Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 01.11.2022

1.1 Кривые второго порядка

1.1.1 Эллипс

Эллипсом называется множество точек M плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая F_1F_2: $MF_1 + MF_2 = 2a > F_1F_2$

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - большая полуось, b - малая полуось, $a^2 - b^2 = c^2$

Эксцентриситет: $\epsilon = \frac{c}{a}$ $(\epsilon < 1)$
Левый фокус: $F_1(-c; 0)$, правый фокус: $F_2(0; c)$, центр эллипса: $O(0; 0)$
Уравнения директрис: $x = \pm\frac{a}{\epsilon}$

Если $a < b$, то $b^2 - a^2 = c^2$, $\epsilon = \frac{c}{b}$, $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, тогда уравнения директрис: $y = \pm\frac{b}{\epsilon}$
Если $a = b = r$, то $c = 0 \implies F_1(-c; 0) = F_2(c; 0) = O(0; 0)$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\epsilon = 0$

1.1.2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, есть величина постоянная, меньшая F_1F_2: $|MF_1 - MF_2| = 2a < F_1F_2$

Каноническое уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a - действительная полуось, b - мнимая полуось, $a^2 + b^2 = c^2$

Эксцентриситет: $\epsilon = \frac{c}{a} > 1$
Левый фокус: $F_1(-c; 0)$, правый фокус: $F_2(c; 0)$, центр: $0(0; 0)$
$x = \pm\frac{a}{\epsilon}$ - уравнения директрис, $y = \pm\frac{b}{a}x$ - уравнения асимптот

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гипербола, сопряженная канонически
$y = \pm\frac{b}{a}x$, $F_1(0; -c)$, $F_2(0; c)$, $\epsilon = \frac{c}{b}$

1.1.3 Парабола

Параболой называется множество точек M плоскости, равноудаленных от данной точки F (фокус) и от данной прямой l (директриса)
$MF = r(M, l)$

Каноническое уравнение (OX): $y^2 = 2px$, $F(\frac{p}{2}; 0)$, $x = -\frac{p}{2}$ - уравнение директрис
Каноническое уравнение (OY): $x^2 = 2py$, $F(0; \frac{p}{2}$, $y = -\frac{p}{2}$

1.2 Параллельный перенос координат

Пусть точка M имеет координаты $(x;y)$ в системе Oxy и $(x';y')$ в системе $O'x'y'$, причем новое начало O' в старой системе имеет координаты $(a;b)$, тогда

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases} \tag{1}$$

1.3 Примеры решения задач

1.3.1 Пример 1

Найти экцентриситет, что-то там еще и много чего еще, если
$4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x - 89 = 0$

$4x^2 - 24x = 4(x^2 - 6x) = 4(x^2 - 6x + 9 - 9) = 4(x^2 - 6x + 9) - 36 = 4(x-3)^2 - 36$
$-25y^2 + 50y = -25(y^2 - 2y) = -25(y^2 - 2y + 1 - 1) =$
$-25(y^2 - 2y + 1) + 25 = -25(y-1)^2 + 25$

$4(x-3)^2 - 36 - 25(y-1)^2 + 25 - 89 = 0 \Longleftrightarrow 4(x-3)^2 - 25(y-1)^2 - 100 = 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ - уравнение гиперболы, $a = 5$, $b = 2$

Введем новые координаты: $x - 3 = x'$, $y - 1 = y'$, $O'(3;1)$
$\frac{(x')^2}{5^2} - \frac{(y')^2}{2^2} = 1$, $a = 5$ - действительная полуось, $b = 2$ - мнимая полуось

Уравнения директрис: $x' = \pm\frac{a}{c} = \pm\frac{5*5}{\sqrt{29}} = \pm\frac{25}{\sqrt{29}}$, **уравнения асимтот:** $y' = \pm\frac{b}{a}x' = \pm\frac{2}{5}x'$, **экцентриситет:** $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5}$
$F_1(-\sqrt{29};0)$, $F(\sqrt{29};0)$

2 Алгебра и геометрия - 12.11.2022

2.1 Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется вектор $\overrightarrow{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\alpha$, где α - угол между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$
2. $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{c} \perp \overrightarrow{b}$
3. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ образуют правую тройку

Если **один из векторов нулевой** или **эти векторы параллельны**, то их векторное произведение - тоже нулевой вектор.

Геометрическая интерпретация Длина вектора векторного произведения численно равна **площади параллелограмма**, построенного на этих векторах.

