NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

- 1) **Falso**. Comenzamos utilizando la conexidad de R, que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\forall a, b \in A.((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R)$$

Tomando $a = b$, tenemos que todo par (a, a), con a un elemento de A, debe pertenecer a R:

$$\forall a \in A.((a, a) \in R) \vee ((a, a) \in R) = (a, a) \in R$$

Luego, para todo par (x, y) en R, existe el par (y, y) dentro de R (por la propiedad de conexidad encontrada):

$$\forall (x, y) \in R.\exists (z, z) \in R : z = y$$

Ahora acudimos a la definición de $R \circ R$:

$$R \circ R := ((x, y) | \exists z \in A.(x, z) \in R \wedge (z, y) \in R)$$

Notamos que por lo encontrado anteriormente, se tiene que para todo par (x, z) en R, existe el par (z, z) en R, de manera que (x, z) también está en $R \circ R$ (por su definición):

$$\forall (x, z) \in R.\exists (z, z) \in R \implies (x, z) \in R \circ R$$

Se desprende que todo par en R también pertenece a $R \circ R$, lo que implica $R \subseteq (R \circ R)$. Gracias a esto podemos reescribir $R \cup (R \circ R)$ como $R \circ R$ (todo esto fue posible debido a que R es conexa):

$$R \cup (R \circ R) = R \circ R$$

Ahora debemos encontrar un contraejemplo que indique que R es conexa pero $R \circ R$ no es transitiva. Se elige la relación R de la siguiente manera:

$$A = (x, y, z, w)$$

$$R = ((x, x), (y, y), (z, z), (w, w), (x, y), (x, w), (y, z), (z, x), (z, w), (w, y))$$

Podemos observar que R cumple con ser conexa. A continuación se obtiene $R \circ R$:

$$R \circ R = ((x, x), (y, y), (z, z), (w, w), (x, y), (x, w), (y, z), (z, x), (z, w), (w, y), (x, z), (y, x), (y, w), (z, y), (w, z))$$

Para que $R \circ R$ sea transitiva, se debe cumplir lo siguiente:

$$\forall a, b, c \in A.((a, b) \in (R \circ R) \land (b, c) \in (R \circ R)) \to (a, c) \in (R \circ R)$$

Tomando $a = w, b = y, c = x$ la implicancia queda de la siguiente forma:

$$((w, y) \in (R \circ R) \land (y, x) \in (R \circ R)) \to (w, x) \in (R \circ R)$$

Es claro que la implicancia no se cumple, ya que w, x, y pertenecen a A y $(w, y), (y, x)$ pertenecen a $R \circ R$, pero el par (w, x) no está en $R \circ R$, y por lo tanto $R \circ R$ **NO** es transitiva. Con este contraejemplo queda demostrado que la afirmación es **Falsa**.

- 2) **Verdadero**. Comenzamos utilizando la transitividad de R, que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\forall a, b, c \in A.((a, b) \in R \land (b, c) \in R) \to (a, c) \in R$$

Ahora nos fijamos en $R \cap R^{-1}$. Esta relación se puede definir de la siguiente manera:

$$R \cap R^{-1} := ((x, y) | (x, y) \in R \land (x, y) \in R^{-1})$$

Por la definición de R^{-1}, tenemos lo siguiente:

$$R^{-1} := ((x, y) | (y, x) \in R)$$

Reemplazando en la relación $R \cap R^{-1}$ queda:

$$R \cap R^{-1} := ((x, y) | (x, y) \in R \land (y, x) \in R)$$

Observando el resultado, podemos notar que esta condición corresponde a un caso particular de $(a, b) \in R \land (b, c) \in R$, donde $a = c = x$ y $b = y$. Se desprende que todos los pares $(x, y) \in (R \cap R^{-1})$ cumplen con el lado izquierdo de la implicancia de transitividad en R. Luego, como sabemos que R es transitiva, necesariamente se cumple que $(a, c) \in R \implies (x, x) \in R$ (en este caso). Además, (x, x) y su inverso (x, x) (el mismo par), pertenecen ambos a R, por lo que cumplen con la condición $(x, y) | (x, y) \in R \land (y, x) \in R$, finalmente llegando a que $\forall (x, x) \in R.(x, x) \in R \cap R^{-1}$.

