Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Clase 16

IIC 1253

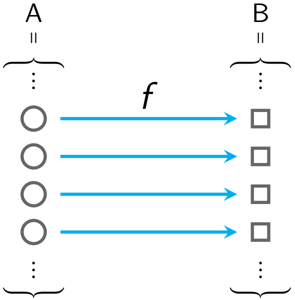
Prof. Cristian Riveros

Recordatorio: Cardinalidad

Sea A y B dos conjuntos.

Definición

A y B son **equinumerosos** si existe una biyección $f : A \to B$.



Si A es **equinumeroso** con B lo anotaremos como $|A| = |B|$.

Recordatorio: Cardinalidad

Proposición

La relación $|\cdot| = |\cdot|$ es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

Por lo tanto, podemos tomar las clases de equivalencia de $|\cdot| = |\cdot|$.

Definición

Para un conjunto A, denotaremos por $|A|$
su **clase de equivalencia** según la relación $|\cdot| = |\cdot|$.

Recordatorio: Conjuntos numerables

Definición

Decimos que un conjunto A es **numerable** si: $|A| = |\mathbb{N}|$.

Proposición

A es **numerable** si, y solo si, existe una secuencia infinita:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$$

1. $a_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. $a_i \neq a_j$ para todo $i \neq j$.
3. para todo $a \in A$, existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_i$.

A es numerable si, y solo si,
todos sus elementos se pueden poner en una **lista infinita**.

Recordatorio: Conjuntos numerables y no-numerables

Sabemos que...

- Los conjuntos $\mathbb{P}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son numerables.
- Los conjuntos $\mathbb{R}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son no-numerables.

Teorema de Cantor

Para todo conjunto no vacío A,
NO existe una **biyección** entre A y el conjunto potencia 2^A.

Funciones y cardinalidad

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Definición

Decimos que B es **al menos tan numeroso** como A:

$$|A| \leq |B|$$

si existe una función **inyectiva** $f : A \to B$.

¿qué tipo de relación es $|\cdot| \leq |\cdot|$?

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Sea A y B dos conjuntos no vacíos.

Teorema (Cantor–Schröder–Bernstein)

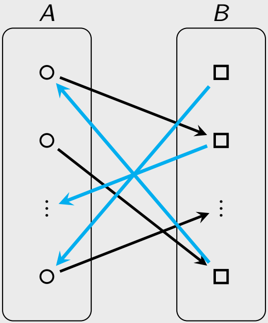
Si existen funciones **inyectivas** $f : A \to B$ y $g : B \to A$, entonces existe una función **biyectiva** $h : A \to B$.

En otras palabras, $|A| = |B|$ si, y solo si, $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

Sea A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$, $g : B \to A$ funciones **inyectivas**.
Sin perdida de generalidad, suponga que A y B son **disjuntos** ($A \cap B = \varnothing$).

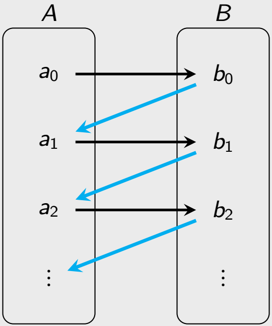


¿cómo hacemos una biyección desde A hasta B?

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

Sea A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$, $g : B \to A$ funciones **inyectivas**.
Sin perdida de generalidad, suponga que A y B son **disjuntos** ($A \cap B = \varnothing$).



Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

Sea A, B conjuntos no vacíos y $f : A \to B$, $g : B \to A$ funciones **inyectivas**.
Sin perdida de generalidad, suponga que A y B son **disjuntos** ($A \cap B = \varnothing$).

Caso 1:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "f"] & b_0 \arrow[r, "g"] & a_1 \arrow[r, "f"] & \cdots \arrow[r, "g"] & a_k \arrow[r, "f"] & b_k \arrow[lllll, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Caso 2:

$$\cdots \xrightarrow{g} a_0 \xrightarrow{f} b_0 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \cdots$$

Caso 3:

$$a_0 \xrightarrow{f} b_0 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \cdots$$

Caso 4:

$$b_0 \xrightarrow{g} a_0 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} \cdots$$

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

Para $a \in A$, sea $C_a \subseteq A \cup B$ "todos los elementos **alcanzables** desde a":

$$
\begin{aligned}
C_a \;=\; \Big\{ x \in A \cup B \;\Big|\; \exists i \geq 0.\quad & x = (f \circ g)^i(a) && \vee \\
& x = (f \circ g)^i \circ f(a) && \vee \\
& x = (g^{-1} \circ f^{-1})^i(a) && \vee \\
& x = (g^{-1} \circ f^{-1})^i \circ g^{-1}(a) && \Big\}
\end{aligned}
$$

donde $(f \circ g)^i$ es la función $f \circ g$ aplicada i-veces (con $(f \circ g)^0(a) = a$).

Algunos hechos:

- $C_a = C_{a'}$ o $C_a \cap C_{a'} = \varnothing$ para todo $a, a' \in A$. (¿por qué?)
- el conjunto $\{C_a \mid a \in A\}$ forma una partición de $A \cup B$. (¿por qué?)
- $\{A \cap C_a, B \cap C_a\}$ es una partición de C_a. (¿por qué?)

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

PD: Para todo $a \in A$, existe una **biyección** $f_a : (A \cap C_a) \to (B \cap C_a)$.

Caso 1:

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "f"] & b_0 \arrow[r, "g"] & a_1 \arrow[r, "f"] & \cdots \arrow[r, "g"] & a_k \arrow[r, "f"] & b_k \arrow[lllll, bend left, "g"]
\end{tikzcd}
$$

$$f_a(a_i) = b_i \quad \text{para todo } a_i \in A \cap C_a$$

Caso 2:

$$\cdots \xrightarrow{g} a_0 \xrightarrow{f} b_0 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \cdots$$

$$f_a(a_i) = b_i \quad \text{para todo } a_i \in A \cap C_a$$

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

PD: Para todo $a \in A$, existe una **biyección** $f_a : (A \cap C_a) \to (B \cap C_a)$.

Caso 3: $\cdot a_0 \xrightarrow{f} b_0 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} \cdots$

$$f_a(a_i) = b_i \quad \text{para todo } a_i \in A \cap C_a$$

Caso 4: $b_0 \xrightarrow{g} a_0 \xrightarrow{f} b_1 \xrightarrow{g} a_1 \xrightarrow{f} \cdots$

$$f_a(a_i) = g^{-1}(a_i) = b_i \quad \text{para todo } a_i \in A \cap C_a$$

Teorema de Cantor–Schröder–Bernstein

Demostración

Por lo tanto, como:

- $\{C_a \mid a \in A\}$ forma una partición de $A \cup B$ y
- para todo $a \in A$, existe una **biyección** $f_a : (A \cap C_a) \to (B \cap C_a)$

entonces:

$$(h : A \to B) = \bigcup_{a \in A} f_a$$

es una biyección de A en B. $\square$