Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 8

Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein

Problema 1

Sea $E = \{\sim \mid \sim$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}\}$. Demuestre que E y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

Solución propuesta.

Primero, recordemos que una relación binaria R sobre un conjunto A es un conjunto de pares de elementos de A, es decir, $R \subseteq A \times A$ o en términos de conjunto potencia, $R \in 2^{A\times A}$. Además, recordemos que R es relación de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva.

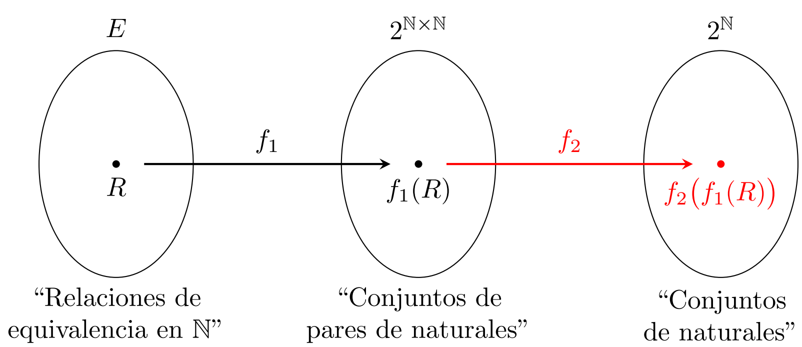
Para mostrar que el conjunto E de relaciones de equivalencia en $\mathbb{N}$ es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$, mostraremos dos funciones inyectivas $f : E \to 2^{\mathbb{N}}$ y $g : 2^{\mathbb{N}} \to E$.

Parte 1: f

Dado que cada relación $R \in E$ es un conjunto de pares de naturales, $E \subseteq 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Luego, la función $f_1 : E \to 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ definida por

$$f_1(R) = R$$

es una función inyectiva, pues para cualesquiera relaciones $R_1, R_2 \in E$ distintas, $f_1(R_1) = R_1 \neq R_2 = f_1(R_2)$. Con esta función, llegamos a medio camino de nuestro objetivo, pues nos falta una función inyectiva $f_2 : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ que se muestra en rojo:



Para construir esta función, recordemos que $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ son equinumerosos y por lo tanto, existe una biyección $h : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. La función f_2 que necesitamos toma como argumento un conjunto de pares de naturales y queremos asociarle un conjunto de naturales. Usando h, definimos $f_2 : 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ según

$$f_2(R) = \{h((x, y)) \mid (x, y) \in R\}$$

que es inyectiva pues si tomamos $R_1, R_2 \in 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ tales que $R_1 \neq R_2$, entonces al menos hay un elemento (x,y) que los diferencia. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x,y) \in R_1$ y $(x,y) \notin R_2$. Luego, $h(x,y) \in f_2(R_1)$ y $h(x,y) \notin f_2(R_2)$ gracias a que h es inyectiva. Con esto, $f_2(R_1) \neq f_2(R_2)$ y por ello f_2 es inyectiva.

Con esto, la función $f(R) = f_2(f_1(R))$ es inyectiva y es tal que $f : E \to 2^{\mathbb{N}}$. Nótese que para esta parte del ejercicio, no usamos el hecho de que los elementos de E son relaciones de **equivalencia**. Solo usamos el hecho de que son subconjuntos de pares de naturales.

Parte 2: g

¿Cómo podemos construir una relación de equivalencia a partir de un conjunto de naturales? La función $g : 2^{\mathbb{N}} \to E$ debe hacer precisamente esto. La relación de equivalencia más *pequeña* que podemos definir para un conjunto A es aquella cuyo grafo que tiene todas las aristas reflejas y ninguna arista entre vértices diferentes. Es decir, es la relación identidad. Luego, definimos $g : 2^{\mathbb{N}} \to E$ según

$$g(A) = \{(i,i) \mid i \in A\}$$

Para todo $A \in 2^{\mathbb{N}}$, $g(A)$ es una relación refleja, simétrica y transitiva, por lo que es de equivalencia y con ello $g(A) \in E$.

