Equivalencia y consecuencia lógica para LPO

IIC1253 - Matemáticas Discretas
Clase 05

Prof. Fernando Florenzano Hernández
faflorenzano@ing.puc.cl

Contenidos

Outline

Cuantificador universal

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **universal**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) \;:=\; \forall x.\, P(x, y_1, \dots, y_n)$$

  donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \dots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \dots, b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) \;=\; 1$$

  si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial

Sea $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **existencial**:

  $$P'(y_1, \ldots, y_n) \;:=\; \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$$

  donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \ldots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \ldots, b_n$ en D, definimos la valuación:

  $$P'(b_1, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

  si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Interpretación de cuantificadores

Sea $P(x)$ un predicado compuesto sobre el **dominio** $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Los cuantificadores **universal** y **existencial** se pueden "interpretar" como:

$$\forall x.\, P(x) \approx P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots = \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

$$\exists x.\, P(x) \approx P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots = \bigvee_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

Es posible combinar cuantificadores

¿Qué significan las siguientes fórmulas?

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x.\ \forall y.\ O(x, y)$
- $\exists x.\ \exists y.\ O(x, y)$
- $\forall x.\ \exists y.\ O(x, y)$
- $\exists x.\ \forall y.\ O(x, y)$
- $\forall x.\ (P(x) \to \exists y.\ O(x, y))$

Predicados compuestos (con cuantificadores)

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también fórmula) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados compuestos (más ejemplos)

¿Qué representan las siguientes fórmulas?

Para los predicados $x \leq y$, $x = y$, e $x + y = z$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $C(x) \;:=\; x + x = x$
- $L(x, y) \;:=\; x \leq y \;\wedge\; \neg(x = y)$
- $S(x, y) \;:=\; L(x, y) \;\wedge\; \neg\exists z.\, (L(x, z) \;\wedge\; L(z, y))$
- $U(x) \;:=\; \exists y.\, S(y, x) \wedge C(y)$
- $I \;:=\; \forall x.\, \exists y.\, \exists z.\; C(z) \wedge x + y = z$

Contenidos

¿De qué depende si una fórmula sea verdadera o falsa?

¿Es la fórmula verdadera o falsa?

$$\alpha = \exists x.\ \forall y.\ x \leq y$$

- si el “dominio” donde se evalúa α son los naturales.
- si el “dominio” donde se evalúa α son los enteros.
- si el “dominio” donde se evalúa α son nombres de personas. (?)

Depende de la **interpretación** (significado) del dominio y el símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, diremos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un **símbolo de predicado**.

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Interpretaciones

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Ejemplos

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(dom) &:= \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) &:= x \text{ es par} \\ \mathcal{I}_1(O) &:= x < y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(dom) &:= \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) &:= x > 0 \\ \mathcal{I}_2(O) &:= x + y = 0 \end{aligned}$$

Interpretaciones

Definición

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

Para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) & := & x \text{ es par} \\ \mathcal{I}_1(O) & := & x < y \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) & := & x > 0 \\ \mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \vDash \forall x.\, \exists y.\, P(y) \wedge O(x, y)$?
- $\mathcal{I}_2 \vDash \forall x.\, \exists y.\, P(y) \wedge O(x, y)$?

Interpretaciones

Definición

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \ \models \ \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **NO satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo anotaremos como:

$$\mathcal{I} \ \not\models \ \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

$\mathcal{I} \models \alpha$ se puede leer como:
"α es **verdadero** bajo el dominio y predicados dados por $\mathcal{I}$."

Contenidos

Equivalencia lógica en lógica de predicados

Definición

Sean $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ y $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ dos fórmulas en lógica de predicados. Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \;\equiv\; \beta$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta(a_1, \ldots, a_n)$$

Caso especial

Si α y β son oraciones (no tienen variables libres), entonces:

$$\text{para toda interpretación } \mathcal{I}: \qquad \mathcal{I} \models \alpha \quad \text{si, y solo si,} \quad \mathcal{I} \models \beta$$

Algunas equivalencias lógicas

Todas las equivalencias de lógica proposicional
son equivalencias en lógica de predicados.

