Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2019

Ayudantía 5

Órdenes y relaciones de equivalencia

Problema 1

Sea A un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre A tales que para toda relación de equivalencia $\sim$ sobre A, se tiene que $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$.

Solución propuesta.

La relación de equivalencia más *pequeña* es aquella que cumple con ser refleja y satisface tanto la simetría como transitividad de forma trivial por no contener aristas entre vértices diferentes. Es decir, tomamos la relación identidad

$$\sim_1 = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Como todo $(a, b) \in \sim_1$ es tal que $a = b$, entonces $(a, b) \in \sim$, para $\sim$ cualquier relación de equivalencia, pues debe ser refleja. En consecuencia, $\sim_1 \subseteq \sim$.
La relación de equivalencia con más aristas es la relación completa:

$$\sim_2 = A \times A$$

En efecto, es refleja porque contiene todos los pares de la forma (a, a) con $a \in A$; es simétrica porque contiene ambas direcciones (a, b) y (b, a); es transitiva porque contiene todas las aristas posibles y al tener (a, b) y (b, c), también tiene (a, c).

Dado $(a, b) \in \sim$ para $\sim$ relación de equivalencia cualquiera, es directo que $(a, b) \in \sim_2$ porque contiene todas las aristas en $A \times A$ y en consecuencia, $\sim \subseteq \sim_2$.

Problema 2

Sea P un conjunto de variables proposicionales, $L(P)$ el conjunto de fórmulas proposicionales sobre las variables de P y defina la relación $\preceq$ sobre $L(P) \mid_\equiv$ de la siguiente forma. Para cada $\alpha, \beta \in L(P)$, se tiene que

$$[\alpha]_\equiv \preceq [\beta]_\equiv \text{ si y solo si existe } \gamma \in L(P) \text{ tal que } (\alpha \wedge \gamma) \equiv \beta$$

Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial. ¿Es un orden total?

Solución propuesta.

Para probar que $\preceq$ es un orden parcial tenemos que probar que es una relación refleja, antisimétrica y transitiva.

Refleja. Dada la clase de equivalencia $[\alpha]_\equiv$, es claro que se relaciona consigo misma a través de $\preceq$ pues existe γ tal que

$$\alpha \wedge \gamma \equiv \alpha$$

Basta tomar $\gamma = \alpha$ o una conjunción de una cantidad arbitraria de α.

Antisimétrica. Dadas clases de equivalencia que cumplen $[\alpha]_\equiv \preceq [\beta]_\equiv$ y $[\beta]_\equiv \preceq [\alpha]_\equiv$, por la definición de $\preceq$ sabemos que existen fórmulas γ_1, γ_2 tales que

$$\begin{array}{rcl} \alpha \wedge \gamma_1 & \equiv & \beta \\ \beta \wedge \gamma_2 & \equiv & \alpha \end{array}$$

Sea $\overline{v}$ una valuación cualquiera. Si $\beta(\overline{v}) = 1$, de la primera equivalencia sabemos que $\alpha(\overline{v}) = \gamma_1(\overline{v}) = 1$. De forma análoga, si $\beta(\overline{v}) = 0$, de la segunda equivalencia sabemos que $\alpha(\overline{v}) = 0$. Como α y β tienen el mismo valor de verdad para cualquier valuación, entonces $\alpha \equiv \beta$. Luego, sus clases de equivalencia son iguales tal como debíamos mostrar:

$$[\alpha]_\equiv = [\beta]_\equiv$$

Transitiva. Dadas clases de equivalencia que cumplen $[\alpha]_\equiv \preceq [\beta]_\equiv$ y $[\beta]_\equiv \preceq [\delta]_\equiv$, sabemos que existen γ_1, γ_2 tales que

$$\begin{array}{rcl} \alpha \wedge \gamma_1 & \equiv & \beta \\ \beta \wedge \gamma_2 & \equiv & \delta \end{array}$$

Usando la primera equivalencia, deducimos de la segunda que

$$\alpha \wedge \gamma_1 \wedge \gamma_2 \equiv \delta$$

de forma que existe $\gamma_3 = \gamma_1 \wedge \gamma_2$ que permite afirmar que

$$[\alpha]_\equiv \preceq [\delta]_\equiv$$

de forma que $\preceq$ es transitiva y con las demás propiedades es un orden parcial.

