

# Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Алгебра и геометрия - 04.10.2022</b>	<b>3</b>
1.0.1	Ранг матрицы . . . . .	3
1.1	Действия над матрицами . . . . .	3
1.2	Теорема Кронекера-Капелли . . . . .	4
1.3	Метод Гаусса . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Алгебра и геометрия - 07.10.2022</b>	<b>6</b>
2.1	Собственные значения и собственные векторы матрицы . . . . .	6
2.1.1	Примеры . . . . .	6
2.2	Векторная алгебра. Операции над векторами . . . . .	8
2.2.1	Пример . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Алгебра и геометрия - 14.10.2022</b>	<b>10</b>
3.1	Центр масс . . . . .	10
3.1.1	Пример . . . . .	10
3.1.2	Некоторые нюансы . . . . .	10
3.2	Направляющие косинусы . . . . .	10
3.2.1	Пример . . . . .	11
3.3	Решение практической работы, вариант 21 . . . . .	11
3.3.1	Задание 5, нахождение центра тяжести системы . . . . .	11
3.3.2	Задание 6, нахождение длины и направляющих косинусов . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Алгебра и геометрия - 15.10.2022</b>	<b>12</b>
4.1	Ранг матрицы . . . . .	12
4.1.1	Теорема об окаймляющих минорах . . . . .	12
4.1.2	Другой способ подсчета ранга . . . . .	12
4.2	Теорема Кронекера - Капелли . . . . .	12
4.2.1	Фундаментальная система решений . . . . .	13
4.2.2	Примеры . . . . .	13

<b>5</b>	<b>Алгебра и геометрия - 21.10.2022</b>	<b>16</b>
5.1	Скалярное произведение . . . . .	16
5.1.1	Примеры . . . . .	16
5.2	Скалярная проекция . . . . .	16
5.2.1	Примеры . . . . .	16
5.3	Векторное произведение . . . . .	17
5.3.1	Основные задачи на векторное произведение . . . . .	17
5.3.2	Свойства векторного произведения . . . . .	17
5.3.3	Примеры . . . . .	17
5.4	Смешанное произведение . . . . .	18
5.4.1	Примеры . . . . .	18

# 1 Алгебра и геометрия - 04.10.2022

## 1.0.1 Ранг матрицы

Пусть дана матрица  $A$  размера  $m \times n$ .

Возьмем любые  $k$  ( $k \leq \min(n; m)$ ) строк и  $k$  столбцов матрицы  $A$ .

На их пересечении стоят элементы, образующие определитель  $k$ -того порядка, который и называется минором  $k$ -го порядка.

Под минором 1-го порядка матрицы  $A$  понимается любой элемент.

Рангом  $r$  матрицы  $A$  называется наивысший порядок минора матрицы  $A$ , отличный от нуля.

Следовательно, если у нас матрица из четырех строк и трех столбцов, максимальный минор может быть три на три. Но если все они равны нулю, то мы не можем сказать, что ранг матрицы равен нулю.

Из определения следует:

1.  $r$  - целое число ( $0 \leq r \leq \min(m; n)$ )
2. Все миноры  $(r + 1)$  порядка либо нулевые, либо не существуют.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, r(A) = 3$$

Миноры 1-го порядка: любой элемент матрицы.

Миноры второго порядка: любой определитель этой матрицы  $2 \times 2$ :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Миноры третьего порядка: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \det A = 64 \neq 0$$

Минора четвертого порядка у данной матрицы не существует.

## 1.1 Действия над матрицами

1. Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля.
2. Сложение: прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.
3. Перемещение (замена местами) двух строк или двух столбцов.
4. Вычеркивание нулевой строки или столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

## 1.2 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \dots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \dots + a_{mn} * x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, X = (?), (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Система называется совместной, если она имеет решение. (\*) Операции только над строками.

$$r(A) = r(A|B) \equiv r$$

Если  $r = n$ , то система имеет единственное решение. Если  $r < n$ , то система имеет бесконечное множество решений, зависящих от  $(n - r)$  свободных неизвестных.

## 1.3 Метод Гаусса

Если столбец  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$  свободных членов - нулевой, то система называется однородной.

Однородная система всегда имеет решение, и она всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение:  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ .

