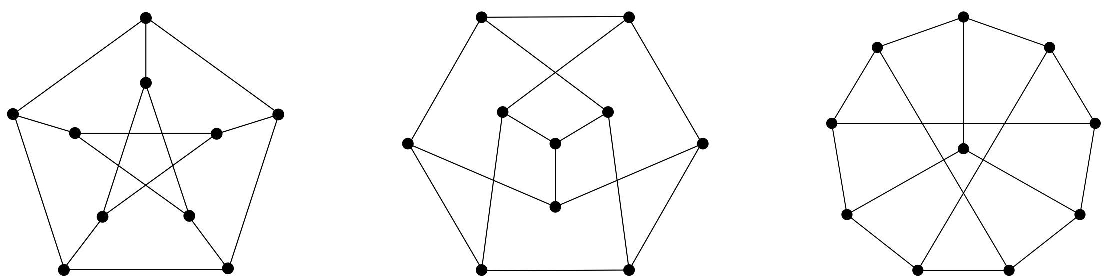
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas – 1'2019

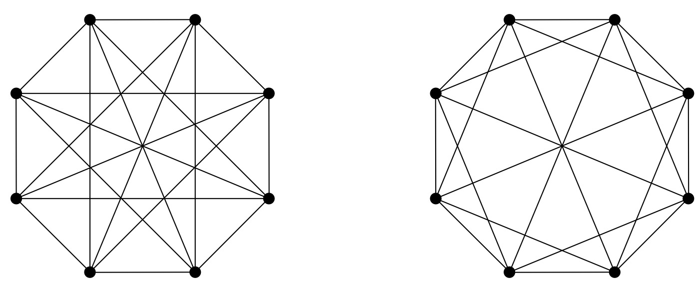
GUIA 8
Teoría de Grafos

Los siguientes ejercicios son una recopilación de guías de ejercicios del curso de Matemáticas Discretas dictado por Jorge Pérez en años anteriores.

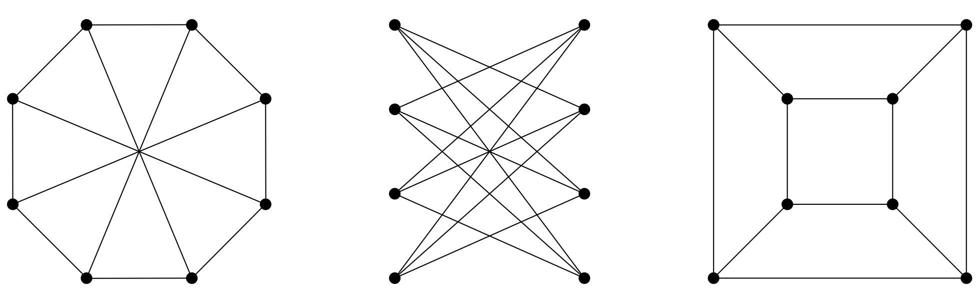
1. Muestre que los siguientes tres grafos son isomorfos. Muestre la función biyectiva que define el isomorfismo.



2. Determine si los siguientes grafos son o no isomorfos, si lo son muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



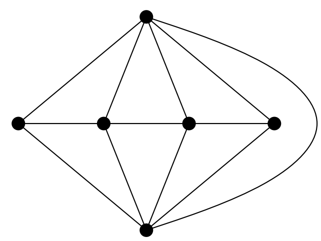
3. Determine cuáles pares de los siguientes grafos son isomorfos. Para los pares isomorfos muestre una función biyectiva que defina el isomorfismo.



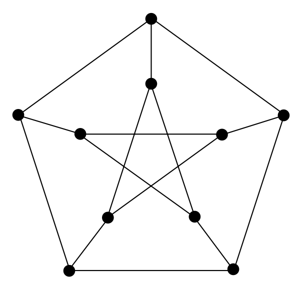
Un grafo $G = (V, E)$ se dice bipartito, si existe una partición de $V = V_1 \cup V_2$ tal que $E \cap 2^{V_1} = E \cap 2^{V_2} = \emptyset$. En otras palabras, las aristas E son exclusivamente entre pares de vértices de V_1 y V_2, pero no entre vértices solo de V_1 o solo de V_2.