¿Es orden total? Tomemos como contraejemplo dos clases de equivalencia de fórmulas tales que no se pueden relacionar a través de $\preceq$. Consideremos para las variables $p, q \in P$, $[p]_\equiv$ y $[q]_\equiv$. Si pudiéramos relacionarlas según $[p]_\equiv \preceq [q]_\equiv$ entonces debiera existir γ tal que

$$p \wedge \gamma \equiv q$$

Para la valuación $\overline{v}$ tal que $p(\overline{v}) = 0$ y $q(\overline{v}) = 1$, la conjunción $p \wedge \gamma$ siempre es falsa para cualquier γ, lo cual no permite que $p \wedge \gamma$ sea equivalente a q. Luego, no existe tal γ. Un argumento análogo justifica que tampoco estas clases se relacionan según $[q]_\equiv \preceq [p]_\equiv$, de forma que la relación $\preceq$ no es conexa.

Problema 3

Sea $\{0,1\}^* = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$ el conjunto de todas las palabras (strings) binarios y sea $u \cdot v$ la concatenación de dos palabras $u, v \in \{0,1\}^*$. Se define la relación $R \subseteq \{0,1\}^* \times \{0,1\}^*$:

$$(w_1, w_2) \in R \;\Leftrightarrow\; \text{existen palabras } u, v \text{ tales que } w_1 = u \cdot v \text{ y } w_2 = v \cdot u$$

Demuestre que R es una relación de equivalencia sobre $\{0,1\}^*$. ¿Qué representan las clases de equivalencia de R?

Solución propuesta.

Para probar que R es relación de equivalencia, debemos mostrar que es refleja, simétrica y transitiva.

Refleja. Para mostrar que es refleja, basta notar que para la palabra a, podemos escoger $u = a$ y $v = \epsilon$. Por las propiedades de la concatenación,

$$a = u \cdot v \wedge a = v \cdot u$$

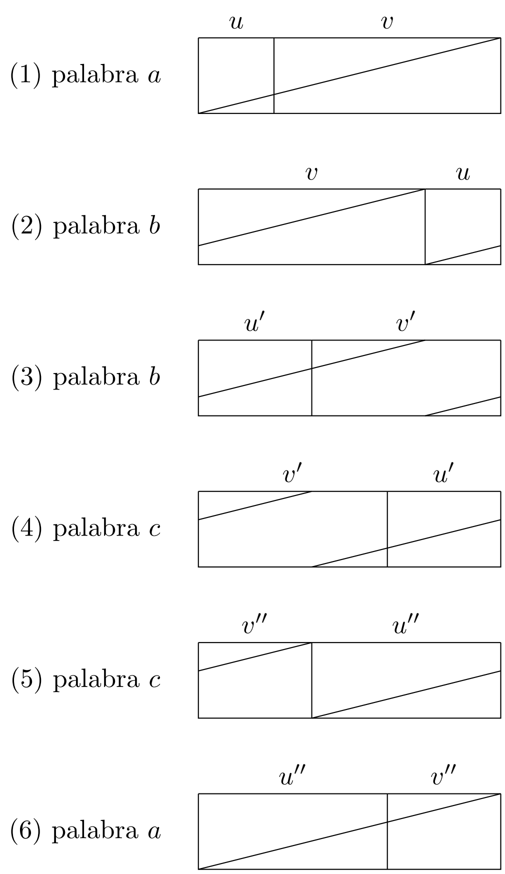
por lo cual $(a, a) \in R$.

Simétrica. Para probar que es simétrica, tomemos $(a, b) \in R$. Sabemos que existen palabras u, v tales que $a = u \cdot v$ y $b = v \cdot u$. Claramente la elección $u' = v, v' = u$ cumple que $b = u' \cdot v'$ y $a = v' \cdot u'$, de forma que $(b, a) \in R$ y R es simétrica.

Transitiva. Consideremos que $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$. Sabemos que existen u, v, u', v' tales que

$$a = uv \quad b = vu \quad b = u'v' \quad c = v'u'$$

Lo que tenemos que mostrar es una elección de división de a que forme c al intercambiar sus posiciones. Para motivar cómo construir tales u'', v'' tomemos el siguiente diagrama donde analizamos cómo operan las divisiones consecutivas. Los pasos (1), (3) y (5) representan una elección de segmentos y los pasos (2), (4) y (6) resultan de intercambiar las posiciones de tales segmentos. La línea diagonal se indica para ayudar a visualizar cómo se es el movimiento relativo de los segmentos de cada palabra.



