NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

N.ALUMNO: 17642531

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencias de la Computación

IIC2213 — Lógica para Ciencias de la Computación — 1' 2021

Tarea 7

1. Estructuras para las Mediciones

Definimos la estructura $\mathfrak{A}_M$ para poder especificar cada set de mediciones $M = (D, TA, TB, HA, HB)$ sobre el siguiente vocabulario:

$$L = \{menor, TA, TB, HA, HB\}$$

A continuación se indican los elementos que conforman esta estructura:

- El dominio A corresponde a $D = \{d_1, ..., d_n\}$, que representa a cada fecha de las mediciones contenidas en M.
- La interpretación $menor^{\mathfrak{A}}$ define el orden entre las fechas de mediciones:
  $menor^{\mathfrak{A}} = \{(a, b) | a, b \in D, a \text{ ocurrió antes que } b\}$
- La interpretación $TA^{\mathfrak{A}}$ contiene a aquellas fechas en las que se midió temperatura alta:
  $TA^{\mathfrak{A}} = \{a | a \in D, a \text{ marcó la temperatura sobre } 0\}$
- La interpretación $TB^{\mathfrak{A}}$ contiene a aquellas fechas en las que se midió temperatura baja:
  $TB^{\mathfrak{A}} = \{a | a \in D, a \text{ marcó la temperatura menor o igual a } 0\}$
- La interpretación $HA^{\mathfrak{A}}$ contiene a aquellas fechas en las que se midió humedad alta:
  $HA^{\mathfrak{A}} = \{a | a \in D, a \text{ marcó humedad alta}\}$
- La interpretación $HB^{\mathfrak{A}}$ contiene a aquellas fechas en las que se midió humedad baja:
  $HB^{\mathfrak{A}} = \{a | a \in D, a \text{ marcó humedad baja}\}$

2. Fórmulas y Propiedades

Primero definimos una fórmula φ_1 que es satisfecha cuando $menor^{\mathfrak{A}}$ es un orden total (según lo indicado en el enunciado):

$$\varphi_1 = \forall a, b(\neg(a = b) \longrightarrow menor(a, b) \vee menor(b, a)) \wedge$$
$$\forall c, d(\neg(menor(c, d) \wedge menor(d, c))) \wedge$$
$$\forall x, y, z((menor(x, y) \wedge menor(y, z)) \longrightarrow menor(x, z)) \wedge$$
$$\forall w(\neg menor(w, w))$$

Esta fórmula considera las siguientes condiciones, en el mismo orden que aparecen arriba:

- Para cualquier par de elementos **distintos** del dominio, estos tienen una relación de orden representada por un par contenido en $menor^{\mathfrak{A}}$.
- El orden entre 2 elementos es **unidireccional,** es decir, una fecha de medición no puede ser anterior y posterior a otra fecha al mismo tiempo.
- El orden es **transitivo,** si una fecha a es anterior a otra fecha b, entonces cualquier fecha anterior a a también es anterior a b (lo mismo para la posterioridad).
- Un elemento no es menor que sí mismo, es decir, no tiene orden con respecto a sí mismo.

A continuación se define otra fórmula $\varphi_2(x)$, la que es satisfecha cuando un elemento x cumple con $TA = D - TB$:

$$\varphi_2(x) = (TA(x) \vee TB(x)) \wedge (TA(x) \longrightarrow \neg TB(x))$$

Esta fórmula asegura que cada medición pertenece a $TA^{\mathfrak{A}}$ o $TB^{\mathfrak{A}}$, pero **NO a ambas relaciones.** Ahora se procede análogamente con una fórmula $\varphi_3(x)$ que es satisfecha cuando un elemento x cumple con $HA = D - HB$:

$$\varphi_3(x) = (HA(x) \vee HB(x)) \wedge (HA(x) \longrightarrow \neg HB(x))$$

Combinando las 3 fórmulas anteriores obtenemos la fórmula pedida:

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \forall z(\varphi_2(z) \wedge \varphi_3(z))$$

Ahora se verificará que si una estructura cumple con las condiciones propuestas en el enunciado, entonces satisface a φ (y viceversa).

Vamos a revisar la doble implicancia **en cada propiedad:**

- **i)** Si una estructura $\mathfrak{A}$ sobre L satisface a φ_1, entonces sabemos que cada elemento está ordenado de forma unidireccional respecto a todos los otros (excepto consigo mismo), y que además cumple con la propiedad transitiva (todo esto se desprende de las condiciones explicadas en la definición de φ_1). Por lo tanto, la relación utilizada (*menor*) corresponde a un orden total sobre $\mathfrak{A}$. Por otro lado, si la relación *menor* es un orden total sobre $\mathfrak{A}$, entonces sus pares de elementos van a cumplir todas las reglas descritas más arriba (por definición de orden total), y por lo tanto van a satisfacer a φ en su totalidad.

