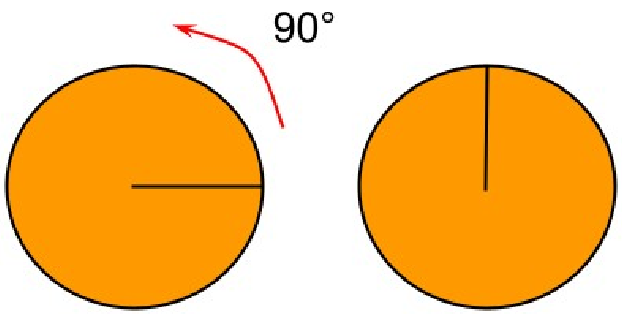
IIC2685 Robótica Móvil
I – 2022

Capítulo 3

Control de Bajo Nivel

Profesor: Gabriel Sepúlveda V.
grsepulveda@ing.puc.cl

¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



$$v = cte.$$

$$t = \frac{d}{v}$$

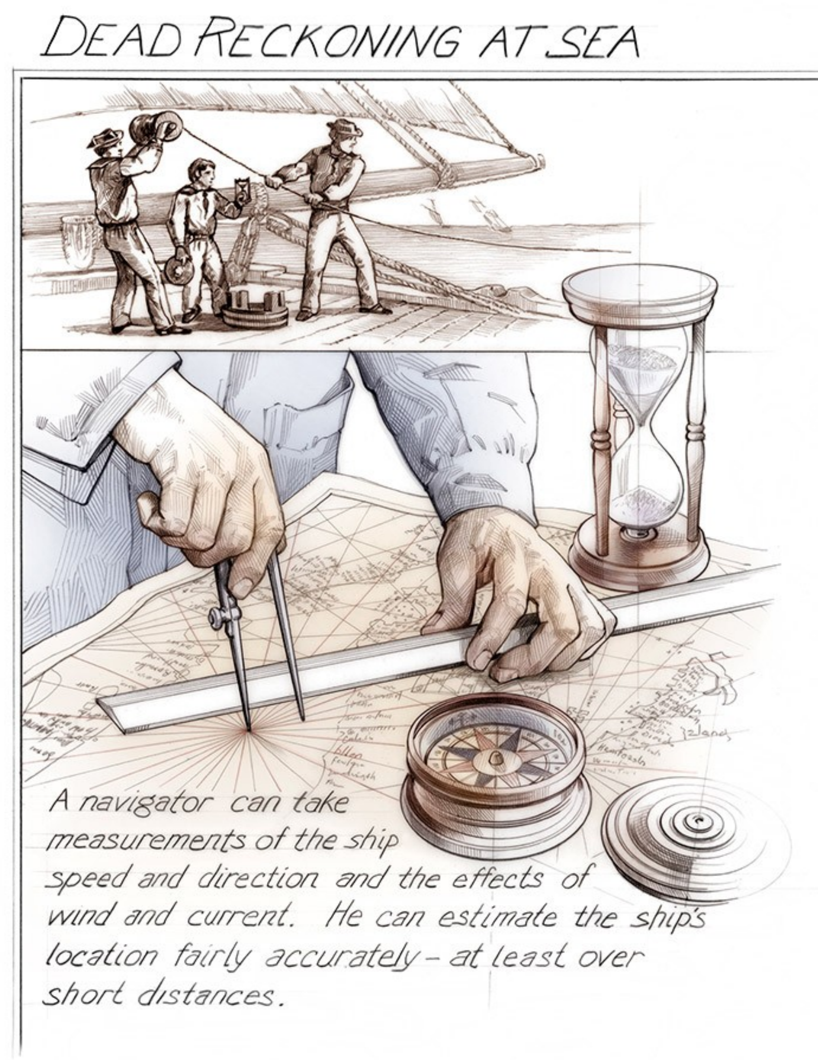
Aplicar velocidad ‘v’ durante ‘t’ [s]

$$\omega = cte.$$

$$t = \frac{\theta}{\omega}$$

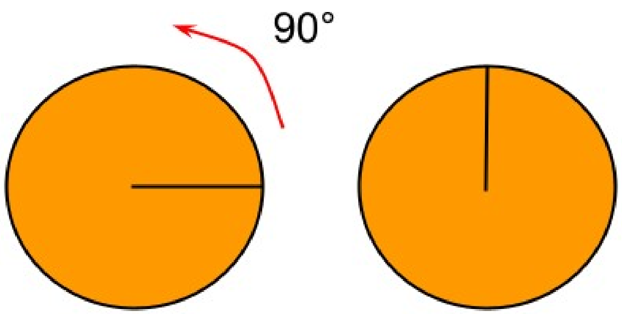
Aplicar velocidad ‘ω’ durante ‘t’ [s]

¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



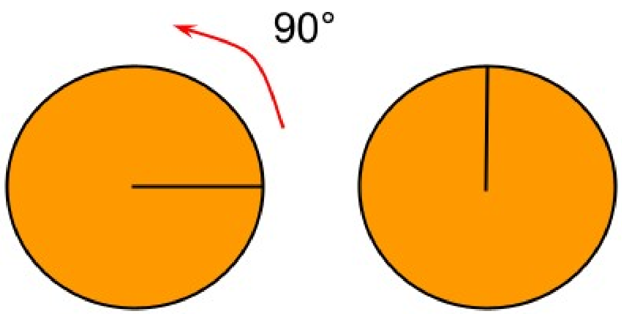
Fuente: https://timeandnavigation.si.edu/multimedia-asset/dead-reckoning-at-sea

¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



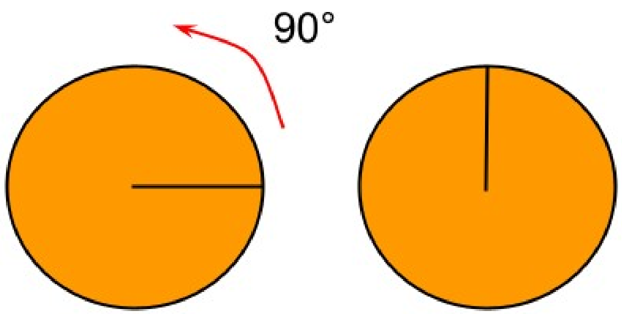
- Problemas:

¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



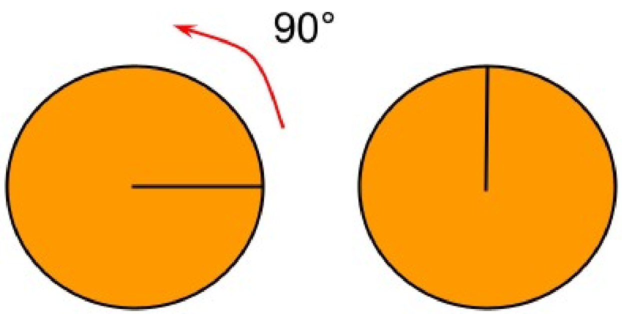
- Problemas:
  - Medición del tiempo ‘t’ es imprecisa

¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



- Problemas:
  - Medición del tiempo ‘t’ es imprecisa
  - No hay garantía de que ‘v’ y/o ‘ω’ sean constantes

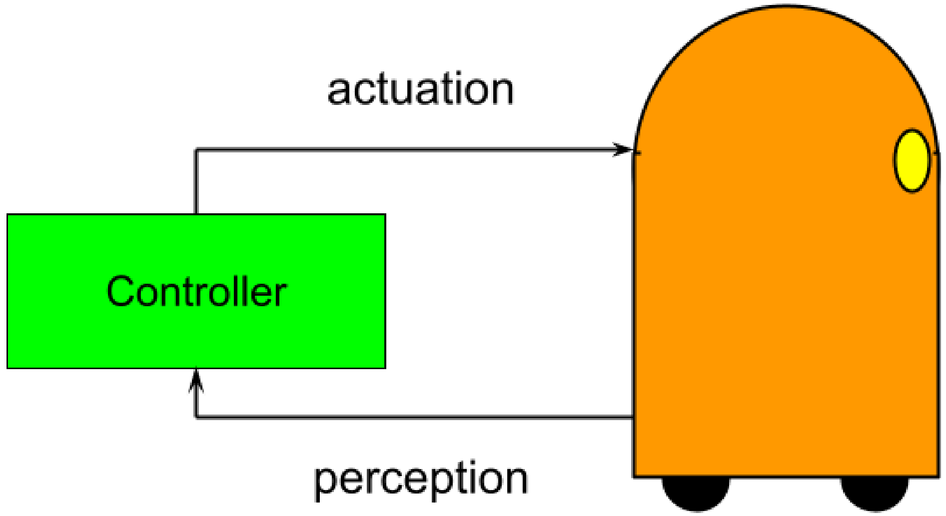
¿ Qué hemos hecho hasta ahora ?



- Problemas:
  - Medición del tiempo ‘t’ es imprecisa
  - No hay garantía de que ‘v’ y/o ‘ω’ sean constantes
  - Estamos desaprovechando la información de los sensores !

Nuestro objetivo

Diseñar un dispositivo externo llamado Controlador, que permita al robot actuar de forma reactiva según su percepción del entorno



Agenda

- Sistemas y señales
- Ecuación general del sistema
- Control en lazo abierto
- Control en lazo cerrado
- Control PID

Control de Bajo Nivel

- Volviendo a nuestra definición de ROBOT:

Una máquina AUTÓNOMA capaz de PERCIBIR, RAZONAR y ACTUAR en forma **ADAPTIVA**

Control Robótico

- Control de Alto Nivel:
  - Activación/coordinación de principales comportamientos
  - Planeamiento de rutas (Path Planning)
  - Decisiones de alto nivel, razonamiento

Control Robótico

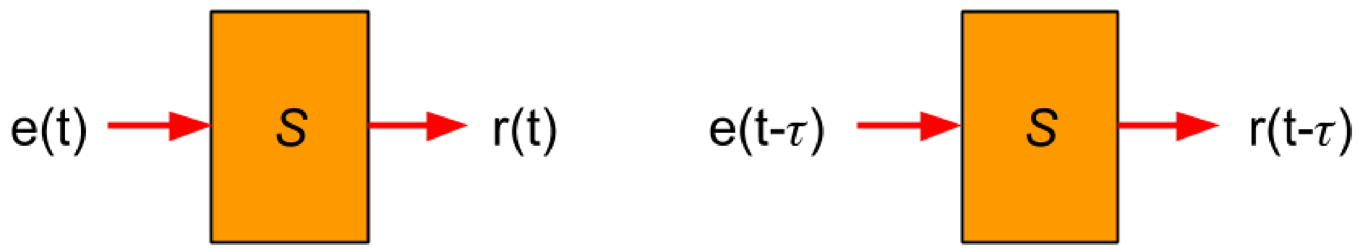
- Control de Alto Nivel:
  - Activación/coordinación de principales comportamientos
  - Planeamiento de rutas (Path Planning)
  - Decisiones de alto nivel, razonamiento
- Control de Bajo Nivel
  - Control de comportamientos reactivos
  - Control de movimiento
  - Múltiples estrategias de control: nos enfocaremos en controladores PID

Sistemas

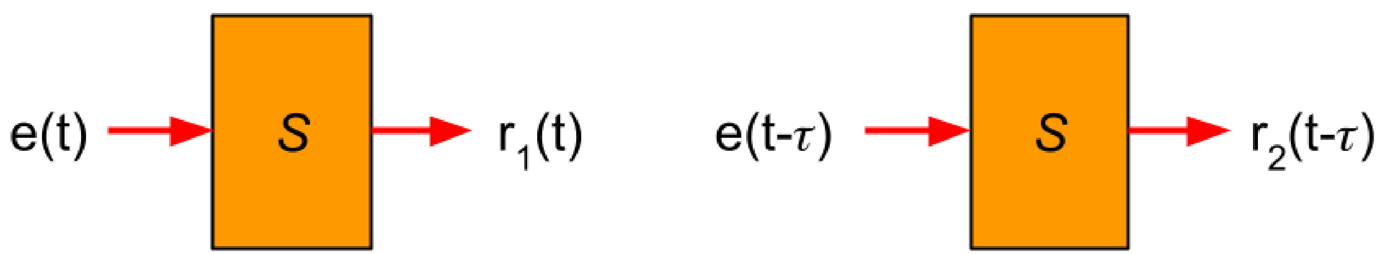
- Definición General (RAE): Conjunto de cosas (elementos) que relacionadas entre sí ordenadamente contribuyen a determinado objeto
- Por ejemplo:
  - Amplificador
  - Motor,
  - Televisor,
  - etc.

