Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

September 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 01.09.2022 **2**
1.1 Комплексные числа . . . 2
1.1.1 Простейшие операции над комплексными числами . . . 2
1.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа . . . 2

2 Алгебра и геометрия - неизвестно **3**
2.1 Матрицы . . . 3
2.1.1 Элементарные операции над матрицами . . . 3
2.1.2 Свойства произведения матриц . . . 4
2.1.3 Определитель матрицы . . . 4
2.1.4 Алгебраическое дополнение . . . 4
2.2 Решение систем линейных уравнений . . . 5
2.2.1 Правило Крамера . . . 5
2.2.2 Матричный способ . . . 6

1 Алгебра и геометрия - 01.09.2022

1.1 Комплексные числа

Общий вид комплексного числа: $z = a + ib$, i — мнимая единица ($i^2 = -1$); $\overline{z} = a - ib$

1.1.1 Простейшие операции над комплексными числами

Сложение Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда
$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$
Некоторые частные случаи: $z + \overline{z} = 2a$

Умножение Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда
$z_1 * z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ib_1a_2 + a_1ib_2 + i^2b + b_2 =$
$(a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)$
Некоторые частные случаи: $z * \overline{z} = a^2 + b^2$

Деление Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+ib_1)}{(a_2+ib_2)} * \frac{(a_2-ib_2)}{(a_2-ib_2)} =$
$\frac{a_1a_2 - a_1ib_2 + ib_1a_2 - i^2b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+i(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + i\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$

1.1.2 Тригонометрическая форма комплексного числа

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, где ρ — модуль (абсолютная величина) комплексного числа, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, а ϕ — кратчайший угол поворота от оси OX до радиус-вектора:
$\phi = \arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, где $a = \rho\cos\phi, b = \rho\sin\phi$

Умножение $z_1 * z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$

Возведение в степень $z^n = \rho_n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ — **формула Муавра**

Извлечение корня $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных ответов, располагающихся в **углах правильного n-угольника**:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{p}(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\phi+2\pi k}{n})$, $k = 0, 1 \dots n-1$

2 Алгебра и геометрия - неизвестно

2.1 Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется матрица, у которой m строк и n столбцов

Примеры матриц: $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Нулевой матрицой называется матрица, состоящая лишь из нулей, **единичной матрицей** называется матрица, по главной диагонали которой расположены единицы: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.1.1 Элементарные операции над матрицами

Транспонирование $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Умножение на скаляр

$$k * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k * a_{11} & k * a_{12} & \dots & k * a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k * a_{n1} & k * a_{n2} & \dots & k * a_{nn} \end{pmatrix}$$

Сложение Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$, тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

Умножение на матрицу Условие **возможности перемножения** двух матриц: **количество столбцов** одной матрицы должно быть равно **количеству строк** другой.
Пример:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A * B =$
$\begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

2.1.2 Свойства произведения матриц

1. $A * B \neq B * A$
2. $(A * B) * C = A * (B * C)$
3. $(A + B) * C = A * C + B * C$
4. $A * (B + C) = A * B + A * C$
5. $A * E = E * A = A$
6. $A * 0 = 0 * A = 0$

2.1.3 Определитель матрицы

$$\Delta = \Delta A = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определитель матрицы 2×2

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$$

Определитель матрицы 3×3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{21} * a_{32} * a_{13} + a_{12} * a_{23} * a_{31}) -$$
$$(a_{13} * a_{22} * a_{31} + a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{32} * a_{23} * a_{11})$$

Определитель квадратной матрицы произвольной размерности

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2.1.4 Алгебраическое дополнение

$A_{ij} = (-1)^{i+j} * M_{ij}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$

Обратная матрица Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если их произведение дает в результате единичную матрицу.
A^{-1} существует, если:

1. A — квадратная матрица
2. $\det A \neq 0$

Пример: найдем матрицу, обратную $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = 0 + (-1) + 0 - 1 + 3 - 0 = 1$

1. $A_{11} = (-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
2. $A_{21} = -1$
3. $A_{31} = -1$
4. $A_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$
5. $A_{22} = -1$
6. $A_{23} = -3$
7. $A_{13} = (-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$
8. $A_{23} = -3$
9. $A_{33} = -3$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

2.2 Решение систем линейных уравнений

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + a_{nn} * x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

$A = X * B$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}$

2.2.1 Правило Крамера

$X_i = \frac{\Delta X_i}{\Delta A}$, $\Delta X_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases} \tag{2}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Delta A = 8 + (-6) + 3 - 4 - 18 + 2 = -15$

$\Delta X_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} = +12 + 6 + (-5) - 30 - 6 + 2 = -15$

$\Delta X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -15$

$\Delta X_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 19 - 19 = 0$

$X_1 = \frac{-15}{-15} = 1,\ X_2 = -1,\ X_3 = 0,\ X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.2.2 Матричный способ

$X = A^{-1} * B$