Если в однородной системе число неизвестных  $n$  равно числу уравнений  $m$ , то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq$$
$$0, r(A|B) = 2 = r(A)$$

$r < n \rightarrow$  система имеет бесконечное кол-во решений, зависящих от  $(4 - 2) = 2$  свободных неизвестных.

Пусть  $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}$  - базисный минор, тогда  $x_1$  и  $x_2$  - базисные члены, а  $x_3$  и  $x_4$  - свободные.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразуем данную матрицу, делая по главной диагонали базисного минора единицы, а по побочной нули.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} & \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Выпишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = \frac{17}{11} \\ 0x_1 + 1x_2 + \frac{9}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 = \frac{1}{11} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 + \frac{1}{11} \end{cases} \quad (4)$$

Пусть  $x_3 = c_1$ , а  $x_4 = c_2$  ( $c_1, c_2 \in R$ ), тогда наша система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}c_1 + \frac{4}{11}c_2 + \frac{1}{11} \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \quad (5)$$

Исследуем на совместность систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases} \quad (6)$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r(A|B) = 3, r(A) = 2$$

Следовательно, система несовместна и решений не имеет.

## 2 Алгебра и геометрия - 07.10.2022

### 2.1 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Матрицы могут представляться на плоскости - для этого нужны собственные значения и собственные векторы.

Пусть дана квадратная матрица  $A$   $n$ -ого порядка. Ненулевой вектор  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  называется собственным вектором матрицы  $A$ , если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему:

$$A * X = \lambda X, \lambda \in R$$

Где  $\lambda$  - собственное значение соответствующего ему вектора матрицы  $A$ . Для нахождения  $\lambda$  составляют характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если  $\lambda_0$  - собственное значение матрицы  $A$ , то соответствующие собственные векторы находим из системы однородных линейных уравнений.

(\*) Однородными называются системы, где матрица-столбец свободных членов  $B$  полностью состоит из нулей

$$(A - \lambda_0 E) * X = 0$$

#### 2.1.1 Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение  $|A - \lambda E| = 0$ :

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3 - \lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$(4 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 + 2 + 3 - \lambda - 8 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2 - \lambda) + 3\lambda - 9 = 24 - 12\lambda - 14\lambda + 7\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ , вынесем общий множитель:

$$\frac{-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15}{\lambda - 1} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15)$$

Решаем через дискриминант или через теорему Виета: что угодно.

Итого имеем:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$$

Найдем теперь собственные векторы.

Пусть  $\lambda = \lambda_1 = 1$ , тогда  $(A - \lambda E) * X = 0$ :

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Преобразуем обратно в систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда видим, что  $x_1 = x_3, x_2 = x_3$

Пусть  $x_1 = 1$ , тогда  $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , видим что  $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Последовательно найдем теперь второй и третий собственные векторы:  $X_2$  и  $X_3$ .

Пусть  $\lambda = \lambda_2 = 3$ , тогда  $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-3)x_3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Преобразуем в матричный вид:  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из этого видно, что  $x_1 = x_2, x_1 = -x_3$

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Найдем третий собственный вектор.

Пусть  $\lambda = \lambda_3 = 5$ , тогда  $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-5)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-5)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-5)x_3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде:  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Чему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Я зашел в какую-то фигню, где-то ошибся, но, в общем, ответ должен получиться следующий:  $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 2.2 Векторная алгебра. Операции над векторами

Вектором  $\overrightarrow{AB}$  называется направленный отрезок  $AB$ , заданный своим началом  $A$  и концом  $B$ .

Длиной (модулем)  $|\overrightarrow{AB}|$  вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ .

Два вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (параллельны друг другу).

Три вектора называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Координаты  $x, y, z$  вектора  $\vec{a}$  это коэффициенты разложения вектора по базису, то есть по трем некомпланарным векторам, обозначаемым как  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

$$\vec{e}_1 = \{1, 0, 0\}, \vec{e}_2 = \{0, 1, 0\}, \vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}, \vec{a} = x * \vec{e}_1 + y * \vec{e}_2 + z * \vec{e}_3$$

Если  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  взаимно перпендикулярны и единичные векторы:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , то такой базис называется ортонормированным.

