NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

Nº LISTA: 31

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 1

- 1) Sabemos que $f \in o(g)$, lo que por definición significa lo siguiente:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 > 0 . \forall n > n_0 . f(n) < c * g(n)$$

Primero demostraremos que $f \in O(g)$. Tomamos $n_a = n_0$, con n_0 el mismo de la expresión anterior. Además, como dicha expresión es válida para todo $c \in \mathbb{R}^+$, podemos tomar un c_a cualquiera en los reales, en particular $c_a = 1$. Utilizando estos valores, la expresión se transforma en:

$$c_a = 1$$
$$n_a = n_0$$
$$\forall n > n_a . f(n) < c_a * g(n)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos cambiar el $<$ por $\leq$, ya que este incluye los casos en los que la expresión es menor estricta. Además, eligiendo $n_b = n_a + 1$, nos aseguramos de que la expresión se cumpla para todo $n \geq n_b$. Se obtiene:

$$c_a = 1$$
$$n_b = n_a + 1$$
$$\forall n \geq n_b . f(n) \leq c_a * g(n)$$

Con $n_0 = n_b$ y $c = c_a$, se ve claramente que $f \in O(g)$, ya que cumple con la siguiente condición:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . f(n) \leq c * g(n)$$

Queda por demostrar que $g \notin O(f)$, lo que se realizará por contradicción, partiendo de la premisa de que $g \in O(f)$. Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . g(n) \leq c * f(n)$$

Dividiendo por c se obtiene:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . \frac{g(n)}{c} \leq f(n)$$

Como $c \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\frac{1}{c} \in \mathbb{R}^+$. Luego, se encontró una constante $d = \frac{1}{c}$ en los reales positivos tal que a partir de un $n \in \mathbb{N}$ en adelante, $d * g(n) \leq f(n)$. Como se sabe que $f \in o(g)$, se tiene que a partir de un $n \in \mathbb{N}$ en adelante:

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ . f(n) < c * g(n)$$

Pero para $c = d$, con d la constante encontrada anteriormente, se obtiene una contradicción. Por lo tanto, la premisa es **falsa** y finalmente se llega a que $g \notin O(f)$.

- 2) Se utilizará el siguiente contraejemplo:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(n) = n$$

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$g(n) := \begin{cases} n & \text{Si n es Par} \\ n^2 & \text{Si n es Impar} \end{cases}$$

Ambas funciones tienen como dominio y recorrido a los naturales.

Primero, se cumple que $f \in O(g)$, ya que para $c = 1$ y $n_0 = 0$ se satisface:

Caso n **Par**:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . n \leq c * n$$

Caso n **Impar**:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . n \leq c * n^2$$

Segundo, se cumple que $g \notin O(f)$, esto se demuestra a continuación por contradicción. Se parte de la premisa de que $g \in O(f)$, es decir:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . g(n) \leq c * f(n)$$

Si consideramos los casos de n **Impar**:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N} . \forall n \geq n_0 . n^2 \leq c * n$$

Tomando $n \geq max(n_0, c + 1)$, entonces:

$$n^2 = n * n$$
$$n^2 \geq (c + 1) * n$$
$$n^2 \geq n * c + n$$
$$n * c + n > c * n$$
$$n^2 > c * n$$

Llegamos a una contradicción en los casos de n impar, ya que n^2 se vuelve mayor que $c * n$ (para cualquier $c \in \mathbb{R}^+$) al elegir un n lo suficientemente grande.

Debido a esto, sin importar lo que ocurra en los casos de n par, nunca se podrán elegir un c y un n_0 que cumplan con la expresión para **todos** los casos impares (esto se debe a que n^2 crece más rápido que $c * n$). Por lo tanto la premisa es **falsa** y $g \notin O(f)$.

Tercero, **NO** se cumple que $f \in o(g)$, esto también se puede demostrar por contradicción. Se parte de la premisa de que $f \in o(g)$, es decir:

$$\forall c \in \mathbb{R}^{+}.\exists n_0 > 0.\forall n > n_0.f(n) < c * g(n)$$

Considerando los casos en los que n es par:

$$\forall c \in \mathbb{R}^{+}.\exists n_0 > 0.\forall n > n_0.n < c * n$$

Eligiendo $c = 1$, se obtiene:

$$\exists n_0 > 0.\forall n > n_0.n < n$$

Esto es una clara contradicción (ya que $n = n$). Por lo tanto, la expresión no se cumple y la premisa es **falsa**, llegando a que $f \notin o(g)$.

Finalmente, se encontró un caso en el que la implicación contraria del ítem anterior **NO** se cumple, demostrando que esta **NO** es bidireccional.

NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

SECCIÓN: 2

N° LISTA: 31

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 2

- 1) **Verdadero**. Como $f(n) \in \Theta(g(n))$, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\exists c1, c2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_0 . c1 * g(n) \leq f(n)$$
$$\forall n \geq n_0 . f(n) \leq c2 * g(n)$$

Para que $min\{f(n), g(n)\} \in \Theta(max\{f(n), g(n)\})$, deben satisfacerse las siguientes 2 expresiones:

$$\exists d1, d2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . d1 * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$
$$\forall n \geq n_a . min\{f(n), g(n)\} \leq d2 * max\{f(n), g(n)\}$$

Comenzamos con la **primera**:

$$\exists d1 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . d1 * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Se desprenden 2 casos que pueden ocurrir dado un n en el dominio:

  - **1)** Para un n dado, $g(n) \geq f(n)$. En este caso, por la definición de máximo y mínimo, se tiene que $f(n)$ y $g(n)$ corresponden al mínimo y máximo del conjunto $\{f(n), g(n)\}$, respectivamente. Como $f(n) \in \Theta(g(n))$, sabemos que:

$$\exists c1 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_0 . c1 * g(n) \leq f(n)$$

Se reescribe la desigualdad, tomando $n_a = n_0$ y utilizando que $g(n)$ corresponde al máximo:

$$\exists c1 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . c1 * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Obtenemos que para $d1 = c1$ se satisface la primera expresión (en este caso).

- **2)** Para un n dado, $f(n) \geq g(n)$. En este caso, análogo al anterior, se tiene que $g(n)$ y $f(n)$ corresponden al mínimo y máximo del conjunto $\{f(n), g(n)\}$, respectivamente. Como $f(n) \in \Theta(g(n))$, sabemos que:

$$\exists c2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_0 \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_0 . f(n) \leq c2 * g(n)$$

Se reescribe la desigualdad, tomando $n_a = n_0$ y utilizando que $f(n)$ corresponde al máximo:

$$\exists c2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . \frac{max\{f(n), g(n)\}}{c2} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Obtenemos que para $d1 = \frac{1}{c2}$ se satisface la primera expresión (en este caso).

- En ambos casos se encontró una constante $d1$ que cumple con la primera expresión. Entonces, para satisfacer dicha expresión sin importar el caso, se elige $d1 = min(c1, \frac{1}{c2})$. A continuación se muestra que satisface ambos casos a la vez:
  * **1)** Para el primer caso, se tenía lo siguiente:

$$\exists c1 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . c1 * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Se realiza el siguiente desarrollo:

$$min(c1, \frac{1}{c2}) \leq c1$$
$$min(c1, \frac{1}{c2}) * max\{f(n), g(n)\} \leq c1 * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$
$$min(c1, \frac{1}{c2}) * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Por lo tanto, para $d1 = min(c1, \frac{1}{c2})$ se satisface la expresión.

  * **2)** Para el segundo caso, se tenía lo siguiente:

$$\exists c2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . \frac{max\{f(n), g(n)\}}{c2} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Se realiza el siguiente desarrollo:

$$min(c1, \frac{1}{c2}) \leq \frac{1}{c2}$$
$$min(c1, \frac{1}{c2}) * max\{f(n), g(n)\} \leq \frac{1}{c2} * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$
$$min(c1, \frac{1}{c2}) * max\{f(n), g(n)\} \leq min\{f(n), g(n)\}$$

Por lo tanto, para $d1 = min(c1, \frac{1}{c2})$ también se satisface la expresión.

Se concluye que con $d1 = min(c1, \frac{1}{c2})$ y $n_a = n_0$ se cumple la **primera** expresión.

Queda por demostrar la **segunda** expresión:

$$\exists d2 \in \mathbb{R}^+ . \exists n_a \in \mathbb{N}.$$
$$\forall n \geq n_a . min\{f(n), g(n)\} \leq d2 * max\{f(n), g(n)\}$$

Basta con tomar $n_a = n_0$ y $d2 = 1$, obteniendo:

$$\forall n \geq n_a . min\{f(n), g(n)\} \leq max\{f(n), g(n)\}$$

Por definición de máximo de un conjunto, $\forall a \in A . a \leq max\{A\}$. Por lo tanto, se desprende que $min\{f(n), g(n)\} \leq max\{f(n), g(n)\}$, concluyendo que para $d2 = 1$ y $n_a = n_0$ se satisface la **segunda** expresión.

Finalmente, para $d1 = min(c1, \frac{1}{c2})$, $d2 = 1$ y $n_a = n_0$, se satisfacen las 2 expresiones, llegando a que $min\{f(n), g(n)\} \in \Theta(max\{f(n), g(n)\})$. Por lo tanto, la afirmación es **Verdadera**.

- 2) **Falso**. Se utiliza el siguiente contraejemplo:

$$f(n) = 2$$
$$g(n) = n$$

Tomando $c = 1$ y $n_0 = 2$, se cumple:

$$\forall n \geq n_0 . f(n) \leq c * g(n)$$
$$\forall n \geq 2 . 2 \leq n$$

Por lo tanto $f(n) \in O(g(n))$. Además se tiene:

$$f(n)^{g(n)} = 2^n$$
$$g(n)^{f(n)} = n^2$$

Por lo visto en clases, sabemos que para un k fijo, la función k^n es de orden exponencial, el que está más arriba en la jerarquía que el orden polinómico, al que pertenece la función n^k (k fijo). En concreto, 2^n pertenece al orden exponencial, mientras que n^2 pertenece al orden de los polinomios, por lo que se desprende que $2^n \notin O(n^2) = f(n)^{g(n)} \notin O(g(n)^{f(n)})$. Se concluye que la afirmación es **Falsa**, ya que se encontró un caso en el que la implicancia **NO** es verdadera.