Sistemas: Clasificación

- Según la energía que procesan: eléctricos, hidráulicos, eólicos, etc.
- Determinísticos y probabilísticos
- Variantes e invariantes en el tiempo
  - Invariante:

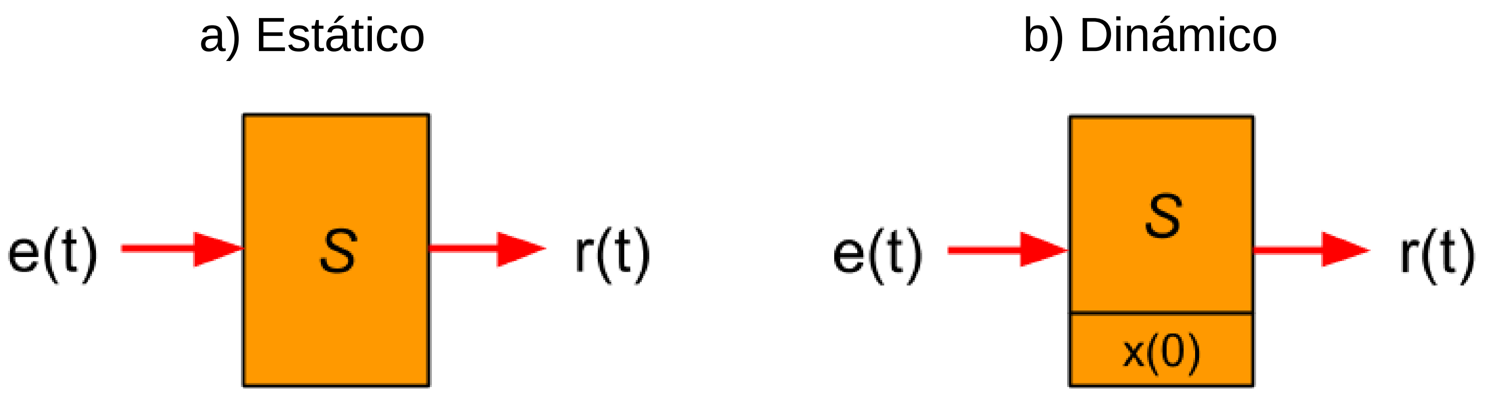


  - Variante:



Sistemas: Clasificación

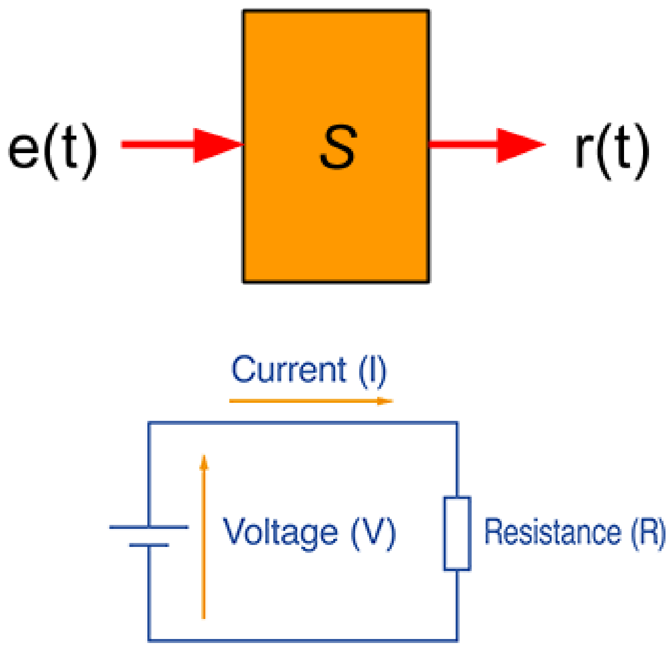
- De tiempo continuo y de tiempo discreto
- Sistemas estáticos (algebráicos) y dinámicos
  - Sistemas dinámicos: capaces de almacenar energía y/o información



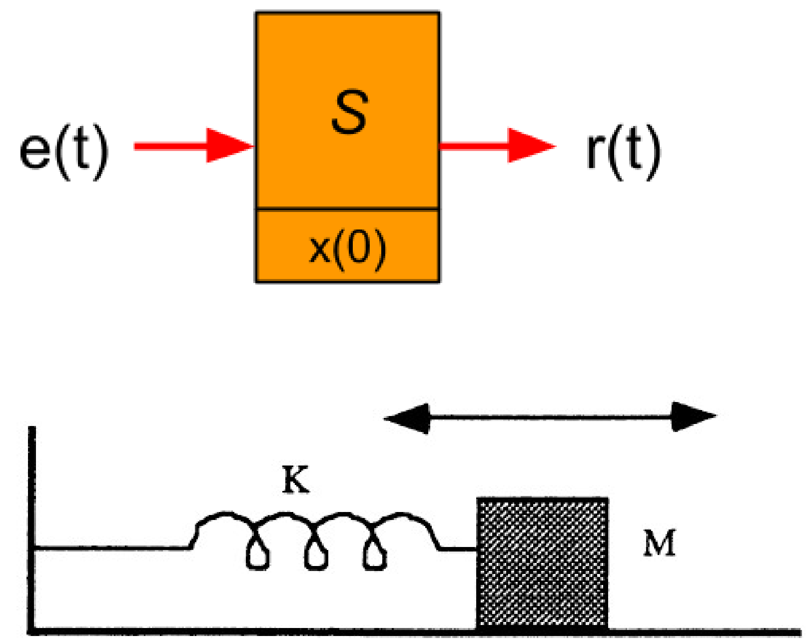
Sistemas: Clasificación

- De tiempo continuo y de tiempo discreto
- Sistemas estáticos (algebráicos) y dinámicos
  - Sistemas dinámicos: capaces de almacenar energía y/o información

a) Estático

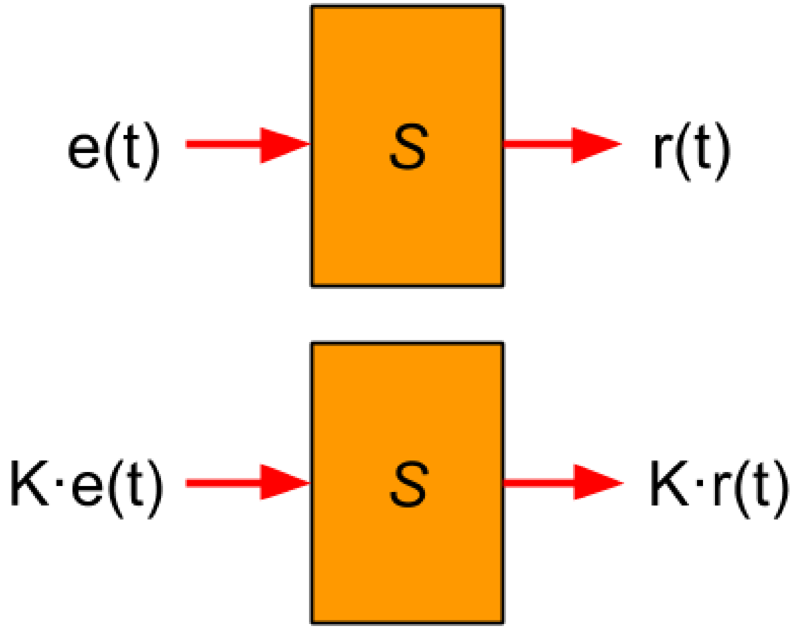


b) Dinámico



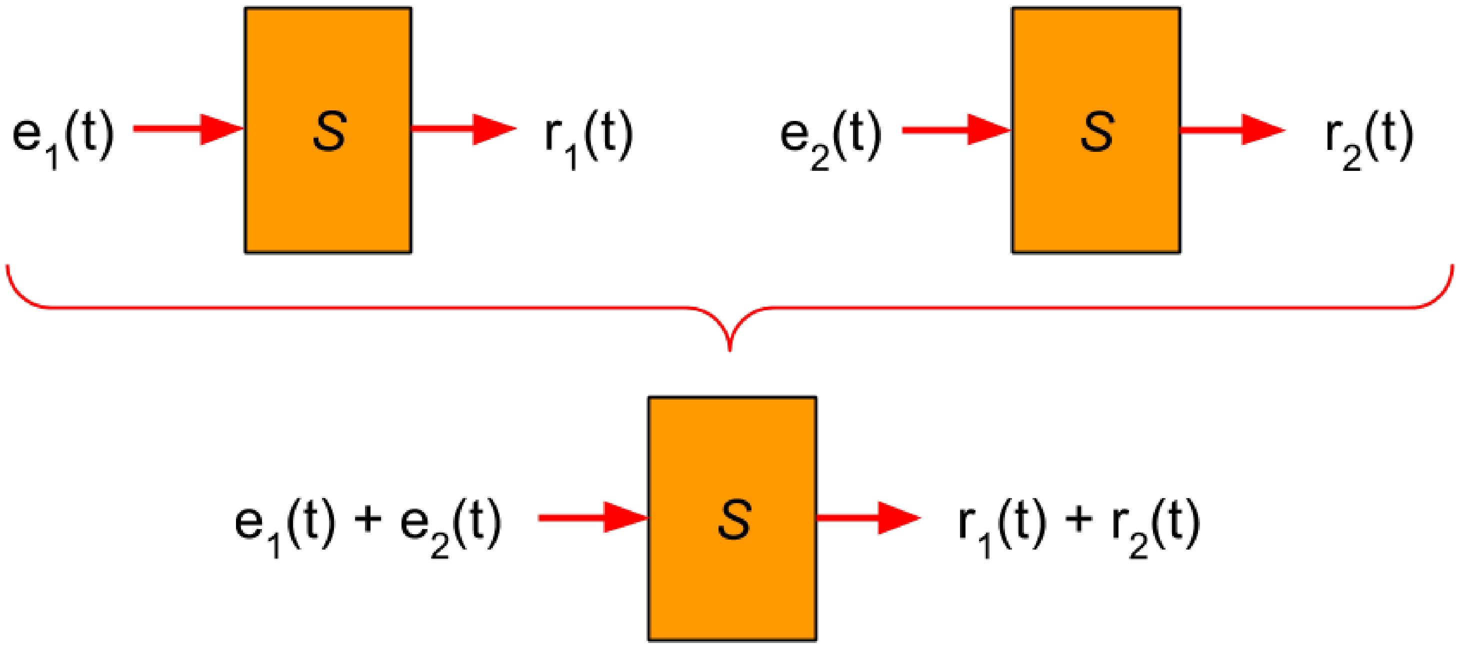
Sistemas: Clasificación

- Sistemas lineales y no lineales
  - Sistemas lineal debe cumplir con: Homogeneidad y Superposición
  - Homogeneidad:



Sistemas: Clasificación

- Sistemas lineales y no lineales
  - Sistemas lineal debe cumplir con: Homogeneidad y Superposición
  - Superposición:



Sistemas: Clasificación

- Sistemas lineales y no lineales
  - Sistemas lineal debe cumplir con: Homogeneidad y Superposición
  - Combinando homegeneidad y superposición:

$$\alpha_1 \cdot e_1(t) + \alpha_2 \cdot e_2(t) \longrightarrow \boxed{S} \longrightarrow \alpha_1 \cdot r_1(t) + \alpha_2 \cdot r_2(t)$$

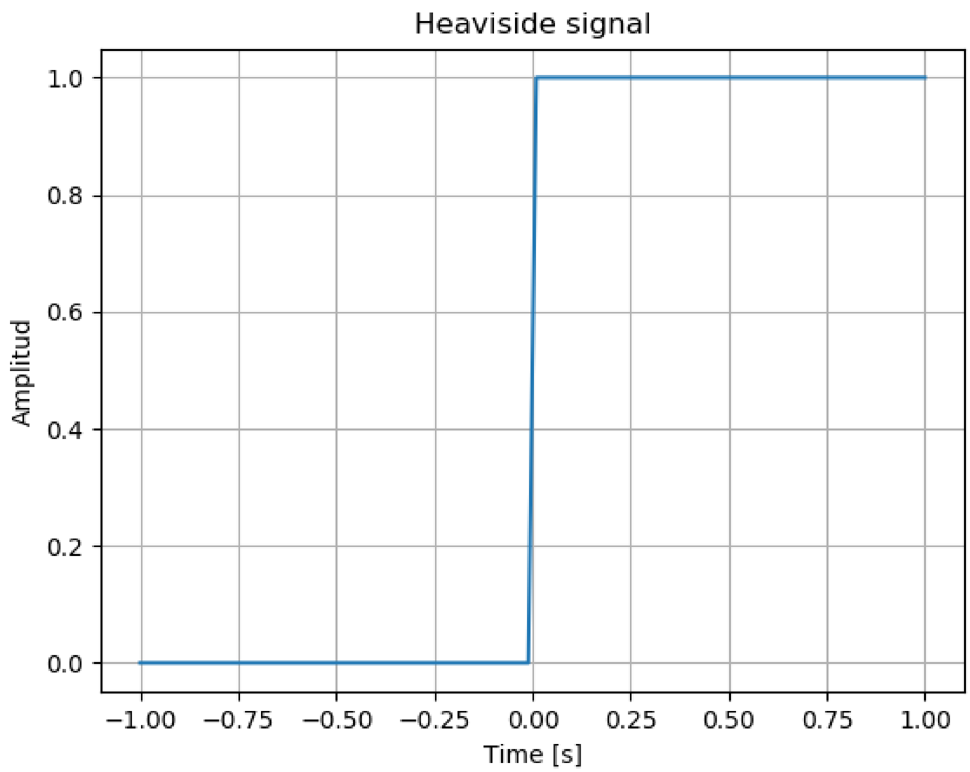
- En general, trabajaremos con sistemas:
  - Dinámicos
  - Determinísticos
  - Lineales
  - Invariantes en el tiempo

Señales

- Definición: medición u observación que permite describir algún fenómeno
- En este contexto, corresponde a una función de una variable independiente que usualmente es el tiempo: $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$.
- Algunas seales importantes:
  - Escalón unitario
  - Delta de Dirac
  - Sinusoidal

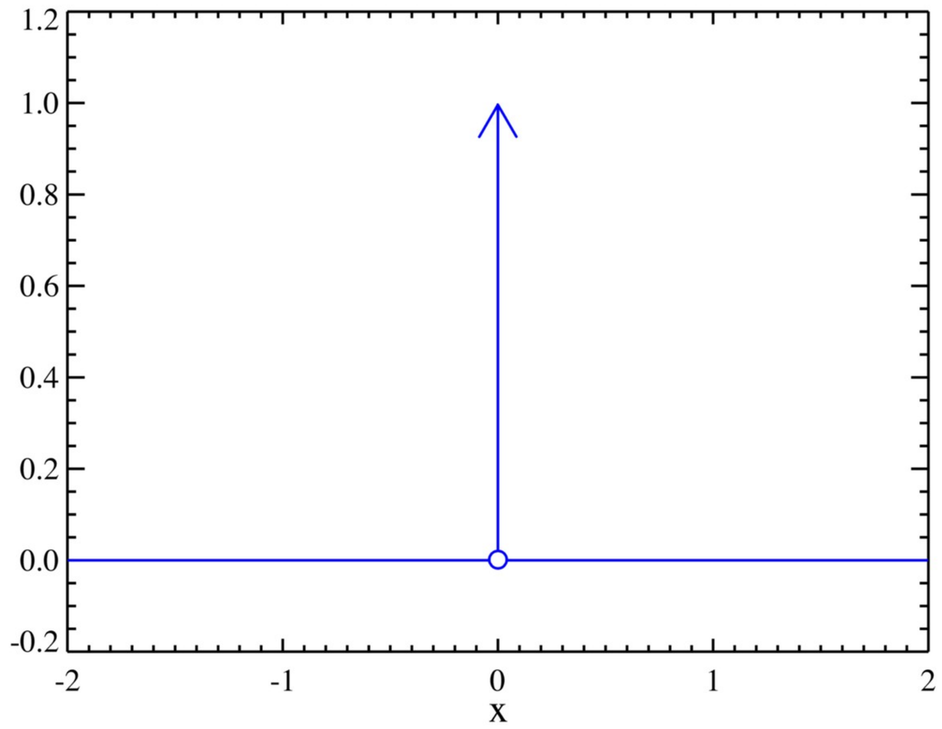
Señales

- Señal escalón unitario o Heaviside: μ(t)
- Toma valor 1 para t positivos
- Toma valor 0 para t negativos