### 2.2.1 Пример

Разложить вектор  $\vec{a} = \{4; 2; 0\}$ , если возможно, по векторам  $\vec{p} = \{1; -1; 2\}$ ,  $\vec{q} = \{2; 2; -1\}$ ,  $\vec{r} = \{3; 7; -7\}$

Для того, чтобы это было возможно, должно соблюдаться следующее выражение:  $(\vec{p} * \vec{q}) * \vec{r} \neq 0$  - достаточное условие некомпланарности.

$$(\vec{p} * \vec{q}) * \vec{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\det X = -14 + 28 + 3 - 12 + 7 - 14 = 2 \neq 0$ , следовательно, мы можем разложить данный вектор по трем некомпланарным векторам.

$$\vec{a} = x * \vec{p} + y * \vec{q} + z * \vec{r}$$

$$\vec{p} = 1 * \vec{i} - 1 * \vec{j} + 2 * \vec{k}, \vec{q} = 2 * \vec{i} + 2 * \vec{j} - \vec{k}, \vec{r} = 3 * \vec{i} + 7 * \vec{j} - 7 * \vec{k}$$

$$x * \vec{p} + y * \vec{q} + z * \vec{r} = x * \vec{i} - x * \vec{j} + 2x * \vec{k} + 2y * \vec{i} + 2y * \vec{j} - y * \vec{k} + 3z * \vec{i} + 7z * \vec{j} - 7z * \vec{k}$$



Далее для разложения по базису нам необходимо вынести  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$   
 $\dots = (x + 2y + 3z) + \vec{j}(-x + 2y + 7z) + \vec{k}(2x - y - 7z)$   
 $\vec{a} = x\vec{p} + y\vec{q} + z\vec{r}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + 7z = 2 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Решим данную систему уравнений каким угодно способом, сначала составив расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2 \\ x_3 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x_2 \\ x_1 = -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad (14)$$

Тогда  $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$

## 3 Алгебра и геометрия - 14.10.2022

### 3.1 Центр масс

Если точки  $A$  и  $B$  заданы координатами  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ , то координаты вектора  $\overrightarrow{AB} : \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ .

Разделить отрезок в соотношении  $\lambda \neq -1$  это значит на прямой  $AB$  найти такую точку  $M$ , что вектор  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$ .

Если заданы координаты точек  $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ , то координаты делящей точки  $M(x_m; y_m; z_m)$  находят по формулам:

$$x_m = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y_m = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z_m = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

Если  $M$  - середина  $AB$ , то  $\lambda = 1$ , а формулы

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

#### 3.1.1 Пример

Дано:  $A_1(1; 3), m_1 = 10; A_2(7; 8), m_2 = 30; A_3(0; 4), m_3 = 5$ . Определить  $S$  - центр масс системы.

Пусть  $C_1$  делит  $A_1A_2$  в соотношении  $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = 3$ , тогда

$$x_c = \frac{1 + 3 \cdot 7}{4} = \frac{22}{4}, y_c = \frac{27}{4}$$

Пусть  $S$  делит  $CA_3$  в соотношении  $\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2} = \frac{1}{8}$ , тогда

$$x_s = \frac{11}{2} * \frac{8}{9} = \frac{44}{9}, y_s = \frac{\frac{27}{4} + \frac{11}{8} * 4 + \frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{29}{4} * \frac{8}{9} = \frac{58}{9}.$$

Ответ:  $S(\frac{44}{9}; \frac{58}{9})$

#### 3.1.2 Некоторые нюансы

1) Можно доказать, что центр масс  $S(x_s; y_s; z_s)$  материальной системы точек  $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), \dots, A_n(x_n; y_n; z_n)$ , в которых сосредоточены массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  имеет следующие координаты:

$$x_s = \frac{x_1 * m_1 + x_2 * m_2 + \dots + x_n * m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, y_s = \frac{y_1 * m_1 + \dots + y_n * m_n}{m_1 + \dots + m_n}, z_s = \frac{z_1 * m_1 + \dots + z_n * m_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

2) Центры масс треугольника с координатами

$A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$  (то есть, центр масс однородной треугольной пластины) находится в точке пересечения медиан.

