NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

N.ALUMNO: 17642531

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para Ciencias de la Computación — 1' 2021

Tarea 4

1. Validación de Grafos

Demostraremos ambos lados de la doble implicancia:

- **Si la valuación que hace verdad a Σ asigna un 1 a la variable e_{ij}, entonces (i, j) es una arista en E:** Mirando la fórmula $\varphi_{\bar{E}}$, tenemos que las conjunciones sólo son verdad si es que a toda arista que **NO pertenece al grafo** se le asigna un 0 (debido a la negación). Por lo tanto, las variables a las que se les asigne un 1 deberán necesariamente estar asociadas a las aristas que pertenecen a E para no romper la fórmula $\varphi_{\bar{E}}$.
- **Si (i, j) es una arista en E, entonces la valuación que hace verdad a Σ asigna un 1 a la variable e_{ij}:** Mirando la fórmula φ_E, tenemos que las conjunciones sólo son verdad si es que a toda arista que **pertenece al grafo** se le asigna un 1. Por lo tanto, a las variables asociadas a las aristas que pertenecen a E, necesariamente se les debe asignar un 1 para no romper la fórmula φ_E.

Juntando ambas condiciones, tenemos que la **única valuación** que hace verdad al conjunto Σ es la que asigna un 1 a la variable e_{ij} si y solo si (i, j) es una arista en E.

2. Nodo Raíz

Necesitamos una fórmula que sea capaz de revisar todos los nodos del grafo, revisando si es que existe al menos 1 que no tiene aristas entrantes. Para esto podemos usar una fórmula Π_V en **DNF**, que sea verdad si es que alguna de las cláusulas encuentra un nodo sin ninguna arista entrante. Esta fórmula se muestra a continuación:

$$\Pi_V = \bigvee_{j \in V} \left(\bigwedge_{i \in V} \neg e_{ij} \right)$$

Si esta fórmula es verdad, se encontró al menos 1 nodo j tal que **NO existía** ninguna arista (i, j) en E (debido a que de otra forma la cláusula respectiva no habría cumplido con sus conjunciones). Por otro lado, si el grafo tiene un nodo sin aristas entrantes, entonces existe al menos un nodo j para el que se cumple que para todo nodo i en el grafo, $e_{ij} = 0$. Entonces se tiene que Π_V cumple con lo necesario, siempre que las fórmulas del conjunto Σ hayan sido satisfechas también (para validar el grafo dado).

3. Ciclos

Necesitamos una fórmula ψ_k que sea capaz de asegurar que el grafo **NO tiene ciclos de largo k.** Para esto, primero definimos una fórmula C_{ij}^1 que es verdad si es que **existe un camino de largo 1 entre los nodos i y j** del grafo:

$$C_{ij}^1 = e_{ij}$$

Ahora, podemos definir la fórmula C_{ij}^2 que es verdad si **existe un camino de largo 2 entre los nodos i y j** del grafo:

$$C_{ij}^2 = \bigvee_{g \in V} (e_{ig} \wedge e_{gj})$$

Esta última fórmula puede ser reescrita trivialmente de la siguiente manera:

$$C_{ij}^2 = \bigvee_{g \in V} (e_{ig} \wedge C_{gj}^1)$$

Siguiendo esta idea, y tomando como caso base a C_{ij}^1, podemos definir la fórmula de los caminos de **forma recursiva para un tamaño cualquiera k:**

$$C_{ij}^1 = e_{ij}$$

$$C_{ij}^k = \bigvee_{g \in V} (e_{ig} \wedge C_{gj}^{k-1})$$

Para buscar si hay un ciclo de tamaño k, basta con **revisar si hay un camino de tamaño k partiendo desde algún nodo i y llegando hasta ese mismo nodo:**

$$\Omega_k = \bigvee_{i \in V} C_{ii}^k$$

Finalmente, la **negación de la fórmula anterior indica que NO se encontró ningún ciclo de tamaño k en el grafo:**

$$\psi_k = \neg(\bigvee_{i \in V} C_{ii}^k)$$

Esta última fórmula permite verificar lo pedido, siempre que las fórmulas del conjunto Σ hayan sido satisfechas también (para validar el grafo dado).

4. Tautología

Combinando las fórmulas de Σ (validación de cada grafo) y de los demás apartados, tenemos que para un **grafo dado de tamaño n (con V su conjunto de vértices y E su conjunto de aristas):**

$$\lambda_n = (\varphi_E \wedge \varphi_{\bar{E}} \wedge \bigwedge_{k=2}^{n} \psi_k) \longrightarrow \Pi_V$$

Si esta fórmula es tautología, tenemos que para cualquier grafo de tamaño n (correspondiente a una valuación que hace verdad a Σ), se tiene también que **en caso de que NO tenga ciclos de tamaño k (mayor a 1), siempre tendrá un nodo raíz, ya que la fórmula siempre es verdad.** De esta manera se concluye que la propiedad P se cumpliría para todos los grafos con n nodos.

Por otro lado, si sabemos que la propiedad P se cumple para todos los grafos con n nodos, entonces **cada grafo que no tenga ciclos cumple con el lado izquierdo de la implicancia, y luego también con el derecho, ya que sabemos que tienen un nodo raíz, siendo la fórmula verdadera.** Los grafos que sí tengan ciclos de algún tamaño **NO afectan el resultado, debido a que alguno de los ψ_k será falso al encontrar ese ciclo, resolviendo la implicancia de forma trivial.** De esta manera, se concluye que la fórmula sería una tautología.

Finalmente, tenemos que la fórmula λ_n **es tautología si y solo si la propiedad P es verdad en todos los grafos con n nodos.**