IIC2685 Robótica Móvil
I – 2022

Capítulo 4.1

Fundamentos de Robótica Probabilística

Profesor: Gabriel Sepúlveda V.
grsepulveda@ing.puc.cl

Agenda

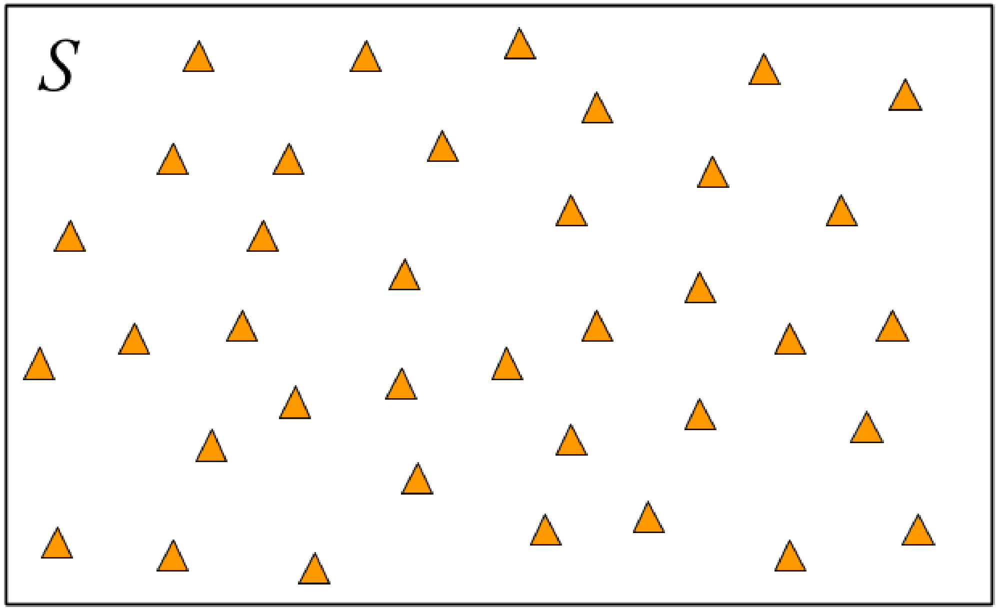
- Conceptos de probabilidades para robótica móvil
  - Probabilidades (repaso)
  - Regla de Bayes
- Fundamentos de Robótica Probabilística
  - Modelo oculto de Markov (HMM)
  - Filtros bayesianos
- Todos los capítulos relacionados con robótica probabilística que trataremos en este curso, estarán basados en:
  - “Probabilistic Robotics” (Thrun, Burgard y Fox)

Probabilidades

- *Probabilidad*: medida de la certidumbre asociada a la ocurrencia de un suceso al realizar un experimento de naturaleza aleatoria.
- Un *experimento* está compuesto por dos etapas:
  - *Procedimiento* (ej: lanzar una moneda)
  - *Observaciones* (ej: observar que lado de la moneda queda hacia arriba)
- *Resultado*: Un resultado de un experimento es cualquier posible observación de ese experimento (ej: *salió cara*, *salió sello*).

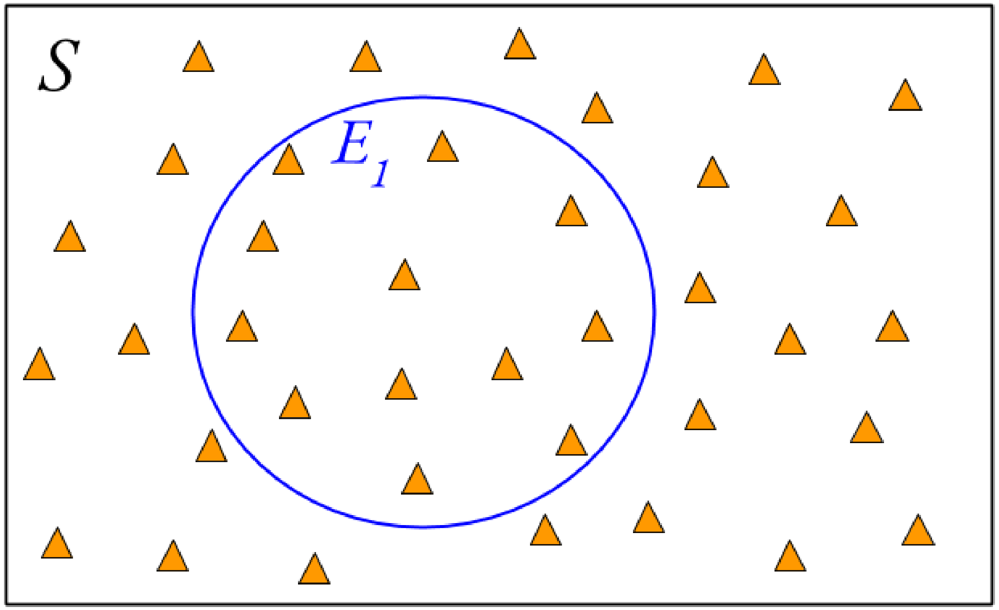
Probabilidades

- *Espacio muestral*: El espacio muestral de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados que cumplen con:
  - Estar en su mayor estado de granularidad
  - Ser mutuamente excluyentes
  - Ser colectivamente exhaustivos



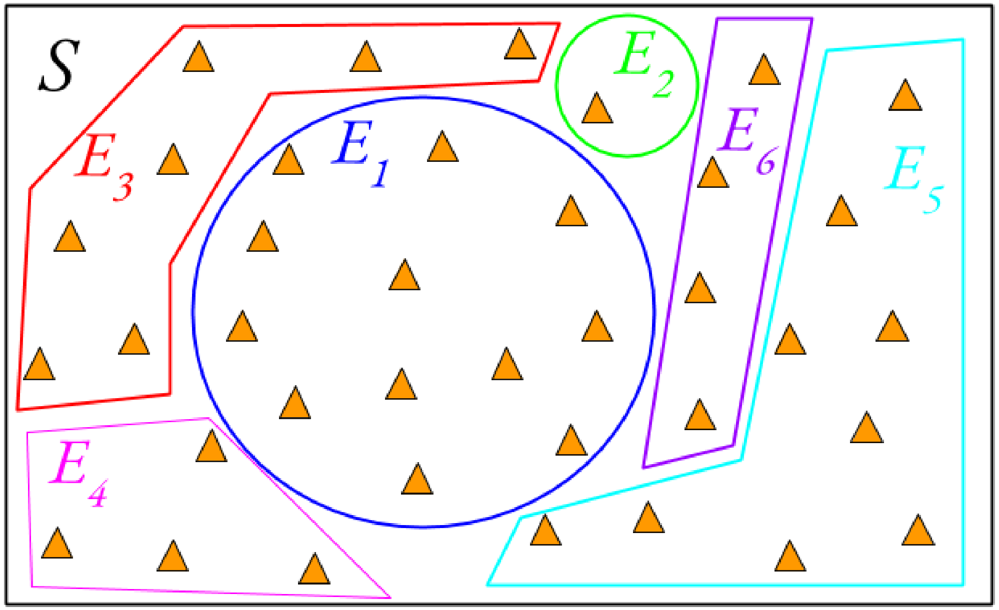
Probabilidades

- *Evento:* Un evento es un conjunto de resultados de un experimento
  - Ej: Lanzar un dado y que el resultado sea mayor o igual a 4 = { 4, 5, 6 }



Probabilidades

- *Espacio de eventos*: Un espacio de eventos es un conjunto de eventos que cumplen con:
  - Ser mutuamente excluyentes
  - Colectivamente exhaustivos



Probabilidades

Axiomas de Probabilidad

Una medida de probabilidad P[·] es una función que mapea eventos en el espacio muestral a número reales que representan su nivel de certidumbre, tal que:

