Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 04.10.2022

1.0.1 Ранг матрицы

Пусть дана матрица A размера $m * n$.

Возьмем любые k ($k \leq min(n; m)$) строк и k столбцов матрицы A.

На их пересечении стоят элементы, образующие определитель k-того порядка, который и называется минором k-го порядка.

Под минором 1-го порядка матрицы A понимается любой элемент.

Рангом r матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличный от нуля.

Следовательно, если у нас матрица из четырех строк и трех столбцов, максимальный минор может быть три на три. Но если все они равны нулю, то мы не можем сказать, что ранг матрицы равен нулю.

Из определения следует:

1. r - целое число ($0 \leq r \leq min(m; n)$)

2. Все миноры $(r + 1)$ порядка либо нулевые, либо не существуют.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, r(A) = 3$

Миноры 1-го порядка: любой элемент матрицы.

Миноры второго порядка: любой определитель этой матрицы 2x2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Миноры третьего порядка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \det A = 64 \neq 0$

Минора четвертого порядка у данной матрицы не существует.

1.1 Действия над матрицами

1. Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля.

2. Сложение: прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.

3. Перемещение (замена местами) двух строк или двух столбцов.

4. Вычеркивание нулевой строки или столбца.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

1.2 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + ... + a_{mn} * x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Система называется совместной, если она имеет решение. (*) Операции только над строками.

$$r(A) = r(A|B) \equiv r$$

Если $r = n$, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящих от $(n - r)$ свободных неизвестных.

1.3 Метод Гаусса

Если столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ свободных членов - нулевой, то система называется однородной.

Однородная система всегда имеет решение, и она всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Если в однородной системе число неизвестных n равно числу уравнений m, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases}. \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, r(A|B) = 2 = r(A)$$

$r < n \rightarrow$ система имеет бесконечное кол-во решений, зависящих от (4 - 2) = 2 свободных неизвестных.

Пусть $\begin{vmatrix}1 & 5 \\ 0 & -11\end{vmatrix}$ - базисный минор, тогда x_1 и x_2 - базисные члены, а x_3 и x_4 - свободные.

$\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1\end{pmatrix}$

Преобразуем данную матрицу, делая по главной диагонали базисного минора единицы, а по побочной нули.

$\begin{pmatrix}1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -\frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} & \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}$

Выпишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = \frac{17}{11} \\ 0x_1 + 1_x2 + \frac{9}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 = \frac{1}{11}\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 + \frac{1}{11}\end{cases} \tag{4}$$

Пусть $x_3 = c_1$, а $x_4 = c_2$ $(c_1, c_2 \in R)$, тогда наша система приобретает вид:

$$\begin{cases}x_1 = \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 + \frac{17}{11} \\ x_3 = -\frac{9}{11}c_1 + \frac{4}{11}c_2 + \frac{1}{11} \\ x_3 = c_1 \\ c_4 = c_2\end{cases} \tag{5}$$

Исследуем на совместность систему

$$\begin{cases}2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9\end{cases} \tag{6}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix}2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 4 & \\ 0 & -2 & -7 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, r(A|B$$

$3, r(A) = 2$

Следовательно, система несовместна и решений не имеет.

2 Алгебра и геометрия - 07.10.2022

2.1 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Матрицы могут представляться на плоскости - для этого нужны собственные значения и собственные векторы.

Пусть дана квадратная матрица A n-ого порядка. Ненулевой вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором матрицы A, если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему:

$$A * X = \lambda X, \lambda \in R$$

Где λ - собственное значение соответствующего ему вектора матрицы A.
Для нахождения λ составляют характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если λ_0 - сосбтвенное значение матрицы A, то соответствующие собственные векторы находим из системы однородных линейных уравнений.

(*) Однородными называются системы, где матрица-столбец свободных членов B полностью состоит из нулей

$$(A - \lambda_0 E) * X = 0$$

2.1.1 Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 + 3 - \lambda - 8 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) + 3\lambda - 9 = 24 - 12\lambda - 14\lambda + 7\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$

$\lambda_1 = 1$, вынесем общий множитель:

$\frac{-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15}{\lambda - 1} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15)$

Решаем через дискриминант или через теорему Виета: что угодно.

Итого имеем:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$

Найдем теперь собственные векторы.

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$:

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

В матричном виде:
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем обратно в систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда видим, что $x_1 = x_3, x_2 = x_3$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, видим что $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Последовательно найдем теперь второй и третий собственный векторы: X_2 и X_3.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-3)x_3 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Преобразуем в матричный вид: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Из этого видно, что $x_1 = x_2, x_1 = -x_3$

$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем третий собственный вектор.

Пусть $\lambda = \lambda_3 = 5$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-5)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-5)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-5)x_3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

Чему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Я зашел в какую-то фигню, где-то ошибся, но, в общем, ответ должен получиться следующий: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 Векторная алгебра. Операции над векторами

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок AB, заданный своим началом A и концом B.

Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Два вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (параллельны друг другу).

Три вектора называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{a}$ это коэффициенты разложения вектора по базису, то есть по трем некомпланарным векторам, обозначаемым как $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_1} = \{1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 1, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 0, 1\}, \overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{e_1} + y * \overrightarrow{e_2} + z * \overrightarrow{e_3}$

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ взаимно перпендикулярны и единичные векторы: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, то такой базис называется ортонормированным.

2.2.1 Пример

Разложить вектор $\overrightarrow{a} = \{4; 2; 0\}$, если возможно, по векторам $\overrightarrow{p} = \{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{q} = \{2; 2; -1\}$, $\overrightarrow{r} = \{3; 7; -7\}$

Для того, чтобы это было возможно, должно соблюдаться следующее выражение: $(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} \neq 0$ - достаточное условие некомпланарности.

$(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det X = -14 + 28 + 3 - 12 + 7 - 14 = 2 \neq 0$, следовательно, мы можем разложить данный вектор по трем некомпланарным векторам.

$\overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r}$

$\overrightarrow{p} = 1 * \overrightarrow{i} - 1 * \overrightarrow{j} + 2 * \overrightarrow{k}, \overrightarrow{q} = 2 * \overrightarrow{i} + 2 * \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{r} = 3 * \overrightarrow{i} + 7 * \overrightarrow{j} - 7 * \overrightarrow{k}$

$x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r} = x * \overrightarrow{i} - x * \overrightarrow{j} + 2x \overrightarrow{k} + 2y \overrightarrow{i} + 2y \overrightarrow{i} + 2y \overrightarrow{j} - y \overrightarrow{k} + 3z \overrightarrow{i} + 7z \overrightarrow{j} - 7z \overrightarrow{k}$

Далее для разложения по базису нам необходимо вынести $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$
$... = (x + 2y + 3z) + \overrightarrow{j}(-x + 2y + 7z) + \overrightarrow{k}(2x - y - 7z)$
$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + 7z = 2 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Решим данную систему уравнений каким угодно способом, сначала составив расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2 \\ x_3 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x_2 \\ x_1 = -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Тогда $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$