PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 2

Lógica de predicados

Problema 1

Demuestre las siguientes equivalencias lógicas.

(a) $(\exists x.\alpha(x)) \wedge (\exists x.\beta(x)) \equiv \exists y.\exists z.(\alpha(y) \wedge \beta(z))$. donde y, z no son variables libres en $\alpha(x)$ o $\beta(x)$. En otras palabras, y, z son variables nuevas no mencionadas en $\alpha(x)$ o en $\beta(x)$.

(b) $\forall x.(\exists y.R(x,y)) \rightarrow S(x) \equiv \forall x.\forall y.(R(x,y) \rightarrow S(x))$.

Solución propuesta.

(a) Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera.

$$\begin{array}{rll}
\mathcal{I} \models (\exists x.\alpha(x)) \wedge (\exists x.\beta(x)) & \text{ssi} & \text{existe } a \in \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \alpha(a) \text{ y existe } b \in \mathcal{I}(dom) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \beta(b) \\
& \text{ssi} & \text{existe } a \in \mathcal{I}(dom) \text{ y existe } b \in \mathcal{I}(dom) \text{ tales que } \mathcal{I} \models (\alpha(a) \wedge \beta(b)) \\
& \text{ssi} & \mathcal{I} \models \exists y.\exists z.(\alpha(y) \wedge \beta(z))
\end{array}$$

(b) Usando equivalencias en lógica de predicados,

$$\begin{array}{rcl}
\forall x.(\exists y.R(x,y)) \rightarrow S(x) & \equiv & \forall x.\neg(\exists y.R(x,y)) \vee S(x) \\
& \equiv & \forall x.(\forall y.\neg R(x,y)) \vee S(x) \\
& \equiv & \forall x.\forall y.(\neg R(x,y) \vee S(x)) \\
& \equiv & \forall x.\forall y.(R(x,y) \rightarrow S(x))
\end{array}$$

El penúltimo paso requiere ser demostrado pues es una equivalencia no vista en clases. Debemos probar que

$$(\forall y.R(y)) \vee S \equiv \forall y.(R(y) \vee S)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea I una interpretación cualquiera. Tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{I} \models (\forall y.R(y)) \vee S & \rightarrow & \mathcal{I} \models (\forall y.R(y)) \text{ (sin pérdida de generalidad)} \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models R(a) \text{ para todo } a \in \mathcal{I}(dom) \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models R(a) \vee S \text{ para todo } a \in \mathcal{I}(dom) \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models \forall y.(R(y) \vee S)
\end{array}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea I una interpretación cualquiera. Tenemos

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{I} \models \forall y.(R(y) \vee S) & \rightarrow & \mathcal{I} \models R(a) \vee S \text{ para todo } a \in \mathcal{I}(dom) \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models R(a) \text{ para todo } a \in \mathcal{I}(dom) \text{ (sin pérdida de generalidad)} \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models \forall y.R(y) \\
& \rightarrow & \mathcal{I} \models (\forall y.R(y)) \vee S
\end{array}$$

Problema 2

Considere el predicado binario $M(x, y)$ y las siguientes cuatro interpretaciones:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N} & \mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z} & \mathcal{I}_3(dom) := \mathbb{Q} & \mathcal{I}_4(dom) := [0,1] \\ \mathcal{I}_1(M) := x < y & \mathcal{I}_2(M) := x < y & \mathcal{I}_3(M) := x < y & \mathcal{I}_4(M) := x < y \end{array}$$

Escriba cuatro oraciones $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ en lógica de predicados tal que $\mathcal{I}_i \models \psi_j$ para $i = j$ y $\mathcal{I}_i \not\models \psi_j$ para $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Solución propuesta.

Aprovechando las propiedades de los conjuntos que se dan en cada interpretación, distinguiremos entre ellos preguntándonos si son densos (si para cualquier par de elementos, existe otro en el conjunto que está entre ellos) y además si tienen un elemento mínimo. Definimos dos fórmulas para tales preguntas:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{denso} & = & \forall x \forall y.(M(x,y) \rightarrow (\exists z.M(x,z) \wedge M(z,y))) \\ \varphi_{min} & = & \exists y \forall x.\neg M(x,y) \end{array}$$

Luego, las cuatro fórmulas pedidas son

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 & = & \neg\varphi_{denso} \wedge \varphi_{min} \\ \psi_2 & = & \neg\varphi_{denso} \wedge \neg\varphi_{min} \\ \psi_3 & = & \varphi_{denso} \wedge \varphi_{min} \\ \psi_4 & = & \varphi_{denso} \wedge \neg\varphi_{min} \end{array}$$

Problema 3

Demuestre que ninguna de las siguientes oraciones es consecuencia lógica de las otras dos:

$$\begin{array}{l} \forall x \forall y \forall z.\, (R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z) \\ \forall x \forall y.\, (R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow x = y \\ \forall x \exists y.\, R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x.\, R(x,y) \end{array}$$

Solución propuesta.