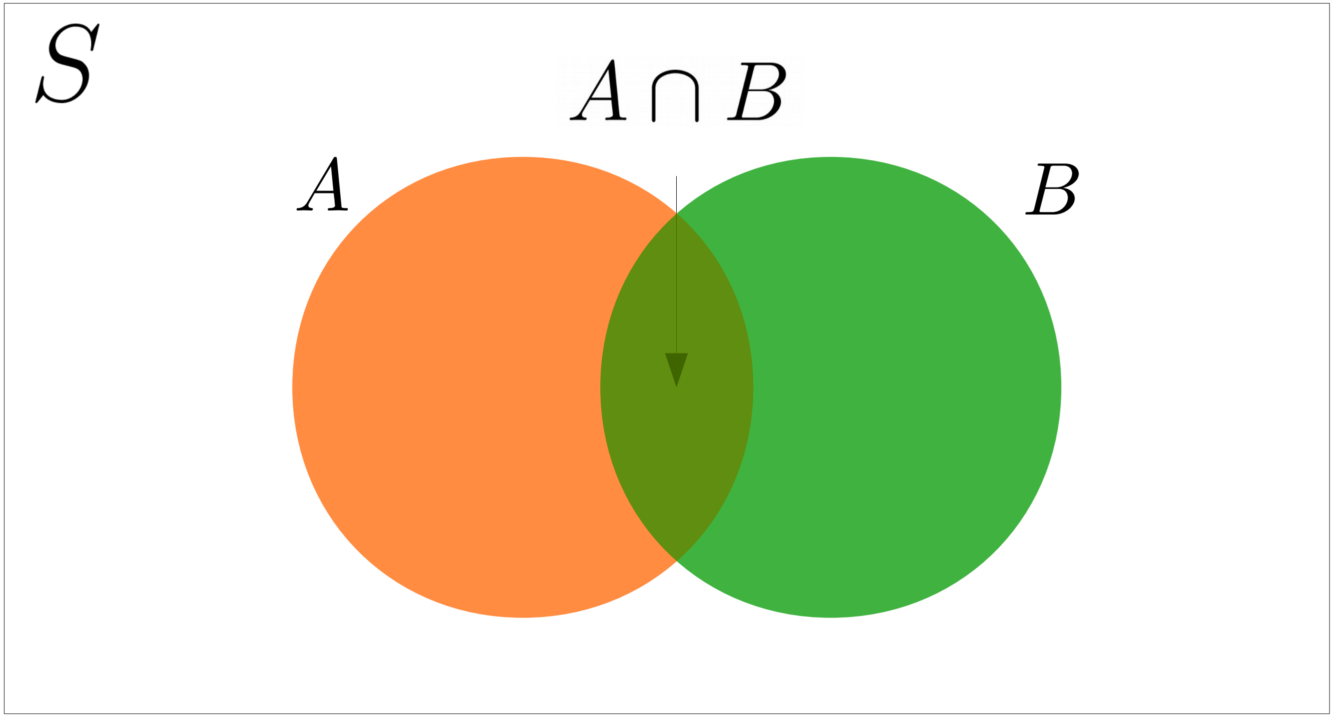
- **Axioma 1:** Para todo evento A, $P[A] \geq 0$
- **Axioma 2:** $P[S] = 1$
- **Axioma 3:** Para cualquier colección contable de eventos mutuamente excluyentes A_1 , A_2 , … , se tiene que:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = P[A_1] + P[A_2] + \ldots$$

Probabilidades

Para eventos NO mutuamente excluyentes, se tiene que:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$



Probabilidades

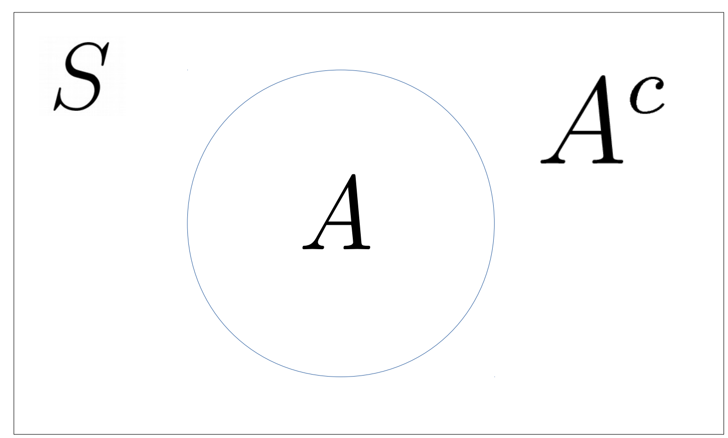
- Relación entre evento y su complemento a través de los axiomas:

$$P[A \cup A^c] = P[A] + P[A^c] - P[A \cap A^c]$$

$$P[S] = P[A] + P[A^c] - P[\emptyset]$$

$$1 = P[A] + P[A^c]$$

$$\boxed{P[A^c] = 1 - P[A]}$$



Probabilidades

Variable Aleatoria

- Una variable aleatoria consiste en:
  - Un experimento con medida de probabilidad *P[·]* definida en un espacio muestral *S*
  - Una función que asigna un número real a un resultado en el espacio muestral *S* del experimento

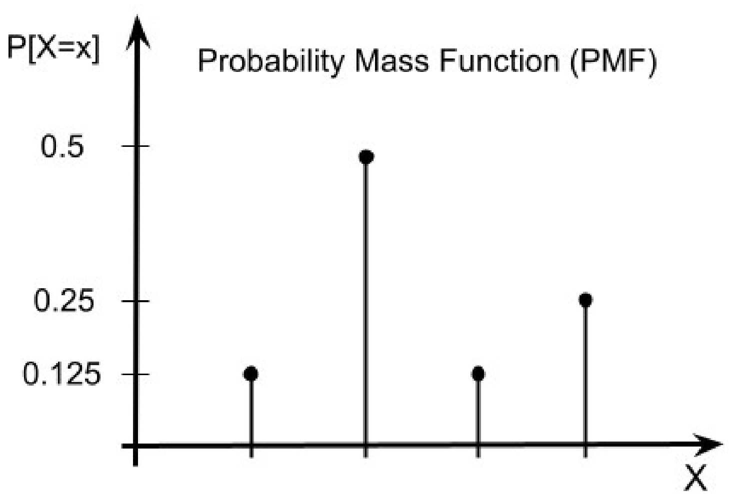
Variable Aleatoria

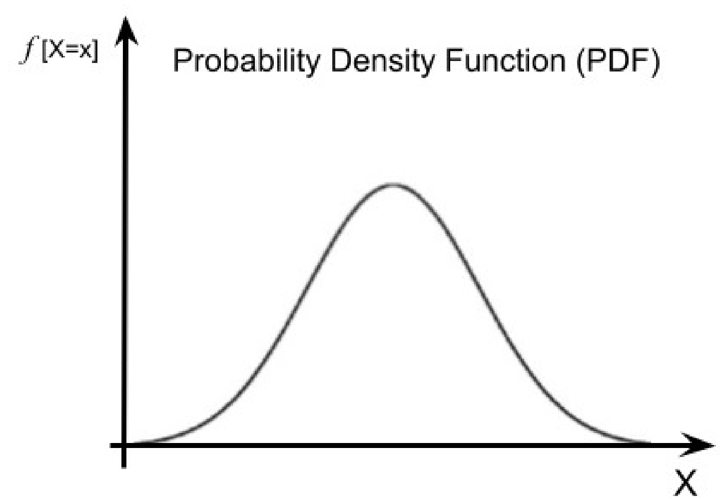
- Una variable aleatoria *X* puede ser:
  - Variable discreta: Función de Masa de Probabilidad (*PMF*)

$$P[X = x] \quad o \quad P_X(x)$$

  - Variable continua: Función de Densidad de Probabilidad (*PDF*)

$$f[X = x] \quad o \quad f_X(x)$$





Probabilidades

- **Axiomas caso discreto:** Para una variable aleatoria *X* con PMF $P_X(x)$ y rango $S_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$:
  - Para todo x, $P_X(x) \geq 0$
  - $\sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$
  - Para cualquier evento $B \subset S_X$ la probabilidad de que *X* se encuentre en el conjunto *B* es:

$$P[B] = \sum_{x \in B} P_X(x)$$

Probabilidades

- **Axiomas caso continuo:** Para una variable aleatoria continua *X* con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$:

