NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 5 – Respuesta Pregunta 1

- 1) Comenzamos analizando la estructura de un número complejo:

$$z = a + bi$$

Por definición de los números complejos, a y b son coeficientes tales que $a, b \in \mathbb{R}$, mientras que i es una constante fija equivalente a $\sqrt{-1}$. Luego, cualquier número complejo puede ser representado con un par (a, b), donde sus componentes corresponden a los coeficientes a, b indicados anteriormente. A modo de ejemplo, el número π se representaría mediante el par $(\pi, 0)$, y el número i mediante el par $(0, 1)$. Esto significa que al tomar todos los pares (a, b) posibles, con $a, b \in \mathbb{R}$, se pueden obtener todos los números complejos.

Gracias a esta intuición, se define la siguiente función:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$$f((a, b)) = a + bi$$

Esta función transforma a todo par $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en su número complejo correspondiente, según lo explicado en el párrafo anterior. A continuación se demostrará que además corresponde a una biyección.

- **Inyectividad**: Se demuestra por contradicción, partiendo de la premisa de que la función **NO** es inyectiva, lo que implica que existen dos pares **distintos**, (a, b) y (c, d), tales que $f((a, b)) = f((c, d))$. Esto es lo mismo que escribir $a + bi = c + di$. Por definición, un número complejo es igual a otro SSI sus partes reales e imaginarias son iguales. De esto se obtiene que $a = c$ y $b = d$. Se desprende que $(a, b) = (c, d)$, lo que contradice la premisa inicial, y por lo tanto la función **sí es inyectiva**.

- **Sobreyectividad**: Se toma un número complejo cualquiera $z = a + bi$. Por definición de los números complejos (explicado en el primer párrafo), se tiene que $a, b \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, por construcción del conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(\forall a, b \in \mathbb{R}.(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, es directo que $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Luego, para cada número complejo con coeficientes reales a y b, se tiene que $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por lo que la función **es sobreyectiva**.

Como la función definida es tanto inyectiva como sobreyectiva, se obtiene que corresponde a una biyección. Como se encontró una biyección desde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ hasta $\mathbb{C}$, llegamos a que estos conjuntos son **equinumerosos**.

Queda por demostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es equinumeroso con $\mathbb{R}$. Para esto definimos la siguiente función:

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$g(r_i) = (p_i, q_i)$$

El número real p_i tiene la misma parte entera que r_i, mientras que su parte decimal se forma con todos los números que ocupan un lugar **impar** en la parte decimal de r_i. Análogamente, el número real q_i también posee la misma parte entera de r_i, pero su parte decimal se forma con todos los números que ocupan un lugar **par** en la parte decimal de r_i. A modo de ejemplo, si $r_i \in \mathbb{R}$ es el número e:

$$r_i = 2.71828182....$$

$$p_i = 2.7888........$$

$$q_i = 2.1212........$$

$$g(r_i) = (2.7888...., 2.1212....)$$

Al tomar 2 números reales distintos, estos por definición de igualdad entre números reales deben diferir en su parte entera o en al menos uno de sus decimales. Esto significa que al aplicar la función g sobre 2 números reales distintos, el resultado también será un par distinto, ya que **al menos** uno de los decimales (o la parte entera) que forman al número p_i o al número q_i será distinto. Luego, la función g es inyectiva.

Ahora se define otra función:

$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h((a, b)) = r$$

Esta función toma un par $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y realiza el siguiente algoritmo para obtener un número real r:

- **1)** Se comparan las partes enteras de a y b. Si estas tienen la misma cantidad de cifras, se realiza el paso 2. En caso contrario, se agregan ceros a la izquierda de la parte entera que tenga menos cifras entre las 2, hasta que ambas tengan la misma cantidad de cifras, tras lo que se realiza el paso 2.

- **2)** Se toma el primer número de la parte entera izquierda, y se le coloca a la derecha el primer número de la parte entera derecha. Luego, se toma el segundo número de la parte izquierda y se coloca a la derecha del último número que se agregó, seguido del segundo de la parte derecha. A continuación, se realiza esto para todos los números restantes en ambas partes enteras, alternando entre la izquierda y la derecha, para obtener finalmente una parte entera resultante de 'mezclar' las cifras de las 2 partes enteras originales. Esta corresponderá a la parte entera del número real r.

- **3)** En este paso se realiza lo mismo que en el anterior, pero para las partes decimales de los números a y b, obteniendo así la parte decimal del número r.

