Propiedades de relaciones

Clase 09

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Propiedades de relaciones binarias

1. Refleja
2. Irrefleja
3. Simétrica
4. Asimétrica
5. Antisimétrica
6. Transitiva
7. Conexa

Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \in R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \in R$$

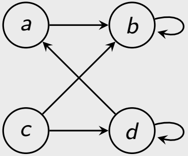
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a, a) \notin R$.

$$\forall a \in A.\ \ (a, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ &(a, b),\ (b, b),\ (c, b), \\ &(c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

NO es refleja ni irrefleja



Relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. R es una relación **refleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a,a) \in R$.

$$\forall a \in A. \;\; (a,a) \in R$$

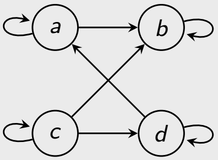
2. R es una relación **irrefleja** si para cada $a \in A$ se tiene $(a,a) \notin R$.

$$\forall a \in A. \;\; (a,a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \;\; = \;\; \{\, & (a,b),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,b), \\ & (c,c),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,d) \,\} \end{aligned}$$

Refleja



Ejemplo de relaciones reflejas e irreflejas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$

¿cuáles relaciones son reflejas o irreflejas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Si R NO es refleja, entonces ¿es R irrefleja?

Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

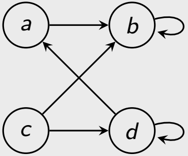
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a,b) \in R$, entonces $(b,a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a,b),\ (b,b),\ (c,b),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,d) \}$$

NO es simétrica ni asimétrica



Relaciones simétricas y asimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

3. R es **simétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

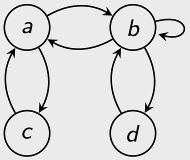
4. R es **asimétrica** si para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$, entonces $(b, a) \notin R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ & (a, b),\ (a, c),\ (b, a), \\ & (b, b),\ (b, d),\ (c, a),\ (d, b)\ \} \end{aligned}$$

Relación simétrica



Relaciones antisimétricas

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

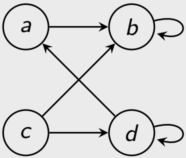
5. R es **antisimétrica** si
para cada $a, b \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, entonces $a = b$.

$$\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, a) \in R\big) \ \rightarrow\ a = b$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ &(a, b),\ (b, b),\ (c, b), \\ &(c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

Relación antisimétrica



Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ \ (a,b) \in R \ \rightarrow\ (b,a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \ (a,b) \in R \ \rightarrow\ (b,a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \ \big((a,b) \in R \ \wedge\ (b,a) \in R\big) \ \rightarrow\ a = b.$

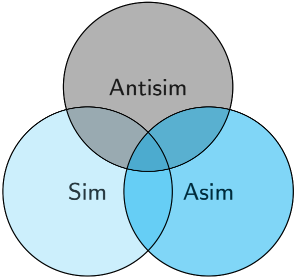
¿cuáles relaciones son (a, anti)simétricas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Ejemplo de relaciones (a, anti)simétricas

Definiciones

3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a,b) \in R \land (b,a) \in R\big) \rightarrow a = b.$



Encuentre un ejemplo para cada intersección.

Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R\big) \ \rightarrow \ (a, c) \in R$$

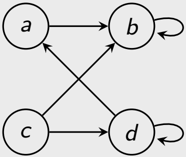
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \ \vee \ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} R \quad = \quad \{\ &(a, b),\ (b, b),\ (c, b),\\ &(c, d),\ (d, a),\ (d, d)\ \} \end{aligned}$$

NO es transitiva ni conexa



Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, c) \in R\big)\ \rightarrow\ (a, c) \in R$$

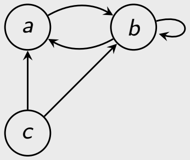
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R\ \vee\ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{\,(a, b),\ (b, a),\ (b, b),\ (c, a),\ (c, b)\}$$

No es conexa ni transitiva



Relaciones transitivas y conexas

Definición

6. R es **transitiva** si
   para cada $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, entonces $(a, c) \in R$.

$$\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \ \wedge \ (b, c) \in R \big) \ \rightarrow \ (a, c) \in R$$

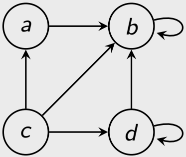
7. R es **conexa** si para cada $a, b \in A$, $(a, b) \in R$ o $(b, a) \in R$.

$$\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \ \vee \ (b, a) \in R$$

Ejemplo

$$R = \{ (a,b),\ (b,b),\ (c,a),\ (c,b),\ (c,d),\ (d,b),\ (d,d) \}$$

Relación transitiva no conexa



Ejemplo de relaciones transitivas y conexas

Definiciones

6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R\ \wedge\ (b, c) \in R\big) \rightarrow (a, c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R\ \vee\ (b, a) \in R.$

¿cuáles relaciones son transitivas o conexas?

- $A \subseteq B$
- $n = m$
- $n < m$
- $a \mid b \quad \big(a \text{ divide } b \text{ ssi } \exists k \in \mathbb{N}.\ a \cdot k = b\big)$

Outline

Tipos de relaciones (resumen)

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \in R.$
2. **Irrefleja**: $\forall a \in A.\ (a, a) \notin R.$
3. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$
4. **Asimétrica**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$
5. **Antisimétrica**: $\forall a, b \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \big) \rightarrow a = b.$
6. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \big((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \big) \rightarrow (a, c) \in R.$
7. **Conexa**: $\forall a, b \in A.\ (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

¿es posible **caracterizar** cada propiedad
en termino de operaciones entre relaciones?

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Unión**: $R_1 \cup R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ o $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cup R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ o } (x, y) \in R_2\}$$

- **Intersección**: $R_1 \cap R_2$ son todos los pares (x, y) tal que $(x, y) \in R_1$ y $(x, y) \in R_2$.

$$R_1 \cap R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ y } (x, y) \in R_2\}$$

Recordatorio: operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A. \ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

- **Relación identidad**: I_A contiene solo los pares (x, x) para todo $x \in A$.

$$I_A \quad = \quad \{(x, x) \mid x \in A\}$$

Caracterización de propiedades en termino de operaciones

Teorema

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

1. R es **refleja** ssi $I_A \subseteq R$.
2. R es **irrefleja** ssi $R \cap I_A = \emptyset$.
3. R es **simétrica** ssi $R = R^{-1}$.
4. R es **asimétrica** ssi $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
5. R es **antisimétrica** ssi $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
6. R es **transitiva** ssi $R \circ R \subseteq R$.
7. R es **conexa** ssi $R \cup R^{-1} = A \times A$.

Demostración: ejercicio.