

Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

September 2022

Содержание

1	Алгебра и геометрия - 01.09.2022	2
1.1	Комплексные числа	2
1.1.1	Простейшие операции над комплексными числами . . .	2
1.1.2	Тригонометрическая форма комплексного числа	2

1 Алгебра и геометрия - 01.09.2022

1.1 Комплексные числа

Общий вид комплексного числа: $z = a + ib$, i — мнимая единица ($i^2 = -1$); $\bar{z} = a - ib$

1.1.1 Простейшие операции над комплексными числами

Сложение Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

Некоторые частные случаи: $z + \bar{z} = 2a$

Умножение Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда

$$z_1 * z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$$

Некоторые частные случаи: $z * \bar{z} = a^2 + b^2$

Деление Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} * \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 - a_1ib_2 + ib_1a_2 - i^2b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

1.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$, где ρ — модуль (абсолютная величина) комплексного числа, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, а ϕ — кратчайший угол поворота от оси ОХ до радиус-вектора:

$$\phi = \arg z = \arctg \frac{b}{a}, \text{ где } a = \rho \cos \phi, b = \rho \sin \phi$$

Умножение $z_1 * z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$

Возведение в степень $z^n = \rho_n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$ — формула Муавра

Извлечение корня $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных ответов, располагающихся в углах правильного n -угольника:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\phi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\phi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1 \dots n - 1$$