



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas 1'2019

## GUIA 3

### Conjunto, relaciones y funciones

Los siguientes ejercicios son una recopilación de guías de ejercicios del curso de Matemáticas Discretas dictado por Marcelo Arenas y Jorge Pérez en años anteriores.

### Teoría de conjuntos

1. Diga en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique. ( $A$  y  $B$  son conjuntos cualesquiera)

- |   |   |
|---|---|
| a) $\emptyset = \{\emptyset\}$                  | g) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$       |
| b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$                | h) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ |
| c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$          | i) $\bigcap \mathcal{P}(A) = \emptyset$ |
| d) $A \subseteq A \cup B$                       | j) $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$         |
| e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ | k) $(A \setminus B) \subseteq A$        |
| f) $A \notin \mathcal{P}(A)$                    | l) $(A \setminus B) \subseteq B$        |

2. Sea  $x$  un elemento cualquiera. Diga en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique.

- |                             |   |
|-----------------------------|---|
| a) $\{x\} \subseteq \{x\}$  | d) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$         |
| b) $\{x\} \in \{x\}$        | e) $\{\{x\}\} \not\subseteq \{x, \{x\}\}$ |
| c) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$ |   |

3. Demuestre cada una de las siguientes propiedades.

- |  |  |
|--|--|
| a) $\bigcup \emptyset = \emptyset$   | e) Para todo $A \in \mathcal{S}$ se cumple que $A \subseteq \bigcup \mathcal{S}$                       |
| b) $\bigcup \{A\} = A$   | f) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ entonces $\bigcap \mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathcal{R}$ |
| c) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ entonces $\bigcup \mathcal{R} \subseteq \bigcup \mathcal{S}$ | g) $\bigcap \mathcal{R} \cap \bigcap \mathcal{S} \subseteq \bigcap (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$     |
| d) $\bigcup (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \bigcup \mathcal{R} \cup \bigcup \mathcal{S}$             | h) Para todo $A \in \mathcal{S}$ se cumple que $\bigcap \mathcal{S} \subseteq A$                       |

4. Para dos conjuntos  $A$  y  $B$  se define el siguiente operador entre  $A$  y  $B$ :

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- a) Demuestre que  $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$ .
- b) ¿Es + un operador conmutativo, asociativo, distributivo sobre  $\cup$  o distributivo sobre  $\cap$ ? Para cada respuesta de una demostración o un contra-ejemplo según sea el caso.

5. Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  conjuntos. Para las siguientes afirmaciones, demuestre o de un contra-ejemplo.
- $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
  - $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus D)$
  - $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$
6. Sea  $S = \{1, \dots, n\}$  un conjunto finito. Decimos que un conjunto  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$  es una *anti-cadena* si para todo  $A, B \in \mathcal{C}$  con  $A \neq B$  se cumple que  $A \not\subseteq B$  y  $B \not\subseteq A$ .
- ¿Cuántas anti-cadenas puede uno formar para  $S = \{1, 2, 3\}$ ? Explique su respuesta.
  - Un conjunto  $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}(S)$  se dice que es un *sistema separador* de  $S$  si para todo  $i \neq j$  en  $S$ , existen  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $i \in A$ ,  $i \notin B$ ,  $j \notin A$  y  $j \in B$  (en otras palabras,  $i \in A \setminus B$  y  $j \in B \setminus A$ ). El conjunto dual  $\mathcal{A}^* = \{B_1, \dots, B_n\}$  de  $\mathcal{A}$  se define como  $B_i = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid i \in A_k\}$  para todo  $i \leq n$ .
- Demuestre que un conjunto  $\mathcal{A}$  es un sistema separador si, y solo si,  $|\mathcal{A}^*| = n$  y  $\mathcal{A}^*$  es una anti-cadena.

## Relaciones

- Dibuje el diagrama de Hasse para cada uno de los siguientes órdenes parciales.
  - $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$ .
  - $(\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, |)$ .
- Demuestre o refute la siguiente afirmación: “Si  $R$  es una relación simétrica y transitiva entonces también es refleja”.
- Dé un ejemplo de relaciones que sean
  - simétrica y refleja pero no transitiva.
  - refleja y transitiva pero no simétrica.
  - simétrica y transitiva pero no refleja.
- El conjunto  $\emptyset$  es una relación, ya que es subconjunto de cualquier conjunto. ¿Qué propiedades cumple  $\emptyset$  como relación?
- Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos.
  - ¿Cuántas relaciones reflejas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
  - ¿Cuántas relaciones simétricas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
  - ¿Cuántas relaciones antisimétricas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
- Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos y  $R$  una relación antisimétrica sobre  $A$ .
  - ¿Cuál es la máxima cantidad de pares ordenados que puede contener  $R$ ?
  - ¿Cuántas relaciones antisimétricas distintas sobre  $A$  tienen exactamente esa cantidad de pares?
- Para cada una de las siguientes relaciones determine si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva, demostrando o dando un contraejemplo en cada caso.
  - $R_{//}$  sobre el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^2$ , tales que la recta  $l_1$  está relacionada con la recta  $l_2$  si y sólo si  $l_1$  es paralela a  $l_2$  ( $l_1 R_{//} l_2 \Leftrightarrow l_1 // l_2$ ).

