NOMBRE: Benjamín Farías Valdés

N.ALUMNO: 17642531

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

IIC2213 — Lógica para Ciencias de la Computación — 1' 2021

Tarea 8

Isomorfismo entre Estructuras

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario L y con dominio finito, necesitamos construir una fórmula φ tal que cualquier estructura $\mathfrak{B}$ sobre L que satisfaga dicha fórmula sea necesariamente isomorfa a $\mathfrak{A}$. Esto significa que lo que queremos revisar con la fórmula es si la estructura $\mathfrak{B}$ entrega la misma información que $\mathfrak{A}$ (aunque su interpretación del vocabulario sea otra). Entonces, la fórmula φ debe describir completamente a la estructura $\mathfrak{A}$. De la estructura $\mathfrak{A}$ sabemos 2 cosas:

1. Tiene un dominio finito, es decir, $|A| = n$, con n un número entero definido.
2. Actúa sobre el vocabulario L, y por lo tanto tiene interpretaciones $R^{\mathfrak{A}}$ y $S^{\mathfrak{A}}$ tal que, según estas interpretaciones:

$$\forall a, b \in A. R(a,b) \vee \neg R(a,b)$$
$$\forall a \in A. S(a) \vee \neg S(a)$$

   Esto significa que para todo elemento del dominio A, la **"forma"** de la estructura $\mathfrak{A}$ está definida por la **pertenencia o NO pertenencia** de estos elementos a las relaciones R y S.

Ahora, podemos describir a $\mathfrak{A}$ con **una fórmula que sea satisfecha cuando se cumplen las 2 condiciones** descritas arriba.

La primera condición corresponde al **dominio de tamaño n:**

$$\gamma_1(x_1 ... x_n) = \bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j)$$

$$\gamma_2(x_1 ... x_n) = \forall y \bigvee_i (x_i = y)$$

$$\varphi_1(x_1 ... x_n) = \gamma_1(x_1 ... x_n) \wedge \gamma_2(x_1 ... x_n)$$

La primera fórmula indica que cada una de las n variables es distinta de todas las demás, es decir, que con estas variables es posible asignar todos los elementos de un dominio de tamaño n (entrega el piso para la cantidad de elementos del dominio). La segunda fórmula indica que para cada elemento del dominio, este debe estar asignado a alguna de las n variables, es decir, que no pueden existir elementos que no estén siendo representados por una variable (entrega el techo para la cantidad de elementos). La fórmula φ_1 combina ambas restricciones, logrando representar un dominio de tamaño exactamente n, con $n = |A|$.

La segunda condición corresponde a la **pertenencia de elementos a las relaciones R y S:**

$$\epsilon_1(x_1...x_n) = \bigwedge_{(a_i,a_j)\in A,R} R(x_i,x_j)$$

$$\epsilon_2(x_1...x_n) = \bigwedge_{(a_i,a_j)\in A,(a_i,a_j)\notin R} \neg R(x_i,x_j)$$

$$\epsilon_3(x_1...x_n) = \bigwedge_{a_i\in A,S} S(x_i)$$

$$\epsilon_4(x_1...x_n) = \bigwedge_{a_i\in A,a_i\notin S} \neg S(x_i)$$

$$\varphi_2(x_1...x_n) = \epsilon_1(x_1...x_n) \wedge \epsilon_2(x_1...x_n) \wedge \epsilon_3(x_1...x_n) \wedge \epsilon_4(x_1...x_n)$$

Las primeras 2 fórmulas indican que para todo par de elementos (a_i, a_j) del dominio A que están en la relación R, sus variables asociadas (por medio de las fórmulas definidas para el tamaño) deben satisfacer $R(x_i, x_j)$ (y los que no están en R deben satisfacer su negación). Las siguientes 2 fórmulas representan lo mismo, pero para la relación S que es unaria. La última fórmula, φ_2, combina todo lo anterior para representar todas las relaciones entre elementos del dominio de $\mathfrak{A}$ sobre L.

Juntando todas estas fórmulas, obtenemos **la fórmula φ que estábamos buscando:**

$$\varphi = \exists x_1...x_n(\varphi_1(x_1...x_n) \wedge \varphi_2(x_1...x_n))$$

Esta fórmula describe completamente la **"forma"** de $\mathfrak{A}$ sobre L, entendiéndose forma como el tamaño de su dominio y las relaciones entre todos sus elementos (por medio de R y S).

