Equivalencia lógica y formas normales

Clase 02

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Recordatorio última clase...

Proposiciones

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

Conectivos lógicos

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Estos conectivos los usamos para crear proposiciones compuestas

Recordatorio última clase...

Variables y formulas

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores 1 o 0.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores 1 o 0, o
3. la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de formulas proposicionales.

Recordatorio última clase...

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula con variables $p_1, \ldots, p_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ una secuencia de valores 1 o 0.

Valuaciones (o asignación de verdad)

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y $p_1, \ldots, p_n$ como proposiciones atómicas con valores de verdad $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Ejemplos

Si $\alpha(p, q, r) \ := \ p \wedge (q \to r)$ y $\beta(p, q) \ := \ (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$, entonces:

- $\alpha(1, 0, 1) = 1$
- $\alpha(0, 0, 0) = 0$
- $\beta(0, 1) = 1$

Recordatorio última clase...

Ejemplo (Tabla de verdad)

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esta tabla se conoce como la **tabla de verdad** de la formula $\alpha(p, q, r)$.

¿qué es una **tautología**? ¿qué es una **contradicción**?

Outline

Equivalencia lógica

Formas normales

Outline

Equivalencia lógica

Formas normales

Equivalencia lógica entre formulas

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ dos formulas proposicionales con las mismas variables proposicionales.

Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se cumple que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n)$$

¿qué propiedad tienen que cumplir las **tablas de verdad** de α y β para que α y β sean **lógicamente equivalentes**?

Equivalencia entre formulas

Ejemplo

Para las formulas $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Como ambas formulas son equivalentes para toda valuación, entonces:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Podemos demostrar varias **equivalencias útiles** de esta manera.

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes** :

1. **Conmutatividad**:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

2. **Asociatividad**:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

3. **Idempotente**:

$$\begin{aligned} p \wedge p &\equiv p \\ p \vee p &\equiv p \end{aligned}$$

4. **Doble negación**:

$$\neg\neg p \equiv p$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

5. **Distributividad**:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}
$$

6. **De Morgan**:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\
\neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

7. **Implicación**:

$$
\begin{aligned}
p \rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \\
p \rightarrow q &\equiv \neg q \rightarrow \neg p \\
p \leftrightarrow q &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)
\end{aligned}
$$

8. **Absorción**:

$$
\begin{aligned}
p \vee (p \wedge q) &\equiv p \\
p \wedge (p \vee q) &\equiv p
\end{aligned}
$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

9. **Identidad**:

$$\begin{aligned} p \vee 0 &= p \\ p \wedge 1 &= p \end{aligned}$$

10. **Dominación**:

$$\begin{aligned} p \wedge 0 &= 0 \\ p \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

11. **Negación**:

$$\begin{aligned} p \vee \neg p &= 1 \\ p \wedge \neg p &= 0 \end{aligned}$$

Verifique las equivalencias lógicas anteriores.

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta_1, \ldots \beta_n$ formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Ejemplo

- $\alpha(p, q) \;:=\; p \wedge (q \vee \neg p)$
- $\beta_1(r, s) \;:=\; (r \wedge \neg s)$
- $\beta_2(t, u) \;:=\; (t \rightarrow u)$

$$\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(t, u)) \;:=\; (r \wedge \neg s) \wedge ((t \rightarrow u) \vee \neg(r \wedge \neg s))$$

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta_1, \ldots \beta_n$ formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Teorema

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ formulas proposicionales.

Si $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \ldots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

¿qué implicación tiene este teorema para las **equivalencias útiles**?

(Composición de formulas proposicionales)

Teorema

Sean $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \dots, p_n)$ y β_1, ..., β_n formulas proposicionales.

Si $\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \dots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Demostración

Sean $\alpha(p, q)$, $\alpha'(p, q)$, $\beta_1(r, s)$ y $\beta_2(r, s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \quad \equiv \quad \alpha'(p, q)$$

¿qué debemos demostrar?