Если предположить, что  $n = 3, m_1 = m_2 = m_3$ , то

$$S(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3})$$

### 3.2 Направляющие косинусы

Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  - углы, которые образуют  $\vec{a} = \{x, y, z\}$  с осями  $O_x, O_y, O_z$ .

Тогда направляющие косинусы  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  вектора  $\vec{a}$  связаны соотношением  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  и определяются формулами:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

### 3.2.1 Пример

Найти длину и направляющие косинусы  $\overrightarrow{AM}$ , если т.  $M$  делит  $AB$  в соотношении  $\lambda = -2$ , где  $A(5; 6; -1), B(0; -3; 2)$ .

Найдем координаты точки  $M$ :  $x_m = -5, y_m = -12, z_m = 5$ . Таким образом,  $M(-5; -12; 5)$ .

$$\overrightarrow{AM} = \{-10; -18; -6\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{100 + 324 + 36} = \sqrt{460} = 2\sqrt{115}$$

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{-10}{2\sqrt{115}} \approx -0.466, \cos \beta = \frac{-18}{2\sqrt{115}} \approx -0.839, \cos \gamma = \frac{-6}{2\sqrt{115}} \approx 0.28.$$

$$\text{Выполним проверку: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{100}{460} + \frac{324}{460} + \frac{36}{460} = 1$$

## 3.3 Решение практической работы, вариант 21

### 3.3.1 Задание 5, нахождение центра тяжести системы

Дано:  $A_1(5; -4), A_2(0; 2), A_3(6; 6), m_1 = 25, m_2 = 45, m_3 = 15$ .

Согласно формуле,  $S_x = \frac{5*25+0*45+6*15}{25+45+15} = \frac{215}{85} = \frac{43}{17}$ ,

$$S_y = \frac{-4*25+2*45+6*15}{25+45+15} = \frac{80}{85} = \frac{16}{17}.$$

Ответ:  $S(\frac{43}{17}; \frac{16}{17})$

### 3.3.2 Задание 6, нахождение длины и направляющих косинусов

Дано:  $A(-2; -5), B(4; 1), \lambda = \frac{2}{7}$ .

Найдем координаты точки  $M$ :

$$M_x = \frac{-2+4}{1+\frac{2}{7}} = \frac{2}{\frac{9}{7}} = \frac{14}{9}, M_y = \frac{-5+1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{-4}{\frac{9}{7}} = \frac{-4*7}{9} = -\frac{28}{9}, \text{ таким образом}$$

$$M(\frac{14}{9}; -\frac{28}{9})$$

$$\overrightarrow{AM} = \{\frac{14}{9} + 2; -\frac{28}{9} + 5\} = \{\frac{32}{9}; \frac{17}{9}\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{1024}{81} + \frac{289}{81}} = \sqrt{\frac{1313}{81}}$$

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{32}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.883, \cos \beta = \frac{\frac{17}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.469.$$

Ответ: сами выпишите из того, что написано выше.

## 4 Алгебра и геометрия - 15.10.2022

### 4.1 Ранг матрицы

Рангом матрицы называется порядок наибольшего минора, отличного от нуля, который можно из этой матрицы получить.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  - миноров первого порядка полно, второго - тоже, третьего - тоже имеется, четвертого - лишь один.

Если определитель четвертого порядка не равен нулю, то  $r(A) = 4$ , но это нужно считать.

#### 4.1.1 Теорема об окаймляющих минорах

Если матрица  $A$  имеет ненулевой минор  $\Delta \neq 0$   $k$ -ого порядка, а все миноры, содержащие  $\Delta$   $k+1$ -го порядка равны нулю, то ранг матрицы  $A$  равен  $k$ .

#### 4.1.2 Другой способ подсчета ранга

Ранг матрицы равен количеству не полностью нулевых строк, если данная матрица приведена к ступенчатому виду.

Например, ранг матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  равен трем.

Если матрица не приведена к ступенчатому виду - ее надо к ней привести.

### 4.2 Теорема Кронекера - Капелли

Система линейных уравнений имеет решение (является совместной), если ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы.

Если ранг расширенной матрицы не совпадает с рангом матрицы системы, то решений нет.

Если  $r(A) = r(A^*) = n$  - то будет единственное решение.