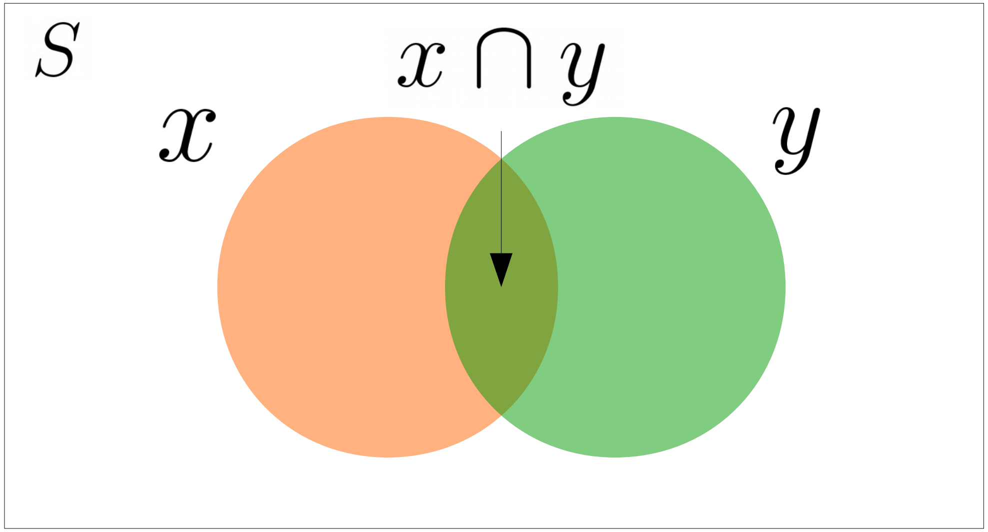
  - Para todo x, $f_X(x) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$
  - Función de Distribución Acumulada (*CDF*): $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$

Probabilidades

Probabilidad Conjunta

- Probabilidad de ocurrencia de resultados comunes a dos o más eventos

$$P[X = x \cap Y = y] = P[x, y]$$

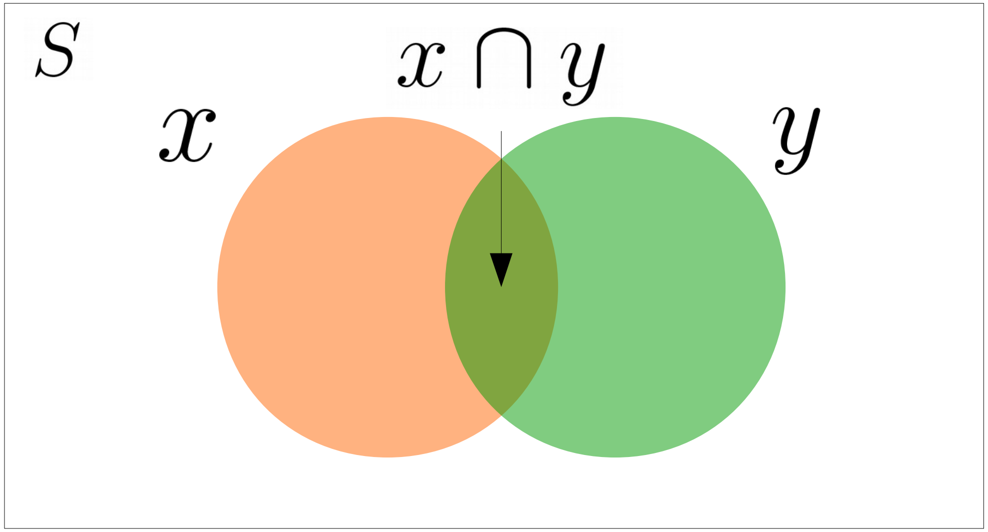


Probabilidades

Probabilidad Condicional

- Probabilidad de que el evento *X* ocurra dado que se supone (asume) que *Y* ocurre

$$P[x|y] = \frac{P[x, y]}{P[y]}$$



Probabilidad Condicional

$$P[x|y] = \frac{P[x,y]}{P[y]}$$

- ¿ Si *X* es independiente de *Y* ?

$$P[x,y] = P[x] \cdot P[y]$$

$$P[x|y] = P[x]$$

- También es posible obtener $P[y|x]$

$$P[y|x] = \frac{P[x,y]}{P[x]}$$

Probabilidades

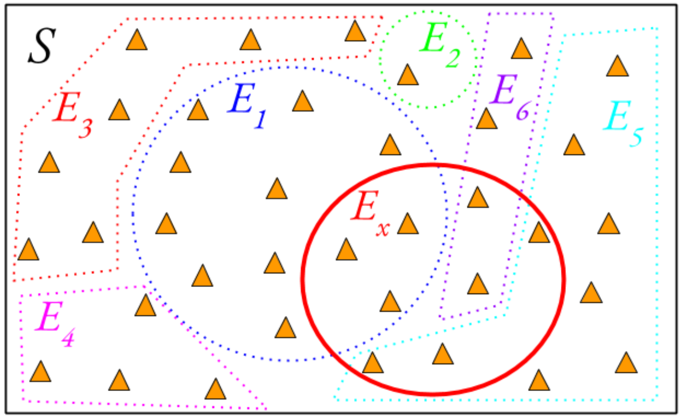
Probabilidad Marginal

- Caso discreto: Sean *X* e *Y* variables aleatorias con PMF $P_{X,Y}(x, y)$:

$$P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y) \qquad P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)$$

- Caso continuo: Sean *X* e *Y* variables aleatorias con PDF $f_{X,Y}(x, y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$



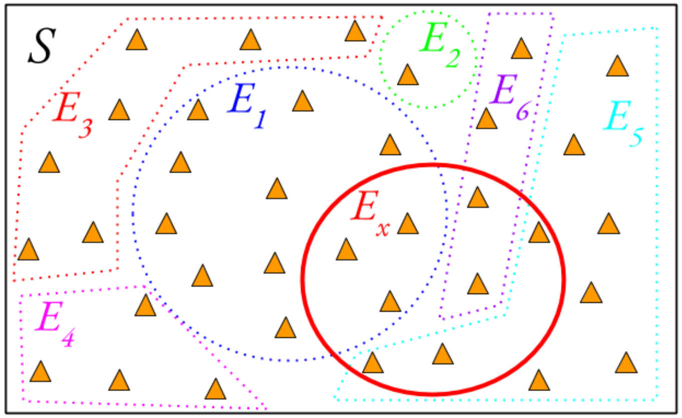
Ley de Probabilidad Total

- Caso discreto: Sean *X* e *Y* variables aleatorias con PMF $P_{X,Y}(x, y)$:

$$P_X(x) = \sum_y P_{X|Y}(x|y) \cdot P_Y(y)$$

- Caso continuo: Sean *X* e *Y* variables aleatorias con PDF $f_{X,Y}(x, y)$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) dy$$



Regla de Bayes

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

$$P(y|x) = \frac{P(x,y)}{P(x)}$$

REGLA DE BAYES

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y_i} P(x|y_i)P(y_i)}$$

$$\textbf{posterior} = \frac{\textbf{likelihood x prior}}{\textbf{evidence}}$$

Regla de Bayes

Ejemplo

- *Cierto artículo se manufactura en tres fábricas Fab1, Fab2 y Fab3. Se sabe que Fab2 y Fab3 producen el mismo número de artículos, mientras que Fab1, produce el doble de artículos que Fab2 y que Fab3. Se sabe también que el 2% de los artículos producidos por las dos primeras es defectuoso (D), mientras que el 4% de los manufacturados por la tercera es defectuoso. Todos los artículos producidos por las tres fábricas se colocan en una fila y se escoge uno al azar.*

D = {artículo defectuoso}

F1 = {artículo fabricado en Fab1}

F2 = {artículo fabricado en Fab2}

F3 = {artículo fabricado en Fab3}

Regla de Bayes

Ejemplo

¿ Cuál es la probabilidad de que este artículo sea defectuoso ?

