Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 14.10.2022

1.1 Центр масс

Если точки A и B заданы координатами $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB} : \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Разделить отрезок в соотношении $\lambda \neq -1$ это значит на прямой AB найти такую точку M, что вектор $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Если заданы координаты точек $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты делящей точки $M(x_m; y_m; z_m)$ находят по формулам:
$x_m = \frac{x_1 = \lambda x_2}{1+\lambda}, y_m = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z_m = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

Если M - середина AB, то $\lambda = 1$, а формулы
$x_m = \frac{x_1+x_2}{2}, y_m = \frac{y_1+y_2}{2}, z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$

1.1.1 Пример

Дано: $A_1(1; 3), m_1 = 10; A_2(7; 8), m_2 = 30; A_3(0; 4), m_3 = 5$. Определить S - центр масс системы.
Пусть C_1 делит A_1A_2 в соотношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = 3$, тогда
$x_c = \frac{1+3*7}{4} = \frac{22}{4}, y_c = \frac{27}{4}$
Пусть S делит CA_3 в соотношении $\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2} = \frac{1}{8}$, тогда
$x_s = \frac{11}{2} * \frac{8}{9} = \frac{44}{9}, y_s = \frac{\frac{27}{4} + \frac{11}{8}*4 + \frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{29}{4} * \frac{8}{9} = \frac{58}{9}$.
Ответ: $S(\frac{44}{9}; \frac{58}{9})$

1.1.2 Некоторые нюансы

1) Можно доказать, что центр масс $S(x_s; y_s; z_s)$ материальной системы точек $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), ..., A_n(x_n; y_n; z_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, ..., m_n$ имеет следующие координаты:
$x_s = \frac{x_1*m_1+x_2*m_2+...+x_n*m_n}{m_1+m_2+...+m_n}, y_s = \frac{y_1*m_1+...+y_n*m_n}{m_1+...+m_n}, z_s = \frac{z_1*m_1+...+z_n*m_n}{m_1+...+m_n}$

2) Центры масс треугольника с координатами
$A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$ (то есть, центр масс однородной треугольной пластины) находится в точке пересечения медиан.
Если предположить, что $n = 3, m_1 = m_2 = m_3$, то
$S(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$

1.2 Направляющие косинусы

Пусть α, β, γ - углы, которые образуют $\overrightarrow{a} = \{x, z, z\}$ с осями O_x, O_y, O_z.
Тогда направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{a}$ связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и определяются формулами:
$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x_2+y_2+z_2}}, \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{a}|}$

1.2.1 Пример

Найти длину и направляющие косинусы $\overrightarrow{AM}$, если т. M делит AB в соотношении $\lambda = -2$, где $A(5;6;-1), B(0;-3;2)$.
Найдем координаты точки M: $x_m = -5, y_m = -12, z_m = 5$. Таким образом, $M(-5;-12;5)$.
$\overrightarrow{AM} = \{-10;-18;-6\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{100+324+36} = \sqrt{460} = 2\sqrt{115}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{-10}{2\sqrt{115}} \approx -0.466, \cos\beta = \frac{-18}{2\sqrt{115}} \approx -0.839, \cos\gamma = \frac{-6}{2\sqrt{115}} \approx 0.28.$
Выполним проверку: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{100}{460} + \frac{324}{460} + \frac{36}{460} = 1$

1.3 Решение практической работы, вариант 21

1.3.1 Задание 5, нахождение центра тяжести системы

Дано: $A_1(5;-4), A_2(0;2), A_3(6;6), m_1 = 25, m_2 = 45, m_3 = 15$.
Согласно формуле, $S_x = \frac{5*25+0*45+6*15}{25+45+15} = \frac{215}{85} = \frac{43}{17}$,
$S_y = \frac{-4*25+2*45+6*15}{25+45+15} = \frac{80}{85} = \frac{16}{17}$.
Ответ: $S(\frac{43}{17}; \frac{16}{17})$

1.3.2 Задание 6, нахождение длины и направляющих косинусов

Дано: $A(-2;-5), B(4;1), \lambda = \frac{2}{7}$.
Найдем координаты точки M:
$M_x = \frac{-2+4}{1+\frac{2}{7}} = \frac{2}{\frac{9}{7}} = \frac{14}{9}, M_y = \frac{-5+1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{-4}{\frac{9}{7}} = \frac{-4*7}{9} = -\frac{28}{9}$, таким образом $M(\frac{14}{9}; -\frac{28}{9})$
$\overrightarrow{AM} = \{\frac{14}{9}+2; -\frac{28}{9}+5\} = \{\frac{32}{9}; \frac{17}{9}\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{1024}{81} + \frac{289}{81}} = \sqrt{\frac{1313}{81}}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{\frac{32}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.883, \cos\beta = \frac{\frac{17}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.469.$
Ответ: сами выпишите из того, что написано выше.