Elementos extremos y clausuras

Clase 11

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Cotas superiores, maximales y máximos

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S si para todo $y \in S$, se cumple $\mathbf{y} \preceq \mathbf{c}$.
- $x^* \in S$ es un elemento **maximal** si ningún elemento es mayor que x^*.

$$\forall y \in S. \quad \mathbf{x}^* \preceq \mathbf{y} \ \rightarrow \ x = y$$

- $x^{**} \in S$ es un **máximo** si x^{**} es mayor a cualquier elemento en S.

$$\forall y \in S. \quad \mathbf{y} \preceq \mathbf{x}^{**}$$

Ejemplo

Sea $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\}), \subseteq)$ y $S = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3,5\}\}$.

- ¿cuál es una **cota superior** para S?
- ¿cuál son los elementos **maximales** de S?
- ¿cuál son los **máximos** de S?

Cotas inferiores, minimales y mínimos

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S si para todo $y \in S$, se cumple que $c \preceq y$.
- $x^* \in S$ es un elemento **minimal** si ningún elemento es menor que x^*.

$$\forall y \in S. \quad y \preceq x^* \ \rightarrow \ x^* = y$$

- $x^{**} \in S$ es un **mínimo** si x^{**} es menor a cualquier elemento en S.

$$\forall y \in S. \quad x^{**} \preceq y$$

Ejemplo

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.

- ¿cuál es una **cota inferior** para S? ¿es 2 una cota inferior?
- ¿cuál son los elementos **minimales** de S?
- ¿cuál son los **mínimos** de S?

Sobre minimales y mínimos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un elemento mínimo, entonces ¿es único?
2. ¿siempre tiene S un mínimo?
3. Si x es mínimo, entonces ¿es x minimal?
4. ¿siempre tiene S un elemento minimal?
5. Si x es minimal, entonces ¿es x mínimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

. . . lo mismo es cierto sobre maximales / máximos.

Infimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c se cumple que $c \preceq c^*$.

Ejemplo

- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\ )$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$, ¿cuál es el ínfimo?
- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\ )$ y $S \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿cuál es el ínfimo?
- Para $(\mathbb{R}, \leq)$ y $S = (0, 1]$, ¿cuál es el ínfimo?

Infimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c se cumple que $c \preceq c^*$.

c^* es la **mayor de las cotas inferiores**.

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **infimo** de S si c es un máximo del conjunto:

$$S_{\succeq} = \{ \, c \mid c \text{ es una cota inferior de } S \, \}$$

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\emptyset$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c se cumple que $c^* \preceq c$.

Ejemplo

- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\,)$ y $S = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$, ¿cuál es el supremo?
- Para $(\mathbb{N} - \{0\}, |\,)$ y $S \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿cuál es el supremo?
- Para $(\mathbb{Q}, \leq)$ y $S = \{x \mid x^2 < 2\}$, ¿cuál es el supremo?

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c se cumple que $c^* \preceq c$.

c^* es el **menor de las cotas superiores**.

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si c es un mínimo del conjunto:

$$S_{\preceq} = \left\{ c \mid c \text{ es una cota superior de } S \right\}$$

Sobre ínfimos y supremos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un ínfimo, entonces ¿es único?
2. Si x es el mínimo, ¿es x el ínfimo?
3. Si S NO tiene mínimo, ¿entonces tiene ínfimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

. . . lo mismo es cierto sobre máximos / supremos.

Outline

Clausura **refleja**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

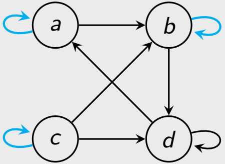
Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la clausura refleja de esta relación?



Clausura **refleja**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^r con el **mínimo** de un conjunto?

Clausura **transitiva**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

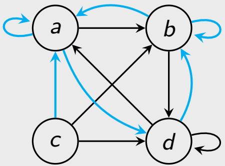
Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la clausura transitiva de esta relación?



Clausura **transitiva**

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^t con el mínimo de un conjunto?

Clausura transitiva y clausura refleja

- ¿siempre existe R^r o R^t para un R cualquiera?
- ¿cómo podemos calcular R^r o R^t (si existen)?

¿cómo calculamos la clausura **refleja** de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \;\cup\; I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Demostración: ejercicio.

¿cómo calculamos la clausura **refleja** de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r = R \cup I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Propiedad

$\left(R^r\right)^r = R^r$ para todo $R \subseteq A \times A$.

¿cómo calculamos la clausura **transitiva**?

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Recordatorio

- $R \circ R \;=\; \left\{ \; (x,y) \;\mid\; \exists z \in A.\; (x,z) \in R \;\wedge\; (z,y) \in R \; \right\}$
- Se define $\; R^1 = R \;$ y $\; R^2 = R \circ R$.
- Se define $\; R^i = R^{i-1} \circ R \;$ para $\; i > 1$.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

¿qué debemos demostrar?

1. $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. ✓
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.
3. Para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$$

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

PD: Si $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, entonces $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Supongamos que $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

$\Rightarrow$ existe k y j tal que $(x,y) \in R^k$ y $(y,z) \in R^j$.

$\Rightarrow$ $(x,z) \in R^k \circ R^j = R^{k+j}$

$\Rightarrow$ $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

3. Para toda R' transitiva con $R \subseteq R'$ se cumple: $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

Sea R' transitiva tal que $R \subseteq R'$.

PD: para todo $i \geq 1$, $R^i \subseteq R'$. (por inducción)

Caso base: $i = 1$. ✓

Caso inductivo: se cumple $R^i \subseteq R'$ y demostramos que $R^{i+1} \subseteq R'$.

Supongamos que $(x, z) \in R^{i+1}$. (**PD**: $(x, z) \in R'$)

$\Rightarrow$ existe $y \in A$, tal que $(x, y) \in R^i$ y $(y, z) \in R$.

$\Rightarrow$ $(x, y) \in R'$ y $(y, z) \in R'$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ $(x, z) \in R'$. (¿por qué?)

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

□

¿cómo calculamos la clausura **transitiva** de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Algunas preguntas:

- Dado un R finito, ¿podemos computar R^t?
- ¿es verdad que $\left(R^t\right)^t = R^t$? (ejercicio)

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Se define la **clausura refleja y transitiva** de R como:

$$R^* \quad = \quad R^t \cup R^r$$

Proposición

Si (A, R) es un **DAG**, entonces (A, R^*) es un **orden parcial**.

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Demostración: DAG ⇒ orden parcial

¿qué debemos demostrar?

1. R^* es refleja. ✓
2. R^* es antisimétrica.
3. R^* es transitiva. ✓

Relación entre DAGs y ordenes parciales (revisitado)

Demostración: DAG $\Rightarrow$ orden parcial

2. R^* es antisimétrica.

Suponga que (A, R) es un grafo acíclico.

Por contradicción: Supongamos que R^* NO es antisimétrica.

Existe $(x, y) \in R^*$ y $(y, x) \in R^*$, pero $x \neq y$.

$\Rightarrow$ existe $j, k \geq 1$, tal que $(x, y) \in R^j$ y $(y, x) \in R^k$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ existe una secuencia (un camino): (¿por qué?)

$$x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k = y$$
$$y = y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_j = x$$

tal que $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para $i < k$ y $(y_i, y_{i+1}) \in R$ para $i < j$.

$\Rightarrow$ $x = x_0, x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_j$ es un ciclo de largo ≥ 2 en (A, R).

contradicción (¿por qué?)

$\square$