NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

N° LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 1

- 1) Comenzamos analizando la tabla de verdad de la expresión $p*q$. Se puede observar que la expresión $p*q$ sólo toma valor 1 cuando tanto p como q son 0. A su vez, si consideramos la expresión $p \vee q$, podemos ver que es exactamente lo contrario, tomando valor 1 en **todos** los casos excepto cuando p y q son ambos 0. Basándose en esto, se tiene que la expresión $\neg(p \vee q)$ es **equivalente** a $p*q$.

  Conociendo esta equivalencia, podemos obtener los conectivos lógicos $\neg$ y $\vee$ a partir del conectivo $*$ definido en el enunciado, reescribiéndolo como $\neg(p \vee q)$. Utilizando esta propiedad, a partir del conjunto $\{*, \wedge\}$ se pueden obtener todos los conectivos del conjunto $\{\neg, \vee, \wedge\}$; los que son suficientes para representar cualquier tabla de verdad; y por lo tanto el conjunto $\{*, \wedge\}$ es funcionalmente completo.

- 2) Para demostrar que el conjunto $\{\wedge, \vee\}$ NO es funcionalmente completo, podemos utilizar la tabla de verdad del ítem anterior a modo de contraejemplo, considerando que cuando p y q son 0 la expresión debe ser verdadera. Cualquier expresión formada por el conectivo $\vee$ por sí solo, requiere que al menos una de las variables tome valor 1 para que la expresión sea verdadera. En el caso del conectivo $\wedge$, requiere que todas las variables tomen valor 1. Si p y q valen ambas 0, ninguna de estas posibles expresiones será verdadera. Además, cualquier expresión que combine ambos conectivos puede ser reescrita como la disyunción de expresiones de conjunción, utilizando paréntesis de la siguiente forma:

  $$p \vee q \wedge p \vee .....p \longrightarrow p \vee (q \wedge p) \vee ...p$$

  Para que este tipo de expresiones sean verdaderas, se debe cumplir que alguna de las expresiones en paréntesis lo sea, pero esto nunca ocurrirá en el caso de que p y q sean ambas 0. Se puede observar claramente que no hay forma de representar la tabla de verdad de $p*q$ utilizando los elementos del conjunto $\{\wedge, \vee\}$, por lo que NO es funcionalmente completo.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 1 – Respuesta Pregunta 2

- 1) En el caso de las fórmulas **condicionales simples**, se puede utilizar la propiedad de que pueden ser escritas de la siguiente manera:

  $$\alpha = p \rightarrow \alpha'$$

  Basta con evaluar la variable p en 0, para que la expresión **completa** sea verdadera, independiente del valor que tenga α', ya que la implicancia es unidireccional, es decir, no se puede saber nada sobre el lado derecho si es que el lado izquierdo no es verdadero.

  En el caso de las fórmulas condicionales **NO simples**, estas siempre se pueden representar con una relación de implicancia entre 2 fórmulas condicionales contenidas en la original. Esto se demuestra a continuación:

  Sea $\alpha = (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ una fórmula condicional NO simple, y p, q, r, s fórmulas condicionales cualquiera.

  Tomando $\beta = (p \rightarrow q)$ y $\gamma = (r \rightarrow s)$, entonces $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$. Utilizando esta propiedad un número variable de veces (dependiendo de la fórmula dada), se puede simplificar la fórmula hasta que β y γ sean ambas fórmulas **condicionales simples** (como la fórmula α_1 del enunciado).

  Con esta versión simplificada de la fórmula condicional NO simple, podemos evaluar las **primeras** variables proposicionales de β y γ en 0, por lo que ambas serán verdaderas según se demostró para las fórmulas condicionales simples. Al ser ambas verdaderas, la fórmula NO simple α tambíen lo será, ya que ambos lados de la implicancia toman valor 1.

  De esta manera, toda fórmula condicional NO simple posee la valuación utilizada en el párrafo anterior, que siempre hará la expresión verdadera.

- 2) Sea $\alpha = p \rightarrow \alpha'$ una fórmula **condicional simple y cíclica**.

  Si es que la primera variable proposicional p es 0, entonces la fórmula completa es verdadera (demostrado en el ítem anterior).

  En caso de que la primera variable p **tome valor 1**, se debe demostrar que α' siempre valdrá 1, haciendo toda la fórmula verdadera y por tanto una tautología. Esto se realizará a continuación:

  Debido a la propiedad cíclica de la fórmula α, tenemos que la última variable de α' tomará valor 1, ya que es el mismo valor que la primera variable p. La fórmula α' se puede visualizar de la siguiente manera:

  $$\alpha' = (.... \rightarrow p)$$

  Por la forma que tienen las fórmulas condicionales, notamos que la última variable p necesariamente corresponderá al lado derecho de una implicancia. Además, se puede deducir la siguiente **propiedad recursiva**:

  Sean $\pi = (a \rightarrow b)$, $\tau = (\theta \rightarrow \pi)$, a, b y θ fórmulas condicionales. Si b toma valor 1, entonces la implicancia se cumple y π es verdadera, independiente del valor de a. A su vez, como π toma valor 1, τ tambíen será verdadera sin importar el valor de θ.

Aplicando esta propiedad recursiva a la fórmula α' obtenemos que la **fórmula completa debe ser verdadera**, ya que estamos en el caso de que p vale 1.

De esta manera queda demostrado que sin importar el valor de p en la fórmula condicional simple cíclica α, esta siempre será verdadera, por lo que corresponde a una tautología.

- 3) Sea α una fórmula **condicional cíclica NO simple**.

  Utilizando la propiedad del primer ítem, podemos simplificar α a $(\beta \rightarrow \gamma)$, con β y γ fórmulas condicionales simples. Además, notamos que la primera variable de α corresponde ahora a la primera variable de β, mientras que la última variable de α corresponde a la última variable de γ. Por la propiedad cíclica, estas 2 variables deben ser iguales. Para demostrar que toda fórmula condicional NO simple y cíclica NO es una tautología, basta con encontrar una valuación para $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ donde α no sea verdadera, es decir, una valuación para la cual β toma valor 1 y γ toma valor 0.

  Aplicando lo demostrado en el primer ítem, tenemos que si la primera variable p de β es 0, entonces β es **verdadera** (por ser condicional simple). A su vez, la última variable de γ debe **necesariamente valer 0**, ya que corresponde a p (propiedad cíclica). Esto se ilustra a continuación:

  $$\beta = (p = 0 \rightarrow ....) = 1$$

  $$\gamma = (.... \rightarrow p = 0)$$

  Análogo al ítem anterior, podemos observar que la última variable de γ, p, corresponde al lado derecho de una implicancia.

  Ahora, basta con que todas las otras variables de γ anteriores a p tomen valor 1, y utilizando la misma **propiedad recursiva** del ítem anterior (pero considerando $b = 0, a = \theta = 1$), se tiene que la fórmula γ será falsa.

  Como β es verdadera y γ es falsa para $p = 0$, entonces $\alpha = (\beta \rightarrow \gamma)$ es **falsa**, por lo que NO puede ser una tautología (se encontró un caso en el que NO es verdadera).