

Inducción estructural

Clase 20

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Inducción sobre los naturales

Principio de inducción simple

Para una afirmación P sobre los naturales, si P cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero,
2. si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Principio de inducción fuerte

Para una afirmación P sobre los naturales, si P cumple que:

$P(k)$ es verdadero **para todo** $k < n$, entonces $P(n)$ es verdadero

entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P(n)$ es verdadero.

¿podemos generalizar este principio sobre otros conjuntos?

Outline

Definiciones recursivas

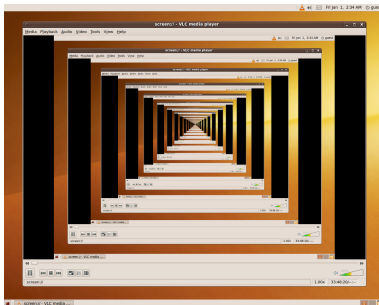
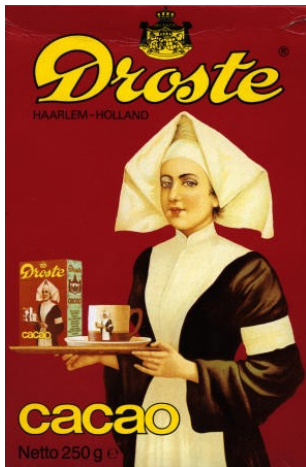
Inducción estructural

Outline

Definiciones recursivas

Inducción estructural

Definiciones recursivas



Definiciones recursivas

Definición

Una definición se dice **recursiva** si puede ser definida a partir de:

1. Casos **bases** sencillos.
2. Una **serie de reglas** que reducen la definición a casos anteriores.

Ejemplo

Caso **base**: $F(0) = 0$

$F(1) = 1$

Regla **recursiva**: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ para $n \geq 2$

Definiciones recursivas

Mas ejemplos

■ Sumatorias $\sum_{i=0}^n i$

Caso **base**: $\sum_{i=0}^0 i = 0$

Regla **recursiva**: $\sum_{i=0}^n i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} i \right) + n$

■ Exponencial 2^n

Caso **base**: $2^0 = 1$

Regla **recursiva**: $2^n = 2^{n-1} \cdot 2$

¿cómo generalizamos esta idea para definir conjuntos?

Definición recursiva de conjuntos

Definición

Una definición **recursiva** de un conjunto \mathbb{S} consta de:

1. Un conjunto **base** $B = \{b_1, \dots, b_N\}$ tal que $b_i \in \mathbb{S}$ para todo $i \leq N$.
2. **Reglas** recursivas R de la forma:

$$\text{si } s_1, \dots, s_n \in \mathbb{S} \text{ entonces } R(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{S}$$

3. Una afirmación de **exclusión** de la forma:
“El conjunto \mathbb{S} son todos los elementos que se construyen solamente a partir de B y las reglas R .”

¿para qué necesitamos la afirmación de **exclusión**?

Definición recursiva de conjuntos

Ejemplos

- Se define el conjunto \mathbb{N} tal que:

Caso **base**: $0 \in \mathbb{N}$

Regla **recursiva**: Si $a \in \mathbb{N}$, entonces $a + 1 \in \mathbb{N}$.

\mathbb{N} es el conjunto que se construye solo a partir de las reglas anteriores.

- Se define el conjunto \mathbb{S} tal que:

Caso **base**: $3 \in \mathbb{S}$

Regla **recursiva**: Si $a \in \mathbb{S}$ y $b \in \mathbb{S}$, entonces $a + b \in \mathbb{S}$.

\mathbb{S} es el conjunto que se construye solo a partir de las reglas anteriores.

Desde ahora, siempre omitiremos la afirmación de exclusión.

Definición recursiva de conjuntos

Palabras

Sea Σ un alfabeto. El conjunto Σ^* se define recursivamente como:

1. $\epsilon \in \Sigma^*$.
2. si $w \in \Sigma^*$, entonces $wa \in \Sigma^*$ para todo $a \in \Sigma$.

