

**IIC 2213 – Lógica para ciencia de la Computación**  
Tarea 7 - Entrega Viernes 9 de Julio a las 20:00 - via siding

Recuerda que esta tarea es individual. Puedes discutir sobre la respuesta con tus compañeros (¡y eso está muy bien!), pero no puedes enviar la respuesta o utilizar la respuesta de alguien más. Haciendo esta tarea vas a aprender a modelar en lógica de primer orden y pensar sobre temporalidad en lógica, ayudándole con un poquito de estructura a tus capacidades de pensamiento algorítmico.

**Motivación y definiciones: programa para definir alertas en sensores agrícolas.** En un campo existe un sistema de sensores capaces de detectar humedad y temperatura. El sistema consta de varios sensores para medir humedad y temperatura, y a cada hora entrega un conjunto con todas las mediciones de todos los sensores en esa hora.

La agrónoma a cargo del sistema tiene una serie de eventos que necesita detectar con los sensores, pero a su disposición solo tiene un programa que modela cada set de mediciones como un set  $d_1, \dots, d_n$  de eventos ordenados (se puede pensar en cada  $d_i$  como un evento de tipo date, y con  $d_i < d_{i+1}$ ), dos relaciones unarias HB y HA y dos relaciones unarias TB y TA. La relación unaria HB tiene todos los  $d_i$  que representan fechas de mediciones donde algún sensor marca que la humedad es baja, HA tiene todos los  $d_i$  que representan fechas de mediciones donde algún sensor marca que la humedad es alta, TB tiene todos los  $d_i$  que representan fechas de mediciones donde la temperatura en algún sensor marca cero o menos grados, y TA tiene todos los  $d_i$  que representan fechas de mediciones donde la temperatura en algún sensor marca sobre cero.

En este programa uno puede especificar situaciones de alerta, por medio de expresiones con la siguiente sintaxis:

- hb, ha, tb y ta son expresiones.
- Si  $e_1$  y  $e_2$  son expresiones, entonces  $e_1 \wedge e_2$ ,  $e_1 \vee e_2$  y  $\neg e_2$  son expresiones.
- Si  $e_1$  y  $e_2$  son expresiones, entonces  $e_1 \cdot e_2$  es una expresión.

La semántica de las expresiones es la siguiente. Como mencionamos, un conjunto de mediciones es una tupla  $M = (D, TA, TB, HA, HB)$ , donde  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$  es un set de fechas ordenadas, con  $d_i < d_{i+1}$ , y TA, TB, HA y HB son subconjuntos de  $D$  que satisfacen  $TA = D - TB$  y  $HA = D - HB$ , es decir, TA y TB definen una partición para  $D$ , y lo mismo con HA y HB. Definimos la semántica de cuando una expresión se gatilla con un  $d_i$  en particular de una medición  $M = (D, TA, TB, HA, HB)$ .

- Si  $e$  es la expresión ta, entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $d_i \in TA$ .
- Si  $e$  es la expresión tb, entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $d_i \in TB$ .
- Si  $e$  es la expresión ha, entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $d_i \in HA$ .
- Si  $e$  es la expresión hb, entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $d_i \in HB$ .

- Si  $e = e_1 \wedge e_2$  entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando ambas  $e_1$  y  $e_2$  se gatillan en  $d_i$ .
- Si  $e = e_1 \vee e_2$  entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando una de  $e_1$  o  $e_2$  se gatilla en  $d_i$ .
- Si  $e = \neg e_2$  entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $e_2$  no se gatilla en  $d_i$ .
- Si  $e = e_1 \cdot e_2$  entonces  $e$  se gatilla en  $d_i$  cuando  $e_1$  se gatilla en  $d_i$  y existe un  $j > i$  tal que  $e_2$  se gatilla en  $d_j$ .

Finalmente, dada una expresión  $e$ , decimos que  $e$  entrega una alerta para  $M = (D, TA, TB, HA, HB)$  si existe un  $d_i \in D$  tal que  $e$  se gatilla en  $d_i$ .

**Precalentamiento: definir algunas restricciones.** Muestra como hacer que tu lenguaje entregue alerta en todas las mediciones que cumplan lo siguiente:

- Si en algún momento baja la humedad y posteriormente baja la temperatura.  
**Solucion:**  $hb \cdot tb$
- Si la temperatura siempre se mantiene alta.  
**Solucion:**  $\neg tb$
- Si en algún momento hay más de 2 cambios entre temperatura alta y temperatura baja.  
**Solucion:**  $(ta \cdot tb \cdot ta \cdot tb) \vee (tb \cdot ta \cdot tb \cdot ta)$ .

### Propiedades definibles.

1. Muestra como especificar cada medición  $M = (D, TA, TB, HA, HB)$  como una estructura  $\mathfrak{A}_M$  sobre el vocabulario  $L = \{menor, TA, TB, HA, HB\}$ , donde *menor* es una relación binaria (la idea es que *menor* represente el orden entre las observaciones  $d_i$ ).
2. Escribe una fórmula  $\varphi$  tal que una estructura  $\mathfrak{A}$  sobre  $L$  satisface a  $\varphi$  si y solo si i) la interpretación  $menor^{\mathfrak{A}}$  de la relación *menor* en  $\mathfrak{A}$  es un orden total<sup>1</sup>, ii)  $TA = D - TB$ , y iii)  $HA = D - HB$ .
3. Demuestra que para cada expresión  $e$  en el lenguaje descrito anteriormente existe una fórmula  $\varphi$  tal que  $e$  entrega una alerta para una medición  $M$  si y solo si  $\mathfrak{A}_M$  satisface a  $\varphi$ .

---

<sup>1</sup>Un orden total satisface que todos los elementos están ordenados con respecto a los otros, que el orden es transitivo, en el sentido de que si  $n$  es menor que  $m$  y  $m$  es menor que  $k$  entonces  $n$  es menor que  $k$ , y que satisface que  $n$  no es menor que  $n$ .