Como $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$, sabemos que existen elecciones u, v y u', v' para los pasos (1) y (3) respectivamente. Lo que nos muestra la intuición gráfica es que también existe una elección u'', v'' que permite ir directo de a a c y viceversa. Cabe notar que en el paso (3) se supuso que $|v| \geq |u'|$. Si esto no es así, el desarrollo procede de forma similar, pero el tamaño de los segmentos es distinto.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|v| \geq |u'|$. La elección que podemos tomar es $u'' = uu'$ y v'' tal que

$$a = u''v''$$

Esto lo consideramos pues viendo en el diagrama los pasos (4) y (5), donde vemos que u'' consiste en un *cachito* seguido de u'. Este *cachito* es u como se ve en el paso (2). Ahora, usando el cambio de a a b,

$$\begin{array}{rcll} a = u''v'' & \Leftrightarrow & a = uu'v'' & \text{def. de } u'' \\ & \Leftrightarrow & a = u(u'v'') & \text{agrupando } v = u'v'' \\ & \Leftrightarrow & b = u'v''u & \text{por } b = vu \end{array}$$

de donde deducimos que $v' = v''u$. Luego, partiendo de lo que sabemos sobre c,

$$\begin{array}{rcll} c = v'u' & \Leftrightarrow & c = (v''u)u' & \text{por } v' = v''u \\ & \Leftrightarrow & c = v''(uu') & \text{agrupando} \\ & \Leftrightarrow & c = v''u'' & \text{por definición de } u'' \end{array}$$

lo que comprueba que la división $u'' = uu'$ con $a = u''v''$ es tal que $c = v''u''$ de manera que $(a, c) \in R$.

Interpretación. La interpretación de las clases de equivalencia es que $[w]_R$ contiene a todas las palabras que se pueden obtener de w a través del intercambio de dos subpalabras obtenidas al dividir w en un punto. Claramente, todas las palabras en una misma clase deben tener el mismo largo.

Problema 4

Sea A un conjunto finito y no vacío. Para dos particiones $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ de A, se dice que $\mathcal{S}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{S}_2$ si para todo $X \in \mathcal{S}_1$, existe un $Y \in \mathcal{S}_2$ tal que $X \subseteq Y$.
Sean R_1 y R_2 dos relaciones de equivalencia. Demuestre que $R_1 \subseteq R_2$ si y solo si $A\,|_{R_1}$ es un refinamiento de $A\,|_{R_2}$.

Solución propuesta.

Suponemos primero que $R_1 \subseteq R_2$. Elegimos un conjunto arbitrario $X = [x]_{R_1}$ de $A\,|_{R_1}$, con $x \in A$. Ahora veremos que existe $Y \in A\,|_{R_2}$ tal que $X \subseteq Y$. Sea $a \in X$, luego $(a, x) \in R_1$ (y (x, a) también, ya que es relación de equivalencia). Como $R_1 \subseteq R_2$, se tiene que $(a, x) \in R_2$ y entonces $a \in [x]_{R_2}$. Luego, tomando $Y = [x]_{R_2}$ se tiene que para todo X en $A\,|_{R_2}$ existe $Y \in A\,|_{R_2}$ tal que $X \subseteq Y$.
Ahora, supongamos que $A\,|_{R_1}$ es un refinamiento de $A\,|_{R_2}$. Sea $(a, b) \in R_1$, demostraremos que $(a, b) \in R_2$. Como $(a, b) \in R_1$ se tiene que $a \in [b]_{R_1}$ y $[b]_{R_1} \in A\,|_{R_1}$, esto implica que existe $Y = [y]_{R_2} \in A\,|_{R_2}$ tal que $[b]_{R_1} \subseteq Y$. Por lo tanto $a \in Y$ y $b \in Y$ (porque $b \in [b]_{R_1}$) y entonces $a, b \in [y]_{R_2}$. Como R_2 es de equivalencia, se tiene que $(a, b) \in [y]_{R_2}$.