Если  $r(A) = r(A^*) < n$  - решений бесконечно много - система неопределена,  $r$  неизвестных назовем **базисными**, а  $n - r$  неизвестных назовем **свободными** (через них все будем выражать).

В случае однородной системы всегда имеется хотя бы нулевое решение.

#### 4.2.1 Фундаментальная система решений

$$r(A*) = r(A) = r < n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \dots \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots \end{cases} \quad (15)$$

$$x_1(c_1c_2\dots c_{n-r}), x_2(c_1c_2\dots c_{n-r}), \dots, c_r(c_1c_2\dots c_{n-r})$$

#### 4.2.2 Примеры

**Пример 1.**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases} \quad (16)$$

Составим матрицу расширенную системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, r(A) \neq r(A*)$$

**Система несовместна, решений нет**

**Пример 2.**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \quad (17)$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) < n -$$

**бесконечное множество решений.**

Решение:  $\begin{pmatrix} 1-a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

**Пример 3.**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -4x - 4y - 4z = -4 \end{cases} \quad (18)$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) = 1$$

Имеем решение:  $\begin{pmatrix} 1-a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

**Пример 4.**

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Запишем в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -3x_5 + 16x_4 - 2x_3 \\ 8x_2 = 4x_5 - 25x_4 + 7x_3 \end{cases} \quad (20)$$

Ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит количество базисных переменных равно двум, а количество свободных - трем.

$$x_2 = \frac{x_5}{2} - \frac{25x_4}{8} + \frac{7x_3}{8}, x_1 = 5x_2 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 = \frac{5}{2}x_5 - \frac{125}{8}x_4 + \frac{35}{8}x_3 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3$$

Итоговый ответ:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_5 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \sim C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{общ}} = C_1 E_1 + C_2 E_2 + C_3 E_3$$

**Пример 5.**

Имеем следующую расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \quad (21)$$

Имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4 \\ -2x_2 = -1 - 3x_3 + x_4 \end{cases} \quad (22)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, 2x_1 = 2 + x_3 + 3x_4 - x_2 = 2 + x_3 + 3x_4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -x_1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = X_{\text{ч.р}} + X_{\text{одн}}, X_{\text{одн}} = C_1 E_1 + C_2 E_2, X_{\text{ч.р}} - \text{наш столбик из циферок.}$$

## 5 Алгебра и геометрия - 21.10.2022

### 5.1 Скалярное произведение

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Если или  $\vec{a} = \vec{0}$  или  $\vec{b} = \vec{0}$ , то скалярное произведение будет равно нулю.

Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} * \vec{b} = 0 (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$$

#### 5.1.1 Примеры

**Пример 1.**

Найти  $\cos \angle NMP$ , если  $M(1; 2; -4), N(4; 2; 0), P(-3; 2; -1)$

$$\overrightarrow{MN} = \{3; 0; 4\}, \overrightarrow{MP} = \{-4; 0; 3\}$$

$$\cos \angle NMP = \frac{\overrightarrow{MN} * \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| * |\overrightarrow{MP}|} = 0, \cos \angle NMP = 90^\circ$$

### 5.2 Скалярная проекция

$$\text{Скалярная проекция: } \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\text{Векторная проекция: } \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

#### 5.2.1 Примеры

**Пример 1.**

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} - ?, \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} - ?$$

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \vec{b} =$$

$$\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD}, A(1; 0; -1), B(1; -1; -2), C(4; 1; 0), D(0; 4; 3), O(0; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{0; -1; -1\}, 2\overrightarrow{AB} = \{0; -2; -2\}, \overrightarrow{CD} = \{-4; 3; 3\}, \overrightarrow{OC} = \{4; 1; 0\}, \overrightarrow{AD} = \{-1; 4; 4\}$$

$$\vec{a} = 4; -5; -5, \vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 16\vec{j} + 17\vec{k}$$

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4*4 + (-5)*(-16) + (-5)*17}{\sqrt{4^2 + (-16)^2 + 17^2}} = \frac{11}{\sqrt{561}}$$

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{561}} * \frac{\vec{b}}{\sqrt{561}} = \frac{11}{561} \{4; -16; 17\} = \{\frac{4}{51}; -\frac{16}{51}; \frac{17}{51}\}$$



