Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2018

GUIA 4
Cardinalidad

Los siguientes ejercicios son una recopilación de guías de ejercicios del curso de Matemáticas Discretas dictado por Marcelo Arenas y Jorge Pérez en años anteriores.

1. Demuestre que la relación $\approx$ (ser equinumeroso) es una relación de equivalencia.
2. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \cap B = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que $(A \cup B) \approx (C \cup D)$.
3. Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestre que si $A \approx C$, entonces $B \approx C$.
4. Sean A, B conjuntos infinitos. Demuestre que existen conjuntos C, D tales que $A \approx C$, $B \approx D$ y $C \cap D = \emptyset$.
5. Sea A un conjunto infinito.
   a) Demuestre que si existe una función inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$, entonces A es numerable.
   b) Demuestre que si existe una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to A$, entonces A es numerable.
6. Sean A y B dos conjuntos, diga si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, demostrando en el caso de ser verdadera y dando un contraejemplo en el caso de ser falsa.
   a) Si A es numerable y B finito, entonces $A \cup B$ es numerable.
   b) Si A y B son numerables, entonces $A \cap B$ es numerable.
   c) Si A es numerable y B finito, entonces $A \cap B$ es numerable.
   d) Si A y B son numerables, entonces $A \cup B$ es numerable.
7. Sea $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos tal que cada A_i ($i \in \mathbb{N}$) es numerable. Demuestre que el siguiente conjunto es numerable:

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

8. Demuestre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, vale decir, construya una biyección $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
9. Escriba un programa en C que muestre en pantalla todos los números racionales positivos en la forma `i/j` y tal que si estamos dispuestos a esperar un tiempo suficiente entonces cualquier racional será mostrado por el programa. Su programa debe ser tal que no repita racionales, por ejemplo si su programa muestra el racional `4/7` no debiera mostrar el racional `8/14`.
10. Demuestre que el conjunto de todos los strings ASCII que sólo tienen caracteres `a` y `b`, y tales que no contienen el substring `abb` es un conjunto numerable.

11. Sea $A = \{$los strings `s` de caracteres ASCII, tal que `s` NO es un programa válido en C$\}$. Demuestre que A es un conjunto numerable.

Sea A un conjunto, $\preceq$ un orden total sobre A y $B \subseteq A$. En los ejercicios 12 - 15, decimos que una función $f : B \to A$ es monótona decreciente si para cada $a, b \in B$ tal que $a \preceq b$, se tiene que $f(b) \preceq f(a)$. Además en estos ejercicios sólo consideramos funciones $f : B \to A$ totales, es decir, suponemos que f está definida para cada $a \in B$.

12. Considere el conjunto $\mathbb{N}$ con el orden total $\leq$ usual, y defina $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función monótona decreciente$\}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ es un conjunto numerable.

13. Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ con el orden total $\leq$ usual, y defina $\mathcal{G} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es una función monótona decreciente$\}$. Demuestre que $\mathcal{G}$ no es un conjunto numerable.

14. Sean A, B, C, D conjuntos infinitos tales que $A \approx C$ y $B \approx D$. Demuestre que los siguientes conjuntos son equinumerosos:

$$\{f \mid f : A \to B \text{ es una función}\} \;\text{ y }\; \{g \mid g : C \to D \text{ es una función}\}$$

15. Suponga que A es un conjunto numerable tal que $\mathbb{N} \subseteq A$. Además, suponga que $\preceq$ es un orden total para A tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \preceq m$ si sólo si $n \leq m$, donde $\leq$ es el orden usual para los números naturales. Finalmente, suponga que A tiene un menor elemento bajo $\preceq$, vale decir, existe $a \in A$ tal que para todo $b \in A$ se tiene que $a \preceq b$ (por ejemplo, $\mathbb{N}$ con el orden usual tiene un menor elemento, mientras que $\mathbb{Z}$ con el orden usual no lo tiene).

    Considere el conjunto A con el orden total $\preceq$, y defina $\mathcal{H} = \{f \mid f : \mathbb{N} \to A$ es una función monótona decreciente$\}$. ¿Es $\mathcal{H}$ un conjunto numerable? Justifique su respuesta.

16. Sea $\{0,1\}^\omega$ el conjunto de los strings infinitos de la forma $a_0 a_1 a_2 a_3 \cdots$, donde cada a_i ($i \in \mathbb{N}$) es 0 ó 1. Demuestre que $\{0,1\}^\omega$ es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$.

17. Sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ es infinito y $(\mathbb{N} \setminus A)$ es infinito$\}$. Por ejemplo, el conjunto P de los número pares está en $\mathcal{I}$, ya que P es infinito y su complemento $(\mathbb{N} \setminus P)$, los números impares, también es infinito. Demuestre que $\mathcal{I}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

18. Sea $\mathcal{T} = \{R \mid R$ es un orden total sobre $\mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{T}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

19. Sea $\mathcal{E} = \{\sim \mid \sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}\}$. Demuestre que $\mathcal{E}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

20. Demuestre que los siguientes conjuntos de números reales son equinumerosos: $[0,1]$ y $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

21. Demuestre que $\mathbb{R}$ es equinumeroso con $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$.

22. Un número real es *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, es decir, si es solución de una ecuación de la forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k = 0$$

    con $k \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, \ldots, k$. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es un número algebraico ya que es solución del polinomio $-2 + x^2 = 0$. Un número real es *trascendente* si no es algebraico. Demuestre que existen (*muchos*) reales trascendentes.

23. Una sucesión de números naturales es una secuencia $(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ tal que $s_i \in \mathbb{N}$ para todo i.

    a) Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales es numerable.

    b) Demuestre que el conjunto de todas las sucesiones infinitas de números naturales no es numerable.

24. En esta pregunta demostrará que hay funciones de bits que no pueden ser calculadas por un computador. Sea B el conjunto de todas las secuencias finitas de bits, $B = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, \ldots\}$, y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : B \to \{0, 1\}$. A modo de ejemplo de una función en $\mathcal{F}$, considere la función *paridad* : $B \to \{0, 1\}$ definida por

$$
paridad(b) = \begin{cases} 0 & \text{si la cantidad de 1's de } b \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si la cantidad de 1's de } b \text{ es par.} \end{cases}
$$

Por ejemplo, $paridad(00100) = 0$ y $paridad(1011001) = 1$. Una función $f \in \mathcal{F}$ se dice *computable* si existe una función `Computa_f` en C (o C++, o Java, o cualquier lenguaje de programación) que teniendo una secuencia de bits b como input[1], retorna $f(b)$. Por ejemplo, la función *paridad* es computable; es simple hacer una función `Computa_paridad` en C, que determine si la cantidad de 1's en una secuencia de bits es par. Demuestre que existen funciones en $\mathcal{F}$ que no son computables.

[1] la secuencia de bits puede representarse, por ejemplo, como un arreglo o una lista enlazada de 0's y 1's.