(Composición de formulas proposicionales)

Demostración

Sean $\alpha(p, q)$, $\alpha'(p, q)$, $\beta_1(r, s)$ y $\beta_2(r, s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \equiv \alpha'(p, q)$$

Considere una valuación cualquiera (v_1, v_2) y defina los valores de verdad:

$$\begin{aligned} v_1' &:= \beta_1(v_1, v_2) \\ v_2' &:= \beta_2(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta_1(v_1, v_2), \beta_2(v_1, v_2)) &= \alpha(v_1', v_2') \\ &= \alpha'(v_1', v_2') \\ &= \alpha'(\beta_1(v_1, v_2), \beta_2(v_1, v_2)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(r, s)) \equiv \alpha'(\beta_1(r, s), \beta_2(r, s))$ $\square$

¿para qué nos sirven las equivalencias lógicas?

Ejemplo

¿ $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$?

$$\begin{array}{rcll}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) & \equiv & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{(De Morgan)} \\
 & \equiv & \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) & \text{(De Morgan)} \\
 & \equiv & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{(doble neg.)} \\
 & \equiv & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{(distrib.)} \\
 & \equiv & 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) & (\neg p \wedge p \equiv 0) \\
 & \equiv & (\neg p \wedge \neg q) \vee 0 & \text{(conmut.)} \\
 & \equiv & \neg p \wedge \neg q & \text{(identidad)}
\end{array}$$

Operadores generalizados

Gracias a la **asociatividad** de $\vee$ y $\wedge$, nos ahorraremos los **paréntesis**:

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \;\equiv\; p_1 \vee (p_2 \vee p_3) \;\equiv\; p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \;\equiv\; p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) \;\equiv\; p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

También usaremos una **generalización** de $\wedge$ y $\vee$:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i \;\equiv\; p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} p_i \;\equiv\; p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

Operadores generalizados

Ejemplo equivalencias generalizadas

Distribuitividad:

$$\begin{aligned} p \vee \bigwedge_{i=1}^{n} q_i &\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \left(p \vee q_i\right) \\ p \wedge \bigvee_{i=1}^{n} q_i &\equiv \bigvee_{i=1}^{n} \left(p \wedge q_i\right) \end{aligned}$$

De Morgan:

$$\begin{aligned} \neg \bigwedge_{i=1}^{n} p_i &\equiv \bigvee_{i=1}^{n} \neg p_i \\ \neg \bigvee_{i=1}^{n} p_i &\equiv \bigwedge_{i=1}^{n} \neg p_i \end{aligned}$$

Outline

Conectivos ternarios

Queremos definir el conectivo lógico: $\texttt{if}\ p\ \texttt{then}\ q\ \texttt{else}\ r$

p	q	r	$\texttt{if}\ p\ \texttt{then}\ q\ \texttt{else}\ r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

¿cómo se puede representar este conectivo usando $\neg$, $\wedge$ y $\rightarrow$?

Conectivos ternarios

Solución: $(p \to q) \land ((\neg p) \to r)$

p	q	r	`if` p `then` q `else` r	$(p \to q) \land ((\neg p) \to r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Conectivos n-arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos n-arios: $C(p_1, \ldots, p_n)$.

p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0	0	$\cdots$	0	0	b_1
0	0	$\cdots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\cdots$	1	1	b_{2^n}

¿és posible representar $C(p_1, \ldots, p_n)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

Ejemplo

p	q	r	$C(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

p	q	r	$\alpha_4(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	$\boxed{1}$
0	1	0	$\boxed{1}$
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	$\boxed{1}$
1	1	0	0
1	1	1	$\boxed{1}$

$$\alpha_4(p,q,r) \;:=\; (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

¿és posible representar $C(p,q,r)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n-arios

p_1	p_2		$\cdots$		p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n)$
0	0		$\cdots$		0	0	b_1
0	0		$\cdots$		0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_1^i	v_2^i	$\cdots$	v_j^i	$\cdots$	v_{n-1}^i	v_n^i	b_i
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1		$\cdots$		1	1	b_{2^n}

Suponiendo que $v_1^i, \ldots, v_j^i, \ldots, v_n^i$ es la valuación correspondiente a la fila i con valor b_i de la tabla de verdad de $C(p_1, \ldots, p_n)$, entonces:

$$C(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) \quad \equiv \quad \bigvee_{i\,:\,b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j \right) \right)$$

Toda tabla de verdad se puede representar con $\wedge$, $\vee$ y $\neg$!!!

