

Relaciones de equivalencia

Clase 12

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Relaciones de equivalencia

Clases de equivalencia

Outline

Relaciones de equivalencia

Clases de equivalencia

Relaciones de equivalencia

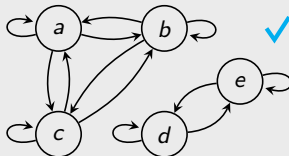
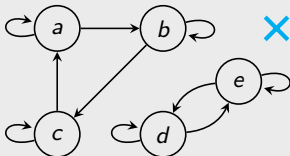
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja:** $\forall a \in A. (a, a) \in R$
2. **Simétrica:** $\forall a, b \in A. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$

Ejemplos



Relaciones de equivalencia

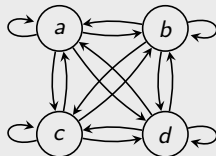
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja:** $\forall a \in A. (a, a) \in R$
2. **Simétrica:** $\forall a, b \in A. (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$
3. **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$

Ejemplos



¿qué otras relaciones de equivalencia conocen?

Mas ejemplos de relaciones de equivalencia

Personas y cumpleaños: (P, C) .

- P = todas las **personas** del planeta.
- $C \subseteq P \times P$ tal que:
 $(p_1, p_2) \in C$ si, y solo si, p_1 esta de **cumpleaños** el mismo día que p_2 .

Rectas y paralelas: (L, \parallel) .

- L = todas las **rectas** en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\parallel \subseteq L \times L$ tal que: $(l_1, l_2) \in \parallel$ si, y solo si, l_1 es **paralela** a l_2 .

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a es **equivalente** a b **módulo** n :

$$a \equiv_n b \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}. (a - b) = k \cdot n$$

En otros palabras, $a \equiv_n b$ ssi $n \mid (a - b)$.

1. Refleja? ✓
2. Simétrica? ✓
3. Transitiva? ✓

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se define la relación $\downarrow \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ como:

$$(a, b) \downarrow (c, d) \text{ si, y solo si } a - b = c - d$$

1. Refleja? ✓
2. Simétrica? ✓
3. Transitiva? ✓

¿qué representa la relación \downarrow ?

Outline

Relaciones de equivalencia

Clases de equivalencia

Particiones

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ (un conjunto de subconjuntos de A).

Definición

Decimos que \mathcal{S} es una **partición** de A si:

1. todos los elementos de \mathcal{S} son distintos de vacío.

$$\forall X \in \mathcal{S}. X \neq \emptyset$$

2. la unión de todos los elementos de \mathcal{S} es igual a A .

$$\bigcup \mathcal{S} = A$$

3. todos los elementos de \mathcal{S} son disjuntos de a pares.

$$\forall X, Y \in \mathcal{S}. X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$$

Particiones (ejemplos)

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ un conjunto de subconjuntos de A .

Definición

Decimos que \mathcal{S} es una **partición** de A si:

1. $\forall X \in \mathcal{S}. X \neq \emptyset$
2. $\cup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}. X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ¿cuáles son particiones?

- $\{ \{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6\} \}$
- $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{3, 6\} \}$
- $\{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\} \}$
- $\{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\} \}$



Particiones (ejemplos)



¿en qué se parecen las **particiones** a las **relaciones de equivalencia**?

Clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según \sim como:

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

$[x]_{\sim}$ son todos los elementos de A que son “equivalentes” a x .

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere \equiv_4 , ¿cuales son sus clases de equivalencia?

$$[0]_{\equiv_4} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$[1]_{\equiv_4} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$[2]_{\equiv_4} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$[3]_{\equiv_4} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$$



Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación \downarrow , ¿cuales son sus clases de equivalencia?

$$[(0,0)]_{\downarrow} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$$

$$[(1,0)]_{\downarrow} = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), \dots\}$$

$$[(2,0)]_{\downarrow} = \{(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), \dots\}$$

$$[(3,0)]_{\downarrow} = \{(3,0), (4,1), (5,2), (6,3), \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[(0,1)]_{\downarrow} = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \dots\}$$

$$[(0,2)]_{\downarrow} = \{(0,2), (1,3), (2,4), (3,5), \dots\}$$

$$[(0,3)]_{\downarrow} = \{(0,3), (1,4), (2,5), (3,6), \dots\}$$

$$\vdots$$

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación \downarrow , ¿cuales son sus clases de equivalencia?

