Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 4

Teoría de conjuntos y relaciones

Problema 1

Sean A, B, C, D conjuntos. Demuestre las siguientes propiedades:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$, entonces $A \times C \subseteq B \times D$

Solución propuesta.

- Usamos definiciones de operaciones entre conjuntos según

$$\begin{array}{rcll} (A \cup B) \times C & = & \{(x,y) |\, (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C\} & \text{def. producto cartesiano y unión} \\ & = & \{(x,y) |\, (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)\} & \text{distributividad de } \wedge \\ & = & \{(x,y) |\, (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C\} & \text{def. producto cartesiano} \\ & = & \{(x,y) |\, (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)\} & \text{def. unión} \\ & = & (A \times C) \cup (B \times C) & \end{array}$$

- Como queremos probar que un conjunto es subconjunto de otro, tomamto un elemento arbitrario del primero y verificamos que esté contenido en el segundo. Sea $(x,y) \in A \times C$.

$$\begin{array}{rcll} (x,y) \in A \times C & \Rightarrow & x \in A \wedge y \in C & \text{def. producto cartesiano} \\ & \Rightarrow & x \in B \wedge y \in C & A \subseteq B \\ & \Rightarrow & x \in B \wedge y \in D & C \subseteq D \\ & \Rightarrow & (x,y) \in B \times D & \text{def. producto cartesiano} \end{array}$$

Problema 2

Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito. Decimos que un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una *anti-cadena* si para todo $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \neq B$ se cumple que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$.

Un conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ se dice que es un *sistema separador* de S si para todo $i \neq j$ en S, existen $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$ tal que $i \in A$, $i \notin B$, $j \notin A$ y $j \in B$ (en otras palabras, $i \in A \setminus B$ y $j \in B \setminus A$). El conjunto dual $\mathcal{A}^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de $\mathcal{A}$ se define como $B_i = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid i \in A_k\}$ para todo $i \leq n$.

Demuestre que un conjunto $\mathcal{A}$ es un sistema separador si, y solo si, $|\mathcal{A}^*| = n$ y $\mathcal{A}^*$ es una anti-cadena.

Solución propuesta.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sabemos que $\mathcal{A}$ es un sistema separador. Primero probaremos que $|A^*| = n$.

- Si $n > 1$, para cualquier par de elementos $i \neq j$ en S existen conjuntos A_{k_i} y A_{k_j} tales que $i \in A_{k_i} \setminus A_{k_j}$ y $j \in A_{k_j} \setminus A_{k_i}$. Por lo tanto, para cada $i \leq n$, B_i en no vacío. Además, supongamos que existen $i \neq j$ tales que $B_i = B_j$. En tal caso, i y j están contenidos en exactamente los mismos conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$ de forma que $\mathcal{A}$ no sería separador. De esto concluimos que existen n conjuntos B_i distintos, i.e $|cA^*| = n$.

- Si $n = 1$, $S = 1$ y $\mathcal{A}^* = \{B_1\}$, donde B_1 indica los índices de los conjuntos $A_k \in \mathcal{A}$ que contienen al elemento 1. Como no es posible tomar $i \neq j$ en S, no hay ninguna restricción para los A_k y pueden ser cualquier elemento del conjunto potencia de S. Es decir, $\mathcal{A}$ puede ser

  - $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ con $A_1 = \emptyset$, de forma que $B_1 = \emptyset$ y $\mathcal{A}^* = \{\emptyset\}$.
  - $\mathcal{A} = \{\{1\}\}$ con $A_1 = \{1\}$, de forma que $B_1 = \{1\}$ y $\mathcal{A}^* = \{\{1\}\}$.
  - $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}\}$ con $A_1 = \emptyset$ y $A_2 = \{1\}$, de forma que $B_1 = \{2\}$ y $\mathcal{A}^* = \{\{2\}\}$.

  En los tres casos, $|\mathcal{A}^*| = 1 = n$.