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o su negación.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Disyuntiva** (DNF) si es una **disyunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha \;=\; \beta_1 \;\vee\; \beta_2 \;\vee\; \ldots \;\vee\; \beta_k$$

con $\beta_i = (l_1^i \wedge \ldots \wedge l_{k_i}^i)$ y $l_1^i, \ldots, l_{k_i}^i$ son literales.

¿cuáles formulas están en DNF?

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)$
- $(s \wedge (p \vee r)) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$
- $(s \wedge r) \vee \neg q \vee r \vee s$

Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

Definición

Una formula α está en **Forma Normal Conjuntiva** (CNF) si es una **conjunción de disyunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha \;=\; \beta_1 \;\wedge\; \beta_2 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \beta_k$$

con $\beta_i = (l_1^i \vee \ldots \vee l_{k_i}^i)$ y $l_1^i, \ldots, l_{k_i}^i$ son literales.

¿cuáles formulas estan en CNF?

- $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$
- $(s \wedge r) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$

Formas normales y equivalencia lógica

Teorema

1. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **DNF**.
2. Toda formula α es **lógicamente equivalente** a una formula en **CNF**.

Demostración

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la valuación correspondiente a la i-ésima fila de la tabla de verdad de α con valor $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i)$, entonces:

1. $$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)$$

2. $$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \bigwedge_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 0} \left(\left(\bigvee_{j \,:\, v_j^i = 1} \neg p_j \right) \vee \left(\bigvee_{j \,:\, v_j^i = 0} p_j \right) \right)$$

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_1^i,\ldots,v_n^i)=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j \right) \right)$$

Por demostrar (PD): $\alpha \equiv \beta$.

¿qué debemos **demostrar** para demostrar que $\alpha \equiv \beta$?

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) = \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)$$

Por demostrar (PD): $\alpha \equiv \beta$.

PD: Para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$, se cumple $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n)$.

Esto lo podemos **dividir** en demostrar que para toda valuación $\bar{v} = v_1, \ldots v_n$:

1. si $\alpha(\bar{v}) = 1$ entonces $\beta(\bar{v}) = 1$.
2. si $\alpha(\bar{v}) = 0$ entonces $\beta(\bar{v}) = 0$.

Demostraremos 1. y 2. por separado.

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF: si $\alpha(\bar{v}) = 1$ entonces $\beta(\bar{v}) = 1$)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) \;=\; \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)$$

Sea $\bar{v} = v_1, \ldots, v_n$ una **valuación cualquiera** y suponga que $\alpha(\bar{v}) = 1$.
Sea $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la valuación de la i**-ésima fila de la tabla de verdad** tal que:

$$v_1^i = v_1, \;\; v_2^i = v_2, \;\; \ldots, \;\; v_n^i = v_n$$

Como $\alpha(\bar{v}) = 1$, entonces $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1$. Sea $\beta_i = \bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \wedge \bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j$.

PD: $\beta_i(\bar{v}) = 1$.

Si demostramos lo anterior, habremos demostrado que $\beta(\bar{v}) = 1$.

(¿por qué?)

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF: si $\alpha(\bar{v}) = 1$ entonces $\beta(\bar{v}) = 1$)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) \;=\; \bigvee_{i \,:\, \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)$$

Sea $\bar{v} = v_1, \ldots, v_n$ una **valuación cualquiera** y suponga que $\alpha(\bar{v}) = 1$.
Sea $v_1^i, \ldots, v_n^i$ la valuación de la i-**ésima fila de la tabla de verdad** tal que:

$$v_1^i = v_1, \;\; v_2^i = v_2, \;\; \ldots, \;\; v_n^i = v_n$$

Como $\alpha(\bar{v}) = 1$, entonces $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1$. Sea $\beta_i = \bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 1} p_j \wedge \bigwedge_{j \,:\, v_j^i = 0} \neg p_j$.