Para justificar que g es inyectiva, sean $A, B \in 2^{\mathbb{N}}$ distintos. Sin pérdida de generalidad, como A y B son distintos, supongamos que existe un $a \in A$ tal que $a \notin B$. Luego, $(a,a) \in g(A)$ y $(a,a) \notin g(B)$ por lo cual, $g(A) \neq g(B)$. Con esto, g es inyectiva.

Parte 3: conclusión con Teorema CSB

Dado que existen funciones inyectivas $f : E \to 2^{\mathbb{N}}$ y $g : 2^{\mathbb{N}} \to E$, por el teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein los conjuntos E y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos, tal como se pedía demostrar.

Problema 2

Sea $\mathcal{I} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito y } (\mathbb{N} \setminus A) \text{ es infinito}\}$. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{P}$ de los números pares está en $\mathcal{I}$ ya que $\mathbb{P}$ es infinito y su complemento $(\mathbb{N} \setminus \mathbb{P})$, los números impares, también es infinito.

Demuestre que $\mathcal{I}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.

Solución propuesta.

Al igual que en el problema anterior, usaremos el teorema CSB para concluir. Por esto, necesitamos encontrar dos funciones inyectivas f y g tales que $f : \mathcal{I} \to 2^{\mathbb{N}}$ y $g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{I}$.

Parte 1: f

Todo elemento $A \in \mathcal{I}$ es un conjunto de naturales, por lo que $A \in 2^{\mathbb{N}}$. Entonces, tomamos la función $f : \mathcal{I} \to 2^{\mathbb{N}}$ dada por

$$f(A) = A$$

que es inyectiva. En efecto, si $A, B \in \mathcal{I}$ son distintos, entonces sus imágenes también son distinas: $f(A) = A \neq B = f(B)$.

Parte 2: g

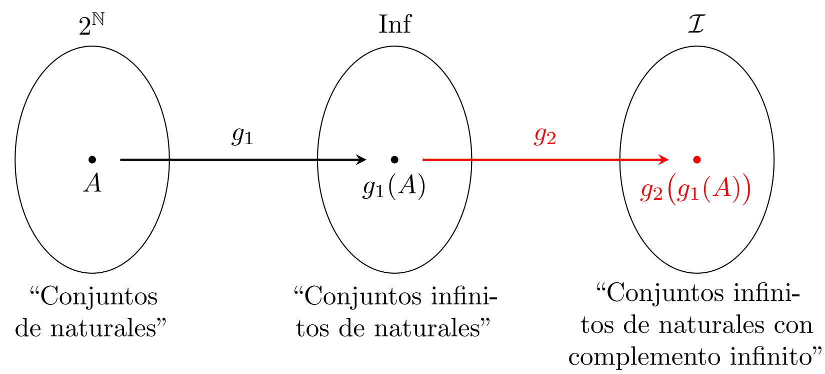
Dado que el conjunto $\mathcal{I}$ contiene *solo algunos* conjuntos de naturales de tamaño infinito, lo relacionaremos con el conjunto de *todos* los conjuntos de naturales de tamaño infinito. Para esto, y por conveniencia, definimos

$$\begin{aligned} \text{Inf} &= \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es infinito}\} \\ \text{Fin} &= \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito}\} \end{aligned}$$

Como $\mathcal{I}$ descarta de Inf aquellos conjuntos cuyo complemento es finito, sabemos que $\mathcal{I} \subsetneq \text{Inf}$. Ahora bien, el conjunto Fin (tal como se vio en el problema 4 de la ayudantía anterior) es numerable e Inf es no numerable. Más aún, Inf es equinumeroso con $2^{\mathbb{N}}$ pues

- existe inyección $f : \text{Inf} \to 2^{\mathbb{N}}$ dada por $f(A) = A$
- existe inyección $g : 2^{\mathbb{N}} \to \text{Inf}$ dada por $g(A) = \{2i + 1 \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{2i \mid i \in A\}$. El primer conjunto de la unión que define g es el conjunto de todos los impares naturales (es infinito!), mientras que el segundo contiene el doble de los elementos que están en A. Esta construcción garantiza que para cualquier $A \in 2^{\mathbb{N}}$ se construye un conjunto $g(A)$ que es (1) infinito y (2) que tiene como única preimagen a A. En efecto, si tomamos $A \neq B$ conjuntos de naturales, como son distintos tienen al menos un elemento de diferencia. Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe a tal que $a \in A$ y $a \notin B$. Luego, $2a$ es par y $2a \in g(A)$ pero $2a \notin g(B)$. Por lo tanto, $g(A) \neq g(B)$ y g es inyectiva.
- como existen funciones inyectivas $f : \text{Inf} \to 2^{\mathbb{N}}$ y $g : 2^{\mathbb{N}} \to \text{Inf}$, por teorema CSB $2^{\mathbb{N}}$ e Inf son equinumerosos.

