Caminos y ciclos

Clase 25

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Caminos

Ciclos

Caminos en un grafo

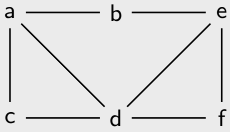
Definición

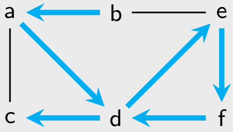
Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

¿cuál es un camino en G?





b, a, d, e, f, d, c

Caminos en un grafo

Definición

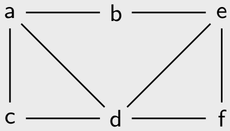
Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

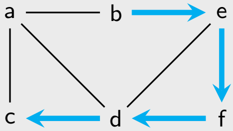
$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G se dice **simple** si
todos los vértices de la secuencia son distintos ($v_i \neq v_j$).

¿cuál es un camino simple en G?





b, e, f, d, c

Caminos en un grafo

Definición

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G se dice **simple** si
todos los vértices de la secuencia son distintos $(v_i \neq v_j)$.

Lema

Si existe un camino entre dos nodos u y v de largo k,
entonces existe un camino simple entre u y v de largo menor o igual que k.

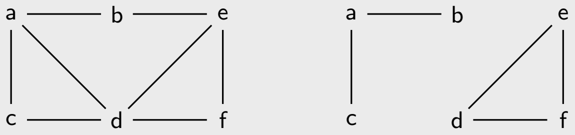
Demostración (ejercicio).

Conexidad

Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

¿cuáles nodos estan conectados en G?



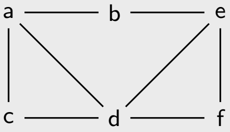
Conexidad

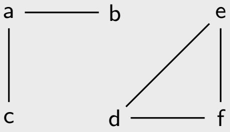
Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

¿cuáles grafos son conexos?





Conexidad

Definición

Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define la relación $R_G \subseteq V \times V$ tal que $(u, v) \in R_G$ si, y solo si, u esta conectado a v en G.

¿qué propiedades cumple la relación R_G?

1. Refleja.
2. Simétrica.
3. Transitiva.

Conexidad

Definición

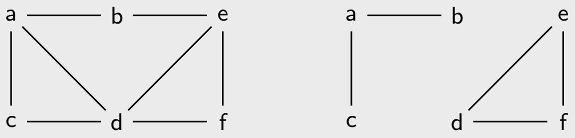
Dos vértices u y v se dicen **conectados** en G si existe un camino de u a v.

Un grafo se dice **conexo** si cualquier par de vértices están conectados.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define la relación $R_G \subseteq V \times V$ tal que $(u, v) \in R_G$ si, y solo si, u esta conectado a v en G.

Para un grafo $G = (V, E)$ se define las **componentes conexas** de G como el conjunto las **clases de equivalencia** de R_G.

¿cuáles son las componentes conexas de cada grafo?



Un grafo G es conexo si, y solo si, G tiene una sola componente conexa.

Conexidad

Teorema

Todo grafo $G = (V, E)$ tiene al menos $|V| - |E|$ componentes conexas.

Demostración

Por inducción fuerte:

$$\begin{aligned} P(n) \quad := \quad & \text{todo grafo } G = (V, E) \text{ con } n \text{ aristas} \\ & \text{tiene al menos } |V| - |E| \text{ componentes conexas.} \end{aligned}$$

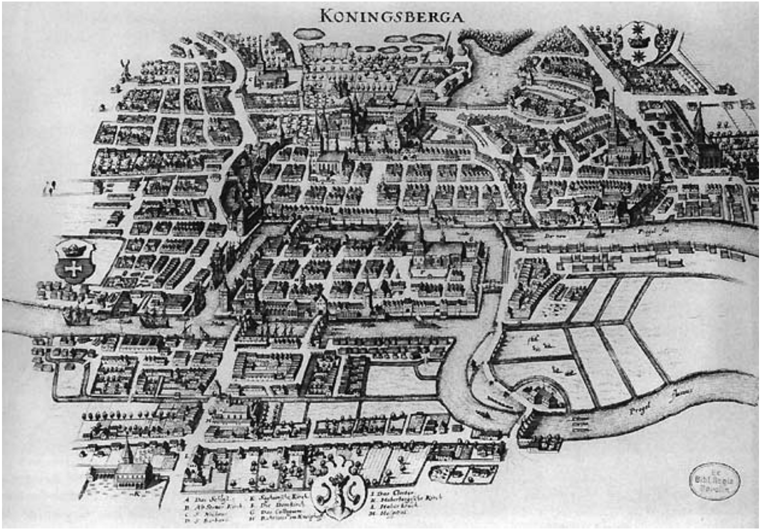
(Ejercicio: termine la demostración.)

Corolario

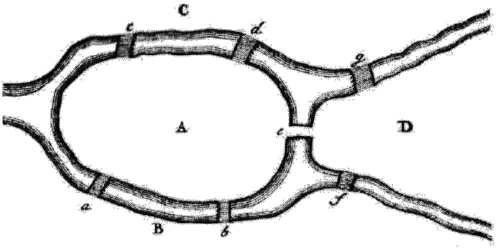
Todo grafo $G = (V, E)$ conexo tiene al menos $|V| - 1$ aristas.

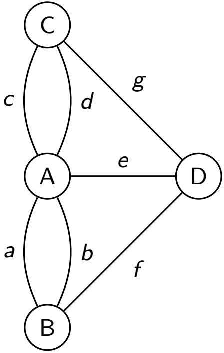
Outline

Los siete puentes de Köningsberg (Siglo XVIII)



Los siete puentes de Köningsberg (Siglo XVIII)





¿existe una caminata por la ciudad que recorra cada puente exactamente una vez?