- b)  $R_{\perp}$  sobre el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^2$ , tales que la recta  $l_1$  está relacionada con la recta  $l_2$  si y sólo si  $l_1$  es perpendicular a  $l_2$  ( $l_1 R_{\perp} l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$ ).
- c)  $R$  sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $(a, b)R(c, d)$  si y sólo si  $a \leq c$ . (Note que en este último caso la relación  $R$  es subconjunto de  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ .)
8. ¿Qué puede decir de la relación  $R_{//} \circ R_{\perp}$  (la composición de las relaciones  $R_{//}$  y  $R_{\perp}$  definidas en el ejercicio anterior), qué propiedades cumple, cómo se compara con  $R_{//}$  y con  $R_{\perp}$ , etc.?
9. Sea  $f : A \rightarrow B$  una función cualquiera de  $A$  en  $B$ . Sea  $R$  una relación sobre  $A$  tal que  $xRy$  si y sólo si  $f(x) = f(y)$ . Demuestre que  $R$  es refleja, simétrica y transitiva.
10. Demuestre o refute (de un contraejemplo) cada una de las siguientes afirmaciones. En cada caso  $R_1$  y  $R_2$  son relaciones sobre un conjunto  $A$  cualquiera.
- Si  $R_1$  y  $R_2$  son simétricas entonces  $R_1 \cap R_2$  es simétrica.
  - Si  $R_1$  y  $R_2$  son reflejas entonces  $R_1 \cup R_2$  es refleja.
  - Si  $R_1$  y  $R_2$  son transitivas entonces  $R_1 \cap R_2$  es transitiva.
  - Si  $R_1$  y  $R_2$  son transitivas entonces  $R_1 \circ R_2$  es transitiva.
11. Sean  $\preceq_1$  y  $\preceq_2$  dos relaciones de orden sobre un conjunto  $A$ . Se define la siguiente relación sobre el conjunto  $A \times A$ :  $(a, b) \preceq (c, d)$  si y sólo si  $a \preceq_1 c$  y  $b \preceq_2 d$ . Demuestre que  $\preceq$  es una relación de orden sobre  $A \times A$ .
12. Sea  $A$  un conjunto. Un *preorden* es una relación  $\trianglelefteq \subseteq A \times A$  tal que es refleja y transitiva (no necesariamente antisimétrica). Se define la relación  $\sim_{\trianglelefteq} \subseteq A \times A$  tal que  $a \sim_{\trianglelefteq} b$  si, y sólo si,  $a \trianglelefteq b$  y  $b \trianglelefteq a$ .
- Demuestre que  $\sim_{\trianglelefteq}$  es una relación de equivalencia. ¿Que representan las clases de equivalencia de  $\sim_{\trianglelefteq}$  según  $\trianglelefteq$ ? De una explicación en base al grafo de  $\trianglelefteq$ .
  - Demuestre que  $\sim_{\trianglelefteq}$  es una relación de congruencia para  $\trianglelefteq$ .
  - Demuestre que  $\trianglelefteq_{\sim_{\trianglelefteq}}$  es un orden parcial para el conjunto  $A / \sim_{\trianglelefteq}$ . ¿Que representa  $\trianglelefteq_{\sim_{\trianglelefteq}}$  para las clases de equivalencia en  $A / \sim_{\trianglelefteq}$ ? De nuevo, de una explicación en base al grafo de  $\trianglelefteq$ .
13. Muestre ejemplos de órdenes parciales  $(A, \preceq)$  y subconjuntos  $S \subseteq A$  tales que:
- $S$  tiene exactamente cuatro elementos maximales.
  - $S$  tiene exactamente tres elementos minimales.
  - $S$  tiene máximo y mínimo.
  - Todos los elementos de  $S$  son maximales y minimales a la vez.
  - $S$  tiene tres elementos maximales, tres elementos minimales, tiene un ínfimo y tiene un supremo.
14. Sea  $(A, \preceq)$  un orden parcial. Una sucesión infinita  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$  de elementos de  $A$  se dice *estrictamente decreciente* si se cumple que  $x_n \neq x_{n+1}$  y que  $x_{n+1} \preceq x_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Demuestre que todo subconjunto no vacío de  $A$  tiene un elemento minimal si y sólo si no existen sucesiones infinitas estrictamente decrecientes en  $A$ .
15. ¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre el conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ ?
16. Demuestre que para cada conjunto  $A$ , existe una relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $A$  tal que  $A / \sim$  es un conjunto finito.
17. Sea  $A$  un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia  $\sim_1$  y  $\sim_2$  sobre  $A$  tales que para toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $A$ , se tiene que  $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$  (vale decir, para todo  $(a, b) \in A \times A$ , si  $a \sim_1 b$ , entonces  $a \sim b$ , y si  $a \sim b$ , entonces  $a \sim_2 b$ ).