Causa (*fábrica con falla*) $\longrightarrow$ Efecto (*artículo defectuoso*)

$$
\begin{aligned}
P[D] &= P[D \cap F1] + P[D \cap F2] + P[D \cap F3] \\
&= P[D|F1] \cdot P[F1] + P[D|F2] \cdot P[F2] + P[D|F3] \cdot P[F3] \\
&= 0.02 \cdot 0.5 + 0.02 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.25 \\
&= 0.025
\end{aligned}
$$

Regla de Bayes

Ejemplo

Supongamos que se escoge un artículo del total y se encuentra uno defectuoso. ¿ Cuál es la probabilidad de que se haya producido en la fábrica Fab1 ?

Efecto (*artículo defectuso*) $\rightarrow$ Causa (*fábrica con falla*)

$$P[F1|D] = (P[D|F1] \cdot P[F1]) / P[D]$$
$$= (0.02 \cdot 0.5) / 0.025$$
$$= 0.4$$

Probabilidades

- Bayes con conocimiento previo

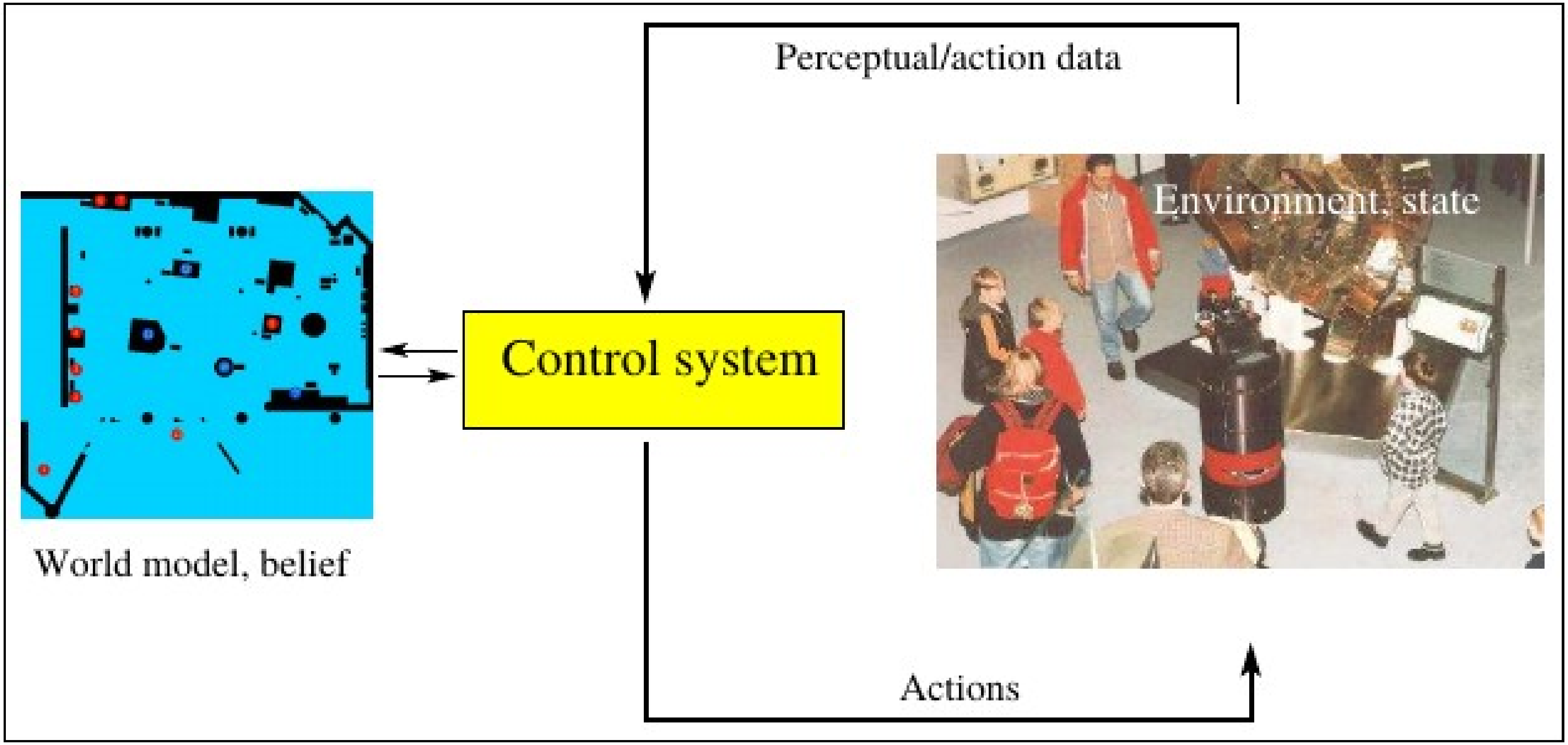
$$P(y|x,z) = \frac{P(x|y,z)P(y|z)}{P(x|z)}$$

- Independencia condicional

$$P(x,y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

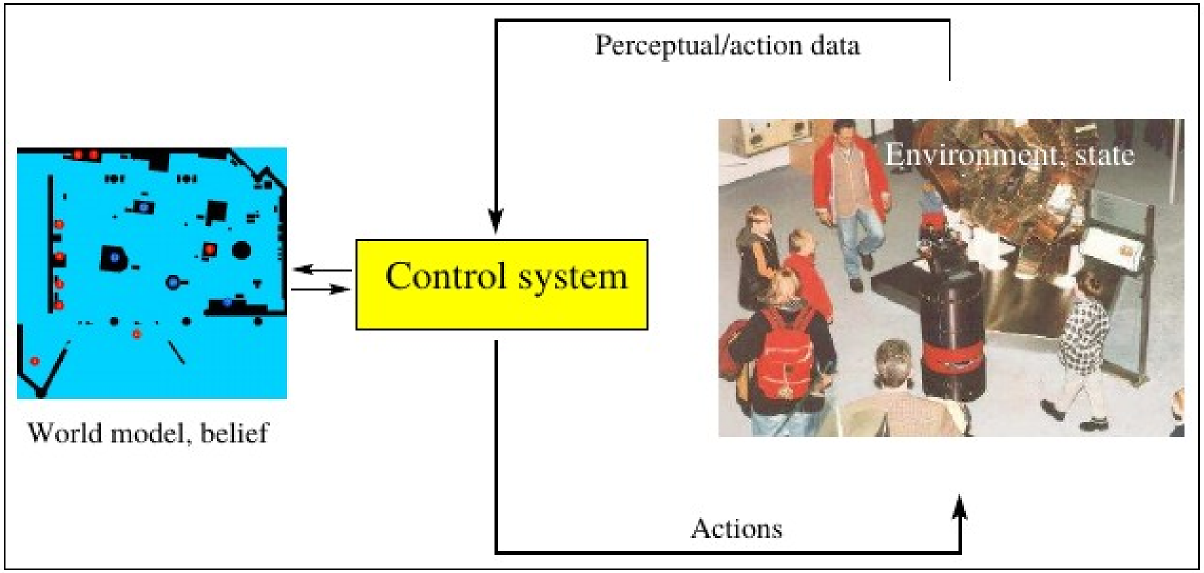
Robótica Probabilística

- Modelo de interacción de robot con el ambiente (“mundo”)