Ejemplos

Para fórmulas α, β y γ en lógica de predicados:

1. **Conmutatividad**: $\alpha \wedge \beta \equiv \beta \wedge \alpha$
2. **Asociatividad**: $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$
3. **Idempotente**: $\alpha \wedge \alpha \equiv \alpha$
4. **Doble negación**: $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
5. **Distributividad**: $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \equiv (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
6. **De Morgan**: $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
7. …

Algunas equivalencias lógicas

Ejemplos

Las siguientes fórmulas son **lógicamente equivalente**:

- $\forall x.\, P(x) \to R(x) \quad \equiv \quad \forall x.\, \neg P(x) \vee R(x)$
- $(\forall x.\, P(x)) \to (\exists y.\, R(y)) \quad \equiv \quad (\neg \exists y.\, R(y)) \to (\neg \forall x.\, P(x))$

Nuevas equivalencias lógicas en lógica de predicados

Para fórmulas α y β en lógica de predicados:

1. $\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha$.
2. $\neg\exists x.\, \alpha \;\equiv\; \forall x.\, \neg\alpha$.

Demostración ($\neg\forall x.\, \alpha \;\equiv\; \exists x.\, \neg\alpha$)

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, entonces:

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{I} \models \neg\forall x.\, \alpha(x) & \text{ssi} & \mathcal{I} \not\models \forall x.\, \alpha(x) \\
 & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \alpha(a) \\
 & \text{ssi} & \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\alpha(a) \\
 & \text{ssi} & \mathcal{I} \models \exists x.\, \neg\alpha(x)
\end{array}$$

¡Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas en lógica de predicados

Para fórmulas α y β en lógica de predicados:

3. $\forall x. (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x. \alpha) \wedge (\forall x. \beta)$.
4. $\exists x. (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x. \alpha) \vee (\exists x. \beta)$.

Demostración ($\exists x. (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x. \alpha) \vee (\exists x. \beta)$)

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x. (\alpha(x) \vee \beta(x)) \quad & \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \vee \beta(a) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \text{ (SPDG)} \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x. \alpha(x) \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \exists x. \alpha(x) \vee \exists x. \beta(x) \quad \checkmark
\end{aligned}
$$

Nuevas equivalencias lógicas en lógica de predicados

Para fórmulas α y β en lógica de predicados:

3. $\forall x.\,(\alpha \wedge \beta) \;\equiv\; (\forall x.\,\alpha) \wedge (\forall x.\,\beta)$.
4. $\exists x.\,(\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\,\alpha) \vee (\exists x.\,\beta)$.

Demostración ($\exists x.\,(\alpha \vee \beta) \;\equiv\; (\exists x.\,\alpha) \vee (\exists x.\,\beta)$)

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera, entonces:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} \vDash \exists x.\,\alpha(x) \vee \exists x.\,\beta(x) \quad & \Rightarrow \quad \mathcal{I} \vDash \exists x.\,\alpha(x) \quad \text{(SPDG)} \\
& \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \vDash \alpha(a) \\
& \Rightarrow \quad \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \vDash \alpha(a) \vee \beta(a) \\
& \Rightarrow \quad \mathcal{I} \vDash \exists x.\,(\alpha(x) \vee \beta(x)) \quad \square
\end{aligned}
$$

¡Demuestre la otra equivalencia!

Nuevas equivalencias lógicas en lógica de predicados

¿Es verdad que ...?

- $\forall x.\, \exists y.\, \alpha(x, y) \stackrel{?}{\equiv} \exists y.\, \forall x.\, \alpha(x, y)$ ✗
- $\forall x.\, (\alpha \vee \beta) \stackrel{?}{\equiv} (\forall x.\, \alpha) \vee (\forall x.\, \beta)$ ✗
- $\exists x.\, (\alpha \wedge \beta) \stackrel{?}{\equiv} (\exists x.\, \alpha) \wedge (\exists x.\, \beta)$ ✗

Contenidos

Tautologías en lógica de predicados

Definición

Una fórmula α es una **tautología** si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y para todo $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

¿Cuáles fórmulas son tautologías?

- $\forall x.\, P(x) \vee \neg P(x)$ ✓
- $\forall x.\, \exists y.\, x \leq y$ ✗
- $(\forall x.\, P(x)) \rightarrow P(y)$ ✓
- $\forall x.\, \big(P(x) \rightarrow P(y)\big)$ ✗

Consecuencia lógica en lógica de predicados

Para un conjunto Σ de fórmulas, decimos que $\mathcal{I}$ **satisface** Σ con $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ si:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{para toda } \alpha \in \Sigma$$

Si $\mathcal{I}$ satisface Σ con $a_1, \ldots, a_n$ escribiremos $\mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n)$.

