

# Relaciones

Clase 08

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# Teoría de conjuntos es la base de las matemáticas

Con conjuntos podemos **representar**:

- Números naturales, enteros, racionales, ...
- Funciones, secuencias, ...
- Grafos, árboles, tablas, matrices, ...
- ...

¿algunos ejemplos?

1. Números naturales.
2. Grafos.
3. Tablas.

¿desde donde empiezan los naturales? ¿0 o 1?

Para todo conjunto  $A$  considere el operador:

$$\sigma(A) = A \cup \{A\}$$

El **conjunto de los números naturales** se define como sigue:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \sigma(0) = \sigma(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\}$$

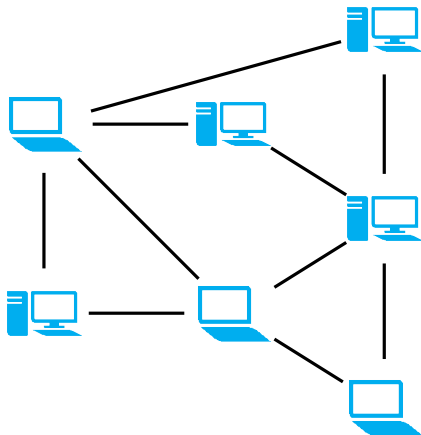
$$2 = \sigma(1) = \sigma(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} 3 &= \sigma(2) = \sigma(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

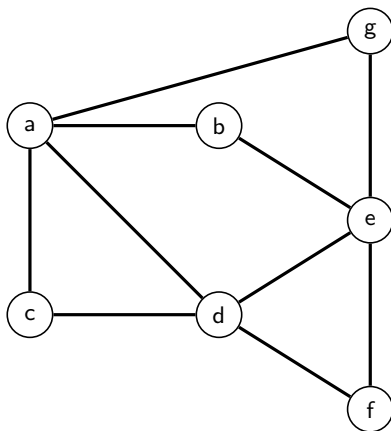
$\vdots$

¿cuál es el significado del operador  $\sigma$  en  $\mathbb{N}$ ?

¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



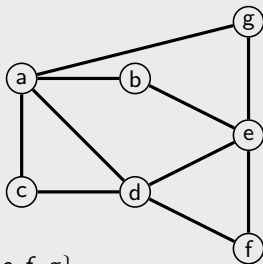
¿cómo modelamos las conexiones entre los nodos?

# Grafos como conjuntos

## Definición

Un **grafo**  $G$  sobre el dominio  $V$  es un subconjunto  $E \subseteq \mathcal{P}(V)$  tal que para todo  $e \in E$  se cumple que  $|e| = 2$ .

## Ejemplo



- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\}\}$

# Grafos como conjuntos

## Definición

Un **grafo**  $G$  sobre el dominio  $V$  es un subconjunto  $E \subseteq \mathcal{P}(V)$  tal que para todo  $e \in E$  se cumple que  $|e| = 2$ .

## Notación

- Los elementos en  $V$  los llamaremos los **vértices** o nodos del grafo.
- Los elementos en  $E$  los llamaremos las **aristas** del grafo.

**Grafos** serán estructuras muy útiles durante el curso!

# ¿cómo representamos tablas con teoría de conjuntos?

Nombre	Curso
Marcelo	Tópicos avanzados en CS
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

¿cómo representamos esta estructura con **conjuntos**?

Necesitamos relaciones

Una **relación** es una correspondencia entre objetos.

Varios ejemplos en matemáticas como:

- 'menor que', 'subconjunto', 'igualdad', ...

Relaciones nos darán **orden** a nuestros objetos



# Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

# Outline

**Producto cartesiano**

Relaciones

Representación

Operaciones

# Pares ordenados

## Definición (informal)

Un pareja de objetos  $(a, b)$  es un **par ordenado** si se distingue un **primer** elemento y un **segundo** elemento.

¿cómo definimos **pares ordenados** con teoría de conjuntos?

# Pares ordenados

## Definición

Para dos elementos  $a$  y  $b$ , se define el **par ordenado**  $(a, b)$  como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

## Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si} \quad a = c \quad \text{y} \quad b = d$$

En particular,  $(a, b) \neq (b, a)$

# Pares ordenados

Demostración:  $(a, b) = (c, d)$  ssi  $a = c$  y  $b = d$

$(\Leftarrow)$  Trivial.

$(\Rightarrow)$  Suponga que  $(a, b) = (c, d)$ . Por casos:

1. Si  $c = d$ , entonces como  $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{c\}\}$ :

Por lo tanto,  $a = c$  y  $b = a = c$  ✓

2. Si  $c \neq d$ , entonces como  $\{\{c\}, \{c, d\}\} \subseteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$  se cumple:

- $\{c, d\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$  entonces  $a \neq b$ .
- $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$  entonces  $a = c$  y  $b = d$ . ✓



# Pares ordenados (generalización)

## Definición

- Para tres elementos  $a, b, c$  se define el **triple ordenado**  $(a, b, c)$  como:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

- En general, para  $a_1, \dots, a_n$ , se define una  **$n$ -tupla ordenada** como:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = ((a_1, a_2, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

## Proposición

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \quad \text{si, y solo si} \quad a_i = b_i \quad \text{para todo } i \leq n$$

Demostración: ejercicio.