4. Considere las clases de grafos: A) caminos, B) ciclos, C) grafos completos y D) grafos bipartitos. Para cada par de las clases nombradas, encuentre todos los grafos que pertenecen a ambas clases, por ejemplo, $P_1 \cong K_2$ por lo que el camino de dos vértices pertenece a las clases A) y C).

5. Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $A \subseteq V$ se dice independiente si $E \cap 2^A = \emptyset$, o sea, no hay aristas en E que conecten elementos de A. Determine el tamaño máximo de un clique y de un conjunto independiente en el siguiente grafo.



6. Determine si el grafo de Petersen:



es o no bipartito y encuentre el tamaño del conjunto independiente más grande en él y del clique más grandes en él.

7. Se define el complemento de un grafo $G = (V, E)$ como $\overline{G} = (V, \overline{E})$ tal que $\overline{E} = \{e \in 2^V \mid |e| = 2 \wedge e \notin E\}$. Un grafo G se dice autocomplementario si G es isomorfo a $\overline{G}$ (G es isomorfo a su complemento).

   a) Encuentre un grafo con 5 vértices que sea autocomplementario.

   b) ¿Puede un grafo con 3 vértices ser autocomplementario? ¿Y uno con 6 vértices?

   c) Demuestre que si un grafo con n vértices es autocomplementario entonces necesariamente $n(n-1)$ es divisible por 4. (Ayuda: Piense en el grafo completo K_n y en la cantidad de aristas de G y $\overline{G}$ con respecto a las aristas de K_n.)

8. Determine si K_4 contiene

   a) Un camino no cerrado que repita vértices.

   b) Un camino cerrado que no sea un ciclo.

9. Sea $G = (V, E)$ tal que el conjunto de vértices es $V = \{1, 2, \ldots, 15\}$, y un par $ij \in E$ si y sólo si $i \neq j$, y ocurre que i y j tienen un divisor común distinto de 1. Cuente las componentes conexas de G y encuentre el tamaño del camino más largo en G.

10. Diga verdadero o falso justificando su respuesta en cada caso.

a) Si G es un grafo no conexo entonces tiene un vértice aislado (un vértice de grado 0).

b) Un grafo G es conexo si y sólo si existe un vértice de G que es vecino de todos los demás vértices de G.

11. Sea G un grafo con n vértices y exactamente dos componentes conexas cada componente con m_1 y m_2 vértices ($m_1 + m_2 = n$). ¿Cuál es la cantidad máxima de aristas que puede tener G? Justifique.

12. Sea G un grafo cuyo conjunto de vértices son todas las secuencias de n bits, y tal que dos vértices x, y están conectados si y solo si x e y difieren exactamente en 2 posiciones, por ejemplo, si $n = 4$ los vértices 0011 y 1111 estarían conectados por una arista. Determine la cantidad de componentes de G.

13. Demuestre que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y sólo si para cada par de subconjuntos no vacíos de vértices U y W tales que $U \cup W = V$ y $U \cap W = \emptyset$, existe una arista en E que une a un vértice de U con un vértice de W.

14. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y v un vértice cualquiera de él. Considere el grafo $G - v = (V - \{v\}, E \cap 2^{V-\{v\}})$, o sea, el grafo que resulta de eliminar v de G. Demuestre que v tiene un vecino en cada una de las componentes conexas de $G - v$.

15. Un vertice v se dice de corte si al eliminar v del grafo se vuelve disconexo. Use el resultado del item anterior para concluir que ningún grafo tiene un vértice de corte de grado 1.

16. Sean r y s dos números enteros positivos. Sea G un grafo simple con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, tal que los vértices v_i y v_j son vecino si y sólo si $|i - j| = s$ o $|i - j| = r$. Muestre que G tiene k componentes donde k resulta de tomar el máximo común divisor entre r, s y n.