Ahora probaremos que $\mathcal{A}^*$ es una anticadena. Supongamos que no lo es. En tal caso, existen $i \neq j$ tales que $B_i \subsetneq B_j$ o $B_j \subsetneq B_i$. Sin pérdida de generalidad, tomemos el primer caso, de forma que todos los índices en B_i están en B_j. Por la construcción de $\mathcal{A}^*$, esto quiere decir que cada conjunto $A_k \in \mathcal{A}$ que contiene al elemento $i \in S$, también contiene a j y por lo tanto no es posible encontrar un conjunto que contenga a j y no a i como exige la definición de conjunto separador. Como esto contradice que $\mathcal{A}$ es separador, entonces $\mathcal{A}^*$ debe ser anticadena.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sabemos que $|\mathcal{A}^*| = n$ y $\mathcal{A}^*$ es anticadena. De esta última propiedad, tenemos que para cualquier elección de $i \neq j$, se tiene que $B_i \not\subseteq B_j$ y $B_j \not\subseteq B_i$, de manera que B_i tiene al menos un elemento que no contiene B_j y viceversa. Llamemos k_i y k_j a tales elementos. Por construcción de los conjuntos de $\mathcal{A}^*$, sabemos que estos elementos representan índices de conjuntos en $\mathcal{A}$ y por lo tanto,

$$i \in A_{k_i} \setminus A_{k_j} \text{ y } j \in A_{k_j} \setminus A_{k_i}$$

Esto se cumple para cualesquiera i, j pues $|\mathcal{A}^*| = n$ y por lo tanto hay n conjuntos B_i diferentes. Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un conjunto separador.

Problema 3

Demuestre o refute (de un contraejemplo) cada una de las siguiente afirmaciones. En cada caso R_1 y R_2 son relaciones sobre un conjunto A cualquiera.

(a) Si R_1 y R_2 son simétricas, entonces $R_1 \cap R_2$ es simétrica.

(b) Si R_1 y R_2 son reflejas, entonces $R_1 \cup R_2$ es refleja.

(c) Si R_1 y R_2 son transitivas, entonces $R_1 \cap R_2$ es transitiva.

(d) Si R_1 y R_2 son transitivas, entonces $R_1 \circ R_2$ es transitiva.

(e) Si R_1 y R_2 son conexas, entonces $R_1 \cup R_2$ es conexa.

(f) Si R_1 y R_2 son antisimétricas, entonces $R_1 \cap R_2$ es antisimétrica.

Solución propuesta.

(a) Si $(a, c) \in R_1 \cap R_2$, por definición de intersección de conjuntos sabemos que $(a, b) \in R_1$ y $(a, b) \in R_2$. Luego, como ambas relaciones son simétricas, $(b, a) \in R_1$ y $(b, a) \in R_2$. Como (b, a) está en ambas relaciones, también está en su intersección: $(b, a) \in R_1 \cap R_2$, lo que prueba que esta es simétrica.

(b) Como R_1 y R_2 son reflejas, cualquier tupla de la forma (a, a), con $a \in A$, está en ellas. Luego, también está en su unión. Por lo tanto, $R_1 \cup R_2$ es refleja.

(c) Si $(a, b), (b, c) \in R_1 \cap R_2$, por definición de intersección tenemos que $(a, b), (b, c) \in R_1$ y $(a, b), (b, c) \in R_2$. Como ambas relaciones son transitivas, $(a, c) \in R_1$ y $(a, c) \in R_2$. Finalmente, por definición de intersección, $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ y por lo tanto, esta relación es transitiva.

(d) Consideremos las relaciones $R_1 = \{(a, d), (b, e)\}$ y $R_2 = \{(d, b), (e, c)\}$ que son transitivas. Su composición es

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, b), (b, c)\}$$

y se verifica que no es transitiva, pues $(a, c) \notin R_1 \circ R_2$.

(e) Como las relaciones son conexas, cada relación contiene al menos una tupla entre (a, b) y (b, a) para todo par de elementos a y b en A. Luego, si consideramos la unión de ambas relaciones, no eliminamos ninguna tupla y en consecuencia $R_1 \cup R_2$ contiene al menos una tupla entre (a, b) y (b, a). Por lo tanto, $R_1 \cup R_2$ también es conexa.

(f) Si $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ y $(b, a) \in R_1 \cap R_2$, debemos verificar que $a = b$ para comprobar que $R_1 \cap R_2$ es antisimétria. Por definición de intersección, sabemos que $(a, b) \in R_1$, $(a, b) \in R_2$, $(b, a) \in R_1$ y $(b, a) \in R_2$. Como ambas relaciones son antisimétricas, $a = b$ y por lo tanto, $R_1 \cap R_2$ es antisimétria.