NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 2 – Respuesta Pregunta 1

- 1) El hecho de que Σ sea satisfacible significa lo siguiente:

  $$\exists V : \forall \varphi_i \in \Sigma, \varphi_i(V) = 1$$

  Con V una valuación.

  Por definición se tiene que la fórmula φ es consecuencia lógica de Σ si para **toda** valuación V que satisface el conjunto Σ, φ toma valor 1. Tomamos de premisa el caso en que φ es consecuencia lógica del conjunto:

  $$\varphi(V) = 1, \forall V \in T$$

  Donde T es el conjunto de valuaciones que satisfacen Σ. Esto implica lo siguiente:

  $$\neg\varphi(V) = 0, \forall V \in T$$

  Esto ocurre debido a que φ siempre toma valor verdadero al ser evaluada en algún V que satisfaga la premisa original. Entonces tenemos que no existe ninguna valuación que satisfaga al conjunto Σ y a la vez haga a $\neg\varphi$ verdadero, por lo tanto $\neg\varphi$ **NO** es consecuencia lógica de Σ.

  En el caso de que la premisa anterior sea falsa, entonces simplemente tenemos:

  $$\exists V : \forall \varphi_i \in \Sigma, \varphi_i(V) = 1, \varphi(V) = 0$$

  Por lo tanto φ **NO** sería consecuencia lógica del conjunto.

  De esta manera queda demostrado que al menos uno de los dos casos presentados en el enunciado será válido para una fórmula proposicional cualquiera.

- 2) Comenzamos con la premisa de que φ **NO** es consecuencia lógica de Σ. Al analizar la forma que tiene la cadena, podemos notar que la única valuación Q que satisface el conjunto es aquella donde todas las variables $p_i \in P$ valen 1. Esto es debido a que la primera fórmula del conjunto $\varphi_1 = p_1$ debe ser 1, por lo que luego la siguiente fórmula deberá cumplir la implicancia tomando valor 1 al lado derecho (ya que el izquierdo toma 1), y así sucesivamente. Sabiendo esto, y al asumir la premisa mencionada, tenemos lo siguiente:

  $$\exists Q : \forall \varphi_i \in \Sigma, \varphi_i(Q) = 1, \varphi(Q) = 0$$

  Podemos ver que la valuación Q (mostrada anteriormente) hace a $\varphi(Q) = 0$, ya que en este caso es la única valuación que satisface el conjunto, y por tanto también debe ser la valuación que hace $\varphi = 0$ para cumplir con la premisa (φ **NO** es consecuencia lógica de Σ).

Utilizando esta información, llegamos a que el conjunto $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2.....\varphi_n, \varphi\}$ es **inconsistente**, ya que la última fórmula es siempre 0 para la valuación mostrada anteriormente (la única que satisface a $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2.....\varphi_n\}$). Utilizando el teorema visto en clase, sabemos que si el conjunto Ω es inconsistente, entonces $\neg\varphi$ es consecuencia lógica de $\Sigma = \{\varphi_1, \varphi_2.....\varphi_n\}$, en el caso de que la premisa inicial sea verdadera.

Finalmente, en el caso de que la premisa inicial sea falsa, entonces φ es consecuencia lógica de Σ (también se puede llegar a esto partiendo de la premisa de que $\neg\varphi$ NO es consecuencia lógica de Σ, aplicando los mismos pasos).

De esta forma queda demostrado que para una fórmula proposicional cualquiera, se debe cumplir alguna de los dos casos presentados en el enunciado.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 2 – Respuesta Pregunta 2

- 1)
$$\forall x.\exists y.\exists z.C(x,y,z) \lor C(y,x,z)$$
Para que sea verdadero, x (todo ser) debe ser el padre o la madre de z, mientras que y toma el valor del otro (padre o madre, según el que es x), y z es el hijo de x e y.

- 2)
$$\exists x.\exists y.\exists z.C(x,y,z) \lor C(y,x,z)$$
Igual al anterior, pero ahora el x es un cuantificador existencial, en vez de universal, ya que no necesariamente debe ocurrir para todos los seres.

- 3)
$$\exists x.\forall y.\forall z.E(x,y) \implies C(x,y,z)$$
Si y corresponde al ser x, entonces x e y conciben a z (cualquier ser), ya que ambos corresponden al ser que concibe a todos los demás. En caso de que y no sea igual al ser, no se tiene ninguna información.

- 4)
$$\exists x.\forall y.\forall z.\neg(C(x,y,z) \lor C(y,x,z))$$
La negación evita que x pueda ser padre o madre de algún hijo z, por lo que no concibe hijos.

- 5)
$$\forall x.\forall y.\forall z.(E(x,y) \land E(y,z)) \implies \neg C(x,y,z)$$
Si x es igual a y, e y es igual a z, entonces z también es igual a x. Al cumplirse esto, la negación evita que el ser se conciba a sí mismo.

- 6)
$$\forall x.\forall y.\forall z.\forall i.\forall j.(C(x,y,z) \land C(i,j,z)) \implies (E(x,i) \land E(y,j))$$
Si existen dos parejas que conciben un mismo hijo, entonces la implicancia obliga a que dichas parejas sean exactamente las mismas.

- 7)
$$\forall x.\forall y.\forall z.\forall k.\forall l.((C(x,y,z) \land C(x,k,l)) \lor (C(y,x,z) \land C(k,x,l))) \implies E(y,k)$$
Si un ser x concibe un hijo con dos parejas (y y k), entonces la implicancia obliga a que ambas sean el mismo ser, evitando la poligamia.

- 8)
$$\forall x.\forall y.\forall z.\forall k.C(x,y,z) \implies \neg(C(z,k,x) \lor C(k,z,x) \lor C(z,k,y) \lor C(k,z,y))$$
Si un ser z es hijo de x e y, entonces no puede ser ni padre ni madre de x o y, lo que la negación se encarga de evitar. k corresponde a la posible pareja de z.

- 9)

$$\exists x.\exists y.\exists z.\exists j.\exists k.\forall l.\forall w.A \land B$$

$$A = ((C(x,y,z) \land C(x,j,k)) \lor (C(y,x,z) \land C(j,x,k))) \land \neg E(z,k)$$

$$B = (C(x,l,w) \lor C(l,x,w)) \implies ((E(w,z) \land E(l,y)) \lor (E(w,k) \land E(l,j)))$$

Primero se obliga al ser x a tener dos hijos en la parte A, donde se debe cumplir que x haya concebido a un hijo z y a un hijo k (como padre o como madre) y que a la vez z y k sean distintos (se usa el $E(z,k)$). En la segunda parte se obliga a que si el ser x tiene un hijo con el ser l, entonces necesariamente será uno de los hijos z o k de la parte A junto a su pareja correspondiente (y para el hijo z, y j para el hijo k). Al cumplir ambas partes mediante el conectivo $\land$, el ser x tendrá exactamente dos hijos.