NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

- 1) **Verdadero**. Vamos a demostrar esto por casos:
  - Caso 1 (R es simétrica): Este corresponde al caso trivial. Se tiene que por definición $R \subseteq R$ (ya que todos los elementos de R pertenecen a sí misma). Además se asume R simétrica en este caso, por lo que se cumplen todas las condiciones necesarias y por tanto R es la clausura simétrica R^s de R.
  - Caso 2 (R NO es simétrica): En este caso se tiene que $\exists(a,b) \in R.(b,a) \notin R$. Para poder obtener la clausura simétrica R^s de R, debemos construir una relación simétrica R' a partir de R, que además esté contenida en todas las otras relaciones simétricas que contienen a R. Para esto se propone que dicha relación se forme con cada par $(a,b) \in R$, así como su inverso (b,a):

    $$R' = ((a,b)|(a,b) \in R \vee (b,a) \in R) = ((a,b),(b,a)|(a,b) \in R)$$

    Claramente se cumple que $R \subseteq R'$, ya que por construcción $\forall(a,b) \in R.(a,b) \in R'$.
    Además, es directo que para cada $(a,b) \in R'$ se tiene que $(b,a) \in R'$ por la forma en la que se construye la relación, lo que significa que R' es simétrica, ya que cumple con:

    $$\forall a,b \in A.((a,b) \in R') \rightarrow (b,a) \in R'$$

    Por último, falta demostrar que $R' \subseteq W$ para toda relación simétrica W tal que $R \subseteq W$. Como sabemos que $R \subseteq W$, se tiene que $\forall(a,b) \in R.(a,b) \in W$. Además, como W es simétrica, se cumple que $\forall a,b \in A.((a,b) \in W) \rightarrow (b,a) \in W$. Se desprende que $\forall(a,b) \in R.(a,b) \in W \wedge (b,a) \in W$, lo que por definición del conjunto R' lleva a que $R' \subseteq W$.
    Tenemos que R' cumple con todas las condiciones necesarias, por lo que corresponde a la clausura simétrica R^s de R.

  Como en todos los casos se obtiene un clausura simétrica R^s de R, con una relación $R \subseteq A \times A$ cualquiera, se obtiene que la afirmación es **Verdadera**.

- 2) **Falso**. Se utiliza el siguiente contraejemplo, donde R representa la relación de igualdad entre números naturales:

$$A = (1,2)$$

$$A \times A = ((1,1),(1,2),(2,1),(2,2))$$

$$R = ((1,1),(2,2))$$

Se puede observar que R no es conexa, ya que para $a = 1$ y $b = 2$ no se cumple la propiedad de conexidad:

$$\forall a, b \in A.((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R)$$

Luego, para obtener la clausura conexa R^x de R se debe agregar alguno de los pares $(1, 2), (2, 1)$ (o ambos) a R (para que así $R \subseteq R^x$), obteniendo así una relación conexa. Esto nos da las siguientes opciones:

$$R_1^x = ((1, 1), (2, 2), (1, 2))$$

$$R_2^x = ((1, 1), (2, 2), (2, 1))$$

$$R_3^x = ((1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1))$$

Analizando estas opciones, se tiene que R_3^x no está contenido en R_1^x ni R_2^x, por lo que no puede ser la clausura. Además, tanto R_1^x como R_2^x están contenidos en R_3^x, pero ninguno está contenido en el otro, por lo que no se pueden **comparar** para obtener la clausura conexa y por tanto no existe ninguna clausura conexa en este caso:

$$W = (S | R \subseteq S \wedge (\forall a, b \in A.((a, b) \in S) \vee ((b, a) \in S)))$$

$$\nexists R^x \in W. \forall S \in W. R^x \subseteq S$$

Se observa que el conjunto W no tiene un mínimo bajo la relación $\subseteq$, evidenciando el hecho de que la clausura conexa no existe. Queda demostrado por contraejemplo que **NO** siempre existe una clausura conexa para una relación $R \subseteq A \times A$ cualquiera.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

- 1) Comenzamos demostrando la reflexividad de R, expresada a continuación:

$$\forall s \in S.(s, s) \in R$$

Tomando la función $f(x) = x$, tenemos que $\forall s \in S.f(s) = s$, por lo que $\forall s \in S.\exists f.f(s) = s$. De esto se concluye que $\forall s \in S.(s, s) \in R$, por lo que R es refleja.