- **4)** Finalmente, se forma el número r a partir de las partes entera y decimal obtenidas.

Para poder visualizar mejor esto, se ilustra con el siguiente ejemplo:

$$(a, b) = (1.123...., 33.001....)$$

Paso 1: Como la parte entera de a (E_a) tiene 1 cifra menos que la de b (E_b), se le agrega un 0 a la izquierda:

$$E_a = 01$$

$$E_b = 33$$

Paso 2: Se realiza la mezcla alternando entre E_a y E_b, para así obtener E_r:

$$E_r = 0313 = 313$$

Paso 3: Se realiza la mezcla para las partes decimales, obteniendo D_r:

$$D_r = 102031...$$

Paso 4: Se obtiene el número r a partir de E_r y D_r:

$$r = 313.102031...$$

Ahora, gracias al mismo argumento utilizado para la función g, se tiene que para 2 pares distintos, la función h entregará 2 números reales distintos. Esto ocurre porque al ser 2 pares distintos, al menos uno de los elementos en cada par deberá ser distinto al correspondiente del otro, y al ser un número distinto, la mezcla del algoritmo también arrojará un resultado diferente, ya que depende de absolutamente **todas** las cifras de cada número y además del orden en que estén ambos números ((a,b) y (b,a) dan resultados distintos, ya que se comienzan a mezclar en distinto orden). Gracias a esto, tenemos que la función h también es inyectiva.

Como encontramos 2 funciones inyectivas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por el **Teorema CSB** se llega a que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son **equinumerosos**.

Finalmente, se concluye que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son **equinumerosos**, demostrando lo pedido.

- 2) Vamos a demostrar por contradicción que el conjunto de palabras infinitas Σ^w es No Numerable. Para esto, partimos de la premisa de que el conjunto sí es Numerable, y por lo tanto se pueden representar todos sus elementos en la siguiente matriz infinita:

$$\begin{bmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} & \cdots & s_{0n} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n0} & s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

En esta matriz, cada fila representa una palabra infinita $w_i \in \Sigma^w$, con $i \in \mathbb{N}$, mientras que cada columna representa al j-ésimo símbolo $s_j \in \Sigma$ de cada palabra. De esta manera, cada elemento s_{ij} en la matriz corresponde al j-ésimo símbolo de la i-ésima palabra infinita del conjunto.

A continuación tomamos la diagonal de la matriz, formada por todos los símbolos $d_i = s_{ii}$, obteniendo la palabra infinita $w_d = s_{00}s_{11}....s_{nn} = d_0d_1....d_n$. Ahora formamos una nueva palabra $w*$, donde su i-ésimo símbolo será un $r_i \in \Sigma - \{d_i\}$, es decir, cualquier símbolo del alfabeto Σ que sea distinto al símbolo que ocupa el i-ésimo lugar en la palabra w_d (esto es posible debido a que sabemos que la cardinalidad de Σ es mayor o igual a 2, es decir, que hay al menos 2 símbolos distintos en el alfabeto).

Al analizar esta nueva palabra resultante, se puede ver que para cada fila $i \leq n$ de la matriz, esta será distinta a la palabra $w*$, ya que **al menos** su símbolo i-ésimo s_{ii} será distinto al símbolo i-ésimo r_i de $w*$ (por construcción).

Se desprende que la palabra $w*$ no está representada en ninguna fila de la matriz, pero aun así cumple con ser una palabra infinita formada por símbolos de Σ, lo que contradice la premisa de que el conjunto Σ^w es Numerable, y por lo tanto el conjunto debe necesariamente ser **NO Numerable**.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 5 – Respuesta Pregunta 2

- 1) Se elige un grafo de 2 vértices conectados entre sí, donde además cada uno tiene una arista hacia sí mismo. Este se define a continuación:

$$V_1 = (0, 1)$$
$$E_1 = ((0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1))$$
$$G_1 = (V_1, E_1)$$

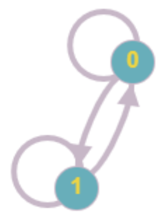

Figure 1: Grafo Con $C^w_{G_1}$ infinito no-numerable

Para demostrar que $C^w_{G_1}$ es no numerable, se utilizará el mismo argumento que en la pregunta 1b. Se parte desde la premisa de que $C^w_{G_1}$ es numerable, lo que significa que puede ser totalmente representado por la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & \dots & v_{0n} \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_{n0} & v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

En esta matriz, cada fila representa un camino infinito $p_i \in C^w_{G_1}$, con $i \in \mathbb{N}$, mientras que cada columna representa al j-ésimo vértice $v_j \in V_1$ de cada camino. De esta manera, cada elemento v_{ij} en la matriz corresponde al j-ésimo vértice del i-ésimo camino infinito del conjunto.

