Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 07.10.2022

1.1 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Матрицы могут представляться на плоскости - для этого нужны собственные значения и собственные векторы.

Пусть дана квадратная матрица A n-ого порядка. Ненулевой вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором матрицы A, если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему:

$$A * X = \lambda X, \lambda \in R$$

Где λ - собственное значение соответствующего ему вектора матрицы A.
Для нахождения λ составляют характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если λ_0 - сосбтвенное значение матрицы A, то соответствующие собственные векторы находим из системы однородных линейных уравнений.

(*) Однородными называются системы, где матрица-столбец свободных членов B полностью состоит из нулей

$$(A - \lambda_0 E) * X = 0$$

1.1.1 Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 + 3 - \lambda - 8 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) + 3\lambda - 9 = 24 - 12\lambda - 14\lambda + 7\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$

$\lambda_1 = 1$, вынесем общий множитель:
$\frac{-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15}{\lambda-1} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15)$
Решаем через дискриминант или через теорему Виета: что угодно.
Итого имеем:
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$
Найдем теперь собственные векторы.
Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$:

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

В матричном виде:
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем обратно в систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда видим, что $x_1 = x_3, x_2 = x_3$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, видим что $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Последовательно найдем теперь второй и третий собственный векторы: X_2 и X_3.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-3)x_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Преобразуем в матричный вид: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Из этого видно, что $x_1 = x_2, x_1 = -x_3$

$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем третий собственный вектор.

Пусть $\lambda = \lambda_3 = 5$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-5)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-5)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-5)x_3 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

Чему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Я зашел в какую-то фигню, где-то ошибся, но, в общем, ответ должен получиться следующий: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.2 Векторная алгебра. Операции над векторами

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок AB, заданный своим началом A и концом B.

Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Два вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (параллельны друг другу).

Три вектора называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{a}$ это коэффициенты разложения вектора по базису, то есть по трем некомпланарным векторам, обозначаемым как $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_1} = \{1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 1, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 0, 1\}, \overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{e_1} + y * \overrightarrow{e_2} + z * \overrightarrow{e_3}$

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ взаимно перпендикулярны и единичные векторы: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, то такой базис называется ортонормированным.

1.2.1 Пример

Разложить вектор $\overrightarrow{a} = \{4; 2; 0\}$, если возможно, по векторам $\overrightarrow{p} = \{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{q} = \{2; 2; -1\}$, $\overrightarrow{r} = \{3; 7; -7\}$

Для того, чтобы это было возможно, должно соблюдаться следующее выражение: $(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} \neq 0$ - достаточное условие некомпланарности.

$(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det X = -14 + 28 + 3 - 12 + 7 - 14 = 2 \neq 0$, следовательно, мы можем разложить данный вектор по трем некомпланарным векторам.

$\overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r}$

$\overrightarrow{p} = 1 * \overrightarrow{i} - 1 * \overrightarrow{j} + 2 * \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{q} = 2 * \overrightarrow{i} + 2 * \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{r} = 3 * \overrightarrow{i} + 7 * \overrightarrow{j} - 7 * \overrightarrow{k}$

$x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r} = x * \overrightarrow{i} - x * \overrightarrow{j} + 2x\overrightarrow{k} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{k} + 3z\overrightarrow{i} + 7z\overrightarrow{j} - 7z\overrightarrow{k}$

Далее для разложения по базису нам необходимо вынести $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$
$... = (x + 2y + 3z) + \overrightarrow{j}(-x + 2y + 7z) + \overrightarrow{k}(2x - y - 7z)$
$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + 7z = 2 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Решим данную систему уравнений каким угодно способом, сначала составив расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2 \\ x_3 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x_2 \\ x_1 = -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Тогда $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$