A continuación se debe demostrar la transitividad de R:

$$\forall s, r, t \in S.((s, r) \in R \wedge (r, t) \in R) \rightarrow (s, t) \in R$$

Se elige un par $(s, r) \in R$. Esto significa que $\exists f.f(s) = r$. Si además existe el par $(r, t) \in R$, entonces tenemos que $\exists g.g(r) = t$. Reemplazando la primera expresión en la segunda queda:

$$\exists f, g.g(f(s)) = t$$

Tomando $h(x) = (g \circ f)(x)$, se obtiene $h(s) = t$, por lo que $\exists h.h(s) = t$. Se desprende que el par $(s, t) \in R$, ya que se encontró una función que transforma a la secuencia s en la t, y por lo tanto R es transitiva.

Finalmente, se debe demostrar que R **NO** es simétrica, es decir, que existe algún par $(s, r) \in R$ para el que no se cumple lo siguiente:

$$\forall s, r \in S.((s, r) \in R) \rightarrow (r, s) \in R$$

Se utiliza el siguiente contraejemplo:

$$s = 1, 2, 3, 4, 5....$$

$$r = 0, 0, 0, 0, 0....$$

Analizando estas secuencias, podemos observar que para $f(x) = 0$ se tiene que $f(s) = r$. Esto significa que $(s, r) \in R$. También se puede ver que no existe ninguna función que transforme a la secuencia r en la s, por lo que $(r, s) \notin R$. Como se encontró un caso que no cumple con la propiedad simétrica, se desprende que R **NO** es simétrica.

- 2) Primero, tenemos que R^* se define de la siguiente manera:

$$R^* := ((x,y)|(x,y) \in R \wedge (x,y) \in R^{-1})$$

Por la definición de R^{-1}, tenemos lo siguiente:

$$R^{-1} := ((x,y)|(y,x) \in R)$$

Reemplazando en la relación R^* queda:

$$R^* := ((x,y)|(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R)$$

Ahora, para demostrar que R^* es una relación de equivalencia sobre S, se debe demostrar que es refleja, transitiva y simétrica.

Comenzamos demostrando su reflexividad. Para cada par $(s,s) \in R$ se tiene que su inverso, (s,s), también cumple con $(s,s) \in R$. Luego se tiene que $(s,s) \in R^*$. Además, anteriormente se demostró que $\forall s \in S.(s,s) \in R$, por lo que aplicando la propiedad obtenida se desprende que $\forall s \in S.(s,s) \in R^*$. Por lo tanto R^* es refleja.

El siguiente paso es demostrar la transitividad de R^*. Para cada par $(x,y) \in R^*$, sabemos por construcción que $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$. Además, si existe un par $(y,z) \in R^*$, se tiene que $(y,z) \in R$ y $(z,y) \in R$. Luego, como $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, por la transitividad de R, se tiene que $(x,z) \in R$. Análogamente, como $(z,y) \in R$ e $(y,x) \in R$, se tiene que $(z,x) \in R$.

Se desprende por construcción que $(x,z) \in R^*$, ya que (x,z) y (z,x) están en R. Por lo tanto, para un par $(x,y) \in R^*$ cualquiera, si el par $(y,z) \in R^*$ (para cualquier $z \in S$), entonces el par $(x,z) \in R^*$, por lo que R^* es transitiva.

Queda por demostrar que R^* es simétrica. Para un par $(x,y) \in R^*$ cualquiera, se tiene por construcción que $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$. Como tanto (y,x) como su inverso (x,y) están en R, se obtiene que $(y,x) \in R^*$. Luego, para cualquier $(x,y) \in R^*$, su inverso $(y,x) \in R^*$, por lo que R^* es simétrica.

Finalmente, como R^* es refleja, transitiva y simétrica, R^* es una relación de equivalencia sobre S. Las clases de equivalencia de R^* para cada secuencia $s \in S$, representan las secuencias $r \in S$, tal que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que transforma a s en r, y también existe un función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que transforma a r de vuelta en s (no necesariamente la inversa de la función f). Es decir, las clases de equivalencia de R^* representan la reversibilidad de las transformaciones entre las secuencias del conjunto S.

- 3) Para demostrar que $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre S/R^*, se debe demostrar que $\mathcal{R}$ es refleja, transitiva y antisimétrica sobre S/R^*.

Comenzamos con la propiedad reflexiva. Tomando una clase de equivalencia cualquiera M, se tiene que escogiendo una secuencia cualquiera $s \in M$, bajo la función $f(x) = x$ se tiene que el par $(s,s) \in R$ (demostrado en el primer ítem). Por lo tanto, al tomar $s = s1 = s2$, el par $(M,M) \in \mathcal{R}$, y por lo tanto $\mathcal{R}$ es refleja.