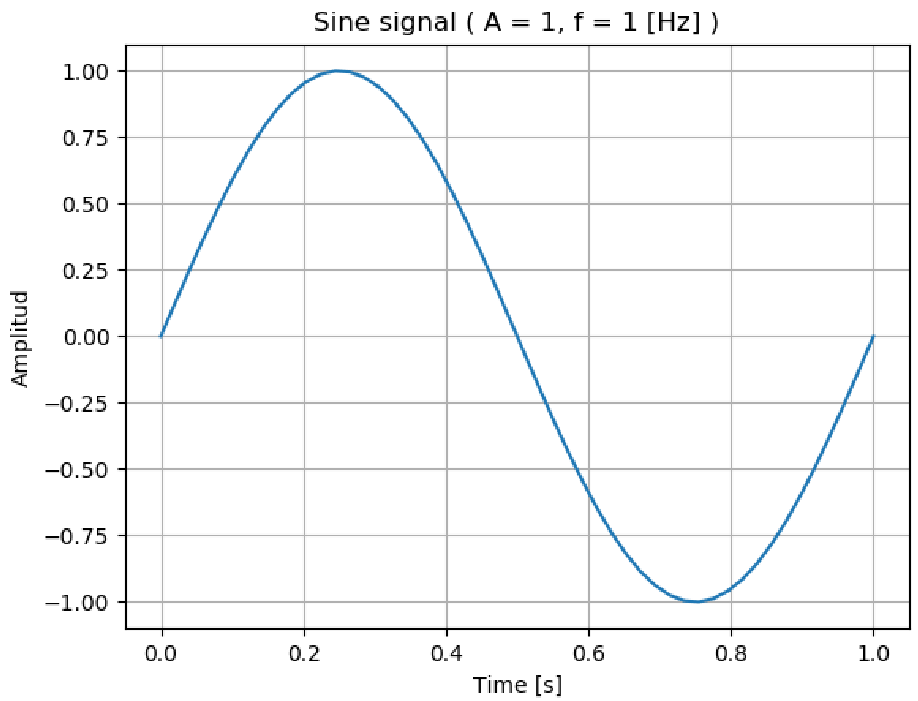
Señales

- Señal impulso o Delta de Dirac: δ(t)
- Tiende a infinito cuando t tiende a cero
- En todo otro valor de t, δ(t) es cero



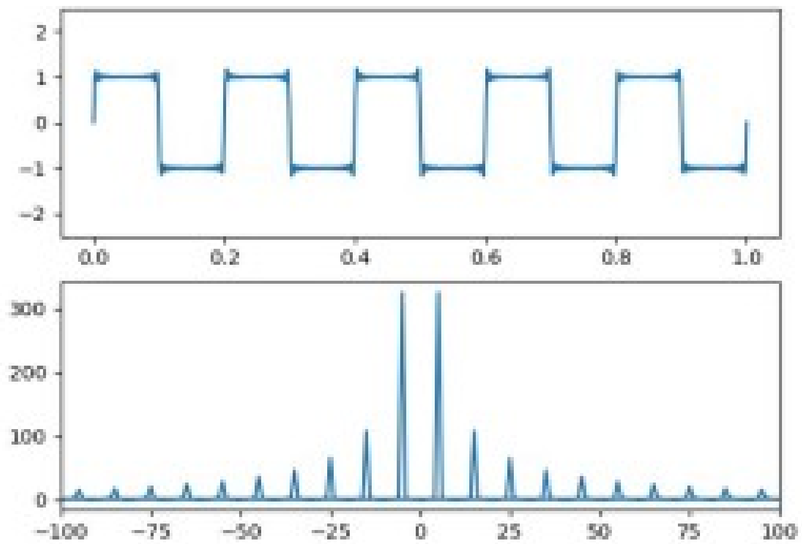
Señales

- Señal sinusoidal: sin(t)
- Representa una señal de frecuencia pura
- Cualquier señal periódica puede ser construida como una suma ponderada de sinusoidales: Análisis de Fourier



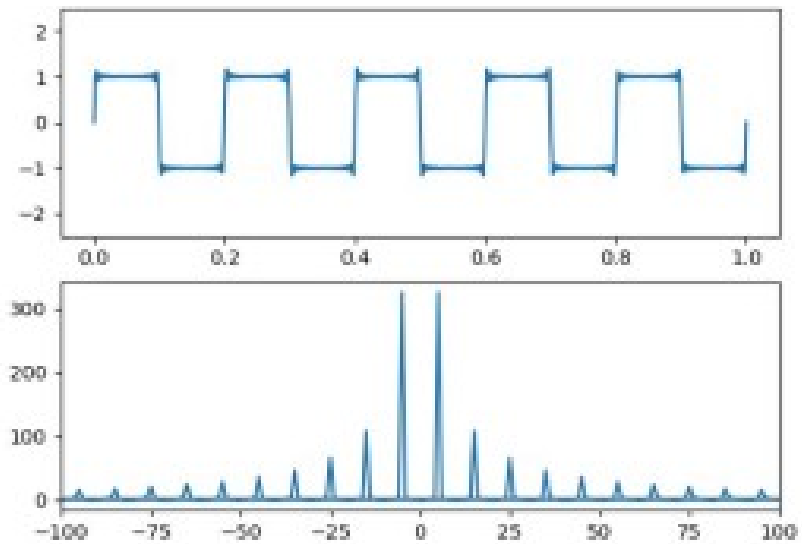
Señales

- Series de Fourier: descomposición de señales en frecuencias



Señales

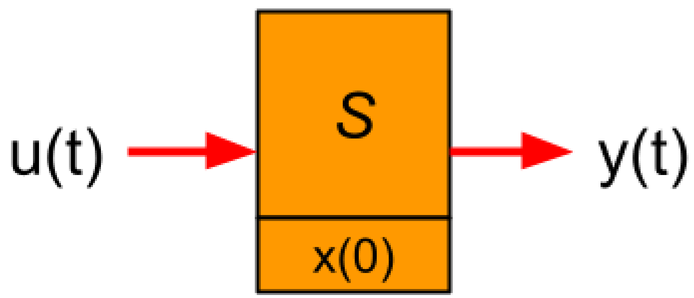
- Series de Fourier: descomposición de señales en frecuencias



- Sistemas pueden actuar como filtros de frecuencias, dejando pasar algunas y eliminando otras

La Ecuación del Sistema

- Para representar matemáticamente un sistema, utilizaremos una ecuación general que incluya todos los operadores lineales:
  - Sumas
  - Multiplicaciones
  - Derivadas



$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

La Ecuación del Sistema

- La forma general de la ecuación del sistema para un sistema lineal e invariante de orden n, es:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

- Donde normalmente $n \geq m$, y a_i y b_j son constantes reales conocidas
- ¿ Cómo podemos analizar la respuesta del sistema ?

La Ecuación del Sistema

- La forma general de la ecuación del sistema para un sistema lineal e invariante de orden n, es:

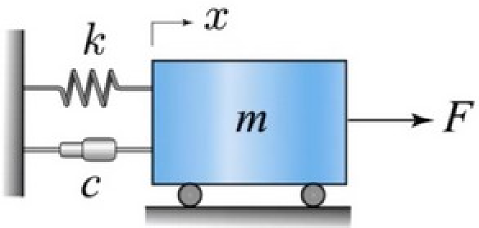
$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

- Donde normalmente $n \geq m$, y a_i y b_j son constantes reales conocidas
- ¿ Cómo podemos analizar la respuesta del sistema ?

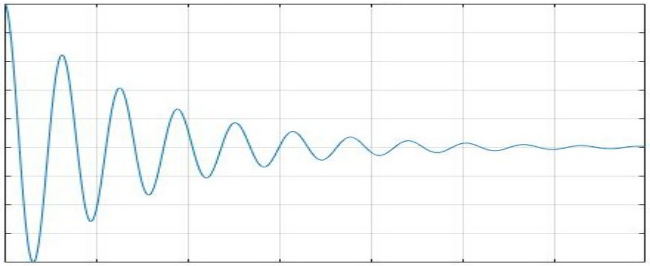
Divide y vencerás !

La Ecuación del Sistema

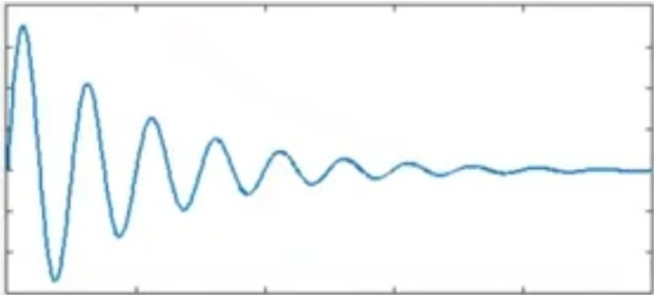
- Al ser una ecuación lineal, la respuesta del sistema puede ser dividida en:



  - Respuesta a estado ($u(t) = 0, x(t) \neq 0$): $y_h(t)$



  - Respuesta a entrada ($u(t) \neq 0, x(t) = 0$): $y_u(t)$



  - Donde: $y(t) = y_h(t) + y_u(t)$

La Ecuación del Sistema

- Para poder predecir la salida *y(t)* para una determinada entrada *u(t)*, necesitamos resolver la ecuación del sistema (ecuación diferencial)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

La Ecuación del Sistema

- Para poder predecir la salida *y(t)* para una determinada entrada *u(t)*, necesitamos resolver la ecuación del sistema (ecuación diferencial)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

- Una forma sencilla de resolver este tipo de ecuaciones, es mediante la aplicación de Transformada de Laplace

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \ldots + b_0 U(s)$$

La Ecuación del Sistema

- Para poder predecir la salida *y(t)* para una determinada entrada *u(t)*, necesitamos resolver la ecuación del sistema (ecuación diferencial)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 \cdot u(t)$$

- Una forma sencilla de resolver este tipo de ecuaciones, es mediante la aplicación de Transformada de Laplace

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \ldots + b_0 U(s)$$

- Nota: Para este caso solo hemos considerado la respuesta a entrada

La Ecuación del Sistema

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \ldots + b_0 U(s)$$

- Si factorizamos U(s) e Y(s) y luego despejamos, se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots a_1 s + a_0}$$

- H(s) se denomina función de transferencia del sistema

La Ecuación del Sistema

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + ... + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + ... + b_0 U(s)$$

- Si factorizamos U(s) e Y(s) y luego despejamos, se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... a_1 s + a_0}$$

- H(s) se denomina función de transferencia del sistema
- ¿ Cómo podríamos obtener la salida Y(s) a partir de H(s) y U(s) ?

La Ecuación del Sistema

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + ... + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + ... + b_0 U(s)$$

- Si factorizamos U(s) e Y(s) y luego despejamos, se obtiene:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... a_1 s + a_0}$$

- H(s) se denomina función de transferencia del sistema
- ¿ Cómo podríamos obtener la salida Y(s) a partir de H(s) y U(s) ?

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s)$$

La Ecuación del Sistema

- Considere la función de transferencia *H(s)* de un sistema *S*:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... a_1 s + a_0}$$

- Si este sistema es excitado con una señal Delta de Dirac, cuya transformada de Laplace es: L{ δ(t) } = 1
- ¿ Cuál será la salida obtenida ?

