Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

# Ayudantía 12

## Teoría de Grafos

## Problema 1

Demuestre que en un grupo de personas, tiene que haber al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos dentro del grupo.

**Solución propuesta.**

Para representar el conjunto de personas relacionadas bajo la relación de *amistad*, definimos el grafo $G = (V, E)$ con vértices $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ y conjunto de aristas definido según

$$E = \{\{u, v\} \mid u \neq v \text{ y } u \text{ y } v \text{ son amigos}\}$$

Con este modelo, la cantidad de amigos de una persona se puede visualizar como el grado de un vértice. Luego, demostraremos por contradicción lo pedido.

Supongamos que cada vértice tiene grado distinto. Para un vértice $u \in V$ cualquiera, en un grafo no dirigido con $|V| = n$ se cumple que

$$0 \leq \deg_G(u) \leq n - 1$$

Como cada vértice tiene grado distinto y hay $n$ valores distintos para el grado, podemos etiquetar los vértices según

$$V = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$$

de manera que $\deg_G(u_i) = i$. Luego, $u_{n-1}$ es el vértice con grado $n-1$ y por lo tanto está unido a todos los demás, pero esto contradice que $u_0$ está unido a cero vértices. Esta contradicción demuestra que deben haber al menos dos vértices con el mismo grado.

## Problema 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Un vértice $v \in V$ se dice que es un *vértice de corte* si el grafo $G - v$ (el grafo que resulta de $G$ al sacar $v$ y sus aristas incidentes) es un grafo disconexo.

1. Demuestre que $v$ es un vértice de corte si, y solo si, existen vértices $u_1$ y $u_2$ en $G$ distintos a $v$ tal que todo camino entre $u_1$ y $u_2$ pasa por $v$.

   **Solución propuesta.**

   ($\Rightarrow$) Sea $v$ un vértice de corte para $G$. Luego, $G - v$ es disconexo y tiene $m$ componentes conexas distintas (y que son no vacías), con $m \geq 2$. Escogemos dos vértices $u_1$ y $u_2$ tales que pertenecen a componentes distinas en $G - v$.

Demostraremos lo buscado por contradicción. Supongamos que para tales vértices, existe un camino $\pi$ que une $u_1$ con $u_2$ tal que $v$ no está en $\pi$. Como $v$ no está en $\pi$, cada vértice del camino se encuentra en $G - v$ y por lo tanto $\pi$ es un camino entre $u_1$ y $u_2$ en $G - v$. Luego, ambos vértices están conectados y deben pertenecer a la misma componente conexa en $G - v$, lo cual contradice la definición de tales vértices. Por lo tanto, existen $u_1$ y $u_2$ tales que todo camino que los une en $G$, pasa por $v$.

($\Leftarrow$) Sean $u_1, u_2 \in V$ tales que $v$ está en cada camino que los conecta en $G$. Luego, ninguno de estos caminos está en $G - v$. Como además no se agregan aristas al construir $G - v$ a partir de $G$, no existen caminos entre $u_1$ y $u_2$ en $G - v$ y por lo tanto pertenecen a componentes conexas diferentes. Esto significa que $G - v$ es disconexo y por lo tanto $v$ es de corte para $G$.

2. Demuestre que si $|V| \geq 2$, entonces $G$ tiene al menos dos vértices que no son de corte.

**Solución propuesta.**

Demostraremos esta propiedad por inducción fuerte, definiendo la proposición:

$P(n) :=$ $G$ es conexo. Si $|V| = n$, entonces $G$ tiene al menos 2 vértices que no son de corte para $G$.

**Caso base:** $P(2)$ es cierta pues un grafo conexo con 2 vértices es de la forma $G = (\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$. El grafo $G - u$ es conexo pues consiste solo en el vértice $v$ sin aristas (que es conexo). Asimismo, $G - v$ también es conexo. Por lo tanto, en $G$ hay dos vértices que no son de corte para $G$.