Tomando un par (x, y) en $R \cap R^{-1}$, por definición sabemos que $(y, x) \in R$, y tomando $x = y$ e $y = x$ tenemos que análogamente (y, x) también pertenece a $R \cap R^{-1}$ (por ser el inverso). Finalmente, por todo lo anteriormente mostrado, se debe cumplir la siguiente expresión:

$$\forall (x, y) \in (R \cap R^{-1}).((y, x) \in (R \cap R^{-1}) \land (x, x) \in (R \cap R^{-1}) \land (y, y) \in (R \cap R^{-1}))$$

Se puede ver que estos 4 pares cumplen la propiedad transitiva entre sí, y como (x, y) es cualquier par en $R \cap R^{-1}$, se tiene que la relación completa es transitiva, demostrando que la afirmación es **Verdadera**.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

- 1) Comenzamos llamando R a la relación con la que se trabajará, en este caso $\preceq$. También llamaremos G al conjunto de los grafos finitos no dirigidos cuyos vértices están en los naturales. Para demostrar que R es un orden parcial se debe demostrar que R es refleja, antisimétrica y transitiva.

  Primero consideramos la propiedad refleja, que se define de la siguiente manera:

  $$\forall a \in G.(a, a) \in R$$

  Para que sea válida, debemos demostrar que todo grafo $a \in G$ cumple con $a \preceq a$. Entonces se debe encontrar una secuencia O de operaciones DELETE y CONTRACT que transforman a un grafo $a \in G$ cualquiera en sí mismo. Dicha secuencia corresponde a la secuencia vacía $O = \emptyset$, ya que al no eliminar aristas ni contraer el grafo a, este queda igual a como estaba originalmente.

  El siguiente paso es demostrar la propiedad antisimétrica, que se expresa a continuación:

  $$\forall a, b \in G.((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b$$

  Si sólo 1 entre los pares (a, b) y (b, a) está en R (o ninguno de los 2), entonces el lado izquierdo de la implicancia es 0, y por tanto es verdadera (caso trivial). En el caso de que ambos pares estén en R, se va a demostrar por contradicción que necesariamente $a = b$.

  Partiendo desde la premisa $a \neq b$, y con $(a, b), (b, a) \in R$, se cumple lo siguiente:

  $$a = O_{p1}(e_1, O_{p2}(e_2 .... O_{pn}(e_n, b)....))$$

  $$b = M_{p1}(f_1, M_{p2}(f_2 .... M_{pn}(f_n, a)....))$$

  Reemplazando b en la expresión de a:

  $$a = O_{p1}(e_1, O_{p2}(e_2 .... O_{pn}(e_n, M_{p1}(f_1, M_{p2}(f_2 .... M_{pn}(f_n, a)....)))....))$$

  Al analizar está expresión, se puede ver que la secuencia de operaciones debe partir desde el grafo a y llegar a sí mismo. De aquí se distinguen 2 casos:

  - Si la secuencia $O_{p1}...O_{pn}, M_{p1}...M_{pn}$ no es vacía, entonces es imposible partir del grafo a y llegar a sí mismo con operaciones DELETE y CONTRACT. En el caso de utilizar CONTRACT, se borrará un vértice del grafo (el vértice u), y no existe ninguna operación que sea capaz de agregar vértices, por lo que nunca se podrá recuperar dicho vértice y por tanto nunca se podrá obtener el grafo original a. En el caso de utilizar DELETE, la única forma de recuperar aristas eliminadas es utilizando CONTRACT, pero como se explicó anteriormente, esto borra un vértice, por lo que no se podrá obtener el grafo original a. Se desprende que la secuencia de operaciones debe ser vacía, correspondiente al siguiente caso.

- Si la secuencia $O_{p1}...O_{pn}, M_{p1}...M_{pn}$ es vacía, entonces $O_{p1}...O_{pn}$ y $M_{p1}...M_{pn}$ también son vacías, por lo que al reemplazar en las expresiones originales de a y b se obtiene lo siguiente:

$$a = b$$

$$b = a$$

Se ve que al ser vacías las secuencias, no hubo ningún cambio en el grafo b para llegar al a y viceversa, por lo que $a = b$. Esto contradice la premisa de que $a \neq b$, por lo tanto queda demostrado por contradicción que $\forall a, b \in G.((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b$, y por tanto R es antisimétrica.

