

Lógica de predicados

Clase 04

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todo número natural es par o impar

2 no es impar

Por lo tanto, 2 es par

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

¿qué le falta a la lógica proposicional?

- objetos (no solo proposiciones).
- predicados.
- cuantificadores: **para todo** (\forall) o **existe** (\exists).

Lógica de predicados

Lógica de predicados \subseteq Lógica de primer orden

Lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales, enteros, racionales, reales, ...
- Conjuntos, relaciones, ...
- Grafos, árboles, palabras, ...

Podremos definir propiedades como:

- Para todo hombre x , x es mortal.
- Para todo número n , existe un m tal que $n \geq m$.

Outline

Predicados

Cuantificadores

Outline

Predicados

Cuantificadores

Predicados

Ejemplos

1. x es par

2. $x \leq y$

3. $x + y = z$

¿cuál de estos ejemplos son **proposiciones**?

Ninguno!!

Pero, si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

1. 2 es par, 3 es par, ...

2. $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...

3. $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta, cuyo valor de verdad depende del objeto en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x)$ y un valor a , la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a .

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $P(x) := x$ es par
- $R(x) := x$ es primo
- $M(x) := x$ es mortal

$P(2)$

$P(3)$

$R(31)$

$M(\text{Socrates})$

$M(\text{Zeus})$

Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \dots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores a_1, \dots, a_n , la **valuación** $P(a_1, \dots, a_n)$ es el valor de verdad de P en a_1, \dots, a_n .

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) := x \leq y$
- $S(x, y, z) := x + y = z$
- $Padre(x, y) := x$ es padre de y

$O(2, 3)$ $S(5, 10, 15)$ $S(4, 12, 1)$ $Padre(\text{Homero}, \text{Bart})$

¿cuál es el valor de verdad de $O(\frac{2}{3}, \frac{4}{7})$? ¿ $O(\text{Homero}, \text{Bart})$?

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \dots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores a_1, \dots, a_n , la **valuación** $P(a_1, \dots, a_n)$ es el valor de verdad de P en a_1, \dots, a_n .
- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos de predicados y sus dominios

- $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N}
- $S(x, y, z) := x + y = z$ sobre \mathbb{Q}
- $Padre(x, y) := x$ es padre de y sobre todas las personas

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \dots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores a_1, \dots, a_n , la **valuación** $P(a_1, \dots, a_n)$ es el valor de verdad de P en a_1, \dots, a_n .
- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, \dots, x_n)$, diremos que x_1, \dots, x_n son las **variables libres** de P .
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdad verdadero o falso sin importar la valuación.

Predicados compuestos (o formulas)

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), condicional (\rightarrow), bicondicional (\leftrightarrow) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) := O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$

Outline

Predicados

Cuantificadores

Cuantificador universal

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D .

Definición

- Definimos el cuantificador **universal**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) := \forall x. P(x, y_1, \dots, y_n)$$

donde x es la **variable cuantificada** y y_1, \dots, y_n son las **variables libres**.

- Para b_1, \dots, b_n en D , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para b_1, \dots, b_n en D y $P'(y_1, \dots, y_n) := \forall x. P(x, y_1, \dots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $O'(y) := \forall x. O(x, y)$ $O'(2) = \forall x. O(x, 2)$
- $O''(x) := \forall y. O(x, y)$ $O''(0) = \forall y. O(0, y)$
- $P_0 := \forall x. P(x)$
- $P'_0 := \forall x. (P(x) \vee \neg P(x))$

Cuantificador existencial

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D .

Definición

- Definimos el cuantificador **existencial**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) := \exists x. P(x, y_1, \dots, y_n)$$

donde x es la **variable cuantificada** y y_1, \dots, y_n son las **variables libres**.

- Para b_1, \dots, b_n en D , definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial (ejemplos)

Definición

Para b_1, \dots, b_n en D y $P'(y_1, \dots, y_n) := \exists x. P(x, y_1, \dots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{N} :

- $O'(y) := \exists x. O(x, y)$ $O'(2) = \exists x. O(x, 2)$
- $O''(x) := \exists y. O(x, y)$ $O''(2) = \exists y. O(2, y)$
- $O'''(x, y) := \exists z. O(x, z) \wedge O(z, y)$ $O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x. P(x)$

Interpretación de cuantificadores

Sea $P(x)$ un predicado compuesto sobre el **dominio** $D = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Los cuantificadores **universal** y **existencial** se pueden “interpretar” como:

$$\forall x. P(x) \quad := \quad P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \dots \quad = \quad \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

$$\exists x. P(x) \quad := \quad P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \dots \quad = \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

Es posible combinar cuantificadores

¿qué significan las siguientes formulas?

Para los predicados $P(x) := x \text{ es par}$ y $O(x, y) := x \leq y$ sobre \mathbb{Z} :

- $\forall x. \forall y. O(x, y)$
- $\exists x. \exists y. O(x, y)$
- $\forall x. \exists y. O(x, y)$
- $\exists x. \forall y. O(x, y)$
- $\forall x. P(x) \rightarrow \exists y. O(x, y)$

Predicados compuestos (con cuantificadores)

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también formula) si es:

- un predicado básico,
- la negación (\neg), conjunción (\wedge), disyunción (\vee), condicional (\rightarrow), bicondicional (\leftrightarrow) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** (\forall) o **existencial** (\exists) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados compuestos (mas ejemplos)

¿qué representan las siguientes formulas?

Para los predicados $x \leq y$, $x = y$, e $x + y = z$ sobre \mathbb{Z} :

- $C(x) := x + x = x$
- $L(x, y) := x \leq y \wedge \neg(x = y)$
- $S(x, y) := L(x, y) \wedge \neg \exists z. (L(x, z) \wedge L(z, y))$
- $U(x) := \exists y. S(y, x) \wedge C(y)$
- $I := \forall x. \exists y. \exists z. C(z) \wedge x + y = z$