

**IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación**  
Tarea 4 - Entrega Lunes 26 de Abril a las 20:00 - via siding

Recuerda que esta tarea es individual. Puedes discutir sobre la respuesta con tus compañeros (¡y eso está muy bien!), pero no puedes enviar la respuesta o utilizar la respuesta de alguien más. Esto es modelación en lógica proposicional. Trabajar en esto te va a hacer un mejor profesional de la computación, vas a entrenar tu pensamiento algorítmico y vas a quedar mejor parado para cuando tengas que modelar en lógica de primer orden.

La meta es lograr demostrar, usando lógica, la siguiente propiedad de los grafos dirigidos.

**P:** Si el grafo no tiene ciclos, entonces tiene un nodo que no tiene aristas entrantes (comúnmente llamada una raíz).

Decides hacerlo modelando cada grafo  $G = (V, E)$ , con  $V = \{1, \dots, n\}$ , con un conjunto de proposiciones  $P_E = \{e_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ , y las siguientes fórmulas: una fórmula  $\varphi_E = \bigwedge_{(i,j) \in E} e_{ij}$  y otra  $\varphi_{\bar{E}} = \bigwedge_{(i,j) \notin E} \neg e_{ij}$ .

Para estas preguntas asume un grafo dado  $G = (V, E)$ ,  $V = \{1, \dots, n\}$ , y que el conjunto  $P_E$  de proposiciones y las fórmulas  $\Sigma = \{\varphi_E, \varphi_{\bar{E}}\}$  se construyen según lo señalado arriba.

1. Demuestra que existe una sola valuación que hace verdad a  $\Sigma$ : la valuación que asigna un 1 a la variable  $e_{ij}$  si y solo si  $(i, j)$  es una arista en  $E$ . Esto nos va a permitir asumir que cada valuación para  $P_E$  corresponde a un grafo (que es unico hasta isomorfismo).
2. Construye una fórmula que sea verdad si y solo si el grafo  $G$  representado con las proposiciones y fórmulas tiene un nodo sin aristas entrantes.
3. Para cada  $k > 1$ , explica como construir una fórmula  $\psi_k$  que sea verdad si y solo si el grafo representado con las proposiciones y fórmulas no tiene un ciclo de largo  $k$  (como  $k$  no es acotado no tienes que escribirla de forma literal, pero si explicar claramente como se ve esa fórmula).
4. El sitio <https://www.erpelstolz.at/gateway/formular-uk-zentral.html> tiene un solver de lógica proposicional, que busca tautologías. Vamos a construir lo necesario para usar este sitio, aunque su uso es opcional. Sea  $n$  un entero mayor a 1. Explica como construir una fórmula que sea tautología si y solo si la propiedad **P** es verdad en todos los grafos con  $n$  nodos (no tienes que escribirla literal, por que  $n$  es no acotado, pero si explicarla claramente).

**Formato de entrega** Un solo archivo pdf. Aceptamos documentos pdf escrito en latex, o, excepcionalmente, imágenes escaneadas o fotografiadas en buena calidad. La parte 1 no entrega puntaje (aunque te recomendamos hacerla por que se simplifican las otras tres). Las otras partes otorgan dos puntos cada una.