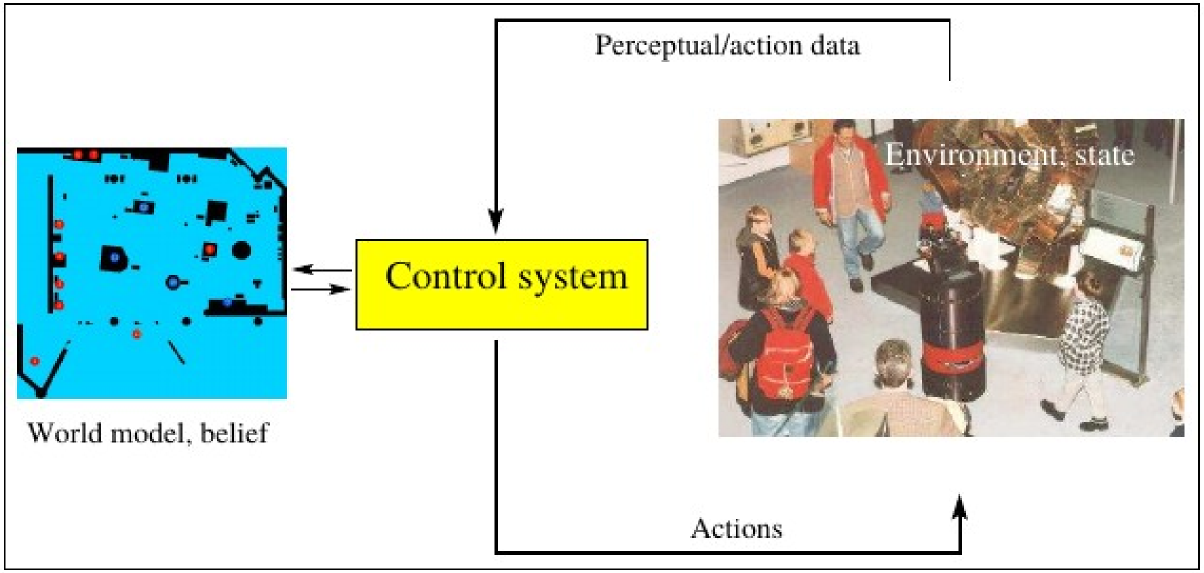
Robótica Probabilística

- **Objetivo:** estimación del estado actual del ambiente a partir de los sensores
- Estado del ambiente
  - Dinámicos
  - Estáticos
- Variables del estado: x_t
  - Pose
  - Velocidad
  - Estado de actuadores
  - Estado de sensores
  - Ubicación y velocidad de objetos circundantes
  - etc.



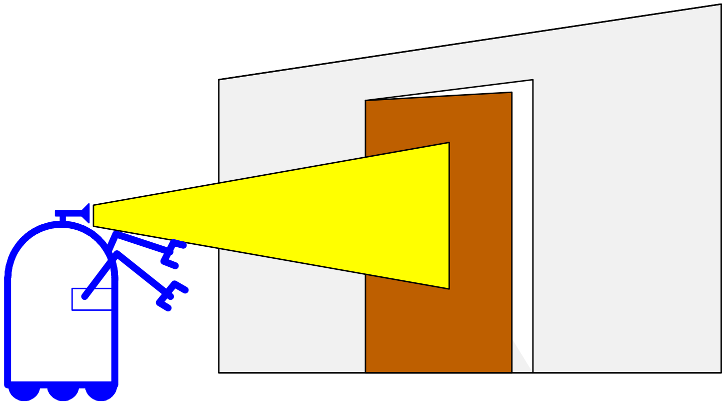
Robótica Probabilística

- Medición de sesores: z_t
  - Parcial
  - Indirecta
  - Ruidosa/Corrupta
- Acciones de Control: u_t
  - Movimiento
  - Manipulación
  - Inacción



Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

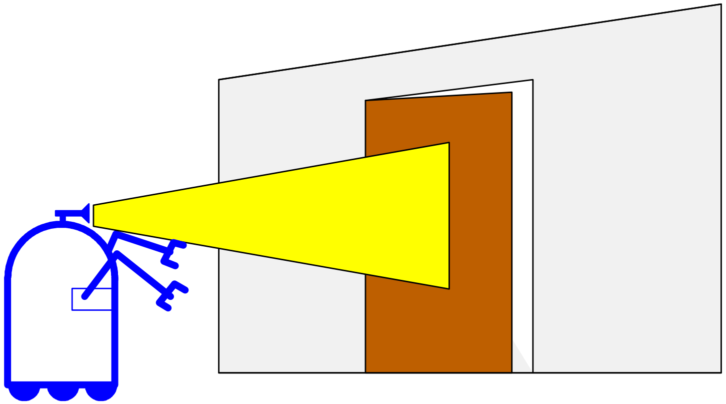


Robótica Probabilística

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

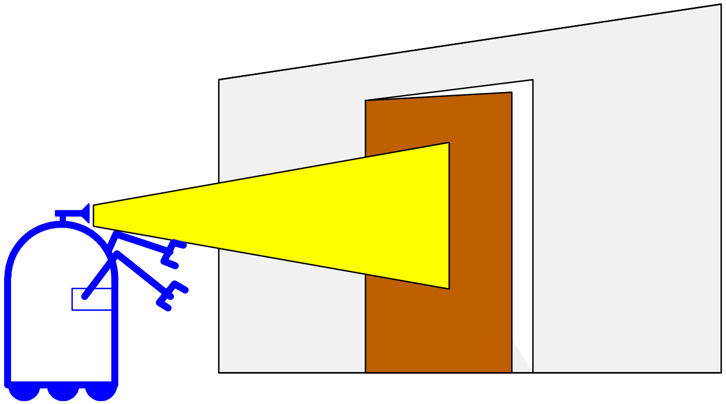
$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$



Robótica Probabilística

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*



$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

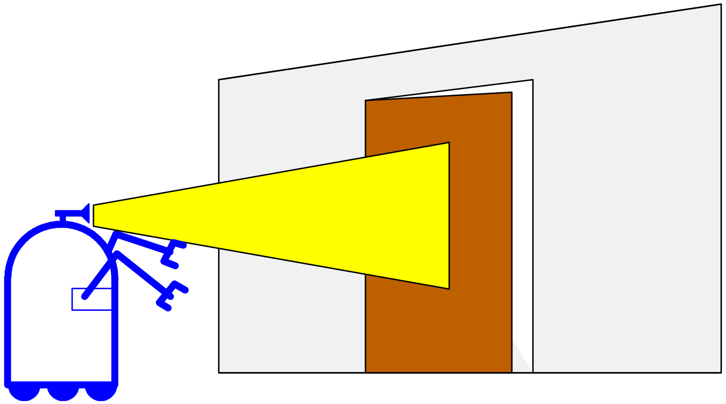
$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$

Robótica Probabilística

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$



$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$

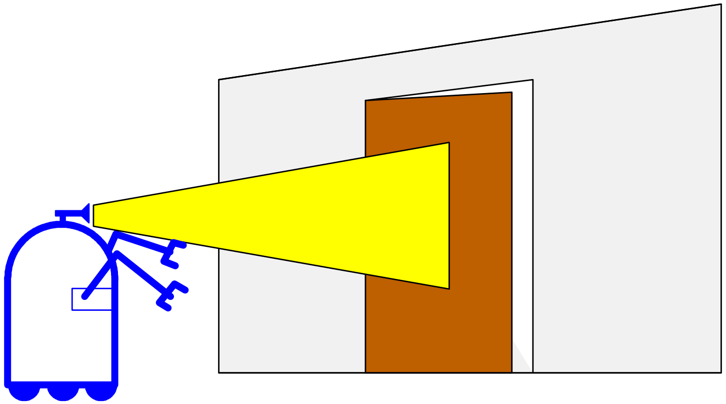
$$p[X_0 = open | Z_0 = sense\_open] = ?$$
$$p[X_0 = closed | Z_0 = sense\_open] = ?$$

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$



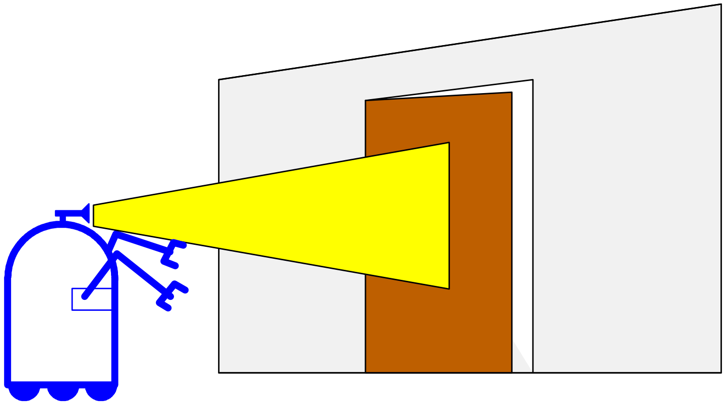
$$p[X_0 = open | Z_0 = sense\_open] = \frac{p[Z_0 = sense\_open | X_0 = open] \cdot p[X_0 = open]}{p[z_0 = sense\_open]}$$

