Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 01.11.2022

1.1 Кривые второго порядка

1.1.1 Эллипс

Эллипсом называется множество точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая F_1F_2: $MF_1 + MF_2 = 2a > F_1F_2$

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - большая полуось, b - малая полуось, $a^2 - b^2 = c^2$

Эксцентриситет: $\epsilon = \frac{c}{a}$ $(\epsilon < 1)$
Левый фокус: $F_1(-c;0)$, правый фокус: $F_2(0;c)$, центр эллипса: $O(0;0)$
Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\epsilon}$

Если $a < b$, то $b^2 - a^2 = c^2$, $\epsilon = \frac{c}{b}$, $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, тогда уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{\epsilon}$
Если $a = b = r$, то $c = 0 \implies F_1(-c;0) = F_2(c;0) = O(0;0)$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\epsilon = 0$

1.1.2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, есть величина постоянная, меньшая F_1F_2: $|MF_1 - MF_2| = 2a < F_1F_2$

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - действительная полуось, b - мнимая полуось, $a^2 + b^2 = c^2$

Эксцентриситет: $\epsilon = \frac{c}{a} > 1$
Левый фокус: $F_1(-c;0)$, правый фокус: $F_2(c;0)$, центр: $0(0;0)$
$x = \pm\frac{a}{\epsilon}$ - уравнения директрис, $y = \pm\frac{b}{a}x$ - уравнения асимптот

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола, сопряженная канонически
$y = \pm\frac{b}{a}x$, $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, $\epsilon = \frac{c}{b}$

1.1.3 Парабола

Параболой называется множество точек M плоскости, равноудаленных от данной точки F (фокус) и от данной прямой l (директриса)
$MF = r(M,l)$

Каноническое уравнение (OX): $y^2 = 2px$, $F(\frac{p}{2};0)$, $x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрис
Каноническое уравнение (OY): $x^2 = 2py$, $F(0;\frac{p}{2}$, $y = -\frac{p}{2}$

1.2 Параллельный перенос координат

Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$ в системе Oxy и $(x'; y')$ в системе $O'x'y'$, причем новое начало O' в старой системе имеет координаты $(a; b)$, тогда

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \tag{1}$$

1.3 Примеры решения задач

1.3.1 Пример 1

Найти экцентриситет, что-то там еще и много чего еще, если
$4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x - 89 = 0$

$4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x) = 4(x^2 - 6x + 9 - 9) = 4(x^2 - 6x + 9) - 36 = 4(x-3)^2 - 36$
$-25y^2 + 50y = -25(y^2 - 2y) = -25(y^2 - 2y + 1 - 1) =$
$-25(y^2 - 2y + 1) + 25 = -25(y-1)^2 + 25$

$4(x-3)^2 - 36 - 25(y-1)^2 + 25 - 89 = 0 \Longleftrightarrow 4(x-3)^2 - 25(y-1)^2 - 100 = 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ - уравнение гиперболы, $a = 5$, $b = 2$

Введем новые координаты: $x - 3 = x'$, $y - 1 = y'$, $O'(3; 1)$
$\frac{(x')^2}{5^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1$, $a = 5$ - действительная полуось, $b = 2$ - мнимая полуось

Уравнения директрис: $x' = \pm\frac{a}{c} = \pm\frac{5*5}{\sqrt{29}} = \pm\frac{25}{\sqrt{29}}$, **уравнения асимтот:** $y' = \pm\frac{b}{a}x' = \pm\frac{2}{5}x'$, **экцентриситет:** $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5}$
$F_1(-\sqrt{29}; 0)$, $F(\sqrt{29}; 0)$