La Ecuación del Sistema

- Considere la función de transferencia *H(s)* de un sistema *S*:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... a_1 s + a_0}$$

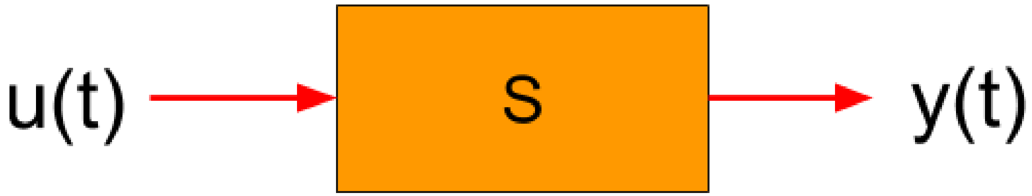
- Si este sistema es excitado con una señal Delta de Dirac, cuya transformada de Laplace es: L{ δ(t) } = 1
- ¿ Cuál será la salida obtenida ?

$$Y(s) = H(s) \cdot U(s) = H(s) \cdot 1 = H(s)$$

Control Automático

- El problema fundamental

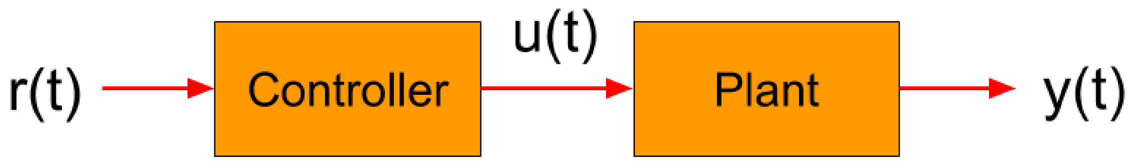
Encontrar una forma técnicamente factible de modo que la salida de un sistema y(t) se comporte lo más cercanamente posible a un patrón especificado r(t)



- Para ello, será necesario encontrar un segundo sistema denominado controlador que sea capaz de proporcionar una entrada u(t) tal que resuelva el problema

Control Automático

Sistema Planta-Controlador

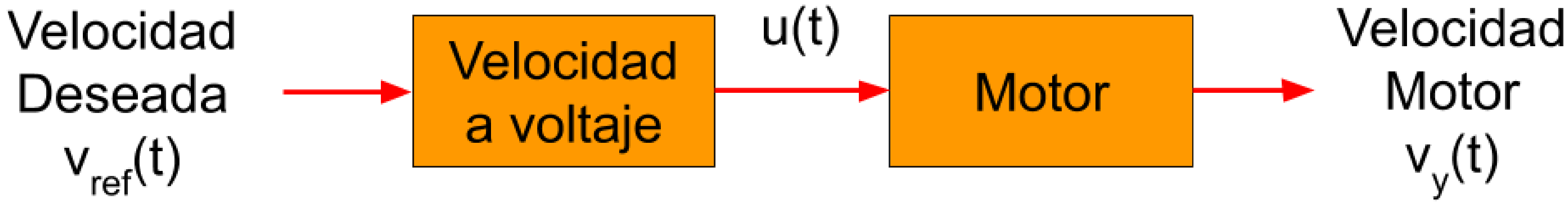


$$U(s) = C(s) \cdot R(s)$$
$$Y(s) = P(s) \cdot U(s)$$

- Planta: Sistema que se desea controlar
- Controlador: Sistema que llevará a cabo la tarea de control
- Referencia (set-point): señal r(t)
- Actuación: señal u(t)
- Salida: señal y(t)

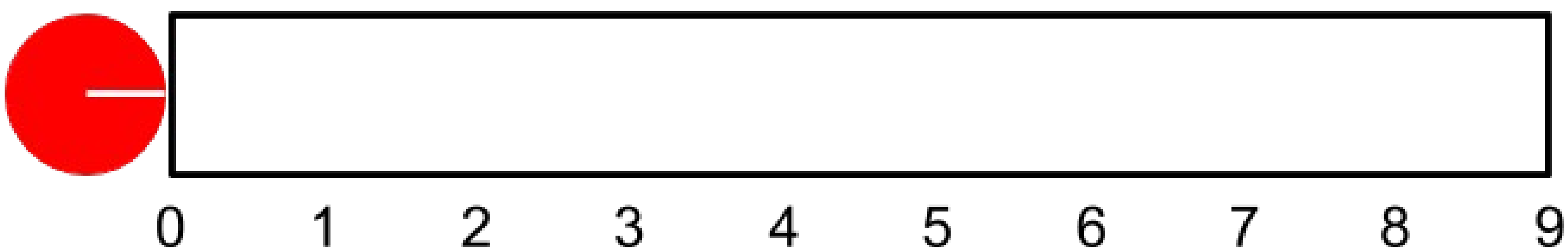
Control en Lazo Abierto

- El control se basa en un modelo preciso del sistema
- Principio de inversión
- Control ciego: no existe realimentación (*feedback*) desde los sensores
- Se establece un objetivo (*set-point*) y se espera que el modelo realice la tarea
- ¿ Ejemplos ?, ¿ problemas ? ...

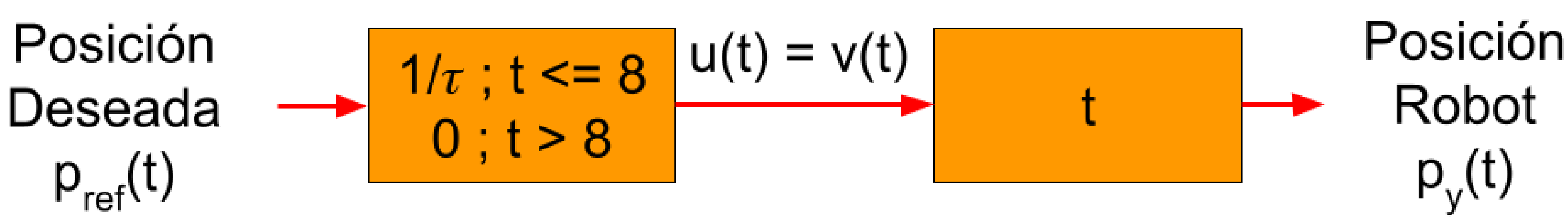


Control en Lazo Abierto

- ¿ Cómo podríamos controlar la posición lineal de nuestro robot ?
- Posición actual: 0
- Posición objetivo: 8

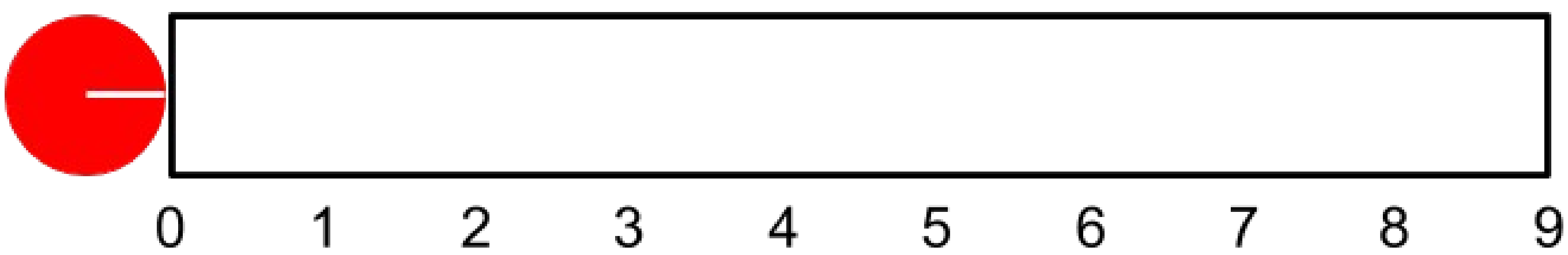


- Idea: mover el robot a 1 [cuadro/s] durante 8 [s]



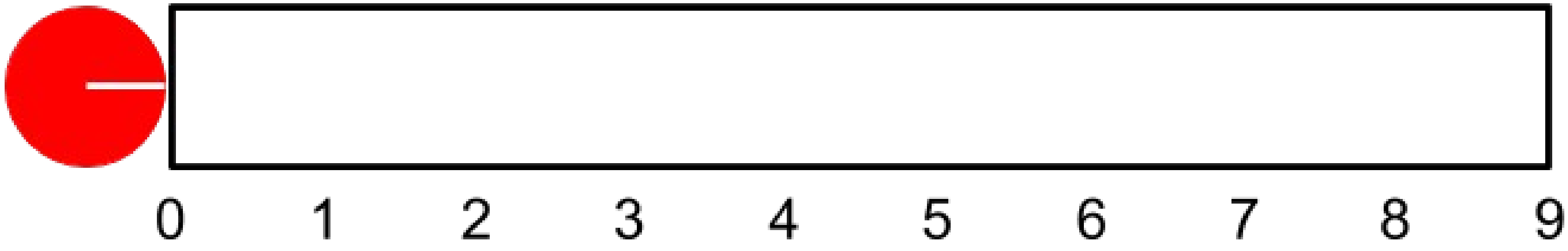
Control en Lazo Abierto

- ¿ Cómo podríamos mover el robot más deprisa ?
- Mover el robot a 2 [cuadro/s] por 4 [s]
- ¿ Por qué no a 10 [cuadro/s] ?
- ¿ Por qué no a 10^5 [cuadro/s] ?



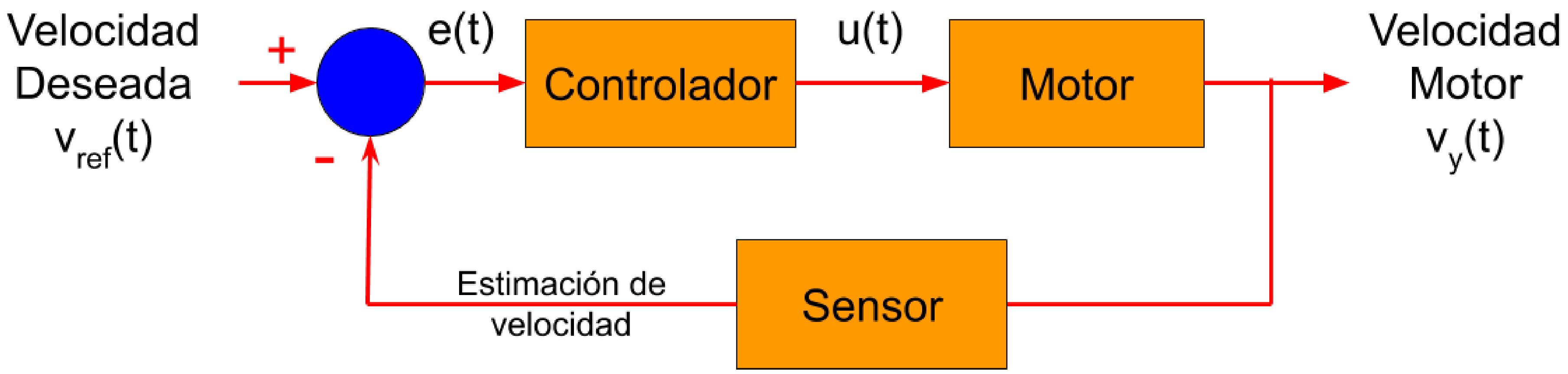
Control en Lazo Abierto

- Algunas ideas intuitivas para llegar más rápido al objetivo:
  - Mover más rápido cuando el robot esté lejos de la posición objetivo
  - Mover más lento cuando el robot esté cerca de la posición objetivo
- Para ello necesitamos medir la diferencia entre nuestra posición actual y la posición objetivo (error)



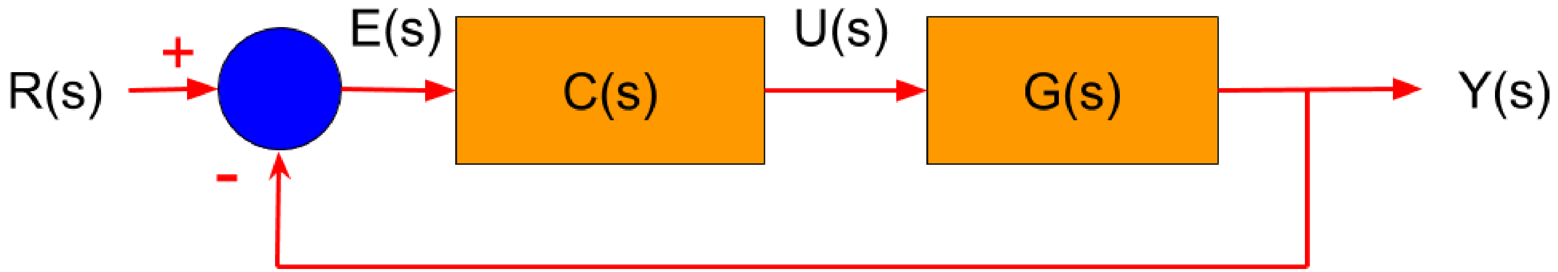
Control en Lazo Cerrado

- Control se basa no solamente en el modelo, sino que también en el valor actual de la señal a controlar
- Se cuenta con realimentación de los sensores
- ¿ Ejemplos ?



Control en Lazo Cerrado

- Función de transferencia de lazo cerrado



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$Y(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot E(s)$$

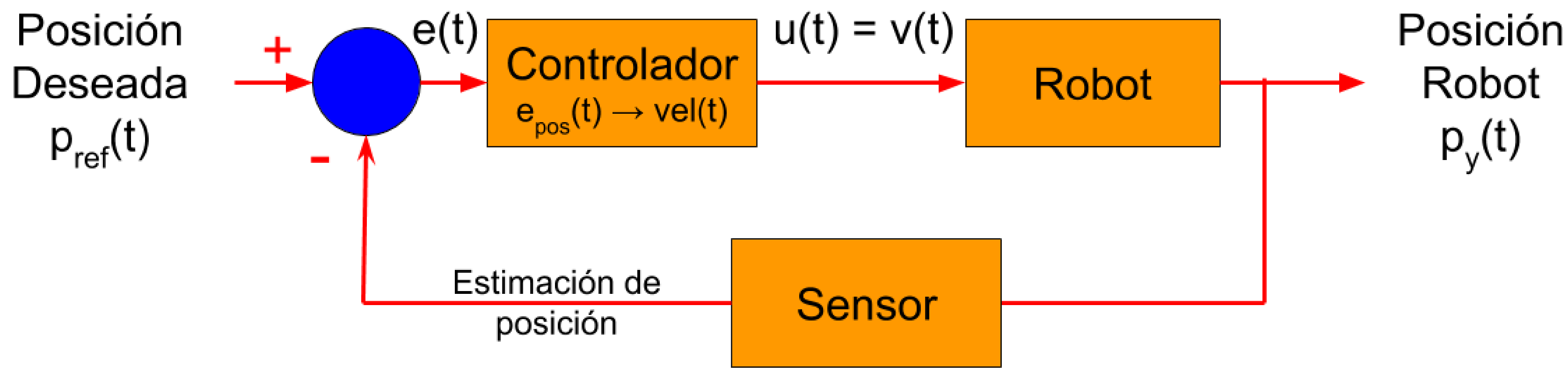
$$Y(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot [R(s) - Y(s)]$$

