Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 23.11.2022

1.1 Прямая в пространстве

Вектор $\overrightarrow{S}$, являющийся коллинеарным данной прямой, называется направляющим.

1.1.1 Уравнения прямой в пространстве

$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - фиксированная точка, лежащая на прямой; $\overrightarrow{S} = \{m; n; p\}$, $m^2 + n^2 + p^2 \neq 0$ - **каноническое** уравнение прямой.
$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - уравнение прямой **через две точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$
Уравнение прямой, заданной **параметрически** ($t \in (-\infty; +\infty)$):

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение прямой, полученной в результате **пересечения двух плоскостей** ($\overrightarrow{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\} \neq \lambda\overrightarrow{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1.1.2 Связь между направляющим вектором и векторами нормали

Направляющий вектор $\overrightarrow{S}$ прямой l: $\overrightarrow{N_1} = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\overrightarrow{N_2} = \{A_2; B_2; C_2\}$: $S = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$

1.1.3 Косинус угла между двумя прямыми

Даны две прямые: l_1: $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, l_2: $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$
$\cos(l_1; l_2) = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} * \overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}| * |\overrightarrow{S_2}|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} * \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \geq 0$

1.1.4 Угол между прямой и плоскостью

Даны прямая l: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскость α: $Ax + By + Cz + D = 0$
$\angle(l; \alpha) = \pm\frac{\overrightarrow{S} * \overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{S}| * |\overrightarrow{N}|} = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} * \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

1.1.5 Примеры решения задач

Пример 1. Составьте канонические и параметрические уравнения высоты l, опущенной на плоскость (BCD) в пирамиде $ABCD$, если т. $A(0;5;-2)$, т. $B(1;2;-1)$, т. $C(4;5;0)$, т. $D(1;1;1)$

$\overrightarrow{BC} = \{3;3;1\}, \overrightarrow{BD} = \{0;-1;2\}, \overrightarrow{S} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \{7;6;-3\}$

Найдем каноническое уравнение: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \Longleftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y-y_5}{-6} = \frac{z+2}{-3}$,

$\overrightarrow{S} = \{m;n;p\} = \{7;-6;-3\}$, $M_0(x_0;y_0;z_0) = A(0;5;-2)$

Найдем параметрическое уравнение данной прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 7t \\ y = 5 - 6t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \tag{3}$$

Пример 2. Составьте канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости xOz

$\overrightarrow{j} = \{0;1;0\}$ - вспомогательный вектор.

Найдем каноническое уравнение: $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}$

Найдем параметрическое уравнение данной прямой:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases} \tag{4}$$

Пример 3. Найдите угол между прямыми l_1: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{-1}$ и l_2:

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x - z + 8 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$\overrightarrow{N_1} = \{1;1;-2\}$, $\overrightarrow{N_2} = \{2;0;-1\}$, $\overrightarrow{S_1} = \{2;2;-1\}$,

$\overrightarrow{S_2} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \{-1;-3;-2\}$

$\cos(l_1;l_2) = \pm\frac{\overrightarrow{S_1} * \overrightarrow{S_2}}{|\overrightarrow{S_1}| * |\overrightarrow{S_2}|} = \pm\frac{-2+(-6)+2}{3*\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \approx 0.535$, $\angle(l_1;l_2) \approx 57.7°$