Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

TAREA 2

Publicación:	Viernes 22 de Marzo.
Entrega:	**Viernes 29 de Marzo hasta las 10:15 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre, sección y número de lista en cada hoja de respuesta.
- Si usa más de una hoja para una misma pregunta corchetelas.
- Debe entregar una copia escrita durante la ayudantía asignada y una copia digital por el buzón del curso, ambas antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

1. Sea Σ un conjunto de fórmulas en lógica proposicional y φ una formula proposicional cualquiera. Recuerde que si φ es consecuencia lógica de Σ escribimos $\Sigma \models \varphi$. En cambio, si φ no es consecuencia lógica escribiremos $\Sigma \not\models \varphi$. Demuestre que si Σ es satisfacible, entonces para toda fórmula proposicional φ se tiene que:
$$\Sigma \not\models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \not\models \neg\varphi.$$
2. Dado un conjunto finito de variables proposicionales $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$, decimos que un conjunto de fórmulas proposicionales Σ es una *cadena de P* si es de la forma:
$$\Sigma = \{p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, ..., p_{n-1} \to p_n\}.$$
Demuestre que dado un conjunto de variables proposicionales P y Σ una *cadena de P*, entonces para toda fórmula φ con variables en P, se cumple que $\Sigma \models \varphi$ o $\Sigma \models \neg\varphi$.

Pregunta 2

Suponga $\mathcal{S}$ un dominio de *seres* de la misma especie donde se cuenta con el siguientes predicado sobre $\mathcal{S}$:

$$C(x, y, z) := \quad z \text{ es la "concepción" entre } x \text{ e } y \text{ donde } x \text{ es la madre y } y \text{ el padre, respectivamente.}$$

En otras palabras, para tres seres m, p, y h del dominio se tiene que $C(m, p, h) = 1$ si, y solo si, h es un hijo de la unión entre m y p donde m es la madre y p es el padre. Este predicado es definido sobre el conjunto de seres $\mathcal{S}$ que tiene uno o más seres (posiblemente infinito). También se cuenta con un predicado $E(x, y)$ sobre $\mathcal{S}$ tal que $E(a, b) = 1$ si, y solo si, $a = b$. En otras palabras, a es exactamente el mismo ser que b. Notar que el predicado C se define según "la especie" que se desea modelar. Por ejemplo, $\mathcal{S}$ puede ser el dominio de todos los perros y se tiene que $C(dama, golfo, laika) = 1$, $C(laika, pluto, odie) = 1$, $C(dama, laika, odie) = 0$, $C(pluto, pluto, pluto) = 0$, etc. En cambio, E siempre representa la igualdad de un ser consigo mismo, o sea, en nuestro ejemplo $E(dama, dama) = 1$, $E(dama, laika) = 0$, $E(laika, dama) = 0$, $E(dama, odie) = 0$, etc.

Usando lógica de predicados, uno puede definir afirmaciones sobre esta especie de seres $\mathcal{S}$. Por ejemplo, la afirmación "todo ser fue concebido por una madre y un padre" se puede definir con la siguiente fórmula en lógica de predicados:

$$\forall x. \exists y. \exists z.\ C(y, z, x)$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados explicando brevemente su correctitud.

1. "Todo ser es padre o madre de algún ser".
2. "Existe un ser que es madre o padre de algún otro ser".
3. "Existe un ser que es padre y madre, simultáneamente, de todos los seres (incluido el mismo)".
4. "Existen seres que no concibieron hijos".
5. "No existe un ser que es concebido por si mismo, esto es, que es padre y madre de si mismo".
6. "Todo ser fue concebido por un único padre y madre".
7. "Los seres de la especie son monógamos: cada ser, si concibe hijos, es con un único ser".
8. "Toda madre o padre no puede haber sido concebido por sus hijos".
9. "Existe un ser que concibió exactamente dos hijos".

Hint: Recuerde que el orden y la posición de los cuantificadores $\forall x$ y $\exists x$ en las formulas de lógica de predicados es muy importante. Por ejemplo, si $\alpha(x, y)$ es una formula en lógica de predicados no es lo mismo escribir $\forall x. \exists y.\, \alpha(x, y)$ que escribir $\exists y. \forall x.\, \alpha(x, y)$ (pueden significar distinto dependiendo del dominio). Tampoco es lo mismo escribir $\forall x. ((\exists y.\, \alpha(x, y)) \to \beta(x))$ que escribir $\forall x. \exists y.\, (\alpha(x, y) \to \beta(x))$ donde $\beta(x)$ es una formula en lógica predicados.

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **item** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta),
- 3 (con errores menores),
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.