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$



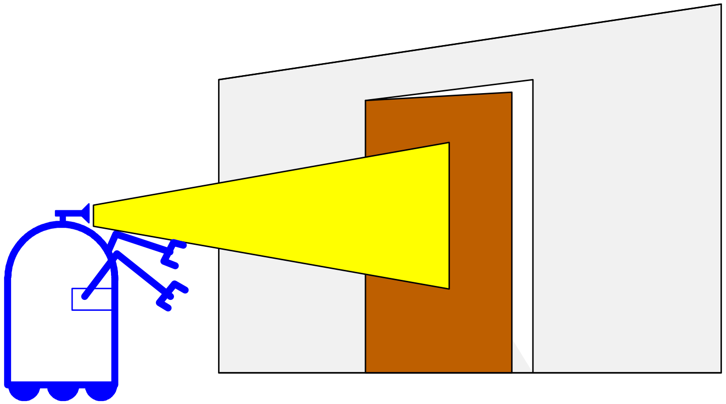
$$p[Z_0 = sense\_open] = p[Z_0 = sense\_open | X_0 = open] \cdot p[X_0 = open] + p[Z_0 = sense\_open | X_0 = closed] \cdot p[X_0 = closed]$$

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$



$$\begin{aligned} p[Z_0 = sense\_open] = &\ p[Z_0 = sense\_open | X_0 = open] \cdot p[X_0 = open] \\ &+ p[Z_0 = sense\_open | X_0 = closed] \cdot p[X_0 = closed] \\ = &\ 0.6 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5 \\ = &\ 0.4 \end{aligned}$$

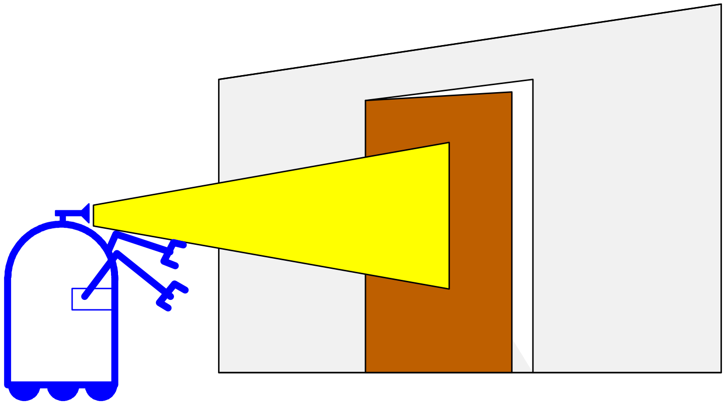
Robótica Probabilística

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*

$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$

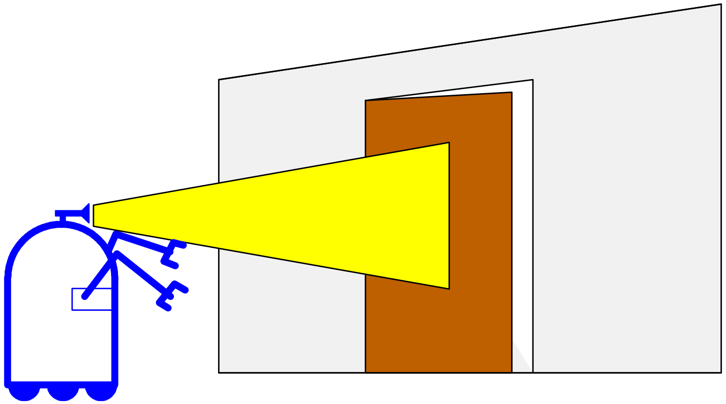


$$\begin{aligned} p[X_0 = open | Z_0 = sense\_open] &= \frac{p[Z_0 = sense\_open | X_0 = open] \cdot p[X_0 = open]}{p[z_0 = sense\_open]} \\ &= \frac{0.6 \cdot 0.5}{0.4} \\ &= 0.75 \end{aligned}$$

Robótica Probabilística

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un *score*



$$p[X_0 = open] = 0.5$$
$$p[X_0 = closed] = 0.5$$

$$p[Z_t = sense\_open | X_t = open] = 0.6$$
$$p[Z_t = sense\_closed | X_t = closed] = 0.8$$

$$p[X_0 = open | Z_0 = sense\_open] = 0.75$$
$$p[X_0 = closed | Z_0 = sense\_open] = 0.25$$

Robótica Probabilística

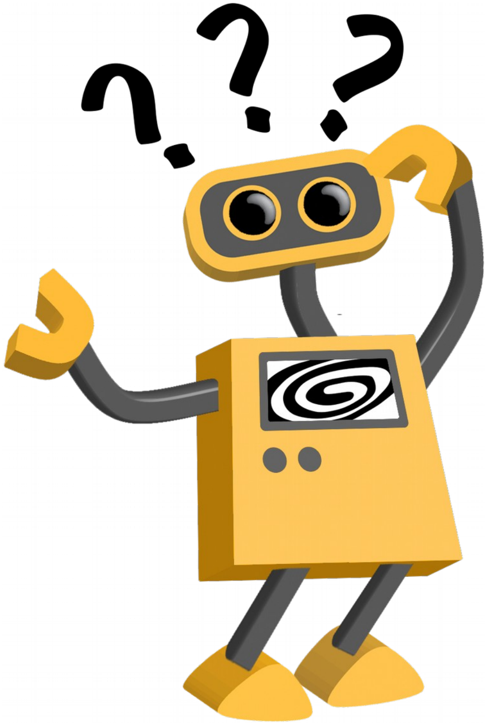
- Para una medición particular z_t, el denominador es solo un factor de normalización

$$\eta = \left(\sum_{x_i} P(z|x_i) \cdot P(x_i) \right)^{-1} \qquad P(x_i|z) = \eta \cdot P(z|x_i) \cdot P(x_i)$$

- Bayes en la práctica
  - Calcular el *likelihood* para cada x_i
  - Multiplicar cada *likelihood* por el conocimiento previo de x_i
  - Sumar el resultado anterior para calcular η

Robótica Probabilística

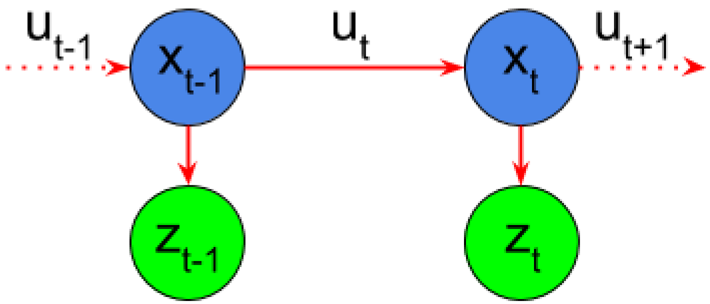
- Hasta ahora hemos encontrado una metodología para modelar las mediciones, pero …
- ¿ Cómo podemos incorporar las acciones u_t, para junto a las mediciones z_t, obtener el estado (*belief*) x_t ?