PD: $\beta_i(\bar{v}) = 1$.

Por construcción, para cada j la aparición de p_j en β_i depende de v_j^i:

- Si $v_j^i = v_j = 1$, entonces p_j aparece en β_i y $p_j(\bar{v}) = 1$.
- Si $v_j^i = v_j = 0$, entonces $\neg p_j$ aparece en β_i y $(\neg p_j)(\bar{v}) = 1$.

Cada aparición de p_j en β_i es verdadera con $\bar{v}$, por lo tanto $\beta_i(\bar{v}) = 1$. ✓

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF: si $\alpha(\bar{v}) = 0$ entonces $\beta(\bar{v}) = 0$)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) \;=\; \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)$$

Sea $\bar{v} = v_1, \ldots, v_n$ una **valuación cualquiera** y suponga que $\alpha(\bar{v}) = 0$.

Para la i-esima fila $v_1^i, \ldots, v_n^i$ de la tabla de verdad, sea:

$$\beta_i = \bigwedge_{j\,:\,v_j^i = 1} p_j \wedge \bigwedge_{j\,:\,v_j^i = 0} \neg p_j$$

PD: Para todo i tal que $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1$, se cumple que $\beta_i(\bar{v}) = 0$.

Si demostramos lo anterior, habremos demostrado que $\beta(\bar{v}) = 0$.

(¿por qué?)

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (DNF: si $\alpha(\bar{v}) = 0$ entonces $\beta(\bar{v}) = 0$)

$$\beta(p_1, \ldots, p_n) \;=\; \bigvee_{i\,:\,\alpha(v_1^i,\ldots,v_n^i)=1} \left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j \right) \right)$$

Sea $\bar{v} = v_1, \ldots, v_n$ una **valuación cualquiera** y suponga que $\alpha(\bar{v}) = 0$.

Para la i-esima fila $v_1^i, \ldots, v_n^i$ de la tabla de verdad, sea:

$$\beta_i = \bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j \wedge \bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j$$

PD: Para todo i tal que $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1$, se cumple que $\beta_i(\bar{v}) = 0$.

Sea un i **cualquiera** tal que $\alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1$.

Como $\alpha(\bar{v}) = 0$ entonces existe un j tal que $v_j^i \neq v_j$.

- Si $v_j^i = 1$, entonces p_j aparece en β_i pero $p_j(\bar{v}) = 0$.
- Si $v_j^i = 0$, entonces $\neg p_j$ aparece en β_i pero $\neg p_j(\bar{v}) = 0$.

Como β_i es una conjunción, en ambos casos concluimos que $\beta_i(\bar{v}) = 0$. ✓

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (CNF)

Considere la formula $\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n)$. Por lo anterior, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\neg\alpha(p_1, \ldots, p_n) \quad &\equiv \quad \bigvee_{i : (\neg\alpha)(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 1} \left(\left(\bigwedge_{j : v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right) \\
&\equiv \quad \bigvee_{i : \alpha(v_1^i, \ldots, v_n^i) = 0} \left(\left(\bigwedge_{j : v_j^i = 1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{j : v_j^i = 0} \neg p_j \right) \right)
\end{aligned}
$$

¿cómo usamos lo anterior para demostrar CNF?

Formas normales y equivalencia lógica

Demostración (CNF)

Por el teorema de composición de formulas y De Morgan:

$$
\begin{aligned}
\alpha(p_1,\ldots,p_n) &\equiv \neg(\neg\alpha(p_1,\ldots,p_n)) \\
&\equiv \neg\left(\bigvee_{i\,:\,\alpha(v_1^i,\ldots,v_n^i)=0}\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_1^i,\ldots,v_n^i)=0} \neg\left(\left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j\,:\,v_j^i=0} \neg p_j\right)\right) \\
&\equiv \bigwedge_{i\,:\,\alpha(v_1^i,\ldots,v_n^i)=0} \left(\bigvee_{j\,:\,v_j^i=1} \neg p_j\right) \vee \left(\bigvee_{j\,:\,v_j^i=0} p_j\right)
\end{aligned}
$$

$\square$ (significa “queda esto demostrado”)