**Paso inductivo:** Suponemos que $P(k)$ se cumple para todo $k < n$ e intentamos probar que $P(n)$ es cierta. Sea $G$ un grafo conexo con $|V| = n$. Para poder usar los casos con $k < n$ analizaremos el grafo resultante de extraer un vértice $v$ cualquiera. Existen dos posibilidades para tal vértice:

**(I)** Si $v$ no es de corte para $G$, entonces $G - v$ es un grafo conexo con $n - 1$ vértices. Como $n > 2$, entonces $G - v$ tiene al menos 2 vértices. Luego, por hipótesis inductiva, en $G - v$ existen al menos dos vértices que no son de corte para $G - v$ (Es muy importante notar que la hipótesis inductiva nos entrega vértices que no son de corte para el subgrafo en el cual se aplica, que en este caso es $G - v$... estos vértices podrían sí ser de corte para $G$ tal como mostraremos a continuación).

Sean $u_1, u_2$ dos de estos vértices no de corte para $G - v$. Nos ponemos en los posibles casos en que $v$ se une con $G - v$ para reconstruir $G$:

- ♣ Si $v$ en $G$ se une solo con $u_1$ (el mismo argumento puede usarse si se conectara solo con $u_2$), entonces dicho vértice se vuelve de corte para $G$, pues al sacarlo, $v$ queda aislado en una componente separada. En cambio, si sacamos a $u_2$ de $G$, no se desconectan vértices, por lo cual no es de corte para $G$. Como $v$ tampoco lo es, existen al menos 2 vértices no de corte para $G$.

- ♠ Si $v$ en $G$ se une con ambos vértices $u_1$ y $u_2$, ninguno es de corte para $G$ pues al sacar por ejemplo $u_1$, $v$ sigue conectado a $G - u_1$ a través de $u_2$, y $u_1$ no separa a ningún vértice de $G - v$. Luego, existen al menos 2 vértices no de corte para $G$.

- ♥ Si $v$ se conecta con vértices que son de corte para $G - v$, entonces al sacar $u_1$ no se desconecta nada porque $v$ no se une con él y $u_1$ no es de corte para $G - v$. Luego, $u_1$ y $u_2$ no son de corte para $G$.

**(II)** Si $v$ es de corte para $G$, entonces $G - v$ es disconexo y tiene $m \geq 2$ componentes conexas diferentes, $G_1, \ldots, G_m$. Es importante notar que no podemos aplicar directamente la hipótesis inductiva sobre estas componentes porque es posible que existan algunas con un solo vértice, y $P(k)$ solo aplica cuando hay al menos 2 vértices.

(a) Si cada componente $G_i = (V_i, E_i)$ es tal que $|V_i| = 1$, entonces $G$ es un grafo *estrella* donde $v$ es central y las únicas aristas unen cada $u \neq v$ con $v$. Cada uno de los $m$ vértices $u$ no centrales no es de corte para $G$ pues al extraerlo, el grafo $G - u$ sigue siendo conexo. Luego, como $m \geq 2$ hay al menos 2 vértices que no son de corte para $G$.

(b) Si hay al menos una componente, digamos $G_1$, que tiene al menos 2 vértices, entonces para dicha componente podemos usar la hipótesis inductiva. Sean $u_1, u_2$ vértices que no son de corte para $G_1$. Ahora, al igual que en la parte (I), vemos las formas en que $v$ se conecta con $G_1$ para reconstruir $G$.

- ♣ Si $v$ se conecta con vértices que son de corte para $G_1$, entonces, $u_1$ y $u_2$ no son de corte para $G$.
- ♠ Si $v$ en $G$ se une con ambos vértices $u_1$ y $u_2$, ninguno es de corte para $G$. Luego, existen al menos 2 vértices no de corte para $G$.
- ♥ Si $v$ en $G$ se une solo con $u_1$, entonces dicho vértice se vuelve de corte para $G$, pues al sacarlo, $v$ queda aislado en una componente separada. Si sacamos a $u_2$ de $G$, no se desconectan vértices, por lo cual no es de corte para $G$. Hasta aquí, solo sabemos de la existencia de un vértice en $G_1$ que no es de corte para $G$.

