

Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1	Алгебра и геометрия - 21.10.2022	2
1.1	Скалярное произведение	2
1.1.1	Примеры	2
1.2	Скалярная проекция	2
1.2.1	Примеры	2
1.3	Векторное произведение	3
1.3.1	Основные задачи на векторное произведение	3
1.3.2	Свойства векторного произведения	3
1.3.3	Примеры	3
1.4	Смешанное произведение	4
1.4.1	Примеры	4

1 Алгебра и геометрия - 21.10.2022

1.1 Скалярное произведение

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\vec{a}; \vec{b})$$

Если или $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то скалярное произведение будет равно нулю.

Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} * \vec{b} = 0 (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0)$$

1.1.1 Примеры

Пример 1.

Найти $\cos \angle NMP$, если $M(1; 2; -4), N(4; 2; 0), P(-3; 2; -1)$

$$\overrightarrow{MN} = \{3; 0; 4\}, \overrightarrow{MP} = \{-4; 0; 3\}$$

$$\cos \angle NMP = \frac{\overrightarrow{MN} * \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| * |\overrightarrow{MP}|} = 0, \cos \angle NMP = 90^\circ$$

1.2 Скалярная проекция

$$\text{Скалярная проекция: } \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$\text{Векторная проекция: } \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

1.2.1 Примеры

Пример 1.

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} - ?, \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} - ?$$

$$\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \vec{b} =$$

$$\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD}, A(1; 0; -1), B(1; -1; -2), C(4; 1; 0), D(0; 4; 3), O(0; 0; 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = \{0; -1; -1\}, 2\overrightarrow{AB} = \{0; -2; -2\}, \overrightarrow{CD} = \{-4; 3; 3\}, \overrightarrow{OC} = \{4; 1; 0\}, \overrightarrow{AD} = \{-1; 4; 4\}$$

$$\vec{a} = 4; -5; -5, \vec{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 16\vec{j} + 17\vec{k}$$

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4*4 + (-5)*(-16) + (-5)*17}{\sqrt{4^2 + (-16)^2 + 17^2}} = \frac{11}{\sqrt{561}}$$

$$\overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{b}} \vec{a} = \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} * \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{561}} * \frac{\vec{b}}{\sqrt{561}} = \frac{11}{561} \{4; -16; 17\} = \{\frac{4}{51}; -\frac{16}{51}; \frac{17}{51}\}$$

1.3 Векторное произведение

Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

\vec{c} должен соответствовать следующим требованиям:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin(\angle \vec{a} \vec{b})$
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
3. Тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая

1.3.1 Основные задачи на векторное произведение

1) Нахождение площади параллелограмма или треугольника, построенного на плоскости.

$$S_{\text{пар}} = 2S_{\Delta} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

2) Нахождение \vec{N} , перпендикулярного двум неколлинеарным векторам: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{N} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \lambda \in R, \lambda \neq 0$

1.3.2 Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \lambda \vec{a} = \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
4. $\lambda \vec{a} \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$

$$\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \vec{j}(z_1 z_2 - z_1 x_2) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

1.3.3 Примеры

Пример 1.

$$S_{\Delta} = ?, \vec{a} = 5\vec{m} - 8\vec{n}, \vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}, |\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, \angle(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{3}{4}\pi$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (5\vec{m} - 8\vec{n}) \times (-\vec{m} + 2\vec{n}) = 5\vec{m} \times (-\vec{m}) + 5\vec{m} \times 2\vec{n} + (-8\vec{n}) \times (-\vec{m}) + (-8\vec{n}) \times 2\vec{n} = 10\vec{m} \times \vec{n} + 8\vec{n} \times \vec{m} = 10\vec{m} \times \vec{n} - 8\vec{n} \times \vec{n} = 2\vec{m} \times \vec{n}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |2\vec{m} \times \vec{n}| = 2 * |\vec{m}| * |\vec{n}| * \sin \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 2 * 1 * 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} * 2 * \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Пример 2.

$$S_{\Delta ABC}?, h_a?, A(1; 3; 5), B(0; -1; -3), C(4; 3; -3)$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} |\vec{BA} \times \vec{BC}| \\ \vec{BA} &= \{1; 4; 8\}, \vec{BC} = \{4; 3; 0\} \\ \vec{BA} \times \vec{BC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 32\vec{j} - 13\vec{k} = \\ &= \{-24; 32; -13\}, |\vec{BA} \times \vec{BC}| = \sqrt{(-24)^2 + 32^2 + (-13)^2} = \sqrt{1769} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} * \sqrt{1769} \approx 21.03 \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} * h * BC, |\vec{BC}| = 5, h = \frac{21*2}{5} \approx 8.4 \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\vec{N} \perp M_1 M_2 M_3, M_1(1; 3; 0), M_2(-2; 1; -1), M_3(0; 1; -1), \vec{N} - ?$$

$$\vec{N} \perp \vec{M_1 M_2}, \vec{N} \perp \vec{M_1 M_3}$$

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \lambda(\vec{M_1 M_2} \times \vec{M_1 M_3}), \vec{M_1 M_2} = \{-3; -2; -1\}, \vec{M_1 M_3} = \\ &= \{-1; -2; -1\}, \vec{M_1 M_2} \text{ not parallel to } \vec{M_1 M_3} \end{aligned}$$

$$\vec{N} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \lambda(0\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}) = \frac{1}{2}\{0; -2; 4\} = \{0; -1; 2\}$$

1.4 Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}|, V_{\text{тр. пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{ПАРАЛ}} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}|$$

1.4.1 Примеры

Пример 1.

$$\begin{aligned} V_{ABCD}?, AH?, A(2; -4; 5), B(-1; -3; 4), C(5; 5; -1), D(1; -2; 2) \\ \vec{BA} = \{3; -1; 1\}, \vec{BC} = \{6; 8; -5\}, \vec{BD} = \{2; 1; -2\} \end{aligned}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 6 + 10 - 16 + 15 - 12 = -45$$

$$V_{\text{ТР. ПИР}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} * h = \frac{1}{6} |(\vec{BA} \times \vec{BC}) * \vec{BD}| = \frac{45}{6}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} * |\{-11; 2; -16\}| =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{15}{2}$$

$$h = \frac{3V_{\text{ТР. ПИР.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{45}{15} = 3$$