- **ii)** Si para todo z en el dominio de una estructura $\mathfrak{A}$ sobre L se cumple que dicho z satisface a $\varphi_2(z)$, entonces tenemos que para cada fecha de medición se cumple que dicha fecha midió una temperatura alta o baja (pero no ambas), y por lo tanto el conjunto total de fechas se puede particionar entre $TA^{\mathfrak{A}}$ y $TB^{\mathfrak{A}}$, cumpliendo así con $TA = D - TB$. Por otro lado, si se cumple la condición $TA = D - TB$ para las fechas de medición, entonces se desprende que cada medición necesariamente debe estar en $TA^{\mathfrak{A}}$ o en $TB^{\mathfrak{A}}$ (satisface el primer paréntesis de φ_2), ya que son complementos (debido a la operación de diferencia de conjuntos) cuya unión abarca todo el dominio D. Además, al ser complementos, sabemos que no comparten ningún elemento (satisface el segundo paréntesis de φ_2). Finalmente, tenemos que para cada fecha de medición z se satisface $\varphi_2(z)$.
- **iii)** Análogo a la propiedad anterior, pero utilizando las humedades en vez de las temperaturas.

Finalmente, como se cumple la doble implicancia en cada sub-fórmula, basta con realizar la conjunción entre estas, lo que indica que al ser satisfechas las 3 propiedades también son satisfechas las 3 fórmulas, evidenciando que φ es la fórmula buscada.

3. Expresiones y Alertas

Esto se demostrará por inducción. Primero, tenemos que el **caso base** corresponde a las expresiones elementales:

- **ta:** Se propone la fórmula $\varphi = \exists x(TA(x))$. Dada esta fórmula, tenemos que si ta entrega una alerta para M, entonces sabemos por definición que existe un $d_i \in D$ tal que $d_i \in TA$, y por lo tanto cuando la variable x cuantificada por el operador $\exists$ tome el valor de dicho d_i, se satisface la fórmula. Por otro lado, si la fórmula es satisfecha, entonces existe algún elemento del dominio tal que dicho elemento marcó una temperatura alta, lo que implica que ta levantó una alerta para la medición.
- **tb:** Se propone la fórmula $\varphi = \exists x(TB(x))$. La demostración de la doble implicancia es **análoga** a la de la expresión ta, pero considerando las mediciones de temperatura baja.
- **ha:** Se propone la fórmula $\varphi = \exists x(HA(x))$. La demostración de la doble implicancia es **análoga** a la de la expresión ta, pero considerando las mediciones de humedad alta.
- **hb:** Se propone la fórmula $\varphi = \exists x(HB(x))$. La demostración de la doble implicancia es **análoga** a la de la expresión ta, pero considerando las mediciones de humedad baja.

Ahora se demostrará como extender estos casos base a cada hipótesis inductiva posible, es decir, a **cada expresión posible en el lenguaje** descrito:

- $e = e_1 \wedge e_2$**:** Dadas 2 expresiones e_1 y e_2, que cumplen con la doble implicancia por medio de fórmulas ε_1 y ε_2 respectivas, debemos encontrar una nueva fórmula φ (construida a partir de las otras 2) y demostrar que e también cumple con la doble implicancia mediante esta nueva fórmula.

  Primero vamos a analizar la estructura que tienen las fórmulas elementales, con R la relación asociada a dicha expresión:

  $$\varphi = \exists x(R(x))$$

  Podemos ver que todas están compuestas por un operador $\exists$ que cuantifica una variable x, seguido de una condición sobre esa variable. Si quisiéramos que la conjunción $e_1 \wedge e_2$ levantase una alerta en la medición M, tendría que existir un elemento del dominio que gatille tanto a e_1 como a e_2 a la vez (según enunciado), es decir, la nueva fórmula debería tener la siguiente forma:

  $$\varphi = \exists x(R_1(x) \wedge R_2(x))$$

Si extendemos esta idea a cualquier expresión que pertenezca al lenguaje, tenemos que dadas las fórmulas ε_1 y ε_2 que cumplen la doble implicancia para e_1 y e_2 (siendo esta vez expresiones cualquiera del lenguaje), la fórmula propuesta debería ser:

$$\varphi = \exists x(C(\varepsilon_1)(x) \wedge C(\varepsilon_2)(x))$$

Donde x es la misma variable cuantificada en las fórmulas de origen, y $C(\varepsilon)$ entrega la parte de ε que corresponde a la condición sobre la variable x, es decir, la misma fórmula pero sin incluir el operador $\exists$. A modo de ejemplo:

$$\varepsilon_1 = \exists x(TA(x) \wedge HB(x))$$
$$\varepsilon_2 = \exists x(HA(x))$$
$$\varphi = \exists x((TA(x) \wedge HB(x)) \wedge HA(x))$$