Renombremos respectivamente como $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ las tres oraciones anteriores. Para probar que un conjunto de oraciones cumple $\Sigma \not\models \psi$ para alguna oración ψ, debemos encontrar una interpretación que satisfaga a Σ pero no a ψ.

- En primer lugar, debemos probar que $\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \varphi_3$. Luego de inspeccionar las oraciones, una interpretación que satisface a las dos primeras puede ser $\mathcal{I}_1$ tal que

  - $\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$
  - $\mathcal{I}_1(R) := x \leq y$

  Verificamos que $\mathcal{I}_1 \models \varphi_1$ pues en los naturales, la relación de *menor o igual que* es transitiva: $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$. Asimismo, $\mathcal{I}_1 \models \varphi_2$ pues en los naturales $x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y$.

  Verificamos que $\mathcal{I}_1 \not\models \varphi_3$. El antecedente (lado izquierdo de la implicancia) de φ_3 establece que para cualquier natural x, debe existir un natural y tal que $x \leq y$, lo cual es cierto en el dominio de $\mathcal{I}_1$ (siempre podemos escoger un natural más grande que x). No obstante, el consecuente de φ_3 (lado derecho de la implicancia) es falso pues no existe un y para el cual todo x natural cumpla $x \leq y$; en efecto, los naturales no tienen un elemento máximo. Una implicancia con antecedente verdadero y consecuente falso es falsa, de forma que $\mathcal{I}_1$ no satisface a φ_3.

- Para probar que $\{\varphi_2, \varphi_3\} \not\models \varphi_1$, recurriremos a un dominio más pequeño con la finalidad de poder visualizar mejor los casos. Notemos que ahora debemos hacer falsa la primera oración. Una forma de hacer esto, es tomar

  - $\mathcal{I}_2(dom) := \{1, 2, 3\}$
  - $\mathcal{I}_2(R) := x - y = 1$

  Comprobamos que $\mathcal{I}_2 \models \varphi_2$ pues si tomamos cualesquiera x, y, no es posible que se cumplan simultáneamente $x - y = 1$ y $y - x = 1$. De hecho, ese sistema de ecuaciones no tiene soluciones en nuestro dominio, por lo cual el antecedente de φ_2 es siempre falso y φ_2 se vuelve verdadera. De forma similar, vemos que $\mathcal{I}_2 \models \varphi_3$ pues si tomamos $x = 1$, no existe un y en $\mathcal{I}_2(dom)$ tal que $x - y = 1$, de forma que φ_3 se vuelve verdadera.

  Ahora, verificamos que $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi_1$ tomando $x = 3, y = 2, z = 1$. Notamos que el antecedente de φ_1 dado por $R(3, 2) \wedge R(2, 1)$ es verdadero, pero el consecuente $R(3, 1)$ es falso, pues $3 - 1 \neq 1$. Como la implicancia no es cierta para cualquier elección de x, y, z, φ_1 se vuelve falsa.

- Para probar que $\{\varphi_1, \varphi_3\} \not\models \varphi_2$, modificaremos solo la interpretación del símbolo R del caso anterior. Ahora nos interesa hacer falsa la segunda oración, lo cual haremos considerando a R como un predicado al cual no le importa el orden de sus argumentos. Definimos la interpretación:

  - $\mathcal{I}_3(dom) := \{1, 2, 3\}$
  - $\mathcal{I}_3(R) := x + y < 10$

  La primera oración es satisfecha por $\mathcal{I}_3$ pues cualquier combinación de tres elementos de $\mathcal{I}_3$ cumple que su suma es menor a 10. De esta forma, tanto antecedente como consecuente de φ_1 son siempre verdaderos para cualesquiera $x, y, z \in \mathcal{I}_3$, por lo cual $\mathcal{I}_3 \models \varphi_1$.

  De forma similar, φ_3 también tiene antecedente y consecuente siempre verdaderos en $\mathcal{I}_3$ pues para todo x existe un y tal que su suma no supera a 10 y existe un y tal que para cualquier x su suma tampoco supera a 10 (cualquier $y \in \mathcal{I}_3$ sirve). Esto hace verdadera a φ_3.

  La segunda oración no se satisface en $\mathcal{I}_3$ y basta considerar un ejemplo con x, y distintos: al tomar $x = 1$ e $y = 2$, $R(1, 2) \wedge R(2, 1)$ es cierto, pero $1 = 2$ es falso (no son el mismo elemento). Luego, $\mathcal{I}_3 \not\models \varphi_2$.