18. Sea  $n$  un número natural mayor o igual a 2, y sea  $A = \{1, \dots, n\}$ . Demuestre que el número de relaciones de equivalencia sobre  $A$  es estrictamente menor que el número de órdenes parciales sobre  $A$ .
19. Sea  $R$  una relación sobre  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tal que  $(x, y)R(z, w)$  si y sólo si  $x = z$ .
- Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .
  - Describa geoméricamente las clases de equivalencia y las particiones inducidas por  $R$ .
20. Sea  $R$  una relación sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $(m, n)R(r, s)$  si y sólo si  $m + n = r + s$ .
- Demuestre que  $R$  es una relación de equivalencia en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .
  - Liste algunos elementos de las clases de equivalencia  $[(0, 0)]$ ,  $[(1, 3)]$ , y  $[(7, 3)]$ .
  - Describa las clases de equivalencia y las particiones inducidas por  $R$  (puede hacer un dibujo como el de la figura 1.3 de los apuntes).
21. Así como en los apuntes se definió  $\mathbb{Z}$  a partir de una relación de equivalencia en  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , en este ejercicio definiremos el conjunto de los racionales  $\mathbb{Q}$  usando una relación de equivalencia en  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ . Definimos entonces la relación  $\uparrow$  tal que  $(k_1, n_1) \uparrow (k_2, n_2)$  si y sólo si  $k_1 \cdot n_2 = k_2 \cdot n_1$ .
- Demuestre que la relación  $\uparrow$  es de equivalencia sobre  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$ .
  - Liste algunos elementos de las clases de equivalencia de  $[(0, 2)]$ ,  $[(3, 1)]$ , y  $[(2, 3)]$ .
  - Formalmente los racionales se definen como  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})) / \uparrow$ . Intuitivamente a qué número racional corresponde la clase de equivalencias  $[(k, n)]$ ?
  - Se define la operación  $\odot$  entre clases de equivalencia de  $\uparrow$  tal que  $[(k_1, n_1)] \odot [(k_2, n_2)] = [(k_1 \cdot k_2, n_1 \cdot n_2)]$ . Intuitivamente la operación  $\odot$  representa a la multiplicación de racionales. Muestre un par de ejemplos de aplicación de  $\odot$ .
  - Defina la operación  $\oplus$  entre clases de equivalencia de  $\uparrow$  que capture la suma de números racionales.
22. Sea  $A$  un conjunto finito. Una relación  $R \subseteq A \times A$  se dice que es un *rectángulo* si existen conjuntos  $B, C \subseteq A$  tal que  $R = B \times C$ .
- Demuestre que  $R$  es un rectángulo si, y solo si, para todo  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A$  se cumple que:  
si  $(a_1, b_1) \in R$  y  $(a_2, b_2) \in R$ , entonces  $(a_1, b_2) \in R$ .
  - Un rectángulo  $R$  se dice *simple* si  $R = B \times B$  para algún  $B \subseteq A$ . Demuestre que si  $R$  es una relación de equivalencia, entonces para algún  $n \in \mathbb{N}$  existen rectángulos simples  $R_1, \dots, R_n \subseteq A \times A$  tal que:

$$R = \bigcup_{i=1}^n R_i$$

¿es la otra dirección cierta? Demuéstrelo o de un contra-ejemplo.

## Funciones

- Demuestre que si se tiene una bolsa con 5 pares de calcetines, cada par de un color distinto, si se sacan 6 calcetines al azar de la bolsa, necesariamente dos de los calcetines sacados comparten color.
- Sea  $G = (V, E)$  un grafo finito. Demuestre que si un camino en  $G$  tiene mas de  $|V|$  vértices entonces  $G$  contiene un ciclo.
- Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos finitos tales que  $|A| = n$  y  $|B| = m$

- a) Demuestre formalmente que  $|A \times B| = n \cdot m$  encontrando una función biyectiva  $h$  desde  $A \times B$  al conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, (n \cdot m) - 1\}$ .
- b) ¿Cuántas relaciones binarias distintas de  $A$  en  $B$  existen?
- c) ¿Cuántas funciones de  $A$  en  $B$  existen?
- d) Si  $n \leq m$  ¿cuántas funciones inyectivas de  $A$  en  $B$  existen?
- e) Si  $n \geq m$  ¿cuántas funciones sobreyectivas de  $A$  en  $B$  existen?
- f) Si  $n = m$  ¿cuántas funciones biyectivas de  $A$  en  $B$  existen?