Свойства векторного произведения

1. $[a \times b] = -[b \times a]$
2. $[(\alpha a) \times b] = \alpha[a \times b]$
3. $[(a + b) \times c] = [a \times c] + [b \times c]$
4. $a \times a = 0$

Запись в виде определителя
$\overrightarrow{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Примеры
Пример 1. Дано: $|\overrightarrow{a}| = 3, |\overrightarrow{b}| = 4, \phi = 90°$. Найти $|(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})|$
$|(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b})| = |3\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{a} \times 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times 2\overrightarrow{b}| =$
$|-\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + 6\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = |5\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}| = 5|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}| = 5 * 3 * 4 = 60$

Пример 2. Дано: $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6)$. Найти площадь треугольника, образуемого этими точками.

$$\overrightarrow{AB} = \{2; 2; -3\}, \overrightarrow{AC} = \{4; 0; 6\}, \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$-12\overrightarrow{i} - 24\overrightarrow{j} + 8\overrightarrow{k}, |\{-12; -24; 8\}| = \sqrt{144 + 576 + 64} = 28$

Искомая площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}|\{-12; -24; 8\}| = 14$

Пример 3
Дано: $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} = \{4; -2; 3\}, \overrightarrow{b} = \{0; 1; 3\}, |\overrightarrow{x}| = 26$, найти координаты данного $\overrightarrow{x}$, образующего с осью OY тупой угол.
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}, \overrightarrow{x} = \{3\lambda; 12\lambda; -4\lambda\}, |x| = \sqrt{9\lambda^2 + 144\lambda^2 + 16\lambda^2} = 13|\lambda|, \lambda = \pm 2$
$\overrightarrow{x} = \{-6; -24; 8\}$ **- ответ, ибо именно он образует тупой угол**, или $\overrightarrow{x} = \{6; 24; -8\}$

2.2 Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов называется **число**, которое получается, если вектор $\overrightarrow{a}$ умножить векторно на $\overrightarrow{b}$, а потом результат этого произведения скалярно умножить на c:

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = ([\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}])\overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} > 0$ - если тройка векторов правая, $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} < 0$ - если тройка векторов левая.

Циклическая перестановка $\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \overrightarrow{c}\overrightarrow{a}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\overrightarrow{c}\overrightarrow{a}$
Если же перестановка соседних векторов, то происходит смена знака:
$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = -\overrightarrow{b}\overrightarrow{a}\overrightarrow{c}$

Запись в виде определителя

$$\overrightarrow{a}\overrightarrow{b}\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Условие компланарности Условие компланарности трех векторов - их смешанное произведение равно нулю.

Геометрическая интерпретация Смешанное произведение векторов по модулю равно **объему параллелепипеда**, построенного на этих векторах.
$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}V_{\text{пар}}$
Если нам необходимо найти высоту чего-то там, то $h = \frac{|abc|}{|[a \times b]|}$

Примеры

Пример 1. Дано: $\overrightarrow{a} = \{2;3;1\}$, $\overrightarrow{b} = \{1;-1;3\}$, $\overrightarrow{c} = \{1;9;-11\}$.
Определить, компланарны ли данные векторы.

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 10 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

Таким образом, данные три вектора **компланарны**

Пример 2. Дано: $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3)$. Найти объем тетраэдра, образуемого данными точками.

$\overrightarrow{AB} = \{3;6;3\}, \overrightarrow{AC} = \{1;3;-2\}, \overrightarrow{AD} = \{2;2;2\}$

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$3*2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

Объем тетраэдра: $S = \frac{1}{8} * |-18| = 3$

2.3 Двойное векторное произведение

Пусть $\overrightarrow{a}$ умножается векторно на $\overrightarrow{b}$, а полученный вектор векторно умножается на $\overrightarrow{c}$ - результат называется **двойным векторным произведением**: $[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = [[\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}]\overrightarrow{c}] \neq [\overrightarrow{a} \times [\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}]]$

$[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c})$

Примеры

Допустим, имеем $\overrightarrow{a} = \{x_1;0;0\}$, $\overrightarrow{b} = \{x_2;y_2;0\}$, $\overrightarrow{c} = \{x_3;y_3;z_3\}$, тогда

$$[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} * 0 - \overrightarrow{j} * 0 + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \{0;0;x_1y_2\}$$

$$[[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}] \times \overrightarrow{c}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & x_1y_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(0 - x_1y_2y_3) - \overrightarrow{j}(0 - x_3x_1y_2) + \overrightarrow{k} * 0 =$$

$\{-x_1y_2y_3; x_3x_1y_2; 0\}$

$a * c = x_1x_3, b * c = x_2x_3 + y_2y_3$, $\overrightarrow{b}(a*c) = \{x_1x_2x_3; x_1y_2x_3; 0\}$, $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = \{x_1(x_2x_3 + y_2y_3); 0; 0\}$

$\overrightarrow{b}(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c}) - \overrightarrow{a}(\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}) = \{x_1x_2x_3 - x_1(x_2x_3 + y_2y_3); x_1y_2x_3; 0\}$