\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
(0, 4)	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	...
(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	...
(0, 2)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	...
(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	...
(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	...

Propiedades de las clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según \sim como:

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Propiedades

1. $\forall x \in A. x \in [x]_{\sim}$
2. $x \sim y$ si, y solo si, $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$
3. si $x \not\sim y$, entonces $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$

Ejercicio!

Particiones vs clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

El **conjunto cuociente** A/\sim de A con respecto a \sim se define:

$$A/\sim = \{ [x]_{\sim} \subseteq A \mid x \in A \}$$

Teorema

El conjunto cuociente A/\sim es una **partición** de A .

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim = \{ [x]_{\sim} \subseteq A \mid x \in A \}$.

¿que debemos demostrar?

1. $\forall X \in A/\sim . X \neq \emptyset$
2. $\cup A/\sim = A$
3. $\forall X, Y \in A/\sim . X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim = \{ [x]_{\sim} \subseteq A \mid x \in A \}$.

1. $\forall X \in A/\sim . X \neq \emptyset$

Sea $X \in A/\sim$.

PD: $X \neq \emptyset$.

Por definición de A/\sim , sabemos que existe un $x \in A$ tal que $X = [x]_{\sim}$.

$\Rightarrow x \in [x]_{\sim}$ (¿por qué?)

$\Rightarrow x \in X$

Por lo tanto, $X \neq \emptyset$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim = \{ [x]_{\sim} \subseteq A \mid x \in A \}$.

$$2. \cup A/\sim = A$$

PD: $\cup A/\sim \subseteq A$ y $A \subseteq \cup A/\sim$.

$$\blacksquare \cup A/\sim \subseteq A$$

(por definición de A/\sim)

$$\blacksquare A \subseteq \cup A/\sim$$

Sea $x \in A$.

$$\Rightarrow [x]_{\sim} \in A/\sim \text{ y } x \in [x]_{\sim}$$

$$\Rightarrow x \in \cup A/\sim$$

Por lo tanto, $\cup A/\sim = A$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim = \{ [x]_{\sim} \subseteq A \mid x \in A \}$.

3. $\forall X, Y \in A/\sim . X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$

Sea $X, Y \in A/\sim$ tal que $X \neq Y$.

PD: $X \cap Y = \emptyset$.

Sea $x, y \in A$ tal que $[x]_{\sim} = X$ y $[y]_{\sim} = Y$.

Como $[x]_{\sim} \neq [y]_{\sim}$, entonces $x \not\sim y$ (¿por qué?)

Como $x \not\sim y$, entonces $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \emptyset$ (¿por qué?)

Por lo tanto, concluimos que $X \cap Y = \emptyset$.



Conjunto cociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere \equiv_4 y sus clases de equivalencia:

$$[0]_{\equiv_4} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$[1]_{\equiv_4} = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$[2]_{\equiv_4} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$[3]_{\equiv_4} = \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$$

Entonces:

$$\mathbb{Z} / \equiv_4 = \{ [0], [1], [2], [3] \}$$

Conjunto cociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere la relación \downarrow y sus clases de equivalencia:

$$[(0,0)]_{\downarrow} = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$$

$$[(1,0)]_{\downarrow} = \{(1,0), (2,1), (3,2), (4,3), \dots\}$$

$$[(2,0)]_{\downarrow} = \{(2,0), (3,1), (4,2), (5,3), \dots\}$$

$$\vdots$$

$$[(0,1)]_{\downarrow} = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), \dots\}$$

$$[(0,2)]_{\downarrow} = \{(0,2), (1,3), (2,4), (3,5), \dots\}$$

$$\vdots$$

Entonces:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \downarrow = \{ \dots, [(0,2)], [(0,1)], [(0,0)], [(1,0)], [(2,0)], \dots \}$$