### 5.3 Векторное произведение

Векторное произведение  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{c}$  должен соответствовать следующим требованиям:

1.  $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin(\angle \vec{a} \vec{b})$
2.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3. Тройка векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  правая

#### 5.3.1 Основные задачи на векторное произведение

1) Нахождение площади параллелограмма или треугольника, построенного на плоскости.

$$S_{\text{пар}} = 2S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

2) Нахождение  $\vec{N}$ , перпендикулярного двум неколлинеарным векторам:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , то  $\vec{N} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda \in R, \lambda \neq 0$

#### 5.3.2 Свойства векторного произведения

1.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2.  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \lambda \vec{a} = \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$
3.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4.  $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{j}(z_1 x_2 - x_1 z_2) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

#### 5.3.3 Примеры

**Пример 1.**

$$S_{\Delta} = ?, \vec{a} = 5\vec{m} - 8\vec{n}, \vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}, |\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, \angle(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{3}{4}\pi$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (5\vec{m} - 8\vec{n}) \times (-\vec{m} + 2\vec{n}) = 5\vec{m} \times (-\vec{m}) + 5\vec{m} \times 2\vec{n} + (-8\vec{n}) \times (-\vec{m}) + (-8\vec{n}) \times 2\vec{n} = 10\vec{m} \times \vec{n} + 8\vec{n} \times \vec{m} = 10\vec{m} \times \vec{n} - 8\vec{n} \times \vec{n} = 2\vec{m} \times \vec{n}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |2\vec{m} \times \vec{n}| = 2 * |\vec{m}| * |\vec{n}| * \sin \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 2 * 1 * 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} * 2 * \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

**Пример 2.**

$$S_{\Delta ABC}?, h_a?, A(1; 3; 5), B(0; -1; -3), C(4; 3; -3)$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{BA} \times \vec{BC}| \\ \vec{BA} &= \{1; 4; 8\}, \vec{BC} = \{4; 3; 0\} \\ \vec{BA} \times \vec{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 32\vec{j} - 13\vec{k} = \\ &= \{-24; 32; -13\}, |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{(-24)^2 + 32^2 + (-13)^2} = \sqrt{1769} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} * \sqrt{1769} \approx 21.03 \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} * h * BC, |\vec{BC}| = 5, h = \frac{21*2}{5} \approx 8.4 \end{aligned}$$

**Пример 3.**

$$\begin{aligned} \vec{N} &\perp M_1M_2M_3, M_1(1; 3; 0), M_2(-2; 1; -1), M_3(0; 1; -1), \vec{N}=? \\ \vec{N} &\perp \vec{M_1M_2}, \vec{N} \perp \vec{M_1M_3} \\ \vec{N} &= \lambda(\vec{M_1M_2} \times \vec{M_1M_3}), \vec{M_1M_2} = \{-3; -2; -1\}, \vec{M_1M_3} = \\ &= \{-1; -2; -1\}, \vec{M_1M_2} \text{ not parallel to } \vec{M_1M_3} \\ \vec{N} &= \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \lambda(0\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = \frac{1}{2}\{0; -2; 4\} = \{0; -1; 2\} \end{aligned}$$

## 5.4 Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называют число:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} &= \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} \\ V_{\text{параллелепипеда}} &= |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}|, V_{\text{тр. пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{ПАРАЛ}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}| \end{aligned}$$

### 5.4.1 Примеры

**Пример 1.**

$$\begin{aligned} V_{ABCD}?, AH?, A(2; -4; 5), B(-1; -3; 4), C(5; 5; -1), D(1; -2; 2) \\ \vec{BA} = \{3; -1; 1\}, \vec{BC} = \{6; 8; -5\}, \vec{BD} = \{2; 1; -2\} \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 6 + 10 - 16 + 15 - 12 = -45$$

$$V_{\text{ТР. ПИР}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} * h = \frac{1}{6} |(\vec{BA} \times \vec{BC}) * \vec{BD}| = \frac{45}{6}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} * |\{-11; 2; -16\}| =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{15}{2}$$

$$h = \frac{3V_{\text{ТР. ПИР.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{45}{15} = 3$$