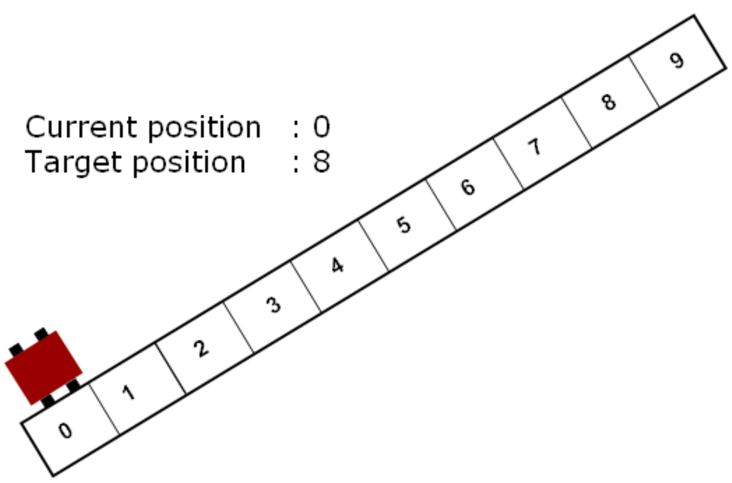
$$[1 + G(s) \cdot C(s)] \cdot Y(s) = G(s) \cdot C(s) \cdot R(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s) \cdot C(s)}{1 + G(s) \cdot C(s)}}$$

Control en Lazo Cerrado

- Estas ideas pueden ser aplicadas al control de posición





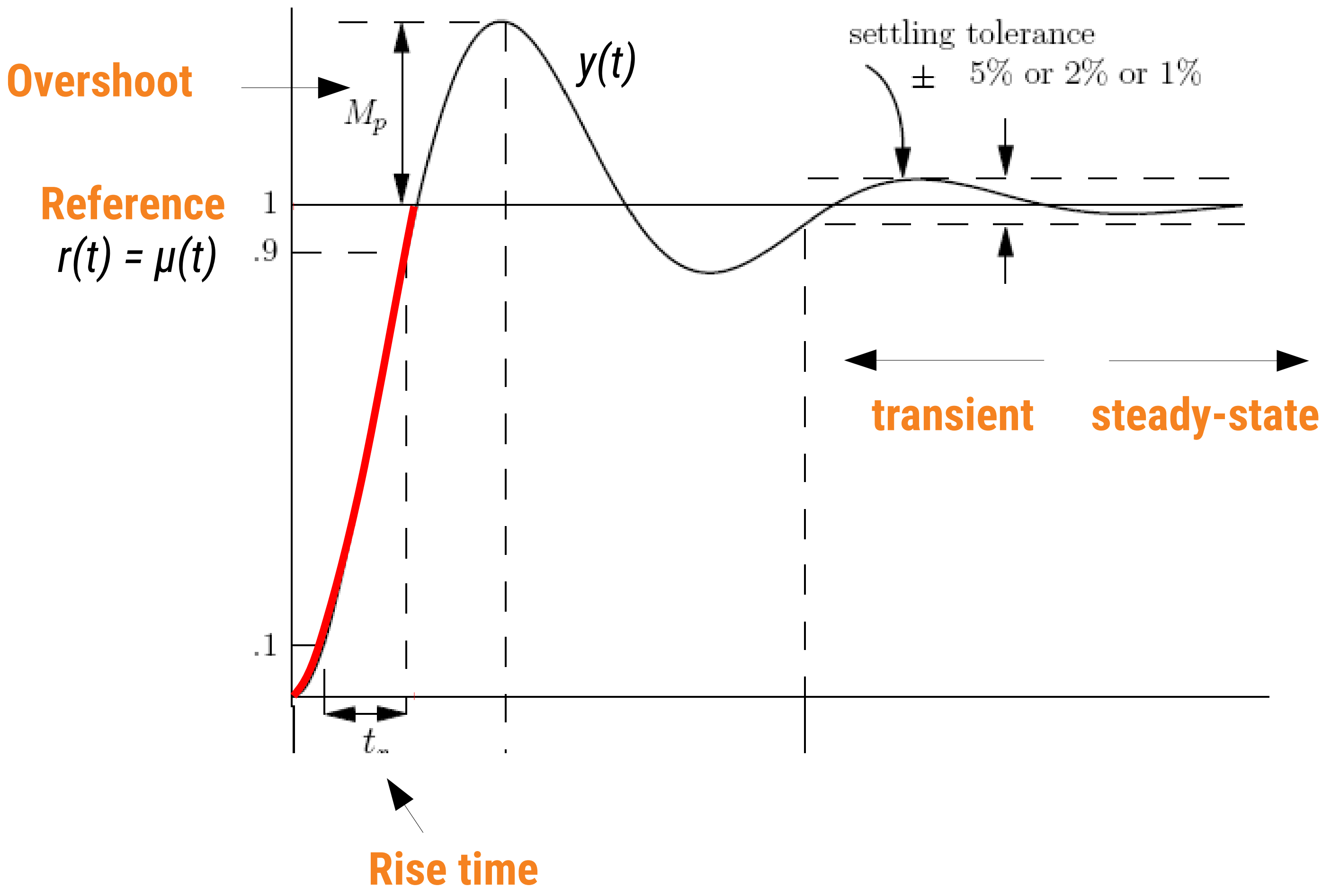
$$e(t) = (P_{desired} - P_{actual})\ [cuadro/s]$$

Control en Lazo Cerrado

- ¿ Cómo definir el controlador ?
- Utilizando control PID
- Familia de controladores que se caracterizan por tener en su estructura una parte:
  - Proporcional
  - Integrativa
  - Derivativa

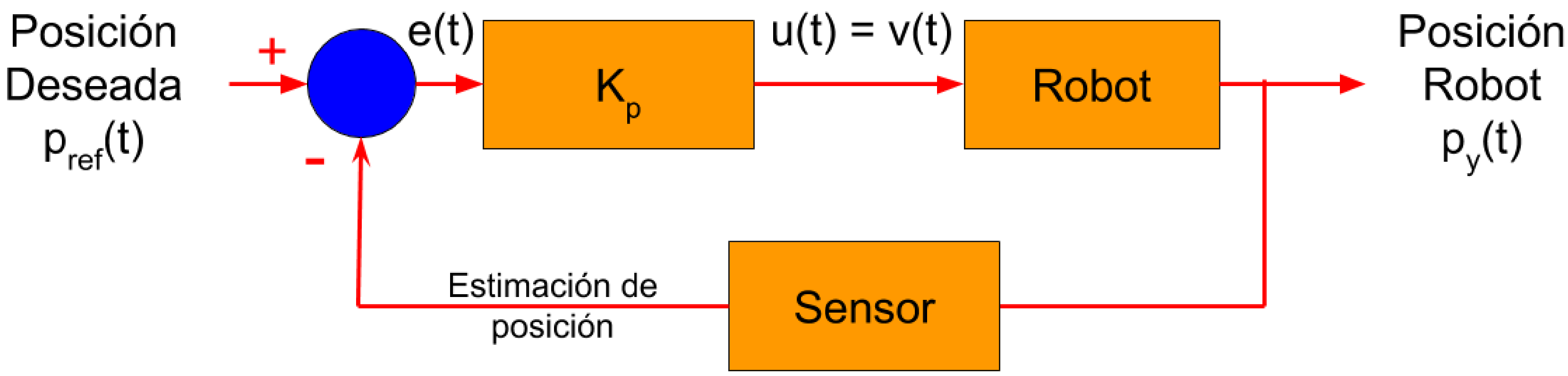
Control en Lazo Cerrado

- Características generales de salida mediante respuesta a escalón μ(t)



P: Control Proporcional

- Opción 1: definir nuestro controlador como un valor constante K_p



$$V = K_p(P_{desired} - P_{actual})$$
$$V = K_p e(t)$$

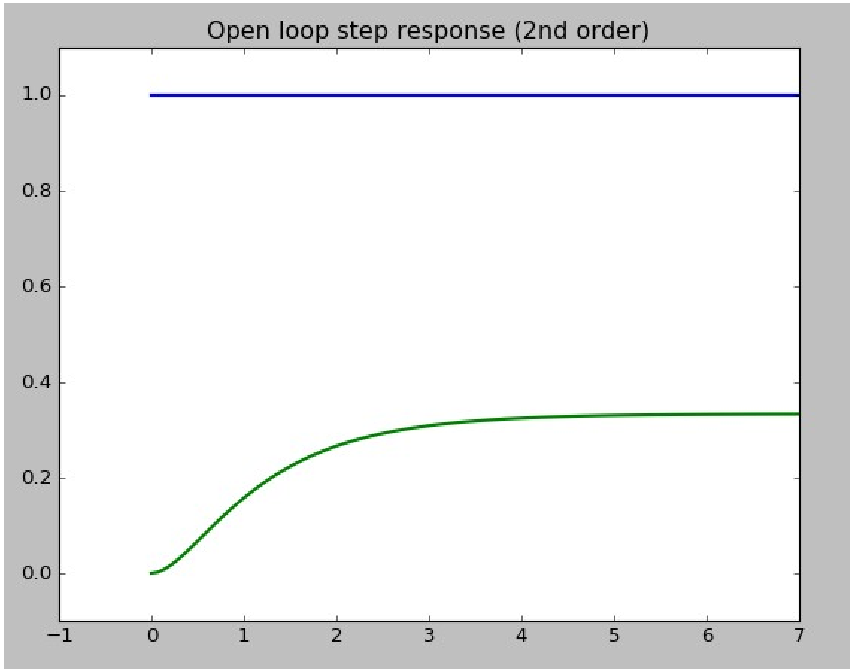
P: Control Proporcional

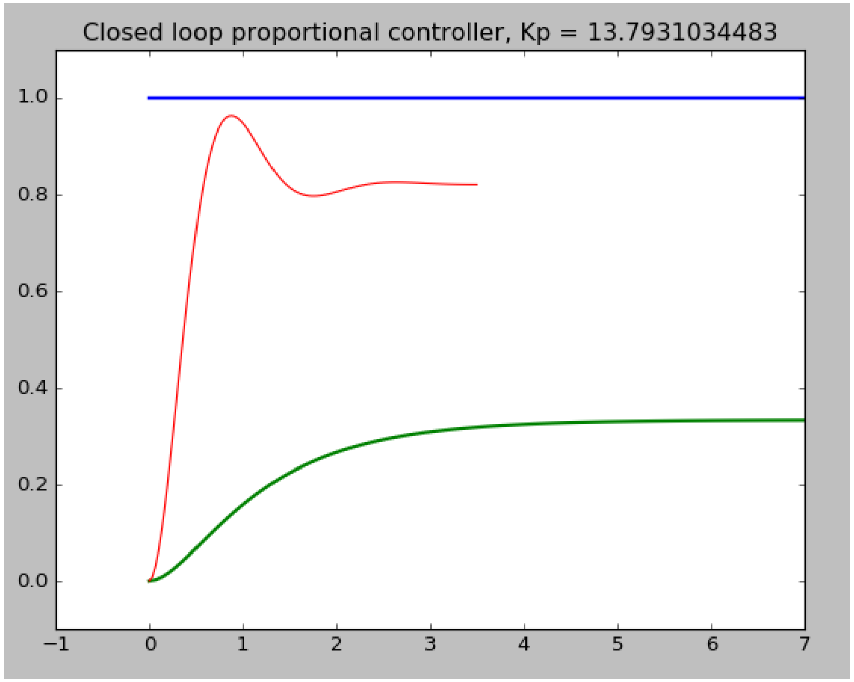
- Características generales de salida:
  - Menor *rise time* (tiempo necesario para alcanzar $P_{desired}$)
  - Error en estado estacionario (*steady-state*) >= 0 (depende de K_p y comportamiento del sistema)
  - Para valores "grandes" de K_p, el sistema puede volverse inestable
  - Presencia de *overshoot* (puede provocar problemas)

$$V = K_p(P_{desired} - P_{actual})$$
$$V = K_p e(t)$$

P: Control Proporcional

- Respuesta a escalón de lazo cerrado bajo control P

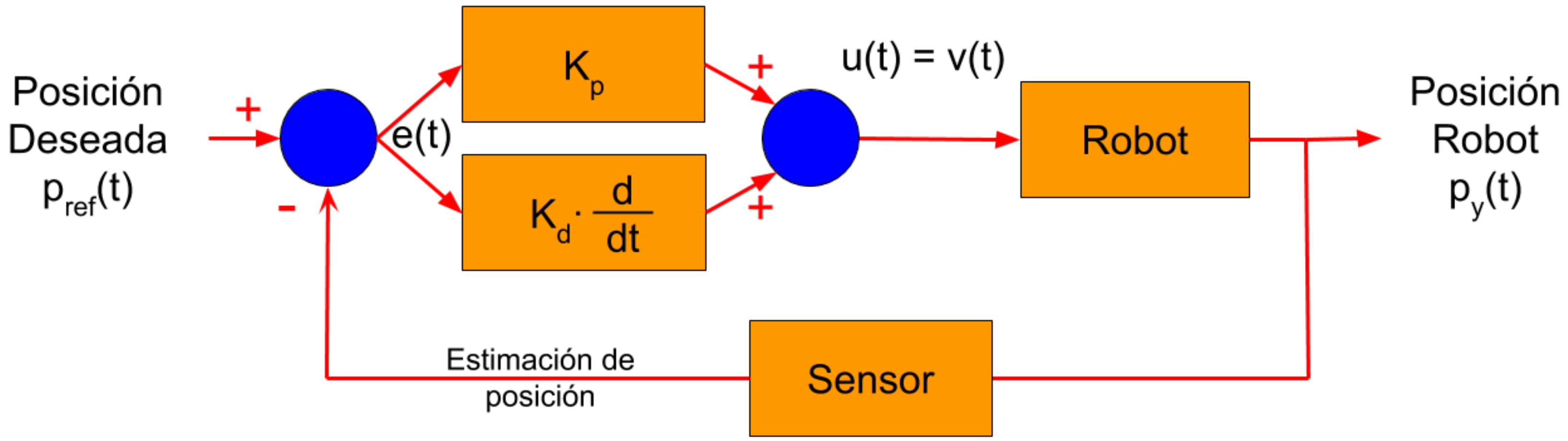




  - Referencia: escalón unitario μ(t)
  - Salida lazo abierto
  - Salida lazo cerrado