# Producto cartesiano

## Definición

- Para dos conjuntos  $A$  y  $B$  se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

- En general, para conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \}$$

## Ejemplos

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

# Producto cartesiano

## Algunas preguntas

1. ¿  $A \times B = B \times A$  ?
2. ¿  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  ?

## Ejemplo

- $\{1\} \times \{2\} = \{2\} \times \{1\}$  ?
- $(\{1\} \times \{1\}) \times \{1\} = \{1\} \times (\{1\} \times \{1\})$  ?



# Outline

Producto cartesiano

**Relaciones**

Representación

Operaciones

# Relaciones

## Definición

Dado un conjunto  $A$  y  $B$ ,  $R$  es una **relación binaria** sobre  $A$  y  $B$  si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si  $B = A$  decimos que  $R$  es una relación binaria sobre  $A$ .

¿qué relaciones binarias conocen?

# Relaciones (ejemplos)

## Ejemplo 1

Considere el conjunto  $A$ :

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Considere la siguiente relación:

$$R_2 = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$

- ¿es cierto que  $(d, a) \in R_2$ ?
- ¿es cierto que  $(c, c) \in R_2$ ?

# Relaciones (ejemplos)

## Ejemplo 2

Nombre	Curso
Marcelo	Tópicos Avanzados en CS
Marcelo	Matemáticas Discretas
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

Considere los siguientes conjuntos  $A$  y  $B$ :

$$A = \{\text{Marcelo, Juan, Cristian}\}$$

$$B = \{\text{TACS, Lógica, MD}\}$$

Una relación que modela la tabla anterior es:

$$R_1 = \{(\text{Marcelo, TACS}), (\text{Marcelo, MD}), \\ (\text{Juan, Lógica}), (\text{Cristian, MD})\}$$

¿cuál es la diferencia entre una “tabla” y una relación?

# Relaciones (ejemplos)

## Ejemplo 3

Considere el conjunto  $\mathbb{N}$  y las relaciones:

$$T_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$$

$$T_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\}$$

$$T_3 = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\}$$

- ¿es cierto que  $T_1 \subseteq T_2$ ?
- ¿es cierto que  $T_3 \subseteq T_1$ ?
- ¿es cierto que  $(T_2 \cup T_3) = T_1$ ?

# Relaciones (notación)

## Definición

Para una relación  $R$  y un par  $(a, b)$  usaremos la siguiente **notación**:

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) \in R \\ \text{o} \\ a R b \end{array} \right\} (a, b) \text{ pertenece a la relación } R$$

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) \notin R \\ \text{o} \\ a \not R b \end{array} \right\} (a, b) \text{ **NO** pertenece a la relación } R$$

## Ejemplos

■  $(2, 3) \in \leq$     o     $2 \leq 3$

■  $(5, 2) \notin \leq$     o     $5 \not\leq 2$

# Relaciones (mas ejemplos)

## Ejemplo 4

Considere el conjunto  $\mathbb{N}$  y la relación “**a divide b**”:

$$a \mid b \quad \text{si, y solo si} \quad \exists k. k \in \mathbb{N} \wedge a \cdot k = b$$

■ ¿es cierto que  $18 \mid 72$  ?

■ ¿es cierto que  $7 \nmid 93$  ?

■ ¿es cierto que  $= \subseteq \mid$  ?

■ ¿es cierto que  $\leq \subseteq \mid$  ?

# Outline

Producto cartesiano

Relaciones

**Representación**

Operaciones



# Representación de relaciones

1. Grafos dirigidos.
2. Matrices sobre bits.

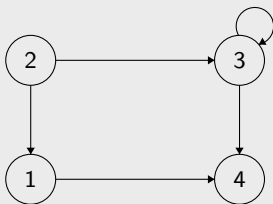
# Grafos dirigidos

## Definición

Un **grafo dirigido**  $G$  es un par  $(V, E)$  donde:

- $V$  es un conjunto (**vertices**),
- $E \subseteq V \times V$  es una relación binaria sobre  $V$  (**aristas**).

## Ejemplo



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$

# Grafos dirigidos

## Propiedad

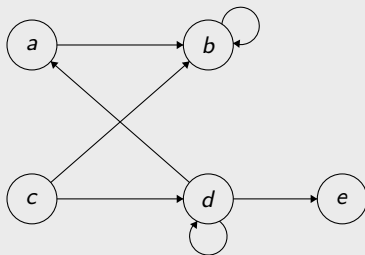
Toda **relación binaria**  $R$  sobre  $A$

se puede ver como un **grafo dirigido**  $G_R = (A, R)$ .

## Ejemplo

Considere el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$



# Representación matricial

## Definición

Sea  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un conjunto ordenado arbitrariamente y  $R$  una relación binaria sobre  $A$ . Definimos la **matriz**  $M_R$  de tamaño  $n \times n$  como:

$$M_R[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R a_j \\ 0 & \text{si } a_i \not R a_j \end{cases}$$

para todo  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ .

