Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 21.10.2022

1.1 Скалярное произведение

$\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \cos(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b})$
Если или $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ или $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, то скалярное произведение будет равно нулю.
Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.
$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \iff \overrightarrow{a} * \overrightarrow{b} = 0(\overrightarrow{a} \neq 0, \overrightarrow{b} \neq 0)$

1.1.1 Примеры

Пример 1.

Найти $\cos\angle NMP$, если $M(1;2;-4), N(4;2;0), P(-3;2;-1)$
$\overrightarrow{MN} = \{3;0;4\}, \overrightarrow{MP} = \{-4;0;3\}$
$\cos\angle NMP = \frac{\overrightarrow{MN} * \overrightarrow{MP}}{|\overrightarrow{MN}| * |\overrightarrow{MP}|} = 0, \cos\angle NMP = 90°$

1.2 Скалярная и векторная проекция

Скалярная проекция: $\text{ПР}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$
Векторая проекция: $\overrightarrow{\text{ПР}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \text{ПР}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} * \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$

1.2.1 Примеры

Пример 1.

$\text{ПР}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} - ?, \overrightarrow{\text{ПР}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} - ?$

$\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD}, A(1;0;-1), B(1;-1;-2), C(4;1;0), D(0;4;3), O(0;0;0)$

$\overrightarrow{AB} = \{0;-1;-1\}, 2\overrightarrow{AB} = \{0;-2;-2\}, \overrightarrow{CD} = \{-4;3;3\}, \overrightarrow{OC} = \{4;1;0\}, \overrightarrow{AD} = \{-1;4;4\}$

$$\overrightarrow{a} = 4;-5;-5, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} - 16\overrightarrow{j} + 17\overrightarrow{k}$$
$\text{ПР}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} * \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{4*4+(-5)*(-16)+(-5)*17}{\sqrt{4^2+(-16)^2+17^2}} = \frac{11}{\sqrt{561}}$
$\overrightarrow{\text{ПР}}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \text{ПР}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} * \frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{11}{\sqrt{561}} * \frac{\overrightarrow{b}}{\sqrt{561}} = \frac{11}{561}\{4;-16;16\} = \{\frac{4}{51}; -\frac{16}{51}; \frac{1}{3}\}$

1.3 Векторное произведение

Вектороное прозведение $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = c$
$\overrightarrow{c}$ должен соответствовать следующим требованиям:

1. $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| * |\overrightarrow{b}| * \sin(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})$
2. $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$
3. Тройка векторов $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ правая

1.3.1 Основные задачи на векторное произведение

1) Нахождение площади параллелограмма или треугольника, построенного на плоскости.
$S_{\text{пар}} = 2S_{\triangle} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$

2) Нахождение $\overrightarrow{N}$, перпендикулярного двум неколлинеарным векторам:
$\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$, то $\overrightarrow{N} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}), \lambda \in R, \lambda \neq 0$

1.3.2 Свойства векторного произведения

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$
2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \iff \lambda\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \vee \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$
3. $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$
4. $\lambda\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a} \times (\lambda\overrightarrow{b})$

$\overrightarrow{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \overrightarrow{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$
$(\overrightarrow{i}\, y_1 z_2 + x_1 y_2 \overrightarrow{k} + \overrightarrow{j}\, z_1 x_2) - (\overrightarrow{k}\, y_1 x_2 + y_2 z_1 \overrightarrow{i} + x_1 \overrightarrow{j}\, z_2) =$
$\overrightarrow{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \overrightarrow{k}(x_1 y_2 - y_1 x_2) + \overrightarrow{j}(x_2 z_1 - x_1 z_2)$

1.3.3 Примеры

Пример 1.

$S_{\triangle} - ?, \overrightarrow{a} = 5\overrightarrow{m} - 8\overrightarrow{n}, \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}, |\overrightarrow{m}| = 1, |\overrightarrow{n}| = 2, \angle(\overrightarrow{m}; \overrightarrow{n}) = \frac{3}{4}\pi$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (5\overrightarrow{m} - 8\overrightarrow{n}) \times (-\overrightarrow{m} + 2\overrightarrow{n}) = 5\overrightarrow{m} \times (-\overrightarrow{m}) + 5\overrightarrow{m} \times 2\overrightarrow{n} + (-8\overrightarrow{n}) \times (-\overrightarrow{m}) + (-8\overrightarrow{n}) \times 2\overrightarrow{n} = 10\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{n} + 8\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{m} = 10\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{n} - 8\overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{n}$

$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |2\overrightarrow{m} \times \overrightarrow{n}| = 2 * |\overrightarrow{m}| * |\overrightarrow{n}| * \sin\angle(\overrightarrow{m}; \overrightarrow{n}) = 2 * 1 * 2 * \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_\triangle = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{1}{2} * 2 * \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Пример 2.

$S_{\triangle ABC}-?, h_a-?, A(1;3;5), B(0;-1;-3), C(4;3;-3)$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}|$
$\overrightarrow{BA} = \{1;4;8\}, \overrightarrow{BC} = \{4;3;0\}$
$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -24\overrightarrow{i} + 32\overrightarrow{j} - 13\overrightarrow{k} =$
$\{-24;32;-13\}, |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-24)^2 + 32^2 + (-13)^2} = \sqrt{1769}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} * \sqrt{1769} \approx 21.03$
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} * h * BC, |\overrightarrow{BC}| = 5, h = \frac{21*2}{5} \approx 8.4$

Пример 3.

$\overrightarrow{N} \perp M_1M_2M_3, M_1(1;3;0), M_2(-2;1;-1), M_3(0;1;-1), \overrightarrow{N}-?$

$\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{M_1M_3}$

$\overrightarrow{N} = \lambda(\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}), \overrightarrow{M_1M_2} = \{-3;-2;-1\}, \overrightarrow{M_1M_3} =$
$\{-1;-2;-1\}, \overrightarrow{M_1M_2}$ not parallel to $\overrightarrow{M_1M_3}$

$\overrightarrow{N} = \lambda \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \lambda(0\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}) = \frac{1}{2}\{0;-2;4\} = \{0;-1;2\}$

1.4 Смешанное произведение

Смешанным произведением трех векторов $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ называют число:
$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$
$V_{\text{параллелепипеда}} = |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c}|, V_{\text{тр. пир.}} = \frac{1}{6}V_{\text{ПАРАЛ}} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) * \overrightarrow{c}|$

1.4.1 Примеры

Пример 1.

$V_{ABCD}-?, AH-?, A(2;-4;5), B(-1;-3;4), C(5;5;-1), D(1;-2;2)$
$\overrightarrow{BA} = \{3;-1;1\}, \overrightarrow{BC} = \{6;8;-5\}, \overrightarrow{BD} = \{2;1;-2\}$

$(\overrightarrow{a} \times b) * \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -48 + 6 + 10 - 16 + 15 - 12 = -45$

$V_{\text{тр. пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} * h = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}) * \overrightarrow{BD}| = \frac{45}{6}$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 6 & 8 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} * |\{-11; 2; -16\}| =$

$\frac{1}{2} \sqrt{(-11)^2 + 2^2 + (-10)^2} = \frac{15}{2}$

$h = \frac{3V_{\text{тр. пир.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{45}{15} = 3$