Definición

Una oración α es **consecuencia lógica** de un conjunto de oraciones Σ:

$$\Sigma \models \alpha$$

si para toda interpretación $\mathcal{I}$ y $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ se cumple que:

$$\text{si } \mathcal{I} \models \Sigma(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{entonces} \quad \mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

Consecuencia lógica en lógica de predicados

Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Todos los hombres son mortales.}\\ \text{Sócrates es hombre.}\end{array}}{\text{Por lo tanto, Sócrates es mortal.}}$$

Esto lo podemos modelar con el vocabulario $\mathrm{H}(\cdot)$, $\mathrm{M}(\cdot)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x.\ \mathrm{H}(x) \to \mathrm{M}(x)\\ \mathrm{H}(\mathrm{s})\end{array}}{\mathrm{M}(\mathrm{s})}$$

¿Se cumple la **consecuencia lógica**?

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

1. $\{ (\forall x.\, \alpha) \vee (\forall x.\, \beta) \} \models \forall x.\, (\alpha \vee \beta)$ ✓
2. $\{ \exists x.\, (\alpha \wedge \beta) \} \models (\exists x.\, \alpha) \wedge (\exists x.\, \beta)$ ✓
3. $\{ (\exists x.\, \alpha) \wedge (\exists x.\, \beta) \} \models \exists x.\, (\alpha \wedge \beta)$ ✗
4. $\{ \forall x.\, \exists y.\, R(x,y) \} \models \exists x.\, \forall y.\, R(x,y)$ ✗

Demuestre estas consecuencias lógicas

Inferencia en lógica de predicados

¡Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

1. **Instanciación universal:**

$$\frac{\forall x.\ \alpha(x)}{\alpha(a) \qquad \text{para cualquier } a}$$

2. **Generalización universal:**

$$\frac{\alpha(a) \qquad \text{para cualquier } a}{\forall x.\ \alpha(x)}$$

Inferencia en lógica de predicados

¡Para hacer inferencia lógica es muy útil usar nombres de variables!

3. **Instanciación existencial:**

$$\frac{\exists x.\ \alpha(x)}{\alpha(a) \qquad \text{para algún } a \text{ (nuevo)}}$$

4. **Generalización existencial:**

$$\frac{\alpha(a) \qquad \text{para algún } a}{\exists x.\ \alpha(x)}$$

Inferencia en lógica de predicados

Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Algún estudiante en la sala no estudio para el examen}\\ \text{Todos los estudiantes en la sala pasaron el examen}\end{array}}{\text{Algún estudiante pasó el examen y no estudio}}$$

¿Cómo **modelamos** este problema?

$$\begin{array}{lcl} S(x) & := & x \text{ está en la sala.} \\ E(x) & := & x \text{ estudio para el examen.} \\ X(x) & := & x \text{ pasó el examen.} \end{array}$$

¿Cómo queda la **consecuencia lógica**?

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x.\, S(x) \land \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \rightarrow X(x)\end{array}}{\exists x.\, X(x) \land \neg E(x)}$$

Inferencia en lógica de predicados

Ejemplo

$$\frac{\begin{array}{c}\exists x.\, S(x) \land \neg E(x) \\ \forall x.\, S(x) \to X(x)\end{array}}{\exists x.\, X(x) \land \neg E(x)}$$

¿Cómo **inferimos** esta consecuencia lógica?

1.	$\exists x.\, S(x) \land \neg E(x)$	(Premisa)
2.	$S(a) \land \neg E(a)$	(Inst. existencial 1.)
3.	$S(a)$	(Simpl. conjuntiva 2.)
4.	$\forall x.\, S(x) \to X(x)$	(Premisa)
5.	$S(a) \to X(a)$	(Inst. universal 4.)
6.	$X(a)$	(Modus ponens 3. y 5.)
7.	$\neg E(a)$	(Simpl. conjuntiva 2.)
8.	$X(a) \land \neg E(a)$	(Conjunción 6. y 7.)
9.	$\exists x.\, X(x) \land \neg E(x)$	(Gen. existencial 8.)