Otro conjunto de palabras

Sea Σ un alfabeto. El conjunto \mathcal{P}_Σ se define recursivamente como:

1. $\epsilon \in \mathcal{P}_\Sigma$ y $a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.
2. si $w \in \mathcal{P}_\Sigma$, entonces $a \cdot w \cdot a \in \mathcal{P}_\Sigma$ para todo $a \in \Sigma$.

¿a qué corresponde el conjunto \mathcal{P}_Σ ?

Definición recursiva de conjuntos

Expresiones aritméticas

El conjunto $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ se define recursivamente como:

1. $n \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. si $e_1 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ y $e_2 \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$, entonces:
 - $(e_1 + e_2) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$
 - $(e_1 \times e_2) \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$

¿es $\mathcal{E}_{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$? ¿de qué está compuesto $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$?

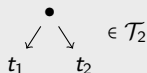
Definición recursiva de conjuntos

Otra definición recursiva

Sea \bullet un símbolo cualquiera.

El conjunto \mathcal{T}_2 se define recursivamente como:

1. $\bullet \in \mathcal{T}_2$.
2. si $t_1 \in \mathcal{T}_2$ y $t_2 \in \mathcal{T}_2$ entonces:



¿a qué corresponde el conjunto \mathcal{T}_2 ?

Funciones sobre definiciones recursivas

Podemos utilizar la naturaleza recursiva de un conjunto \mathbb{S} para definir funciones o propiedades sobre \mathbb{S} .

Ejemplo de funciones sobre palabras

Se define $f : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ tal que:

$$\begin{aligned}f(\epsilon) &= 0 \\f(wa) &= f(w) + 1 \quad \text{para } w \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma\end{aligned}$$

¿qué define la función f ?

Funciones sobre definiciones recursivas

Podemos utilizar la naturaleza recursiva de un conjunto \mathbb{S} para definir funciones o propiedades sobre \mathbb{S} .

Mas ejemplos de funciones sobre palabras

Para $b \in \Sigma$ se define $|\cdot|_b : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$\begin{aligned} |\epsilon|_b &= 0 \\ |w \cdot a|_b &= \begin{cases} |w|_b + 1 & \text{si } a = b \\ |w|_b & \text{si } a \neq b \end{cases} \quad \text{para } w \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma \end{aligned}$$

¿qué define la función $|\cdot|_b$?

Funciones sobre definiciones recursivas

¿qué definen las siguientes funciones sobre \mathcal{T}_2 ?

Se define la función $g : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$\begin{aligned} g(\bullet) &= 1 \\ g\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ t_1 \quad t_2 \end{array}\right) &= g(t_1) + g(t_2) + 1 \quad \text{para } t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2 \end{aligned}$$

Se define la función $g' : \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$\begin{aligned} g'(\bullet) &= 1 \\ g'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ t_1 \quad t_2 \end{array}\right) &= g'(t_1) + g'(t_2) \quad \text{para } t_1, t_2 \in \mathcal{T}_2 \end{aligned}$$

Definiciones sobre construcciones recursivas

¿qué definen la siguiente función sobre $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$?

Se define la función $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$\llbracket n \rrbracket = n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\llbracket (e_1 + e_2) \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket + \llbracket e_2 \rrbracket$$

$$\llbracket (e_1 \times e_2) \rrbracket = \llbracket e_1 \rrbracket \cdot \llbracket e_2 \rrbracket$$

¡Cuidado con las definiciones recursivas!

Construcción alternativa de palabras

Sea Σ un alfabeto.

El conjunto $\bar{\Sigma}^*$ se define recursivamente como:

1. $\epsilon \in \bar{\Sigma}^*$ y $a \in \bar{\Sigma}^*$ para todo $a \in \Sigma$.
2. si $w_1 \in \bar{\Sigma}^*$ y $w_2 \in \bar{\Sigma}^*$, entonces $w_1 w_2 \in \bar{\Sigma}^*$.