PD: Control Proporcional Derivativo

- Opción 2: definir nuestro controlador como:
  - Un valor constante K_p, más ...
  - Un valor constante K_d que pondere los cambios del error



$$V = K_p(P_{desired} - P_{actual}) + Kd(\frac{dP_{desired}}{dt} - \frac{dP_{actual}}{dt})$$

$$V = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

PD: Control Proporcional Derivativo

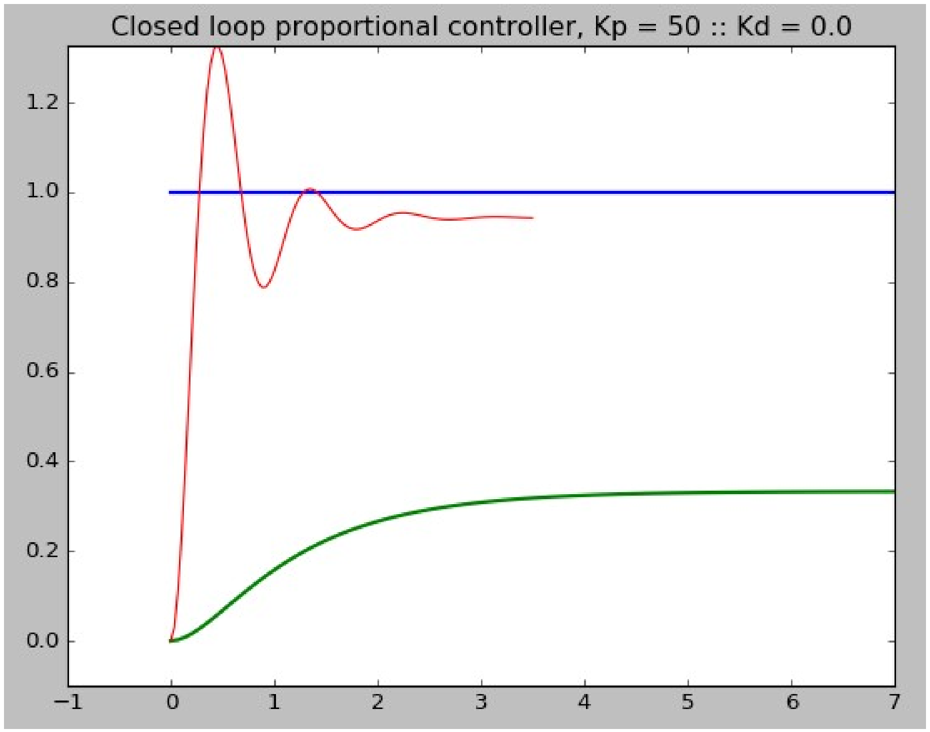
- Característica generales:
  - Agrega estimación del error “futuro”
  - Disminuye el *overshoot*
  - Señales ruidosas son (muy!) problemáticas
  - Establecer el valor ideal de K_d puede ser difícil

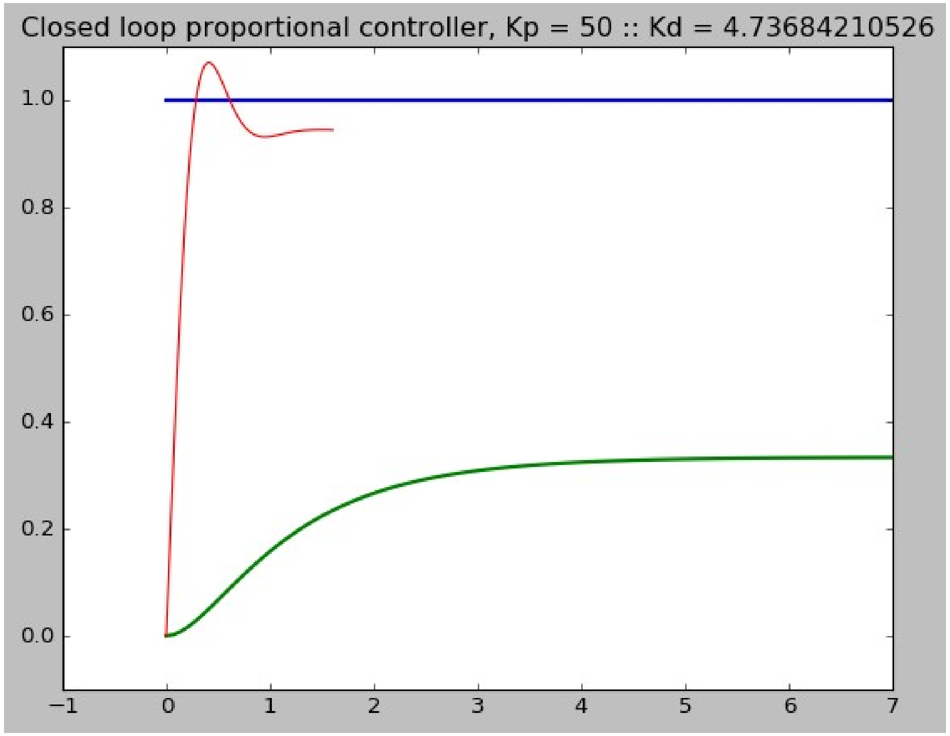
$$V = K_p(P_{desired} - P_{actual}) + Kd(\frac{dP_{desired}}{dt} - \frac{dP_{actual}}{dt})$$

$$V = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

PD: Control Proporcional Derivativo

- Respuesta a escalón de lazo cerrado bajo control PD

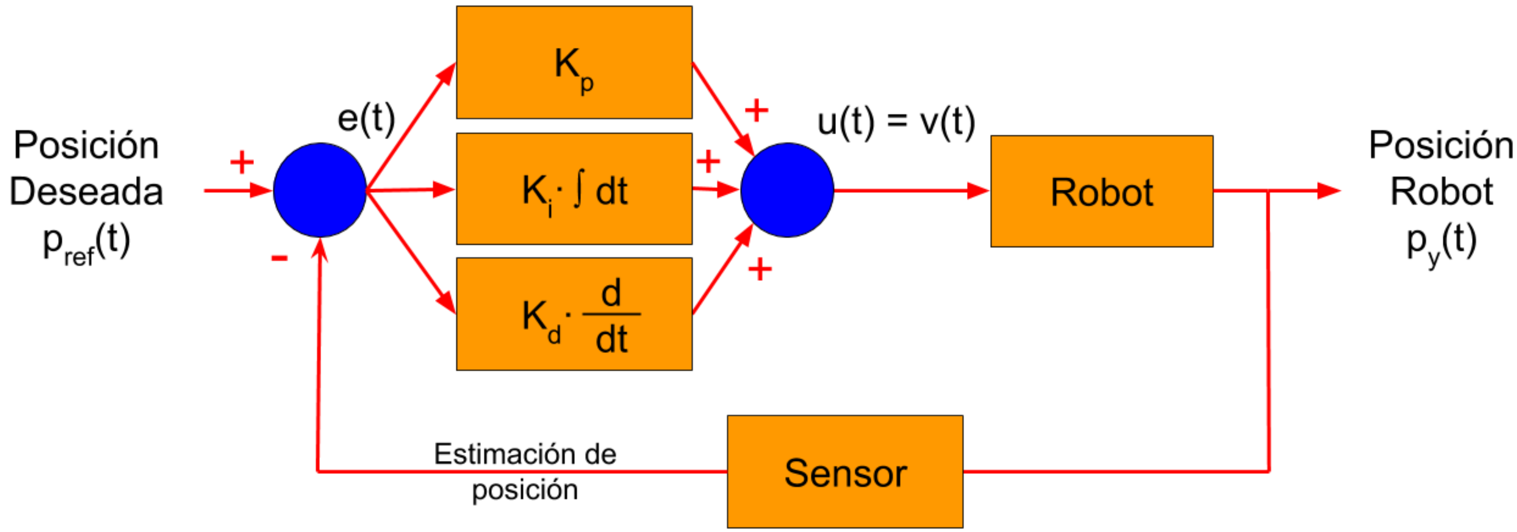




  - Referencia: escalón unitario μ(t)
  - Salida lazo abierto
  - Salida lazo cerrado

PID: Control Proporcional Integrativo Derivativo

- Opción 3: definir nuestro controlador como:
  - Un valor constante K_p, más ...
  - Un valor constante K_d que pondere los cambios del error, más …
  - Un valor constante K_i que pondere el error acumulado



PID: Control Proporcional Integrativo Derivativo

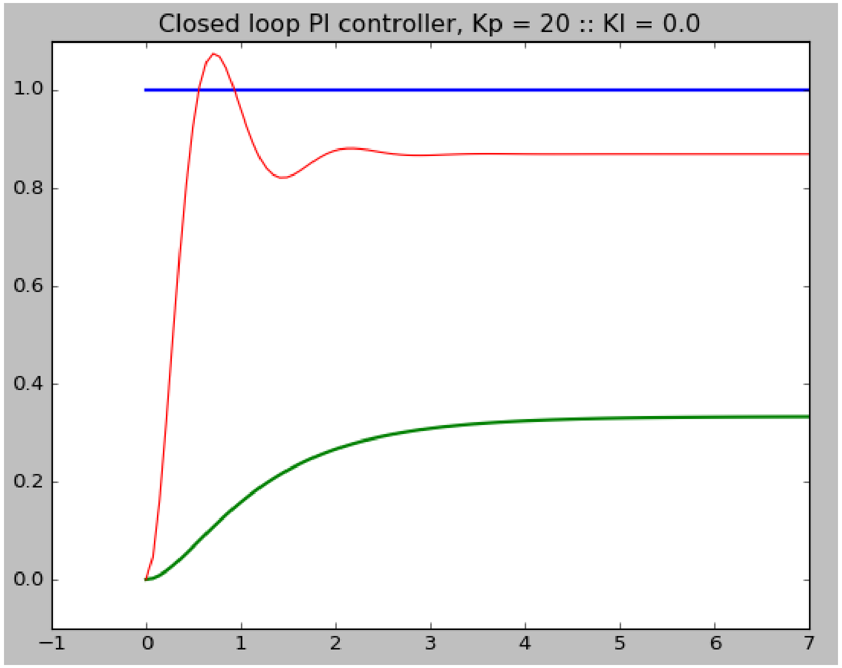
- Características generales:
  - Disminuye error en estado estacionario (*steady-state error*)
  - Es problemático si el error crece *demasiado* (error acumulado debe ser limitado)
  - El sistema puede volverse inestable para valores altos de K_i

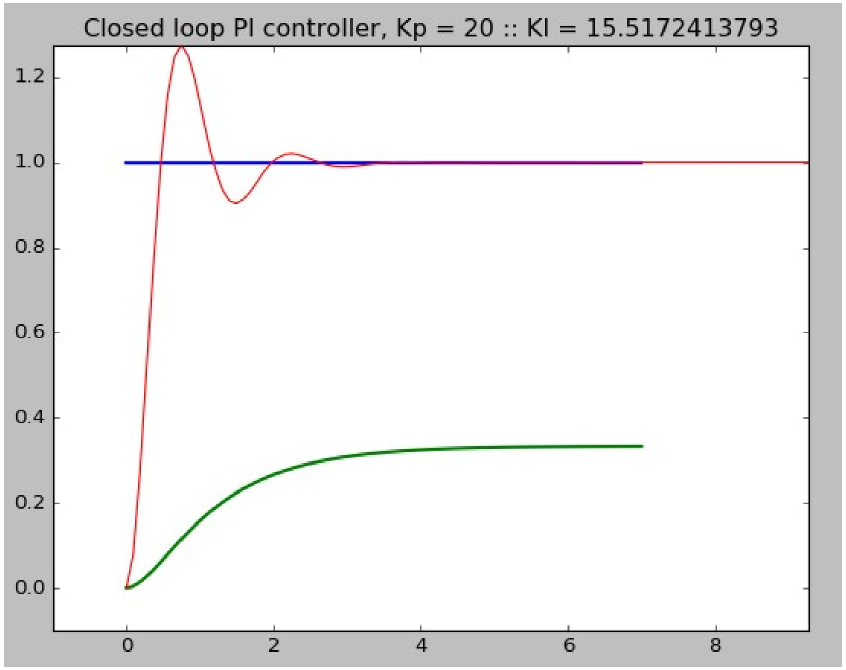
$$V = K_p(P_{desired} - P_{actual}) + Kd\frac{dP_{desired}}{dt} - \frac{dP_{actual}}{dt}) + K_I\left(\int P_{desired} - P_{actual}\right)$$

$$V = K_p e(t) + K_d\frac{de(t)}{dt} + K_I\int e(t)$$

PID: Control Proporcional Integrativo Derivativo

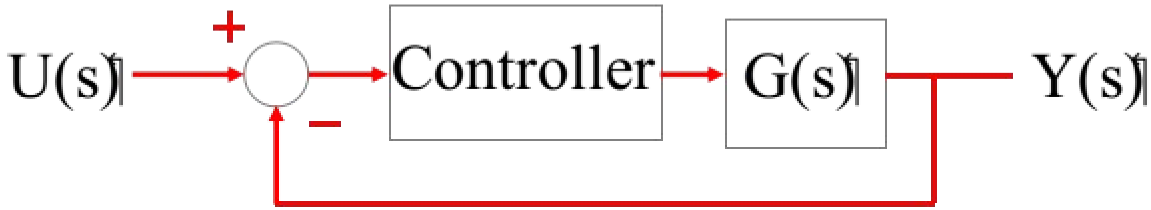
- Respuesta a escalón de lazo cerrado bajo control PID





  - Referencia: escalón unitario μ(t)
  - Salida lazo abierto
  - Salida lazo cerrado

Funciones de Transferencia con PID



- Open Loop: $$\frac{1}{s^2+4s+3}$$
- P: $$\frac{K_P}{s^2+4s+3+K_P}$$
- PD: $$\frac{K_D s+K_P}{s^2+(4+K_D)s+3+K_P}$$
- PI: $$\frac{K_P s+K_I}{s^3+4s^2+(3+K_P)s+K_I}$$
- PID: $$\frac{K_D s^2+K_P s+K_I}{s^3+(4+K_D)s^2+(3+K_P)s+K_I}$$

Controlador PID: En resumen ...