El siguiente paso es demostrar la propiedad antisimétrica, que se expresa a continuación:

$$\forall M, N \in S/R^*.((M,N) \in \mathcal{R} \wedge (N,M) \in \mathcal{R}) \to N = M$$

Vamos a demostrar por contradicción esta propiedad. Comenzamos con la premisa de que $(M,N) \in \mathcal{R}$ y $(N,M) \in \mathcal{R}$, con $M \neq N$. Esto significa que existe una secuencia $s \in M$ y otra $r \in N$ tal que $\exists f.f(s) = r$. Además, como también está el par (N,M) en $\mathcal{R}$, se tiene que existe una secuencia $t \in N$ y otra $w \in M$ tal que $\exists g.g(t) = w$. Resumiendo:

$$\exists s, w \in M. \exists r, t \in N. \exists f, g.(f(s) = r) \wedge (g(t) = w)$$

Analizando, tenemos que como r y t pertenecen a la misma clase de equivalencia de R^*, entonces $\exists h.h(r) = t$. Análogamente, se tiene que $\exists k.k(w) = s$. Todo esto ya que como se demostró en el ítem anterior, R^* es simétrica, lo que implica que para cualquier par de secuencias en las clases de equivalencia de R^*, existen funciones que permiten transformar a una en la otra y viceversa.

Además, sabemos que $\exists g.g(t) = w$. Utilizando la transitividad de la relación R, se obtiene lo siguiente:

$$k(w) = s$$
$$g(t) = w$$
$$h(r) = t$$

$$k(g(h(r))) = s$$

Se desprende que para $j(x) = (k \circ g \circ h)(x)$, se cumple que $j(r) = s$, por lo que:

$$\exists j.j(r) = s$$

Como anteriormente se encontró que $\exists f.f(s) = r$, se llega a:

$$\exists f, j.(f(s) = r) \wedge (j(r) = s)$$

Esto es lo mismo que $(s, r) \in R \wedge (r, s) \in R$. Por construcción de R^*, se tiene que $(s, r) \in R^* \wedge (r, s) \in R^*$ (mostrado en el ítem anterior). Como $(s, r) \in R^*$, se desprende que r y s pertenecen a la **misma** clase de equivalencia de R^* (ya que R^* es una relación de equivalencia que contiene al par (s, r)). Entonces se llega a que $r \in M$.

A continuación se calcula la intersección entre M y N:

$$M = (s, w, r....)$$
$$N = (r, t......)$$

$$M \cap N = (r....)$$

Sabemos que para 2 clases de equivalencia A y B distintas, $A \cap B = \emptyset$ (visto en clase). En este caso se puede ver claramente que $M \cap N \neq \emptyset$, por lo que se llega finalmente a $\neg(M \neq N) \implies M = N$.

Esto se contradice con la premisa de que $M \neq N$, por lo que queda demostrado que la propiedad antisimétrica siempre se satisface en la relación $\mathcal{R}$ (la implicancia nunca será falsa). Luego $\mathcal{R}$ es antisimétrica.

Queda por demostrar la propiedad transitiva de $\mathcal{R}$:

$$\forall M, N, L \in S/R^*.((M, N) \in \mathcal{R} \wedge (N, L) \in \mathcal{R}) \to (M, L) \in \mathcal{R}$$

Comenzamos tomando el par $(M, N) \in \mathcal{R}$, de donde se obtiene:

$$\exists x \in M. \exists y \in N. \exists f.f(x) = y$$

Análogamente para el par $(N, L) \in \mathcal{R}$:

$$\exists z \in N.\exists w \in L.\exists g.g(z) = w$$

Además, como $y, z \in N$, se deduce que $\exists h.h(y) = z$, ya que ambas están en la misma clase de equivalencia (mismo argumento utilizado para la propiedad antisimétrica).

Luego, gracias a la transitividad de R, se obtiene:

$$g(z) = w$$
$$h(y) = z$$
$$f(x) = y$$

$$g(h(f(x))) = w$$

Tomando $k(a) = (g \circ h \circ f)(a)$, tenemos que $k(x) = w$, por lo que $\exists k.k(x) = w$.

Se desprende que $(x, w) \in R$, y tomando $s1 = x$ y $s2 = w$, se cumple que $(M, L) \in \mathcal{R}$, por lo que la propiedad transitiva siempre se satisface. Luego $\mathcal{R}$ es transitiva.

Finalmente, como $\mathcal{R}$ es refleja, antisimétrica y transitiva, $\mathcal{R}$ es un orden parcial sobre S/R^*.