¿esta bien la definición?

Se define la función $h : \bar{\Sigma}^* \rightarrow \mathbb{N}$ como:

$$\begin{aligned} h(\epsilon) &= 0 \\ h(w_1 w_2) &= h(w_1) + 1 \quad \text{para } w_1, w_2 \in \bar{\Sigma}^* \end{aligned}$$

¿algún problema?

Outline

Definiciones recursivas

Inducción estructural

Inducción estructural

Sea \mathbb{S} un conjunto definido a partir de:

- un conjunto **base** B y
- un conjunto de **reglas recursivas** \mathcal{R} .

Definimos la **capa** $\mathbb{S}[n]$ de \mathbb{S} para todo $n \geq 0$ como:

$$\mathbb{S}[0] = B$$

$$\mathbb{S}[n+1] = \mathbb{S}[n] \cup \left\{ T(s_1, \dots, s_k) \mid T \in \mathcal{R} \wedge s_1, \dots, s_k \in \mathbb{S}[n] \right\}$$

¿cuál es el conjunto de **capas** para las definiciones anteriores?

Inducción estructural

Sea \mathbb{S} un conjunto definido a partir de:

- un conjunto **base** B y
- un conjunto de **reglas recursivas** \mathcal{R} .

Principio de inducción estructural

Para una afirmación P sobre \mathbb{S} , si P cumple que:

1. P es verdadero sobre $\mathbb{S}[0]$,
2. si P es verdadero sobre $\mathbb{S}[n]$, entonces P es verdadero sobre $\mathbb{S}[n+1]$,

entonces la afirmación P es verdadera sobre todo \mathbb{S} .

¿es necesario demostrar este principio de inducción?

Ejemplo de inducción estructural

Ejemplo

Demuestre la afirmación para $w \in \mathcal{P}_\Sigma$:

$$P(w) \quad := \quad \text{si } |w| \text{ es par, entonces } |w|_b \text{ es par para todo } b \in \Sigma.$$

1. $P(\epsilon)$ o $P(a)$ para $a \in \Sigma^*$. ✓

2. si $P(w)$ es verdadero, entonces demostramos para $P(a \cdot w \cdot a)$:

- si $|a \cdot w \cdot a|$ NO es par, entonces $P(a \cdot w \cdot a)$ se cumple. ✓

- si $|a \cdot w \cdot a|$ es par y $b \in \Sigma$:

$\Rightarrow |w|$ es par.

$\Rightarrow |w|_b$ es par.

$\Rightarrow |a \cdot w \cdot a|_b$ es par. ✓

(por HI)

Por lo tanto, $P(w)$ se cumple para todo $w \in \mathcal{P}_\Sigma$.

Ejemplo de inducción estructural

Ejemplo

Demuestre la afirmación para $t \in \mathcal{T}_2$:

$$P(t) \quad := \quad \text{nodos}(t) < 2 \cdot \text{hojas}(t).$$

1. $P(\bullet)$. ✓

2. si $P(t_1)$ y $P(t_2)$ es verdadero, entonces dem. para $P(\bullet(t_1, t_2))$:

$$\begin{aligned} \text{nodos}(\bullet(t_1, t_2)) &= \text{nodos}(t_1) + \text{nodos}(t_2) + 1 \\ &< 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + \text{nodos}(t_2) + 1 \quad (\text{por HI}) \\ \text{nodos}(\bullet(t_1, t_2)) &\leq 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + \text{nodos}(t_2) \\ &< 2 \cdot \text{hojas}(t_1) + 2 \cdot \text{hojas}(t_2) \quad (\text{por HI}) \\ &< 2 \cdot (\text{hojas}(t_1) + \text{hojas}(t_2)) \\ &< 2 \cdot \text{hojas}(t) \end{aligned} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $P(t)$ se cumple para todo $t \in \mathcal{T}_2$.