NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

N.ALUMNO: 17642531

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencias de la Computación — 1' 2021

Tarea 2

1. B) Indecidible

Consideremos el lenguaje $D = \{w \in \{0,1\}^* |$ existe una máquina M tal que $w = C(M)$ y M se detiene con entrada $w\}$ visto en clases, el que se demostró mediante **diagonalización que es indecidible**. A continuación se define una función f que es capaz de mapear las palabras pertenecientes a D hacia el lenguaje MoM:

- La función f recibe palabras binarias w y realiza 3 pasos.
- 1) Revisa si w es una codificación válida de una Máquina de Turing, considerando el formato visto en clases. **En caso de que no lo sea**, se transforma a w en una palabra default que NO pertenezca a MoM, por ejemplo $C(\hat{M})00001$, con $\hat{M}$ una máquina con lenguaje vacío. **En caso de que la codificación sea válida, se continúa con los siguientes pasos**.
- 2) Se modifica el conjunto de estados finales de la máquina representada por $w = C(M)$, agregando estados hasta que **todos sean finales**, o en otras palabras, hasta que el conjunto de estados sea el mismo que el conjunto de estados finales. Esto transforma a w en una **nueva palabra** w', que refleja estos cambios en su codificación.
- 3) Se transforma a w' en la **palabra final** $w^* = w'0000w' = f(w)$.

A continuación se muestra que el teorema de reducción es aplicable utilizando esta función:

- Cualquier palabra en D es una codificación válida de una máquina, por lo que el paso 1 **NO afecta en nada**.
- Tras el paso 2, la máquina resultante de la codificación de w' **siempre se detiene con su propia codificación** como entrada (ya que pertenecía a D), y además **siempre acepta al terminar**, ya que todos sus estados son ahora finales.
- Tras el paso 3, el formato de la palabra $w^* = f(w)$ queda como $C(M)0000C(M)$, donde sabemos que M **acepta a su propia codificación** (gracias al paso anterior).

- Esto implica que la palabra final $f(w)$ **cumple con todas las condiciones para pertenecer a** MoM, ya que $M_1 = M_2$ y por lo tanto M_1 acepta a $C(M_2)$ y M_2 acepta a $C(M_1)$. Entonces tenemos lo siguiente:

$$w \in D \to f(w) \in MoM$$

- Por otro lado, si $f(w) \in MoM$, sabemos que $f(w) = C(M_1)0000C(M_2)$, donde ocurre que M_1 acepta a $C(M_2)$, o bien, M_2 acepta a $C(M_1)$ (o ambas condiciones al mismo tiempo). Además se puede deducir que $M_1 = M_2$, ya que en el paso 3 la función f copia la codificación de una misma máquina M en ambos extremos de la palabra binaria. Entonces, concluimos que $M_1 = M_2 = M$, y que M acepta a su propia codificación.

- Ahora bien, siendo M la máquina representada por la palabra w' en el paso 2 de la función f, lo único que se hizo en este paso fue agregar estados al conjunto de estados finales, por lo tanto las transiciones de la máquina **NO se ven afectadas**. Esto implica que la máquina representada por la palabra w antes del paso 2 **ya era capaz de detenerse con su propia codificación, sin importarnos si aceptaba o rechazaba** (esto último sí puede verse afectado agregando estados finales). Entonces tenemos que $w \in D$ por definición, llegando a lo siguiente:

$$f(w) \in MoM \to w \in D$$

- Cada uno de los pasos de la función f es computable. El primer paso puede ser ejecutado con un algoritmo de **parsing** que revise si la codificación es válida, lo que se puede computar con una máquina que detecte y cuente símbolos (en este caso 1's y 0's). El segundo paso consiste en simplemente copiar la parte de la codificación que corresponde al conjunto de estados, y pegarla en la parte de la codificación que representa al conjunto de estados finales, lo que puede ser realizado mediante una máquina que copia palabras y las pega en otra parte específica de la cinta. El tercer paso también consiste en copiar y pegar el código de la máquina, agregando 0000 entre ambas, lo que también es fácilmente computable. Por lo tanto, la función f en su totalidad es computable, al ser la concatenación de las máquinas anteriormente descritas.

- Tenemos entonces una función f computable, tal que se cumple $w \in D \longleftrightarrow f(w) \in MoM$, y por lo tanto el teorema de reducción es aplicable desde D hacia MoM.

Finalmente, mediante el teorema de reducción, tenemos que como D es indecidible, entonces MoM también lo es, concluyendo la demostración.