- P: Controlador Proporcional
  - Incrementa el *rise time*
- D: Controlador Derivativo
  - Disminuye el overshoot
- I: Controlador Integral
  - Disminuye error en estado estacionario (*steady-state*)

Controlador PID

- ¿ Como podemos elegir valores para Kp, Kd y Ki ?
  - Prueba y error
  - Con un buen modelo del proceso (posicionamiento de polos)
  - Ajuste por oscilaciones (Ziegler, Nichols)
  - Método de la respuesta a escalón (curva de reacción)

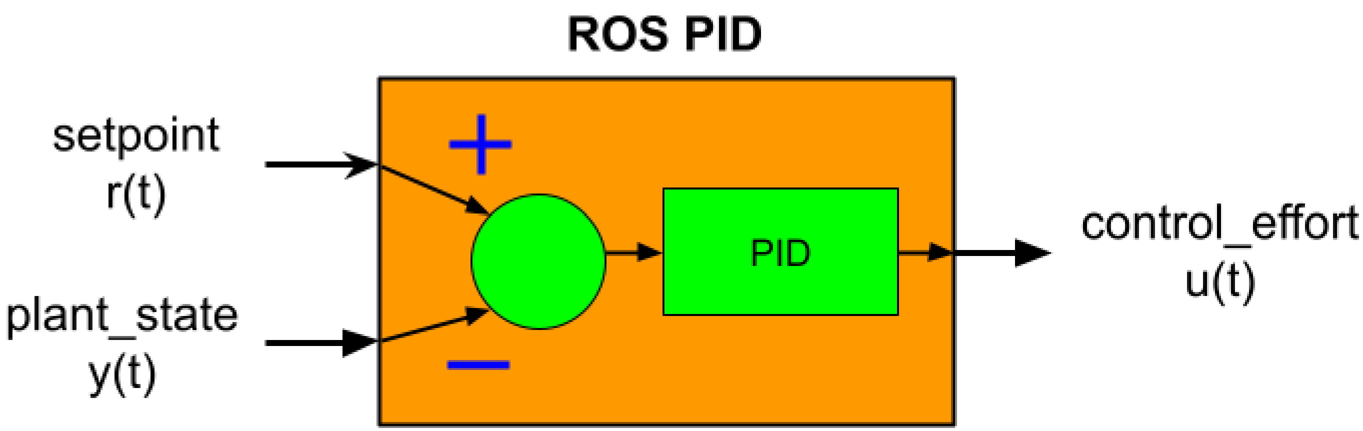
PID en ROS

- ROS cuenta con el paquete PID, para el control proporcional, integral y derivativo
- Instalación:

  $ sudo apt install ros-$ROS_DISTRO-pid

PID en ROS

- Proporciona nodo que implementa controlador PID
- Interacción mediante tópicos
  - *Setpoint*: referencia
  - *Plant State*: salida planta
  - *Control Effort*: actuación



PID en ROS

Tópicos relevantes:

- Referencia (set-point): “setpoint” (Float64)
  - Controlador actúa como Subscriber
- Salida planta: “state” (Float64)
  - Controlador actúa como Subscriber
- Actuación: “control_effort” (Float64)
  - Controlador actúa como Publisher

PID en ROS

- Parámetros de controlador definidos en archivo *launch*

```
<launch>

  <node name="dist_ctrl" pkg="pid" type="controller"
  ns="robot_dist">
    <param name="Kp" value="0.5" />
    <param name="Ki" value="0.05" />
    <param name="Kd" value="0.0" />
    <param name="upper_limit" value="0.2" />
    <param name="lower_limit" value="-0.2" />
  </node>

</launch>
```

Aplicación: *Follow The Carrot*

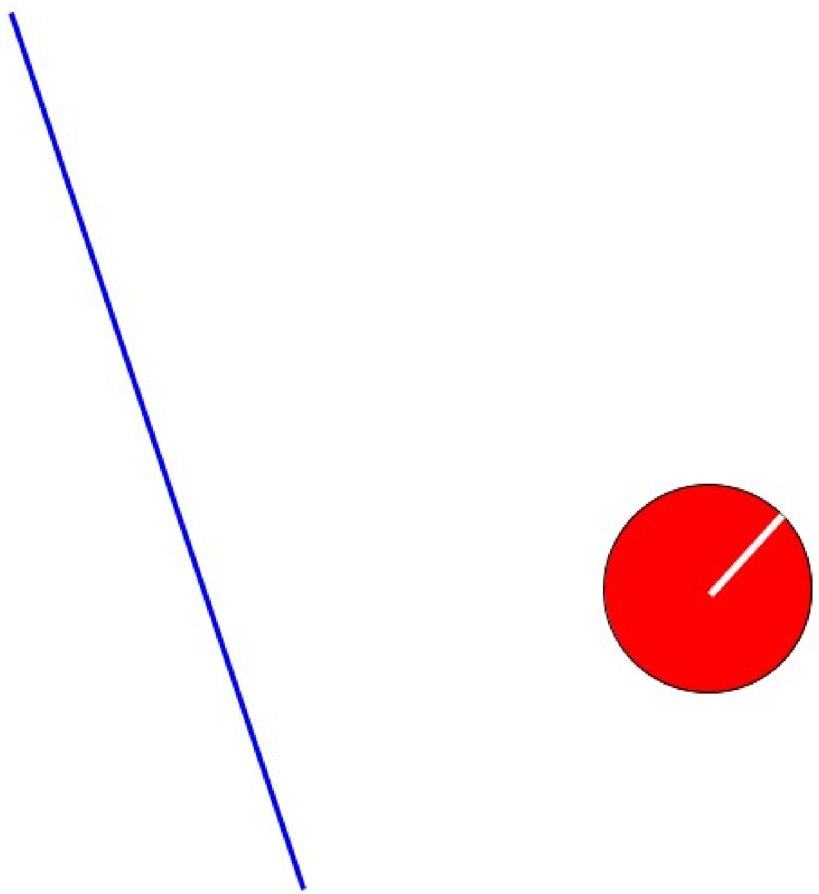
- Para que un robot pueda navegar desde un punto a otro en un ambiente con obstáculos, necesitamos planear una ruta
- Una vez obtenida la ruta, necesitamos darle seguimiento
- ¿ Cómo lo hacemos ?

Aplicación: *Follow The Carrot*

- Para que un robot pueda navegar desde un punto a otro en un ambiente con obstáculos, necesitamos planear una ruta
- Una vez obtenida la ruta, necesitamos darle seguimiento
- ¿ Cómo lo hacemos ?
- Utilizando la metodología: *Follow The Carrot*

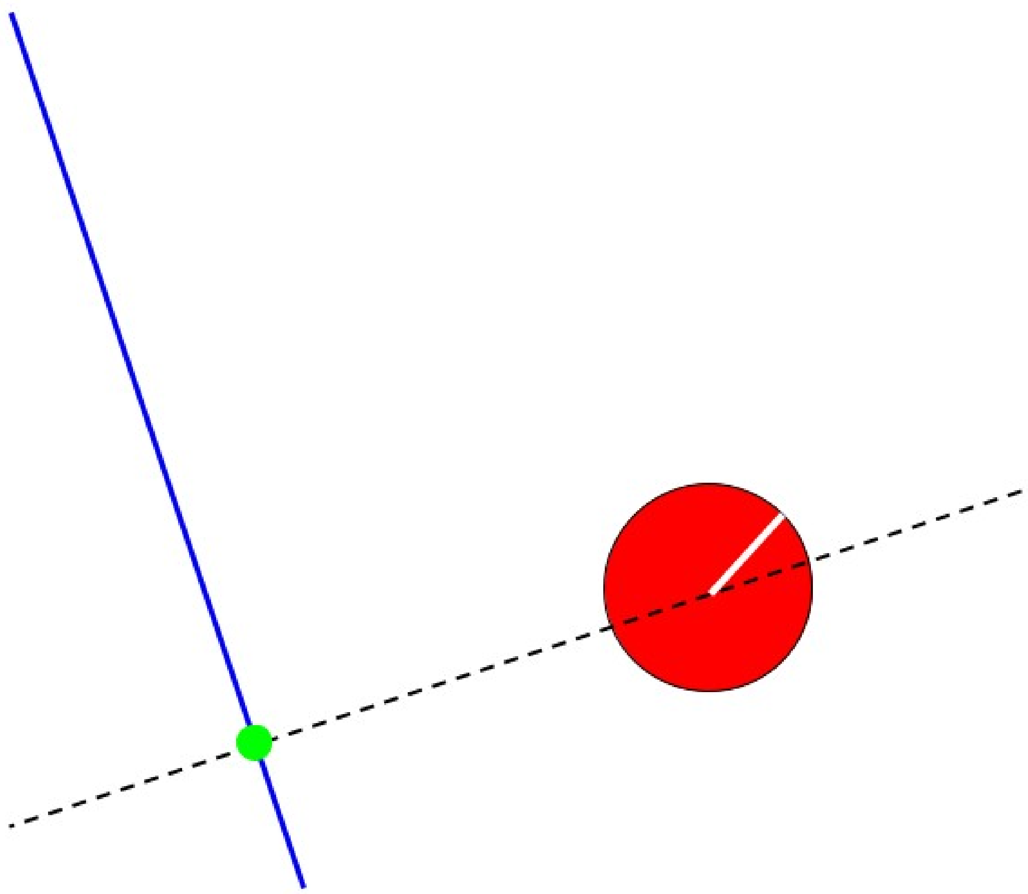
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Se tiene un robot en una posición arbitraria y una trayectoria planeada



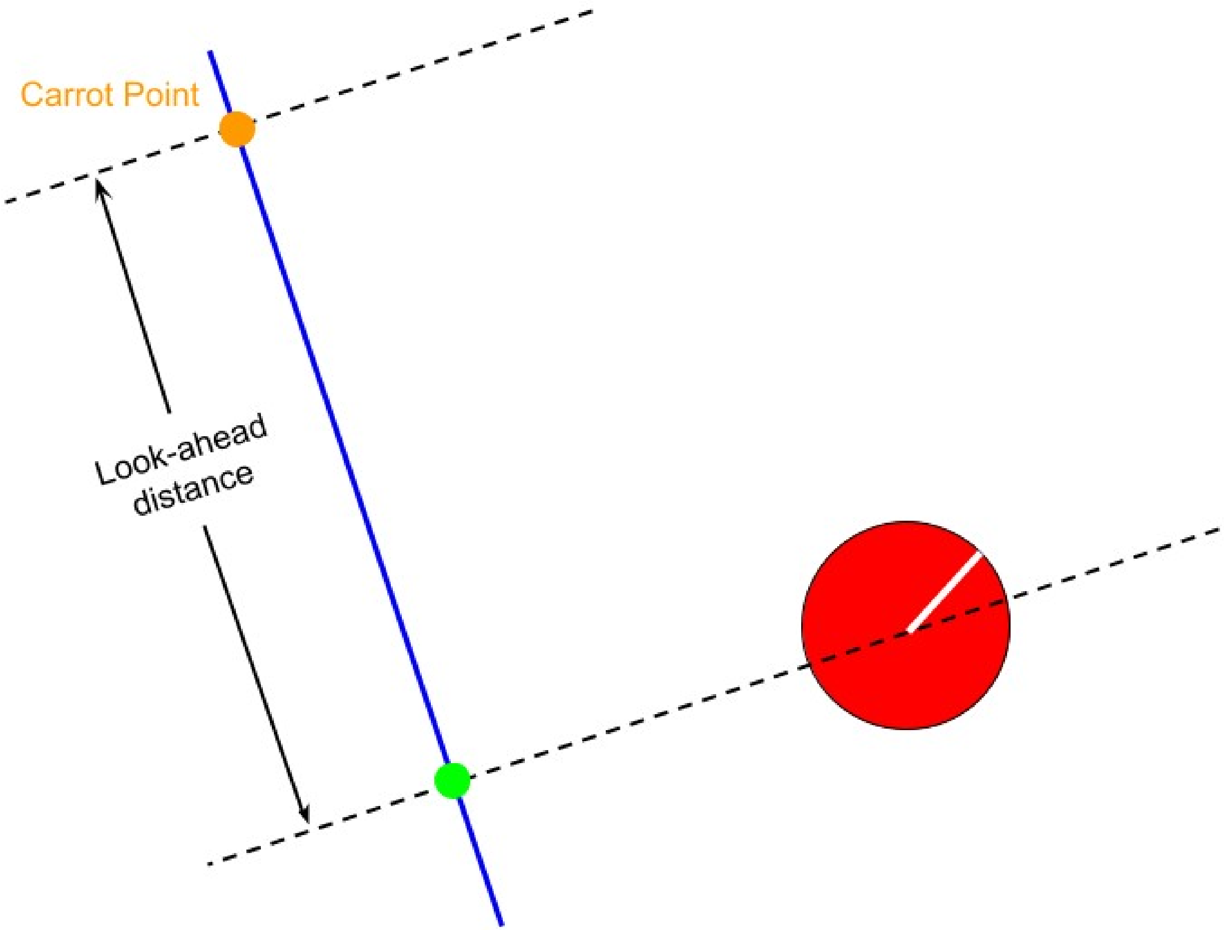
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Paso 1: encontrar el punto más cercano al robot dentro de la trayectoria