  Como las demás componentes $G_2, \ldots, G_m$ tienen al menos un vértice, es claro que en el peor caso cada una aporta un solo vértice que no es de corte para $G$. Luego, como hay al menos una componente distinta de $G_1$, en total hay al menos 2 vértices que no son de corte para $G$.

Como para cualquier caso se logró concluir que $G$ con $n$ vértices tiene al menos dos vértices que no son de corte para $G$, entonces $P(n)$ es cierta. Luego, se concluye que $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 2$ y se concluye lo pedido.

## Problema 3

Se define el grafo $S_n$ para todo $n \geq 1$ recursivamente de la siguiente forma:

- $S_1 = (V_1, E_1)$ donde $V_1 = \{0, 1\}$ y $E_1 = \{\{0, 1\}\}$.
- $S_n = (V_n, E_n)$ donde $V_n = \{0, 1\} \times V_{n-1}$ y para todo $a, b \in \{0, 1\}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in V_{n-1}$ se tiene que:

$$\{(a, \vec{u}), (b, \vec{v})\} \in E_n \quad \text{si, y solo si,} \quad \begin{array}{l} (a = b \ \text{ y } \ \{\vec{u}, \vec{v}\} \in E_{n-1}) \quad \text{o} \\ (a \neq b \ \text{ y } \ \vec{u} = \vec{v}). \end{array}$$

Demuestre por inducción en $n$ que para todo par de vertices $\vec{u}, \vec{v} \in V_n$ en el grafo $S_n$ existe un camino de largo menor o igual a $n$.

**Solución propuesta.**

Demostraremos usando la propiedad

$$P(n) := \text{Existe un camino de largo menor o igual a } n \text{ en } S_n \text{ entre cualesquiera } u, v \in V_n$$

**Caso base.** $P(1)$ es cierta pues en el grafo $S_1 = (\{0, 1\}, \{\{0, 1\}\})$ hay una arista que une 0 con 1 y por lo tanto existe un camino de largo 1 entre ellos. Dado que no hay vértices que estudiar, se cumple la propiedad.
**Paso inductivo.** Suponemos que $P(n - 1)$ es cierta e intentamos probar $P(n)$. Sean $u, v \in V_n$, que son vectores con $n$ componentes binarias. Por construcción de $S_n$, podemos representar estos elementos como

$$u = (a, u'), \ v = (b, v'), \quad u', v' \in V_{n-1}, \ a, b \in \{0, 1\}$$

Por hipótesis inductiva, sabemos que existe un camino $\pi'$ entre $u'$ y $v'$ tal que tiene tamaño $k \leq n-1$, de la forma

$$\pi' := u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_k$$

con $u_0 = u'$ y $u_k = v'$.

- Si $a = b$, entonces usamos directamente la primera condición para crear aristas en $S_n$. Tenemos que en $S_n$ existe el camino

  $$\pi := (a, u_0), (a, u_1), (a, u_2), \ldots, (a, u_{k-1}), (a, u_k)$$

  de largo $k \leq n-1$. Esto se logra pues cada una de las aristas $\{(a, u_i), (a, u_{i+1})\}$ involucradas en $\pi$ existen en $E_n$ pues $\{u_i, u_{i+1}\}$ es una arista en $E_{n-1}$.

- Si $a \neq b$, entonces consideramos el camino

  $$\pi := (a, u_0), (a, u_1), \ldots, (a, u_{k-1}), (a, u_k), (b, u_k)$$

  que solo se diferencia del camino en el caso anterior en que la última arista del camino considera cambiar la primera coordenada de los vértices. Este camino tiene largo $k+1 \leq n$.

Se concluye que para cualesquiera $u, v \in V_n$ existe un camino de largo menor o igual a $n$ en $S_n$, i.e. $P(n)$ es verdadera. Luego, concluimos que $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 1$ tal como se quería probar.