# Representación matricial

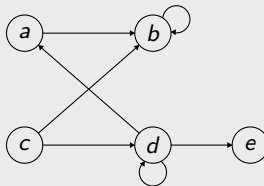
## Ejemplo

Considere el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$

Entonces la matriz  $M_R$  que representa a  $R$  es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿qué ventaja tiene la representación matricial de una relación?

# Operaciones de bits y matrices

## Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits  $M$  y  $N$  de tamaño  $n$ , definimos las matrices:

$$(M \vee N)[i,j] = M[i,j] \vee N[i,j]$$

$$(M \wedge N)[i,j] = M[i,j] \wedge N[i,j]$$

$$(\neg M)[i,j] = \neg M[i,j]$$

Para dos relaciones  $R$  y  $S$ , ¿qué representa  $M_R \vee M_S$ ? ¿ $M_R \wedge M_S$ ? ¿ $\neg M_R$ ?

# Operaciones de bits y matrices

## Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits  $M$  y  $N$  de tamaño  $n$  definimos el orden  $M \leq N$ :

$$M[i,j] \leq N[i,j]$$

para todo  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$  suponiendo que  $0 \leq 1$ .

Para dos relaciones  $R$  y  $S$ , ¿qué representa  $M_R \leq M_S$ ?

# Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

**Operaciones**



# Operaciones entre relaciones

Sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación sobre  $A$ .

## Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Proyección 1:**  $\pi_1(R)$  son todos los elementos que están en la primera componente de  $R$ .

$$x \in \pi_1(R) \quad \text{ssi} \quad \text{existe un } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

- **Proyección 2:**  $\pi_2(R)$  son todos los elementos que están en la segunda componente de  $R$ .

$$y \in \pi_2(R) \quad \text{ssi} \quad \text{existe un } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

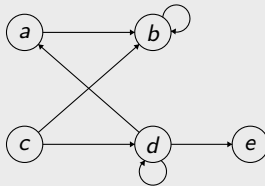
# Operaciones entre relaciones

## Ejemplo

Considere el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es el conjunto  $\pi_1(R)$ ?
- ¿cuál es el conjunto  $\pi_2(R)$ ?

¿a qué corresponde  $\pi_1(R)$  en la representación de grafo dirigido?

# Operaciones entre relaciones

Sea  $A$  un conjunto y  $R$ ,  $R_1$  y  $R_2$  relaciones sobre  $A$ .

## Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso:**  $R^{-1}$  son todos los pares  $(x, y)$  tal que  $(y, x) \in R$ .

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición:**  $R_1 \circ R_2$  son todos los elementos  $(x, y)$  tal que existe un  $z$  que cumple  $(x, z) \in R_1$  y  $(z, y) \in R_2$ .

$$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) \mid \exists z \in A. (x, z) \in R_1 \text{ y } (z, y) \in R_2\}$$

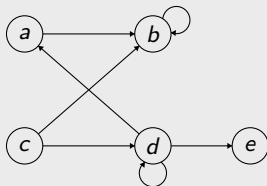
# Operaciones entre relaciones

## Ejemplo

Considere el conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$  y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es la relación  $R^{-1}$ ?
- ¿cuál es la relación  $R \circ R$ ?

¿a qué corresponde  $R^{-1}$  y  $R \circ R$   
en la representación de **grafo dirigido** y **matricial**?

# Caminos en grafos dirigidos

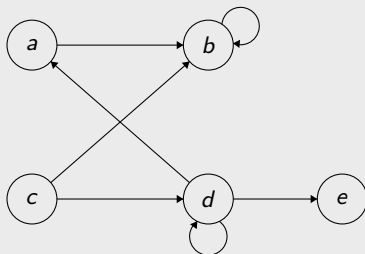
Sea  $G = (V, E)$  un grafo dirigido.

## Definición

- Un **camino** en  $G$  es una secuencia  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tal que:
  - $v_i \in V$  para todo  $0 \leq i \leq n$ .
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para todo  $0 \leq i < n$ .
- Un **camino simple** en  $G$  es un camino donde todos los nodos son distintos en la secuencia.
- El **largo** de un camino  $v_0, v_1, \dots, v_n$  es igual a  $n$ , esto es, el al largo de la secuencia menos uno.

# Caminos en grafos dirigidos

## Ejemplo



- ¿cuál es un camino de largo 2? ¿y de largo 3?
- ¿cuál es un camino simple de largo 4? ¿y de largo 5?

¿qué significa el grafo de  $R \circ R$ ? ¿y de  $R \circ R \circ R$ ?

# Multiplicación de matrices de bits

## Definición

Dado dos matrices de bits  $M$  y  $N$  de tamaño  $n \times n$ , se define la **multiplicación**  $M \cdot N$  tal que:

$$(M \cdot N)[i,j] = \bigvee_{k=1}^n M[i,k] \wedge N[k,j]$$

para todo  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ .

## Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una relación  $R$ , ¿qué representa  $M_R \cdot M_R$ ?