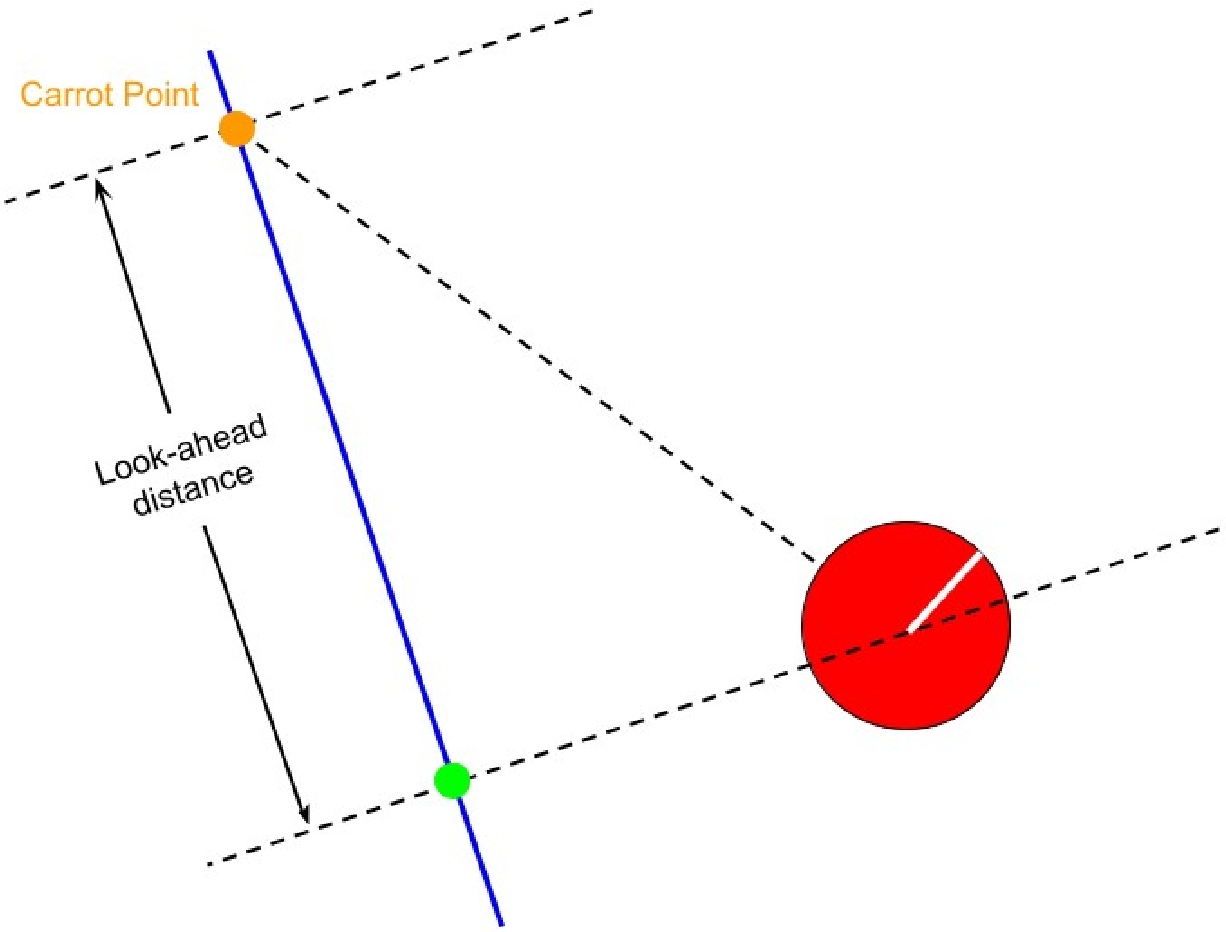
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Paso 2: Definir distancia para ubicar la zanahoria: *look-ahead distance*



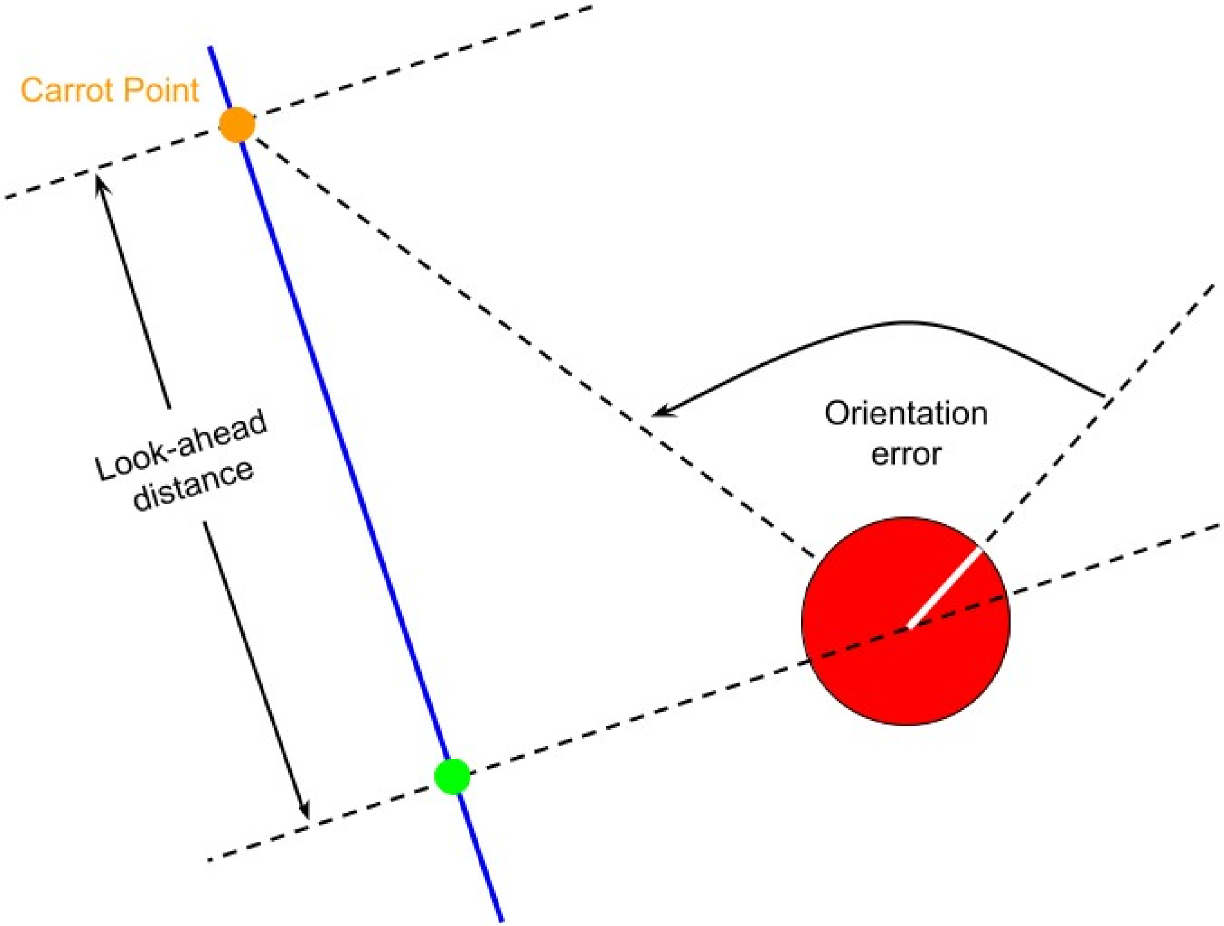
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Paso 3: Encontrar ángulo formado entre centro del robot y zanahoria



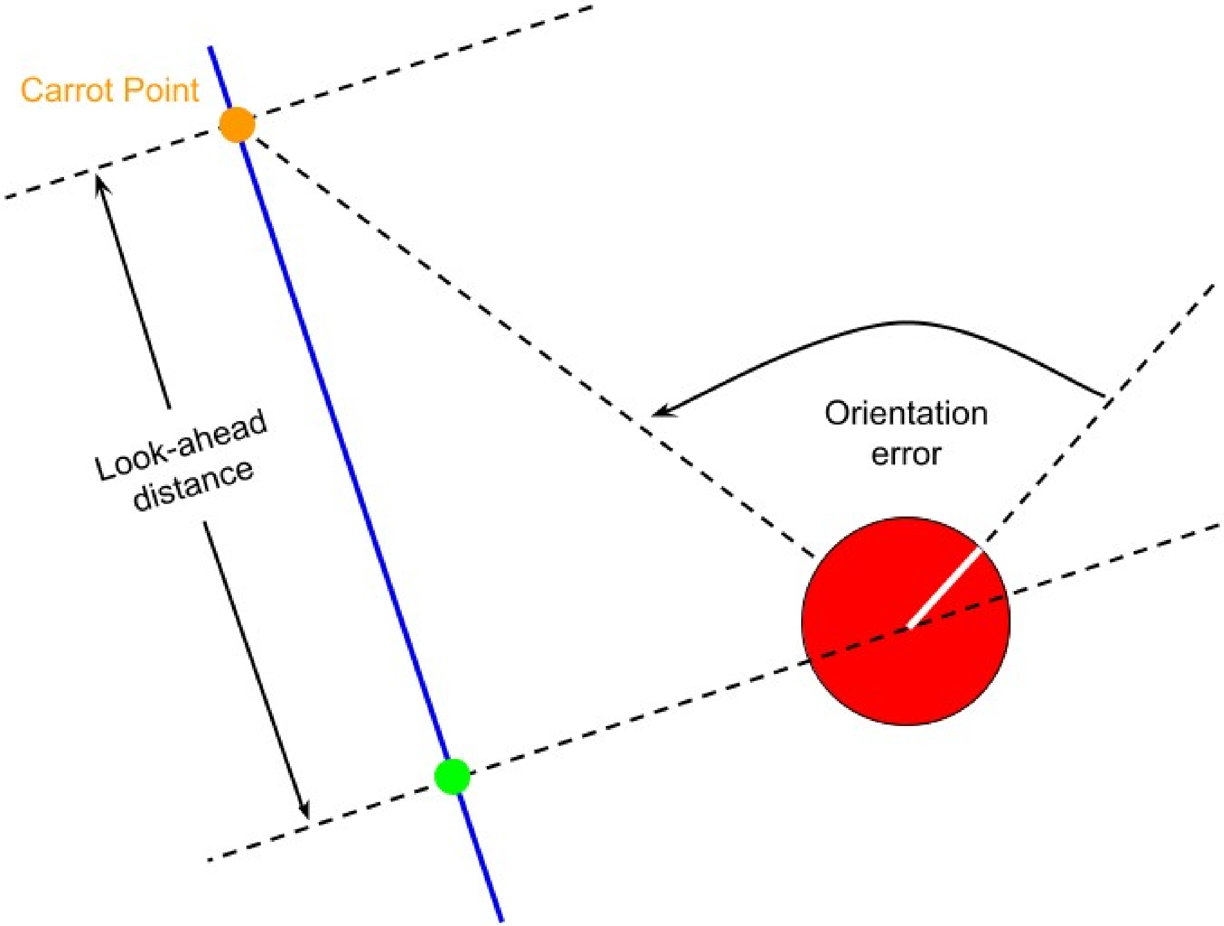
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Paso 4: Calcular error de orientación entre zanahoria y ángulo de robot



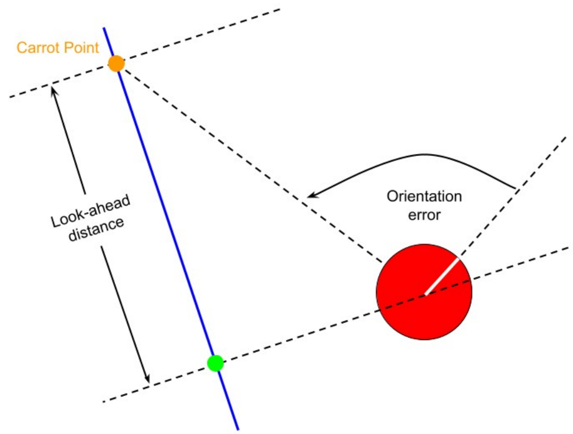
Aplicación: *Follow The Carrot*

- Paso 4: Calcular error de orientación entre zanahoria y ángulo de robot

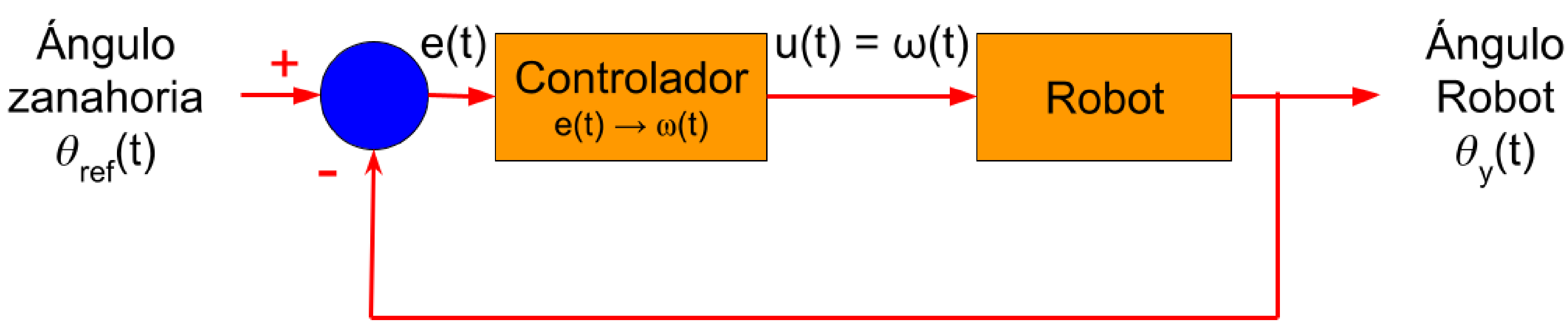


Aplicación: *Follow The Carrot*

- Finalmente, manteniendo una velocidad lineal fija, necesitamos minimizar el error de orientación



- Para esto, utilizaremos un controlador PID



Bibliografía

- **Control System Design**, Goodwin, G., Graebe, S., Salgado M.