Caminos cerrados y ciclos

Definición

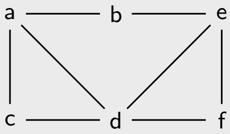
Un **camino cerrado** en $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices:

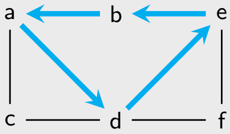
$$v_0, v_1, \ldots, v_n$$

tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y $v_0 = v_n$.

Un camino cerrado $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en G es un **ciclo** si todos los vértices son distintos exceptuando v_0 y v_n.

¿cuál es un ciclo en G?





b, a, d, e, b

Caminos y tours Eulerianos

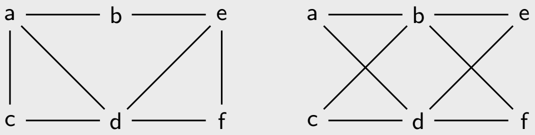
Definición

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en $G = (V, E)$ es **Euleriano** si el camino **recorre todas las aristas** exactamente una vez, formalmente:

$$\text{para todo } e \in E \text{ existe un único } i < n \text{ tal que } e = \{v_i, v_{i+1}\}$$

Un **tour Euleriano** es un camino Euleriano **cerrado**.

¿cuál grafo tiene un tour Euleriano?



¿cómo verificamos si un grafo tiene un **tour Euleriano**?

¿cómo verificamos si un grafo tiene un tour Euleriano?

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.

Entonces G tiene un tour Euleriano si, y solo si, todo $v \in V$ tiene grado par.

Demostración ($\Rightarrow$)

Si $G = (V, E)$ tiene un tour Euleriano, entonces sea $\pi = v_0, \ldots, v_n$ el tour.

Como π es Euleriano, entonces para todo vértice $v \in V$, se tiene que:

$$\deg(v) \;=\; 2 \cdot |\{\, i \in \{0, \ldots, n-1\} \mid v = v_i \,\}| \qquad \text{(¿por qué?)}$$

Por lo tanto, todos vértice en G tiene grado par.

¿cómo verificamos si un grafo tiene un tour Euleriano?

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo.

Entonces G tiene un tour Euleriano si, y solo si, todo $v \in V$ tiene grado par.

Demostración ($\Leftarrow$)

Considere $\pi = v_0, \ldots, v_n$ como
el **camino más largo** que recorre cada arista a lo más una vez.

- π recorre todas las aristas incidentes a v_0 y v_n (¿por qué?).
- $v_0 = v_n$ (¿por qué?) y, por lo tanto, π es un camino cerrado.

Demostraremos que π es un tour Euleriano.

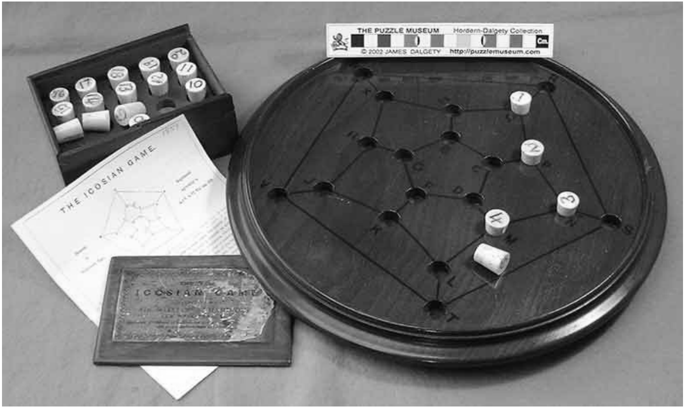
Por **contradicción**, suponga que existe $\{u, v_i\} \in E$ con $i \leq n$
(¿por qué existe $\{u, v_i\} \in E$?) tal que $\{u, v_i\}$ NO es visitada por π.

Entonces sea $\pi' = u, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_i$ un nuevo camino.

Como π' recorre cada arista a lo más una vez, **contradicción**! (¿por qué?)

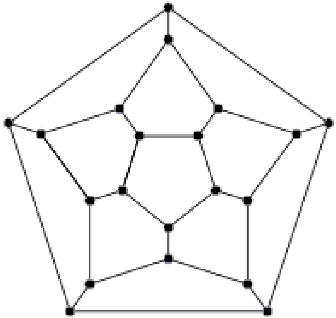
$\square$

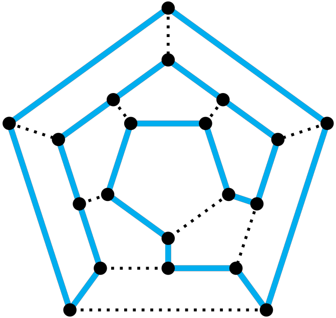
Juegos de Hamilton



Inventados por William Hamilton (1857)

Juegos de Hamilton





¿existe una caminata por el tablero que recorra cada nodo exactamente una vez?

Caminos y tours Hamiltoneanos

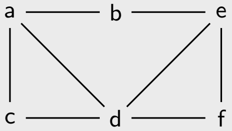
Definición

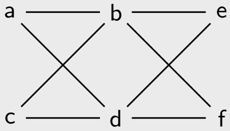
Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ en $G = (V, E)$ es **Hamiltoneano** si el camino **recorre todos los vértices** exactamente una vez, formalmente:

$$\text{para todo } v \in V \text{ existe un único } i < n \text{ tal que } v = v_i$$

Un **tour Hamiltoneano** es un camino Hamiltoneano **cerrado**.

¿cuál grafo tiene un tour Hamiltoneano?





¿cómo verificamos si un grafo tiene un **tour Hamiltoneano**?

(NP-completo)