Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

1 Алгебра и геометрия - 04.10.2022

1.1 Ранг матрицы

Пусть дана матрица A размера $m * n$.

Возьмем любые k ($k \leq min(n; m)$) строк и k столбцов матрицы A.

На их пересечении стоят элементы, образующие определитель k-того порядка, который и называется минором k-го порядка.

Под минором 1-го порядка матрицы A понимается любой элемент.

Рангом r матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличный от нуля.

Следовательно, если у нас матрица из четырех строк и трех столбцов, максимальный минор может быть три на три. Но если все они равны нулю, то мы не можем сказать, что ранг матрицы равен нулю.

Из определения следует:

1. r - целое число ($0 \leq r \leq min(m; n)$)

2. Все миноры $(r + 1)$ порядка либо нулевые, либо не существуют.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, r(A) = 3$

Миноры 1-го порядка: любой элемент матрицы.

Миноры второго порядка: любой определитель этой матрицы 2x2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Миноры третьего порядка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \det A = 64 \neq 0$

Минора четвертого порядка у данной матрицы не существует.

1.2 Действия над матрицами

1. Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля.

2. Сложение: прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.

3. Перемещение (замена местами) двух строк или двух столбцов.

4. Вычеркивание нулевой строки или столбца.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

1.3 Теорема Кронекера — Капелли

Теорема 1.1 (Теорема Кронекера — Капелли) *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.*

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + ... + a_{mn} * x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Система называется совместной, если она имеет решение. (*) Операции только над строками.

$$r(A) = r(A|B) \equiv r$$

Если $r = n$, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящих от $(n - r)$ свободных неизвестных.

1.4 Метод Гаусса

Если столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ свободных членов - нулевой, то система называется однородной.

Однородная система всегда имеет решение, и она всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Если в однородной системе число неизвестных n равно числу уравнений m, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3-x_4=2 \\ 2x_1-x_2-x_3+2x_4=3 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+x_4=5 \end{cases} . \tag{2}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, r(A|B) = 2 = r(A)$

$r < n \rightarrow$ система имеет бесконечное кол-во решений, зависящих от $(4 - 2) = 2$ свободных неизвестных.

Пусть $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}$ - базисный минор, тогда x_1 и x_2 - базисные члены, а x_3 и x_4 - свободные.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем данную матрицу, делая по главной диагонали базисного минора единицы, а по побочной нули.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} & \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Выпишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 1x_1+0x_2-\frac{1}{11}x_3+\frac{9}{11}x_4=\frac{17}{11} \\ 0x_1+1_x2+\frac{9}{11}x_3-\frac{4}{11}x_4=\frac{1}{11} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{11}x_3-\frac{9}{11}x_4+\frac{17}{11} \\ x_2=-\frac{9}{11}x_3+\frac{4}{11}x_4+\frac{1}{11} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $x_3 = c_1$, а $x_4 = c_2$ $(c_1, c_2 \in R)$, тогда наша система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{11}c_1-\frac{9}{11}c_2+\frac{17}{11} \\ x_3=-\frac{9}{11}c_1+\frac{4}{11}c_2+\frac{1}{11} \\ x_3=c_1 \\ c_4=c_2 \end{cases} \tag{5}$$

Исследуем на совместность систему

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+4x_3=4 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=9 \end{cases} \tag{6}$$

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & \\ 0 & -2 & -7 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r(A|B$$

$3, r(A) = 2$

Следовательно, система несовместна и решений не имеет.