A continuación tomamos la diagonal de la matriz, formada por todos los vértices $d_i = v_{ii}$, obteniendo el camino infinito $p_d = v_{00}v_{11}....v_{nn} = d_0d_1....d_n$. Ahora formamos un nuevo camino $p*$, donde su i-ésimo vértice será $n_i \in V_1 - \{d_i\}$, es decir, **el otro vértice** del conjunto V_1 que **NO** ocupaba el i-ésimo lugar en el camino p_d. Es posible formar este nuevo camino gracias a que, como ambos vértices tienen 2 aristas saliendo de ellos, siempre se puede cambiar un vértice en cualquier posición de los caminos infinitos por otro, simplemente tomando otra arista que sale del vértice que le precede.

Esto se puede entender mejor tomando un conjunto O_i que contiene a todos los vértices v_{i+1} tal que existe la arista (v_i, v_{i+1}). Luego, al intentar reemplazar el vértice v_i de un camino infinito, se debe revisar el conjunto O_{i-1} para ver si su cardinalidad es mayor a 1, lo que significa que se puede tomar otra arista desde el vértice v_{i-1} hasta un **nuevo** vértice v_i. Para este grafo en particular, en el caso de que el vértice v_i sea el vértice 0, se tiene que $O_i = (0, 1)$. En el caso de que el vértice v_i sea el vértice 1, también se tiene que $O_i = (0, 1)$. Por lo tanto, se desprende que siempre se podrá cambiar el vértice v_i por el nuevo vértice n_i, según lo explicado en el párrafo anterior.

Al analizar el nuevo camino infinito $p*$, se puede ver que para cada fila $i \leq n$ de la matriz, esta será distinta a la secuencia de vértices de $p*$, ya que **al menos** su vértice i-ésimo v_{ii} será distinto al vértice i-ésimo n_i de $p*$ (por construcción).

Se obtiene que el camino infinito $p*$ no está representado en ninguna fila de la matriz, pero aun así corresponde a un posible camino infinito en el grafo G_1, lo que contradice la premisa de que el conjunto $C^w_{G_1}$ es Numerable, y por lo tanto el conjunto debe necesariamente ser infinito **NO Numerable**.

- 2) Se elige un grafo como el anterior, pero sin la arista que va desde el vértice 0 a sí mismo. Este se define a continuación:

$$V_2 = (0, 1)$$
$$E_2 = ((0, 1), (1, 0), (1, 1))$$
$$G_2 = (V_2, E_2)$$

Figure 2: Grafo Con $C^w_{G_2}$ infinito numerable

Se utiliza la misma matriz del ítem anterior bajo la premisa de que $C^w_{G_2}$ es numerable:

$$\begin{bmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & \dots & v_{0n} \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ v_{n0} & v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta vez, cada fila representa un camino infinito $p_i \in C^w_{G_2}$, con $i \in \mathbb{N}$, mientras que cada columna representa al j-ésimo vértice $v_j \in V_2$ de cada camino.

Al analizar el conjunto O_i definido en el ítem anterior, se encuentran diferencias entre los 2 grafos. Para este grafo, en el caso de que el vértice v_i sea el vértice 0, se tiene que $O_i = (1)$. En el caso de que el vértice v_i sea el vértice 1, se tiene que $O_i = (0, 1)$. Se puede observar que en este caso sólo hay una arista que sale del vértice 0, lo que significa que si v_i corresponde a dicho vértice, entonces la cardinalidad del conjunto O_i será 1.

Consecuentemente, existen filas i de la matriz en las que $v_{i-1} = 0$, por lo que el i-ésimo vértice v_i del camino infinito no se podrá cambiar por otro debido a que el vértice que le precede, v_{i-1}, corresponde al 0 (que sólo tiene una arista hacia el 1). Esto hace que sea imposible la existencia de un nuevo camino que no esté representado en la matriz (como el $p*$ del ítem anterior), por lo que se concluye que la matriz efectivamente representa a todos los caminos infinitos del conjunto $C^w_{G_2}$, por lo que este es infinito **numerable**.