PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

# PAUTA TAREA 5

## Pregunta 1

### Pregunta 1.1

Una posible solución para demostrar que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son equinumerosos es mostrar que existen dos funciones $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ , ambas inyectivas:

- Es fácil ver que $f_1(a) = a + 0i$ es una inyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.
- Para la inyección de vuelta consideramos $f_2(a+bi) = a_n b_n ... a_2 b_2 a_1 b_1, a_{-1} b_{-1} ...$ donde $x_n ... x_2 x_1, x_{-1} x_{-2} ...$ es la expansión decimal de $x \in \mathbb{R}$, y podemos suponer sin perder generalidad que la expansión de $a$ y $b$ tienen la misma cantidad de dígitos, pues en caso de que no, podemos rellenar con ceros a la izquierda. Por ejemplo, $f_2(30 + 1234i) = 010223304$ y no $f_2(30 + 123i) = 123304$.

  Para mostrar que es inyectiva, supongamos que $f_2(a + bi) = f_2(c + di)$. Luego:

  $$f(c + di) = a_n b_n ... a_2 b_2 a_1 b_1, a_{-1} b_{-1} ...$$

  Así, por definición de la función, la expansión decimal de $c$ es $a_n ... a_2 a_1, a_{-1} a_{-2} \dots$ y la de $d$ es $b_n ... b_2 b_1, b_{-1} b_{-2} \dots$. Finalmente, $a = c$ y $b = c$, es decir, $a + bi = c + di$.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(4 puntos)** Mostrar ambas funciones junto con una demostración correcta y clara de la inyectividad.
- **(3 puntos)** Mostrar ambas funciones y pequeños errores demostrando inyectividad.
- **(0 puntos)** Otros casos.

### Pregunta 1.2

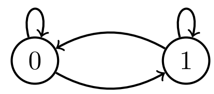
Para esta pregunta había que utilizar el argumento de la diagonalización de Cantor. En efecto, supongamos que $\Sigma^\omega$ es numerable: $\Sigma^\omega = \{s_0, s_1, ...\}$. Sea $s_k = s_{1k} s_{2k} s_{3k} ...$ la $k$-ésima palabra en la enumeración de $\Sigma^\omega$. Finalmente, consideremos $s^\omega = s'_1 s'_2 s'_3 ...$ una palabra con letras de $\Sigma$ tal que $s'_i$ es una letra (símbolo) distinto a $s_{ii}$ (notar que se puede elegir $s'_i \neq s_{ii}$ por que el alfabeto tiene al menos dos letras). Entonces $s^\omega \notin \Sigma^\omega$, porque difiere siempre en al menos una letra con todas las palabras del conjunto. Por otro lado, $s^\omega$ es una secuencia de letras de $\Sigma$, por lo que $s^\omega \in \Sigma^\omega$, resultando una contradicción.

- **(4 puntos)** Demostración correcta y clara utilizando el argumento de la diagonal de Cantor.
- **(3 puntos)** Demostración con pequeños errores u omisiones.
- **(0 puntos)** Otros casos.

# Pregunta 2

### Pregunta 2.1

Una posible solución consiste en hacer uso de lo demostrado en el problema 1.2. Considere el grafo $G_1$:



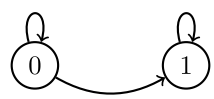

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ un alfabeto finito, donde claramente $|\Sigma| \geq 2$ y $w$ una palabra en $\Sigma^w$. Si $w = v_0 v_1 v_2 ...$ tal que $v_i \in \Sigma$, se puede asignar la secuencia $v_0 v_1 v_2 ...$ como un camino infinito en $G_1$. Por tanto $C^w_{G_1}$ es no numerable. Alternativamente, se puede argumentar utilizando el argumento de la diagonal de Cantor.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0 puntos)** Por no dar ejemplo o por darlo sin argumentación .
- **(3 puntos)** Por dar ejemplo y argumentar con errores pequeños.
- **(4 puntos)** Por dar ejemplo y argumentar correctamente.

### Pregunta 2.2

Considere el siguiente grafo $G_2$:




Sea $S \in C^w_{G_2}$, tal que $S = \underbrace{000000}_{\text{k-veces}} \cdots 111111..$ Se puede definir la función $f : C^w_{G_2} \to \mathbb{N}$ tal que,

$$f(S) = k + 1$$

y para $S^* \in C^w_{G_2}$ donde $S^* = 00000000 \cdots 00000..$

$$f(S^*) = 0$$

Como fue definida $f$, es fácil demostrar que es biyectiva.

Dado lo anterior, el puntaje asignado es el siguiente:

- **(0 puntos)** Por no dar ejemplo o por darlo sin argumentación.
- **(3 puntos)** Por dar ejemplo y argumentar con errores pequeños.
- **(4 puntos)** Por dar ejemplo y argumentar correctamente.