Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

PAUTA TAREA 7

Pregunta 1

Pregunta 1

Una posible solución consistía en utilizar inducción simple. Por lo tanto:

Caso base: Tenemos que $P(0) = 0$ y por lo tanto se cumple con $k = 0$ y $e_0 = 0$.

Hipótesis de inducción: El número n se puede expresar como $\sum_{i=0}^{k} e_i \cdot 3^i$.

Paso Inductivo: Para expresar $n + 1$, por hipótesis tenemos que

$$n + 1 = \sum_{i=0}^{k} e_i \cdot 3^i + 1$$

Luego, se identifican dos casos:

1. $e_0 \leq 0$. En este caso, $n + 1$ queda simplemente como $\sum_{i=1}^{k} e_i \cdot 3^i + e'_0$ donde $e'_0 = e_0 + 1$.
2. $e_0 = 1$. Se tienen dos sub-casos:
   a) $e_i = 1 \ \ \forall i \leq k$. En este caso, $n + 1$ queda de la forma $3^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} -1 \cdot 3^i$

   b) $\exists i \leq k, e_i \neq 1$. Sea h el menor número tal que $e_h \neq 1$. Tenemos que $n + 1$ queda de la forma $\sum_{i=h+1}^{k} e_i \cdot 3^i + (e_h + 1)3^h + \sum_{i=0}^{u-1} -1 \cdot 3^i$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Demostrar correctamente usando inducción simple o fuerte
- **(3 puntos)** Por tener el caso 2.b correcto y tener pequeños errores en los casos base u olvidar otros casos en el paso inductivo.
- **(0 puntos)** Otros casos.

Pregunta 2

Pregunta 2.1 PD: Si $gcd(a, b) = 1$ y $a \mid bc$, entonces $a \mid c$.
Solución:
<u>Caso 1:</u> $a = 1$
Si $a = 1 \Rightarrow a \mid c$.

<u>Caso 2:</u> $a > 1$
Por la primera hipótesis sabemos que $\exists s, t$ enteros tales que $gcd(a, b) = 1 = sa + tb$ (Identidad de Bézout).
La segunda hipótesis nos dice que $a \cdot k = bc$, para algun entero k.
Como $ak = bc \Leftrightarrow ak \cdot t = bc \cdot t$ (multiplicamos el t de la identidad).
Usando la identidad de Bézout, $kt = \frac{(1-sa)c}{a} = \frac{c-csa}{a} = \frac{c}{a} - cs$
Como $kt + cs$ es entero, nos queda que $\frac{c}{a}$ también.
Con esto concluimos que $a \mid c$.

Pregunta 2.2 PD: Si p es primo y $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.
Solución:
<u>Caso 1:</u> $gcd(p, b) = 1$
Por la pregunta 2.1 concluimos que $p \mid a$.

<u>Caso 2:</u> $gcd(p, a) = 1$
Por la pregunta 2.1 concluimos que $p \mid b$.

<u>Caso 3:</u> $gcd(p, b) \neq 1$
Como p es primo, se cumple que $b \mid p$ o $p \mid b$.
Esto equivale a que $p = b$ o $b = k \cdot p$ respectivamente (, k un entero).
De esto podemos concluir que $p \mid b$.

<u>Caso 4:</u> $gcd(p, a) \neq 1$
Análogo al caso 3, concluimos que $p \mid a$.

Pregunta 2.3 PD: la descomposición en primos de todo número natural $n > 1$ es única.
Supongamos que existen números naturales mayores a 1 que tienen más de una descomposición en primos.
Sea c el menor de estos números. Luego $c = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n$, con n, m naturales y p_i, q_i primos (≥ 2) $\forall i$.
Como $p_1 \mid c \Rightarrow p_1 \mid (q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n)$. Por 2.2, $p_1 \mid q_j$ para algún $j \in \{1, ..., n\}$. Como p_1 y q_j son ambos primos, nos queda que $p_1 = q_j$. Luego $p_2 \cdot \dots \cdot p_m = q_1 \cdot \dots \cdot q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdot \dots \cdot q_n$, pero este sería un número menor a c con dos descomposiciones distintas en primos, que contradice nuestra hipótesis.

El desglose de puntaje es de 0,3,4 para cada inciso. Con 4 puntos para correcto, 3 para correcto con errores menores y 0 si está incorrecto