L_2.)

14. Las siguientes preguntas también tienen que ver con $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ el dominio constructible de las listas.

a) Defina inductivamente la función $Pos : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ que toma una lista y un entero y entrega la *mayor* posición que ese entero ocupa en la lista, mayor porque el entero puede aparecer varias veces. Suponga que las posiciones se cuentan desde el 0. Suponga además que si el entero no se encuentra en la lista la función debe entregar -1. Por ejemplo:

$$Pos(\to 4 \to 3 \to 4 \to 6,\ 4) = 2$$
$$Pos(\to 10 \to 1 \to 5 \to 3,\ 8) = -1$$

b) Defina la función $Sop : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ similar a Pos pero que esta vez entrega la *menor* posición en la que el entero aparece. De ser necesario puede usar la función Pos ya definida.

c) Defina la función $Ocu : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que toma una lista y un entero y entrega la cantidad de veces que el entero aparece (ocurre) en la lista. Por ejemplo:

$$Ocu(\to 4 \to 3 \to 4 \to 4,\ 4) = 3$$
$$Ocu(\to 1 \to 0 \to 4 \to 3,\ 3) = 1$$
$$Ocu(\to 10 \to 5 \to 7 \to 6,\ 8) = 0$$

15. Recuerde que el dominio constructible de las expresiones aritméticas $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ se define por:

- Si k es un natural, entonces k es una expresión ($k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$).
- Si E_1 y E_2 son expresiones, entonces E_1 `+` E_2 es una expresión ($E_1, E_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \Rightarrow E_1 \texttt{ + } E_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$).
- Si E_1 y E_2 son expresiones, entonces E_1 `*` E_2 es una expresión ($E_1, E_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \Rightarrow E_1 \texttt{ * } E_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$).
- Si E es una expresión, entonces `(`E`)` es una expresión ($E \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \Rightarrow \texttt{(}E\texttt{)} \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$).

a) Defina inductivamente en la construcción de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ el operador $\#_{op} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de operadores aritméticos (`+` y `*`) de una expresión.

b) Defina inductivamente en la construcción de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ el operador $\#_{num} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de naturales que aparecen en una expresión.

c) Demuestre por inducción en la construcción de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ que para toda expresión $E \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ se cumple

$$\#_{op}(E) = \#_{num}(E) - 1$$

16. Las expresiones aritméticas que habitualmente usamos, se llaman expresiones aritméticas en *notación infija*, lo que quiere decir que el operador aritmético se escribe entre los dos operandos. Las expresiones aritméticas en *notación prefija*, son expresiones en las que el operador se escribe siempre antes que los operandos, por ejemplo las siguientes son expresiones en esta notación

$$\texttt{+}\ 4\ 5$$
$$\texttt{+}\ \texttt{*}\ 3\ 6\ 7$$
$$\texttt{*}\ \texttt{+}\ 9\ 10\ \texttt{+}\ 3\ 2$$

la primera representa a la expresión infija $4\ \texttt{+}\ 5$, la segunda a la expresión $3\ \texttt{*}\ 6\ \texttt{+}\ 7$, y la última a la expresión $(\ 9\ \texttt{+}\ 10\ )\ \texttt{*}\ (\ 3\ \texttt{+}\ 2\ )$. Note que en este último caso resulta imprescindible usar paréntesis para escribir la expresión en notación infija.

a) Defina inductivamente el conjunto $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ de todas las expresiones aritméticas en notación prefija. Las expresiones contienen números naturales y los símbolos + y *.

b) Explique paso a paso cómo usando su definición anterior se crea la expresión

$$\texttt{*}\ \texttt{*}\ \texttt{+}\ 4\ 5\ \texttt{*}\ 3\ \texttt{+}\ 7\ 1\ 9$$

De la misma manera explique por qué la siguiente no es una expresión bien formada (o sea trate de construirla paso a paso y deténgase cuando las construcción falle)

$$\texttt{*}\ \texttt{+}\ \texttt{+}\ 5\ \texttt{+}\ \texttt{+}\ 6\ 7\ 8\ \texttt{*}\ 9\ 1$$

c) De manera similar al ejercicio 15 defina los operadores $\#_{op}$ y $\#_{num}$ para $\mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ y demuestre que se cumple $\#_{op}(E) = \#_{num}(E) - 1$. Use este hecho para justificar por qué la última expresión del ejercicio anterior no estaba bien formada.

d) Una de las virtudes de las expresiones en notación prefija es que pueden ser evaluadas sin la necesidad de utilizar paréntesis para establecer precedencia de operadores. Defina inductivamente la función $eval : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que evalúa una expresión aritmética prefija cualquiera. Por ejemplo:

$$eval(\ \texttt{*}\ \texttt{+}\ 4\ 2\ \texttt{+}\ 3\ 2\ ) = 30$$

Discuta la factibilidad de hacer una definición similar para evaluar expresiones en notación infija como las del ejercicio 15.