Queda por demostrar la siguiente **doble implicancia:** $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A} \iff \mathfrak{B}$ satisface a φ

Se demostrarán ambas direcciones:

- **$\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ satisface a φ:** Si $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A}$, entonces **existe una biyección $f : A \longrightarrow B$ que mapea todos los elementos del dominio de A hacia el dominio de B,** y además tiene una inversa que los devuelve desde B hacia A.

  El hecho de que sea una biyección, implica que **la cantidad de elementos en ambos dominios debe ser la misma** ($|A| = |B| = n$), puesto que debe respetar la sobreyectividad y la inyectividad de la función. Entonces, la sub-fórmula φ_1 es satisfecha por $\mathfrak{B}$, ya que con n variables es posible asignar los valores de exactamente todos los elementos de su dominio B.

  Por definición de isomorfismo, la función f **mantiene todas las relaciones entre los elementos originales y los nuevos elementos resultantes,** es decir, se cumple lo siguiente para la relación R:

  $$\forall a, b \in A.(a, b) \in R^{\mathfrak{A}} \longrightarrow (f(a), f(b)) \in R^{\mathfrak{B}}$$
  $$\forall a, b \in A.(a, b) \notin R^{\mathfrak{A}} \longrightarrow (f(a), f(b)) \notin R^{\mathfrak{B}}$$

  Lo mismo ocurre para la relación S. Tenemos entonces que la sub-fórmula φ_2 es satisfecha por $\mathfrak{B}$, ya que existe una asignación de valores a las variables $x_1...x_n$ tal que se mantienen las mismas relaciones que los elementos del dominio de $\mathfrak{A}$. En concreto, esta asignación es la que le entrega el valor $f(a_i)$ a la variable x_i, donde $a_i \in A$ y $f(a_i) \in B$.

  Entonces, como existe una asignación de valores para $x_1...x_n$ tal que se satisfacen las fórmulas φ_1 y φ_2, tenemos que **$\mathfrak{B}$ satisface a φ, demostrando así la implicancia.**

- **$\mathfrak{B}$ satisface a $\varphi \longrightarrow \mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A}$:** Si $\mathfrak{B}$ satisface a φ, entonces sabemos que **existe una asignación de variables $x_1...x_n$ tal que se satisfacen las sub-fórmulas φ_1 y φ_2.**

  Al satisfacer a φ_1, tenemos que $|B| = n = |A|$, puesto que con las n variables fue posible **asignar a todos los elementos del dominio de $\mathfrak{B}$.** Luego, es posible tener una biyección $g : B \longrightarrow A$, al menos en términos de la cardinalidad de los dominios.

  Al satisfacer a φ_2, tenemos que para alguna asignación de valores $(b_1, ..., b_n) \subseteq B$ a las variables $(x_1, ..., x_n)$, se logró satisfacer $R(x_i, x_j)$ **para los mismos índices (i, j) asociados a los pares $(a_i, a_j) \in A$ que estaban en $R^{\mathfrak{A}}$.** Dado esto, podemos definir a la función $g : B \longrightarrow A$, con $b \in B$ y $a_i \in A$:

  $$g(b) := a_i | x_i = b$$

  La función g mapea los elementos $b \in B$ hacia los elementos $a_i \in A$ **asociados a la variable x_i que tomó el valor de b en la fórmula φ_2, de forma que se mantengan los pares equivalentes dentro de la relación** R al cambiar de dominio (así como también para la relación S). Esta función es una **biyección,** puesto que $i = 1, ..., n$, y sabemos que para cada elemento en B existe una única variable con índice i que tomará su valor en la fórmula (por satisfacción de φ_1).

  Dado que logramos encontrar una biyección $g : B \longrightarrow A$, tal que:

  $$\forall (b_i, b_j) \in R^{\mathfrak{B}}.(g(b_i), g(b_j)) \in R^{\mathfrak{A}}$$

  $$\forall (b_i, b_j) \notin R^{\mathfrak{B}}.(g(b_i), g(b_j)) \notin R^{\mathfrak{A}}$$

  Tenemos entonces que $\mathfrak{B}$ **es isomorfa a $\mathfrak{A}$, demostrando así la implicancia.**

Finalmente, dado que se cumple la doble implicancia, tenemos una **forma de detectar estructuras isomorfas entre sí bajo el vocabulario L,** siempre y cuando sean finitas.