El último paso es demostrar la propiedad transitiva, expresada a continuación:

$$\forall a, b, c \in G.((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R$$

Tenemos que $(a, b) \in R$, por lo tanto existe una secuencia de operaciones DELETE y CONTRACT y un conjunto de aristas que permiten transformar al grafo b en a:

$$\exists O_{p1}...O_{pn} \wedge e_1...e_n.a = O_{p1}(e_1, O_{p2}(e_2....O_{pn}(e_n, b)....))$$

Además, como $(b, c) \in R$:

$$\exists M_{p1}...M_{pn} \wedge f_1...f_n.b = M_{p1}(f_1, M_{p2}(f_2....M_{pn}(f_n, c)....))$$

Reemplazando b en la expresión para a:

$$a = O_{p1}(e_1, O_{p2}(e_2....O_{pn}(e_n, M_{p1}(f_1, M_{p2}(f_2....M_{pn}(f_n, c)....)))....))$$

Encontramos la secuencia de operaciones $O_{p1}...O_{pn}, M_{p1}...M_{pn}$ y el conjunto de aristas $e_1...e_n, f_1...f_n$ tal que se puede transformar al grafo c en a, por lo que $(a, c) \in R$ y por tanto la implicancia es verdadera y R es transitiva.

Finalmente, como se demostraron las 3 propiedades para la relación $\preceq$ sobre el conjunto de pares de grafos pertenecientes a G, se tiene que $\preceq$ es un orden parcial sobre G.

- 2) Se debe demostrar que el orden parcial $\preceq$ sobre G no es conexo. La propiedad de conexidad se expresa a continuación:

$$\forall a, b \in G.((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R)$$

Basta con encontrar un contraejemplo en donde no se cumpla dicha expresión. Se propone lo siguiente:

$$a = (V, E)$$
$$V = \emptyset$$
$$E = \emptyset$$

En este caso a corresponde al grafo vacío (no posee vértices ni aristas), que también pertenece a G. Luego, para cualquier otro grafo b **NO** vacío se tiene que es imposible transformarlo en a utilizando operaciones CONTRACT y DELETE y viceversa. Esto se explica a continuación:

- Para transformar un grafo **NO** vacío (con vértices) en el grafo vacío, es necesario eliminar todos sus vértices. Esto no es posible, ya que la única forma de eliminar vértices en un grafo es utilizando CONTRACT, pero para esto debe existir al menos 1 arista $(u, v) \in E$ en el grafo (por definición), lo que implica que existen al menos los 2 vértices u y v. Entonces, nunca se podrá eliminar el último vértice del grafo, ya que el hecho de que sólo haya 1 vértice implica que no hay aristas.
- Para transformar el grafo vacío en otro grafo **NO** vacío, se deben agregar vértices, pero no existe ninguna operación capaz de esto, por lo que es imposible. Además, las operaciones existentes no se pueden aplicar de todas maneras, ya que el grafo vacío no posee aristas, las que por definición son necesarias para aplicar las operaciones CONTRACT y DELETE.

Habiendo aclarado esto, se elige el grafo **NO** vacío b mostrado a continuación para realizar el contraejemplo:

$$b = (W, D)$$
$$W = (1)$$
$$D = \emptyset$$

Tomando b como el grafo que sólo contiene al vértice de valor 1, se observa que al no poseer aristas en D no se puede aplicar ninguna operación CONTRACT o DELETE, ya que por definición estas se aplican utilizando una arista $d \in D$. Se desprende que $(a, b) \notin R$.

Bajo el mismo argumento, tampoco se pueden aplicar dichas operaciones sobre a (no tiene aristas), por lo que $(b, a) \notin R$.

Finalmente, con los grafos a, b utilizados se tiene que $\exists a, b \in G.\neg(((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R))$, por lo que $\preceq$ no es conexo sobre G y por tanto no es un orden total.

- 3) **Falso**. Se puede utilizar de contraejemplo el conjunto $S = (a, b)$, con a y b los mismos del ítem anterior:

$$a = (V, E)$$
$$V = \emptyset$$
$$E = \emptyset$$

$$b = (W, D)$$
$$W = (1)$$
$$D = \emptyset$$

$$S = (a, b)$$

Por lo mostrado en el ítem anterior, se deduce que el único grafo que puede llegar hasta el grafo vacío a es sí mismo (aprovechando la propiedad refleja del orden parcial). Pero el grafo vacío no puede llegar hasta ningún otro grafo **NO** vacío, ya que no posee aristas (mostrado en el ítem anterior). Por lo tanto no existe ningún grafo c que a la vez pueda llegar a a y b utilizando operaciones CONTRACT y DELETE:

$$\nexists c \in G.(a \preceq c) \wedge (b \preceq c)$$

$$\nexists c \in G. \forall x \in S. x \preceq c$$

Finalmente, el conjunto $S \subseteq G$ **NO** tiene cota superior bajo el orden parcial $\preceq$, y por lo tanto tampoco tiene supremo bajo estas condiciones.