Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 12.11.2022

1.1 Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\alpha$, где α - угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$
2. $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$
3. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ образуют правую тройку

Если **один из векторов нулевой** или **эти векторы параллельны**, то их векторное произведение - тоже нулевой вектор.

Геометрическая интерпретация Длина вектора векторного произведения численно равна **площади параллелограмма**, построенного на этих векторах.

Свойства векторного произведения

1. $[a \times b] = -[b \times a]$
2. $[(\alpha a) \times b] = \alpha[a \times b]$
3. $[(a+b) \times c] = [a \times c] + [b \times c]$
4. $a \times a = 0$

Запись в виде определителя
$\overrightarrow{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Примеры
Пример 1. Дано: $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 4, \phi = 90°$. Найти $|(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})|$
$|(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})| = |3\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{a} \times 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times 2\overrightarrow{b}| =$
$|-\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = |5\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = 5|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}| = 5 * 3 * 4 = 60$

Пример 2. Дано: $A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)$. Найти площадь треугольника, образуемого этими точками.

$$\overrightarrow{AB} = \{2;2;-3\}, \overrightarrow{AC} = \{4;0;6\}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$-12\overrightarrow{i} - 24\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}, |\{-12;-24;8\}| = \sqrt{144 + 576 + 64} = 28$

Искомая площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}|\{-12;-24;8\}| = 14$

Пример 3

Дано: $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} = \{4;-2;3\}, \overrightarrow{b} = \{0;1;3\}, |\overrightarrow{x}| = 26$, найти координаты данного $\overrightarrow{x}$, образующего с осью OY тупой угол.

$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x} = \{3\lambda; 12\lambda; -4\lambda\}, |x| = \sqrt{9\lambda^2 + 144\lambda^2 + 16\lambda^2} = 13|\lambda|, \lambda = \pm 2$

$\overrightarrow{x} = \{-6;-24;8\}$ **- ответ, ибо именно он образует тупой угол**, или $\overrightarrow{x} = \{6;24;-8\}$

1.2 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов называется **число**, которое получается, если вектор $\overrightarrow{a}$ умножить векторно на $\overrightarrow{b}$, а потом результат этого произведения скалярно умножить на c:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = ([\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}])\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} > 0$ - если тройка векторов правая, $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} < 0$ - если тройка векторов левая.

Циклическая перестановка $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}$
Если же перестановка соседних векторов, то происходит смена знака:
$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}$

Запись в виде определителя

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Условие компланарности Условие компланарности трех векторов - их смешанное произведение равно нулю.

Геометрическая интерпретация Смешанное произведение векторов по модулю равно **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах.
$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}$
Если нам необходимо найти высоту чего-то там, то $h = \frac{|abc|}{|[a \times b]|}$

Примеры
Пример 1. Дано: $\overrightarrow{a} = \{2; 3; 1\}$, $\overrightarrow{b} = \{1; -1; 3\}$, $\overrightarrow{c} = \{1; 9; -11\}$.
Определить, компланарны ли данные векторы.
$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 10 & -14 \end{vmatrix} =$
$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix}$
Таким образом, данные три вектора **компланарны**

Пример 2. Дано: $A(2; -1; 1), B(5; 5; 4), C(3; 2; -1), D(4; 1; 3)$. Найти объем тетраэдра, образуемого данными точками.
$\overrightarrow{AB} = \{3; 6; 3\}, \overrightarrow{AC} = \{1; 3; -2\}, \overrightarrow{AD} = \{2; 2; 2\}$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

Объем тетраэдра: $S = \frac{1}{8} * |-18| = 3$

1.3 Двойное векторное произведение

Пусть $\overrightarrow{a}$ умножается векторно на $\overrightarrow{b}$, а полученный вектор векторно умножается на $\overrightarrow{c}$ - результат называется **двойным векторным произведением**: $[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = [[\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}] \neq [\overrightarrow{a} \times [\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}]]$
$[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c})$

Примеры

Допустим, имеем $\overrightarrow{a} = \{x_1; 0; 0\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2; y_2; 0\}$, $\overrightarrow{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$, тогда

$$[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} * 0 - \overrightarrow{j} * 0 + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \{0; 0; x_1 y_2\}$$

$$[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & x_1 y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(0 - x_1 y_2 y_3) - \overrightarrow{j}(0 - x_3 x_1 y_2) + \overrightarrow{k} * 0 = \{-x_1 y_2 y_3; x_3 x_1 y_2; 0\}$$

$a * c = x_1 x_3, b * c = x_2 x_3 + y_2 y_3$, $\overrightarrow{b}(a * c) = \{x_1 x_2 x_3; x_1 y_2 x_3; 0\}$, $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}) = \{x_1(x_2 x_3 + y_2 y_3); 0; 0\}$
$\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\overrightarrow{c}) = \{x_1 x_2 x_3 - x_1(x_2 x_3 + y_2 y_3); x_1 y_2 x_3; 0\}$