17. Recuerde que en un grafo conexo G un vértice v es de corte si el grafo $G - v$ (el grafo que resulta de G al sacar el vértice v y todas sus aristas incidentes) no es conexo.

    a) Encuentre un grafo con 6 vértices y exactamente tres vértices de corte.

    b) Encuentre un grafo con 6 vértices que no tenga vértices de corte.

    c) Demuestre que v es un vértice de corte en G si y sólo si existen vértices u y w tales que cualquier camino desde u a w pasa por v.

18. Sea v un vértice de corte en G, demuestre que $\overline{G} - v$ es conexo.

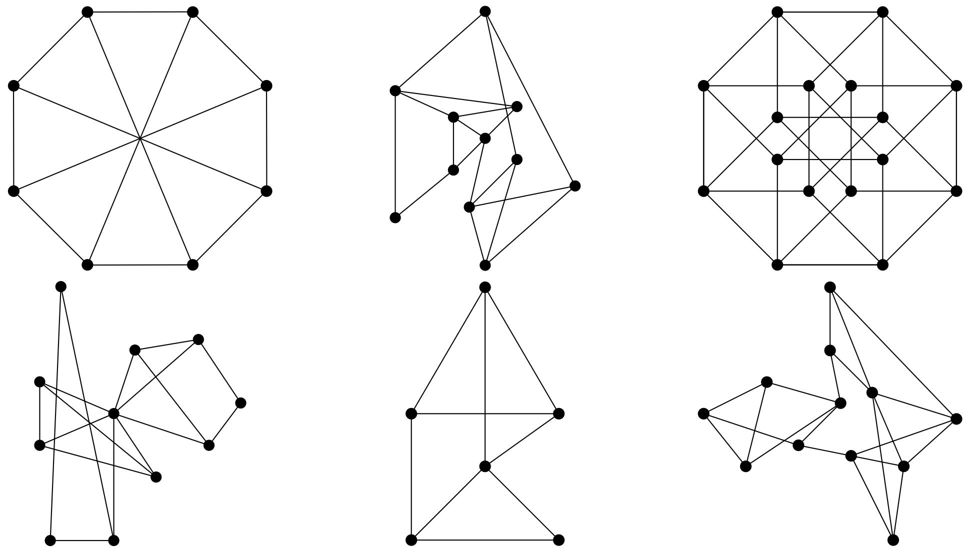
19. Para cada uno de los siguientes grafos conexos determine:

    a) El mínimo número de aristas que es necesario sacar para desconectar el grafo.

    b) El máximo número de aristas que se pueden sacar de tal manera que el grafo siga siendo conexo.

    c) El mínimo número de vértices que es necesarios sacar para desconectar el grafo o dejarlo vacío (al sacar un vértice de un grafo se sacan además todas las aristas incidentes a ese vértice).

    d) El máximo número de vértices que se pueden sacar de tal manera que el grafo siga siendo conexo o quede vacío.



20. Sea G un grafo Euleriano y e una arista cualquiera de G. Demuestre que $G - e$ (el grafo que resulta de G al sacar la arista e) es conexo.

21. Sea G un grafo Euleriano y v un vértice cualquiera de G. Demuestre que $G - v$ (el grafo que resulta de G al sacar v y sus aristas incidentes) no es un grafo Euleriano.

22. Diga verdadero o falso justificando en cada caso.

    a) Un grafo bipartito, si es Euleriano entonces tiene una cantidad par de aristas.

    b) Un grafo (simple) Euleriano con una cantidad par de vértices siempre tiene una cantidad par de aristas.

23. Muestre un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones.

    a) Si G es conexo entonces $\overline{G}$ no es conexo.

    b) Si G tiene un ciclo Euleriano entonces $\overline{G}$ también tiene un ciclo Euleriano.

    c) Si G tiene un ciclo Euleriano entonces $\overline{G}$ no tiene un ciclo Euleriano.

    d) Si G tiene un ciclo Euleriano entonces $\overline{G}$ no es conexo.

24. Sea G un grafo conexo, y e una arista de G. Demuestre que si e no es parte de un ciclo en G entonces el grafo que resulta de G al quitar la arista e no es conexo.