Modelo Oculto de Markov (HMM)

- Supongamos ahora que tenemos una secuencia de acciones $u_{1:t}$, observaciones $z_{1:t}$ y sus respectivos estados del mundo $x_{0:t}$, *tal que*:

$$u_{1:t} = u_1, u_2 \ldots, u_t$$
$$z_{1:t} = z_1, z_2 \ldots, z_t$$
$$x_{0:t} = x_0, x_1 \ldots, x_t$$



- Es posible definir:
  - *Modelo de acción* (o *transición de estado*):

$$P[x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}]$$

  - *Modelo de sensor*:

$$P[z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}]$$

Modelo Oculto de Markov (HMM)

- Aplicando la propiedad de independencia condicional, tenemos:
  - *Modelo de acción* (o *transición de estado*):

$$P[x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}] = P[x_t | x_{t-1}, u_t]$$

  - *Modelo de sensor*:

$$P[z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}] = P[z_t | x_t]$$

Modelo Oculto de Markov (HMM)

- Aplicando la propiedad de independencia condicional, tenemos:
  - *Modelo de acción* (o *transición de estado*):

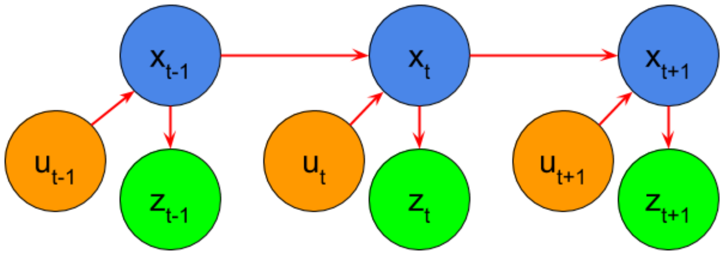
$$P[x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}] = P[x_t | x_{t-1}, u_t]$$

  - *Modelo de sensor*:

$$P[z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}] = P[z_t | x_t]$$

- Podemos concluir que:

El futuro depende del pasado solo a través del presente



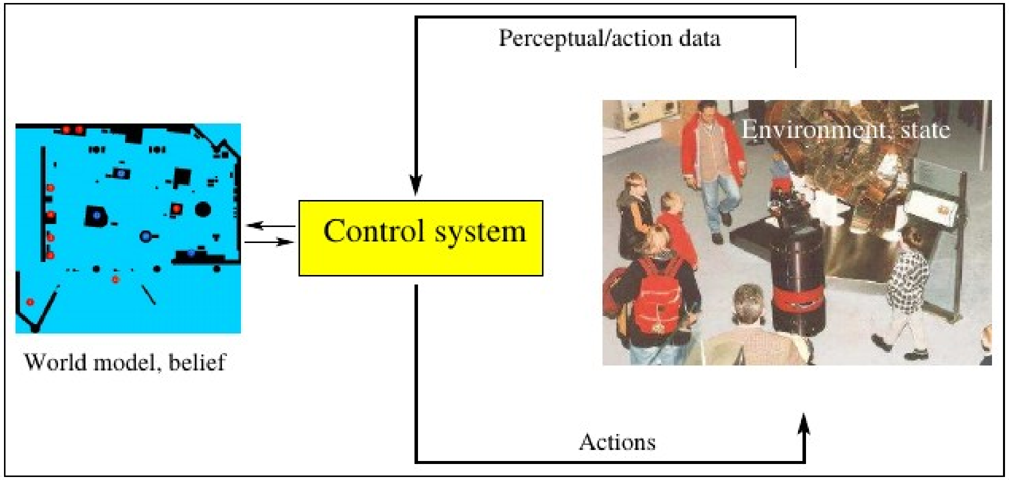
Filtros Bayesianos

- Queremos estimar el estado x_t de un mundo dinámico
- Contamos con:
  - Acciones y observaciones: $u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t$
  - Modelo de acción: $P[x_t | x_{t-1}, u_t]$
  - Modelo de sensor: $P[z_t | x_t]$
  - Conocimiento previo (*prior*): $P[x_t]$

Filtros Bayesianos

- ¿ Qué buscamos ?
  - Estimar la distribución *posterior* $P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$
  - Ésta es comúnmente llamada *belief*, y representa el conocimiento interno que posee el robot acerca del estado del ambiente:

$$Bel[X_t] = P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$



Filtros Bayesianos

- ¿ Qué buscamos ?
  - Estimar la distribución *posterior* $P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$
  - Ésta es comúnmente llamada *belief*, y representa el conocimiento interno que posee el robot acerca del estado del ambiente:

$$Bel[X_t] = P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$

- Supuestos:
  - Propiedad markoviana en observaciones (observaciones condicionalmente independientes del *pasado*, dado el mundo)
  - Un mundo "estático"
  - Modelos "perfectos"

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t | u_1, z_1, ..., u_t, z_t]$$

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t | u_1, z_1, ..., u_t, z_t]$$

Bayes

$$= \eta \cdot P[z_t | u_1, z_1, ..., u_t, x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, ..., u_t]$$

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$

Bayes

$$= \eta \cdot P[z_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Robótica Probabilística

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$

Bayes

$$= \eta \cdot P[z_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Probabilidades Totales

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot \int P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}] \cdot P[x_{t-1} | u_1, z_1, \ldots, u_t] \, dx_{t-1}$$

Robótica Probabilística

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$

Bayes

$$= \eta \cdot P[z_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, x_t] \cdot P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t|x_t] \cdot P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Probabilidades Totales

$$= \eta \cdot P[z_t|x_t] \cdot \int P[x_t|u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}] \cdot P[x_{t-1}|u_1, z_1, \ldots, u_t]\, dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t|x_t] \cdot \int P[x_t|u_t, x_{t-1}] \cdot P[x_{t-1}|u_1, z_1, \ldots, z_{t-1}] dx_{t-1}$$

Filtros Bayesianos

$$Bel[X_t] = P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, z_t]$$

Bayes

$$= \eta \cdot P[z_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t]$$

Probabilidades Totales

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot \int P[x_t | u_1, z_1, \ldots, u_t, x_{t-1}] \cdot P[x_{t-1} | u_1, z_1, \ldots, u_t] \, dx_{t-1}$$

Markov

$$= \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot \int P[x_t | u_t, x_{t-1}] \cdot P[x_{t-1} | u_1, z_1, \ldots, z_{t-1}] dx_{t-1}$$

$$\boxed{Bel[x_t] = \eta \cdot P[z_t | x_t] \cdot \int P[x_t | u_t, x_{t-1}] \cdot Bel[x_{t-1}] dx_{t-1}}$$

Filtros Bayesianos

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**

for all x_t do

$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ bel(x_{t-1})\ dx$

$bel(x_t) = \eta\ p(z_t \mid x_t)\ \overline{bel}(x_t)$

endfor

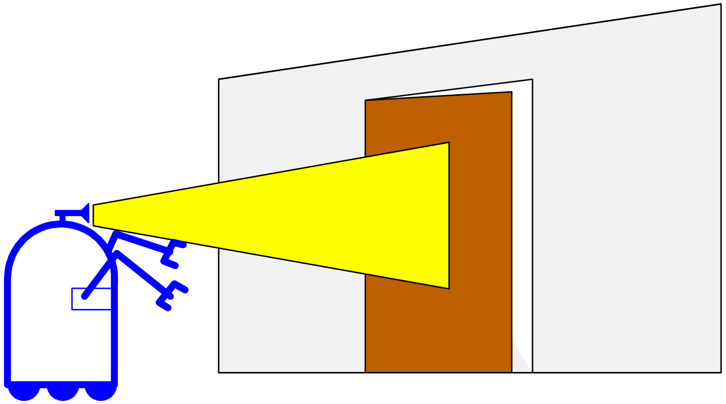
return $bel(x_t)$

Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un score
- Robot no ejecuta acciones (u_t)

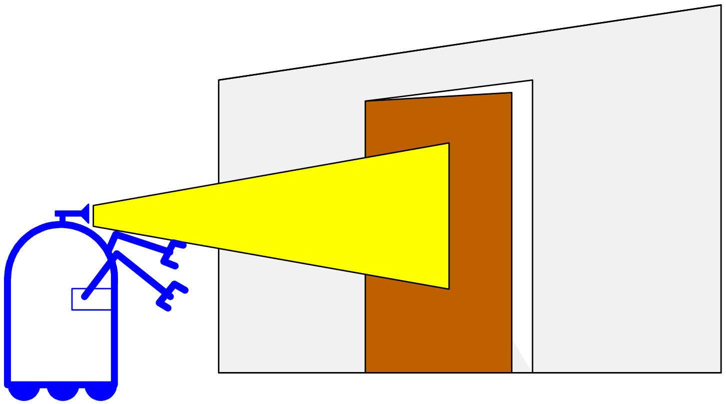
$$P[z_t = sense\_open | x_t = open] = 0.6$$
$$P[z_t = sense\_closed | x_t = closed] = 0.8$$

$$P[x_0 = open] = Bel[x_0 = open] = 0.5$$
$$P[x_0 = closed] = Bel[x_0 = closed] = 0.5$$