Con esto último, sabemos que existe una biyección $g_1 : 2^{\mathbb{N}} \to \text{Inf}$ y podemos llegar a medio camino en nuestra misión:



Ya con una inyección para ir de $2^{\mathbb{N}}$ a Inf, nos falta el camino rojo para llegar a $\mathcal{I}$. Para poder usar lo que acabamos de encontrar, definimos la colección de todos los conjuntos de naturales con complemento finito

$$\text{CompFin} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$$

Con esto, $\mathcal{I} = \text{Inf} \setminus \text{CompFin}$. Para poder construir la función g_2 que nos falta, intentaremos desplazar una familia numerable de elementos en Inf de manera que no entreguemos conjuntos de CompFin. Para lograr esto, notamos que

- como Fin es numerable y la función $h : \text{Fin} \to \text{CompFin}$ dada por $h(A) = \mathbb{N} \setminus A$ es biyectiva, entonces concluimos que CompFin también es numerable. Luego, existe una enumeración de los elementos de CompFin (que son conjuntos infinitos de naturales!!) que se ve como

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

- como Inf es no numerable y CompFin es numerable, Inf$\setminus$CompFin es un conjunto no numerable. Entonces, existe una colección $B \subseteq \text{Inf} \setminus \text{CompFin}$ que es numerable. Luego, existe una enumeración de los elementos de B (que son conjuntos infinitos de naturales cuyo complemento es infinito) que se ve como
$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

Con estas enumeraciones, definimos la función $g_2 : \text{Inf} \to \mathcal{I}$ que nos faltaba:

$$g_2(A) = \begin{cases} b_{2i} & \text{si } A = c_i \text{ para algún } i \geq 0 \\ b_{2i+1} & \text{si } A = b_i \text{ para algún } i \geq 0 \\ A & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Lo que hace esta función es preguntarse si el conjunto A:

1. ¿está listado en los elementos de CompFin? Si es así, entonces no retornamos un elemento de CompFin sino que entregamos un elemento de B, que es un conjunto con complemento infinito (y por lo tanto, un elemento de $\mathcal{I}$). Si no, vemos el caso 2:

2. ¿está listado en los elementos del B numerable? Si es así, entregamos un elemento de la lista pero uno que no se le asigne a un elemento del caso 1. Por eso se entregan aquellos con índice impar en el caso 2 e índice par en el caso 1. Si no, vemos el caso 3:

3. Si ninguno de los casos anteriores funcionó, significa que A no está en CompFin y podemos entregarlo sin cambios. Solo los elementos de B son los que desplazamos.

Para justificar que g_2 es inyectiva, basta tomar los siguientes casos para $x, y \in \text{Inf}$:

- Si $f(x) = f(y) = b_{2i}$ para algún $i \geq 0$ entonces estamos en el caso 1 y $x = c_i = y$ por lo que $x = y$
- Si $f(x) = f(y) = b_{2i+1}$ para algún $i \geq 0$ entonces estamos en el caso 2 y $x = b_i = y$ por lo que $x = y$
- Si $f(x) = f(y) \neq b_i$ para todo $i \geq 0$, entonces estamos en el caso 3 y $x = f(x) = f(y) = y$, por lo que $x = y$

Luego, la función $g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{I}$ dada por $g(A) = g_2(g_1(A))$ es inyectiva.

Parte 3: conclusión

Como existen funciones inyectivas f y g tales que $f : \mathcal{I} \to 2^{\mathbb{N}}$ y $g : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{I}$, por teorema de CSB sabemos que $\mathcal{I}$ y $2^{\mathbb{N}}$ son equinumerosos.