Ahora demostramos la doble implicancia para e por medio de la nueva fórmula φ obtenida. Si e entrega una alerta para M, entonces sabemos que existe algún elemento d_i del dominio tal que e_1 y e_2 se gatillan en d_i. Esto significa que al evaluar φ, la conjunción del paréntesis será verdad y por lo tanto la fórmula será satisfecha. Así mismo, si la fórmula se satisface, significa que existe algún elemento del dominio tal que dicho elemento cumplió con ambas partes de la conjunción, lo que indica que dicho elemento gatilló 2 expresiones separadas, que justamente corresponden a e_1 y e_2, por lo que e entregará una alerta para la medición (ya que es la conjunción de ambas expresiones). De esta forma queda demostrado que para expresiones formadas por conjunciones de otras expresiones, existe una fórmula φ tal que se sigue cumpliendo la doble implicancia que se cumplía en las 2 expresiones originales.

- **$e = e_1 \vee e_2$:** Este caso es análogo al de las conjunciones, pero esta vez usando disyunciones:

$$\varphi = \exists x(C(\varepsilon_1)(x) \vee C(\varepsilon_2)(x))$$

Al igual que con el caso de las conjunciones, esta fórmula permite extender el cumplimiento de la doble implicancia para cualquier expresión que se construya a partir de disyunciones de otras expresiones.

- **$e = \neg e_1$:** Este caso es bastante similar a los anteriores, pero aplicando una negación sobre $C(\varepsilon)$:

$$\varphi = \exists x(\neg C(\varepsilon)(x))$$

Al igual que en los casos anteriores, esta fórmula permite extender el cumplimiento de la doble implicancia para cualquier expresión que se construya a partir de negaciones de otras expresiones.

- **$e = e_1 \cdot e_2$:** Este caso es más complejo que los anteriores, puesto que incluye nociones temporales. Aquí se busca gatillar 2 expresiones, pero en elementos distintos dentro del dominio, bajo la condición de que exista un orden definido entre estos. Esto se puede modelar como 2 variables que deben ser cuantificadas, cada una siendo la variable que era cuantificada por el operador $\exists$ en las expresiones originales:

$$\varphi = \exists x, y(C(\varepsilon_1)(x) \wedge C(\varepsilon_2)(y))$$

Aquí notamos que falta algo: el orden temporal de ambas expresiones. Este se puede añadir utilizando la relación *menor* sobre la estructura, que representa un orden total sobre las fechas de mediciones:

$$\varphi = \exists x, y(C(\varepsilon_1)(x) \wedge C(\varepsilon_2)(y) \wedge menor(x, y))$$

De esta forma tenemos que φ se satisface cuando las 2 expresiones originales son satisfechas en distintos elementos del dominio, donde el elemento en donde se gatilla e_1 es **anterior** al elemento donde se gatilla e_2, manteniendo así la doble implicancia.

Es importante mencionar que debido a la inclusión del operador temporal, el número de variables cuantificadas puede aumentar indefinidamente. Podemos entonces proponer la fórmula para un **caso más general:**

$$\varphi = \exists x_1, ..., x_n(\bigwedge_{1}^{n-1} C(\varepsilon_i)(x_i) \wedge C(\varepsilon_{i+1})(x_{i+1}) \wedge menor(x_i, x_{i+1}))$$

Aquí se tiene una fórmula que incluye el orden temporal entre n variables cuantificadas, las que corresponden a los elementos del dominio que gatillan cada evento en la cadena, y que asegura que se cumplirán todas las condiciones para levantar la alerta en la medición.

Al igual que en los casos anteriores, esta fórmula permite extender el cumplimiento de la doble implicancia para cualquier expresión que se construya a partir de relaciones temporales de otras expresiones.

Todas las expresiones posibles del lenguaje se forman utilizando las expresiones elementales (ta, tb, ha, hb) y los operadores $(\wedge, \vee, \neg, \cdot)$, por lo que las hipótesis anteriores abarcan todo el espectro de expresiones. De esta forma, tenemos que **por inducción, para cualquier expresión del lenguaje existe una fórmula φ tal que la expresión levanta una alerta sobre una medición M si y sólo si $\mathfrak{A}_M$ satisface a φ, logrando demostrar lo pedido.**