Ejemplo

- Estado del mundo (x_t): *open* o *closed*
- Medición (z_t): clasificador que entrega un score
- Robot no ejecuta acciones (u_t)



$$P[z_t = sense\_open | x_t = open] = 0.6$$
$$P[z_t = sense\_closed | x_t = closed] = 0.8$$

$$P[x_0 = open] = Bel[x_0 = open] = 0.5$$
$$P[x_0 = closed] = Bel[x_0 = closed] = 0.5$$

$$Bel[x_2 = open] = P[x_2 = open | u_2 = do\_nothing, z_2 = sense\_open] = ?$$

Robótica Probabilística

Ejemplo

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)**:**
  for all x_t do
    $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\; bel(x_{t-1})\; dx$
    $bel(x_t) = \eta\; p(z_t \mid x_t)\; \overline{bel}(x_t)$
  endfor
  return $bel(x_t)$

Ejemplo

1: **Algorithm Bayes_filter**($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$):
2: for all x_t do
3: $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\ bel(x_{t-1})\ dx$
4: $bel(x_t) = \eta\ p(z_t \mid x_t)\ \overline{bel}(x_t)$
5: endfor
6: return $bel(x_t)$

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(X_1 = open) &= p(X_1 = open | X_0 = open) * bel(X_0 = open) \\
&+ p(X_1 = open | X_0 = closed) * bel(X_0 = closed) \\
&= 1 * 0.5 + 0 * 0.5 = 0.5
\end{aligned}
$$

Robótica Probabilística

Ejemplo

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$):
  for all x_t do
    $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\; bel(x_{t-1})\; dx$
    $bel(x_t) = \eta\; p(z_t \mid x_t)\; \overline{bel}(x_t)$
  endfor
  return $bel(x_t)$

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(X_1 = open) &= p(X_1 = open | X_0 = open) * bel(X_0 = open) \\
&+ p(X_1 = open | X_0 = closed) * bel(X_0 = closed) \\
&= 1 * 0.5 + 0 * 0.5 = 0.5 \\
bel(X_1 = open) &= p(X_1 = open | Z_1 = open) \\
&= \frac{p(Z_1 = open | X_1 = open) * \overline{bel}(X_1 = open)}{p(Z_1 = open | X_1 = open) * p(X_1 = open) + p(Z_1 = open | X_1 = closed) * p(X_1 = closed)} \\
&= \frac{0.6 * 0.5}{0.6 * 0.5 + 0.2 * 0.5} = 0.75
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Algorithm Bayes_filter($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$):
  for all x_t do
    $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx$
    $bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$
  endfor
  return $bel(x_t)$

$$
\begin{aligned}
\overline{bel}(X_2 = open) &= p(X_2 = open | X_1 = open) * bel(X_1 = open) \\
&+ p(X_2 = open | X_1 = closed) * bel(X_1 = closed) \\
&= 1 * 0.75 + 0 * 0.25 = 0.75 \\
bel(X_2 = open) &= p(X_2 = open | Z_2 = open) \\
&= \frac{p(Z_2 = open | X_2 = open) * \overline{bel}(X_2 = open)}{p(Z_2 = open | X_2 = open) * p(X_2 = open) + p(Z_2 = open | X_2 = closed) * p(X_2 = closed)} \\
&= \frac{0.6 * 0.75}{0.6 * 0.75 + 0.2 * 0.25} = 0.9
\end{aligned}
$$

Robótica Probabilística

- ¿ Qué pasa con ***Bel*(x_t)** cuando agregamos mediciones z_t ?

Robótica Probabilística

- ¿ Qué pasa con ***Bel(x_t)*** cuando agregamos mediciones ***z_t*** ?
  - Como vimos en el ejemplo, aumenta la certeza !

Robótica Probabilística

- ¿ Qué pasa con ***$Bel(x_t)$*** cuando agregamos mediciones ***z_t*** ?
  - Como vimos en el ejemplo, aumenta la certeza !
- ¿ Qué pasa con ***$Bel(x_t)$*** cuando agregamos una acción ***u_t*** ?
  - Acción efectuada por el robot
  - Acción efectuada por un agente externo
  - Tiempo
  - … algo que cambie el estado del mundo

Robótica Probabilística

- ¿ Qué pasa con ***Bel(x_t)*** cuando agregamos mediciones z_t ?
  - Como vimos en el ejemplo, aumenta la certeza !
- ¿ Qué pasa con ***Bel(x_t)*** cuando agregamos una acción u_t ?
  - Acción efectuada por el robot
  - Acción efectuada por un agente externo
  - Tiempo
  - … algo que cambie el estado del mundo
  - Disminuye la certeza !

Robótica Probabilística

- ¿ Qué pasa con ***$Bel(x_t)$*** cuando agregamos mediciones ***z_t*** ?
  - Como vimos en el ejemplo, aumenta la certeza !
- ¿ Qué pasa con ***$Bel(x_t)$*** cuando agregamos una acción ***u_t*** ?
  - Acción efectuada por el robot
  - Acción efectuada por un agente externo
  - Tiempo
  - … algo que cambie el estado del mundo
  - Disminuye la certeza !

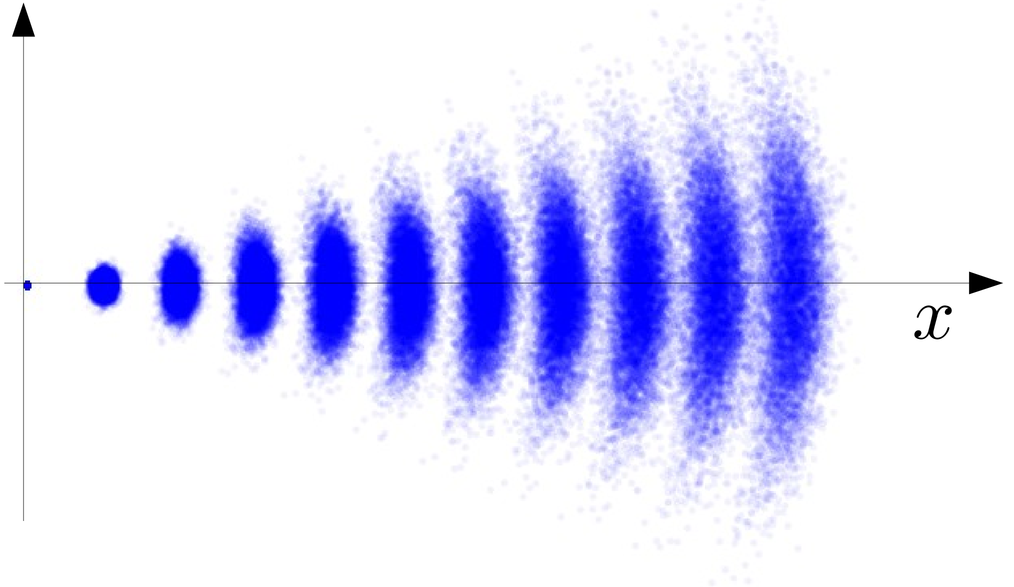
Mediciones aumentan la certeza del robot, acciones la bajan!

Robótica Probabilística

- Queremos ver cómo cambia el mundo *x* producto de una “acción” *u* a partir de un mundo *x’*. Esto se demonina como ACTION MODEL

$$P(x|u, x')$$

- Ejemplo: robot avanza 1 [m] cada vez, hasta recorrer 10 [m]
  - Error ángulo: 5°
  - Error distancia: 0.05 [m]



Resumen

- Las probabilidades nos acompañarán el resto del curso
  - Movimientos no son exactos
  - Percepción no es exacta
  - Razonamiento debe incorporar la incerteza
- Regla de Bayes
  - No memorizar. Entender e interpretar.
- Filtros bayesianos
  - Bayes + Markov
  - Genérico, muy utilizado en la práctica

Bibliografía

- ***Probabilistic Robotics***, Thrun, S., Burgard, W., Fox, D.