Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 04.10.2022

1.0.1 Ранг матрицы

Пусть дана матрица A размера $m * n$.

Возьмем любые k ($k \le min(n;m)$) строк и k столбцов матрицы A.

На их пересечении стоят элементы, образующие определитель k-того порядка, который и называется минором k-го порядка.

Под минором 1-го порядка матрицы A понимается любой элемент.

Рангом r матрицы A называется наивысший порядок минора матрицы A, отличный от нуля.

Следовательно, если у нас матрица из четырех строк и трех столбцов, максимальный минор может быть три на три. Но если все они равны нулю, то мы не можем сказать, что ранг матрицы равен нулю.

Из определения следует:

1. r - целое число ($0 \le r \le min(m;n)$)
2. Все миноры $(r+1)$ порядка либо нулевые, либо не существуют.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, r(A) = 3$

Миноры 1-го порядка: любой элемент матрицы.

Миноры второго порядка: любой определитель этой матрицы 2x2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Миноры третьего порядка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \det A = 64 \neq 0$

Минора четвертого порядка у данной матрицы не существует.

1.1 Действия над матрицами

1. Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля.
2. Сложение: прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.
3. Перемещение (замена местами) двух строк или двух столбцов.
4. Вычеркивание нулевой строки или столбца.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

1.2 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + ... + a_{mn} * x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Система называется совместной, если она имеет решение. (*) Операции только над строками.

$$r(A) = r(A|B) \equiv r$$

Если $r = n$, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящих от $(n - r)$ свободных неизвестных.

1.3 Метод Гаусса

Если столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ свободных членов - нулевой, то система называется однородной.

Однородная система всегда имеет решение, и она всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Если в однородной системе число неизвестных n равно числу уравнений m, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases} . \tag{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, r(A|B) = 2 = r(A)$$

$r < n \rightarrow$ система имеет бесконечное кол-во решений, зависящих от (4 - 2) $=$ 2 свободных неизвестных.

Пусть $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}$ - базисный минор, тогда x_1 и x_2 - базисные члены, а x_3 и x_4 - свободные.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем данную матрицу, делая по главной диагонали базисного минора единицы, а по побочной нули.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} & \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Выпишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = \frac{17}{11} \\ 0x_1 + 1_x2 + \frac{9}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 = \frac{1}{11} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 + \frac{1}{11} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $x_3 = c_1$, а $x_4 = c_2$ $(c_1, c_2 \in R)$, тогда наша система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 + \frac{17}{11} \\ x_3 = -\frac{9}{11}c_1 + \frac{4}{11}c_2 + \frac{1}{11} \\ x_3 = c_1 \\ c_4 = c_2 \end{cases} \tag{5}$$

Исследуем на совместность систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases} \tag{6}$$

$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & \\ 0 & -2 & -7 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r(A|B$
$3, r(A) = 2$

Следовательно, система несовместна и решений не имеет.

2 Алгебра и геометрия - 07.10.2022

2.1 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Матрицы могут представляться на плоскости - для этого нужны собственные значения и собственные векторы.

Пусть дана квадратная матрица A n-ого порядка. Ненулевой вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором матрицы A, если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему:

$$A * X = \lambda X, \lambda \in R$$

Где λ - собственное значение соответствующего ему вектора матрицы A.

Для нахождения λ составляют характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если λ_0 - сосбтвенное значение матрицы A, то соответствующие собственные векторы находим из системы однородных линейных уравнений.

(*) Однородными называются системы, где матрица-столбец свободных членов B полностью состоит из нулей

$$(A - \lambda_0 E) * X = 0$$

2.1.1 Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 + 3 - \lambda - 8 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) + 3\lambda - 9 = 24 - 12\lambda - 14\lambda + 7\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$

$\lambda_1 = 1$, вынесем общий множитель:

$\frac{-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15}{\lambda - 1} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15)$

Решаем через дискриминант или через теорему Виета: что угодно.

Итого имеем:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$

Найдем теперь собственные векторы.

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$:

$$
\begin{cases}
(4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\
-x_1 + (3-1)x_2 - x_3 = 0 \\
x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 = 0
\end{cases} \tag{7}
$$

В матричном виде:
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем обратно в систему:

$$
\begin{cases}
x_1 - x_3 = 0 \\
x_2 - x_3 = 0
\end{cases} \tag{8}
$$

Отсюда видим, что $x_1 = x_3, x_2 = x_3$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, видим что $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Последовательно найдем теперь второй и третий собственный векторы: X_2 и X_3.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$
\begin{cases}
(4-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\
-x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0 \\
x_1 - 2x_2 + (2-3)x_3 = 0
\end{cases} \tag{9}
$$

Преобразуем в матричный вид: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Из этого видно, что $x_1 = x_2, x_1 = -x_3$

$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем третий собственный вектор.

Пусть $\lambda = \lambda_3 = 5$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$
\begin{cases}
(4-5)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\
-x_1 + (3-5)x_2 - x_3 = 0 \\
x_1 - 2x_2 + (2-5)x_3 = 0
\end{cases} \tag{10}
$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

Чему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Я зашел в какую-то фигню, где-то ошибся, но, в общем, ответ должен получиться следующий: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 Векторная алгебра. Операции над векторами

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок AB, заданный своим началом A и концом B.

Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Два вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (параллельны друг другу).

Три вектора называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{a}$ это коэффициенты разложения вектора по базису, то есть по трем некомпланарным векторам, обозначаемым как $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_1} = \{1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 1, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 0, 1\}, \overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{e_1} + y * \overrightarrow{e_2} + z * \overrightarrow{e_3}$

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ взаимно перпендикулярны и единичные векторы: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, то такой базис называется ортонормированным.

2.2.1 Пример

Разложить вектор $\overrightarrow{a} = \{4; 2; 0\}$, если возможно, по векторам $\overrightarrow{p} = \{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{q} = \{2; 2; -1\}$, $\overrightarrow{r} = \{3; 7; -7\}$

Для того, чтобы это было возможно, должно соблюдаться следующее выражение: $(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} \neq 0$ - достаточное условие некомпланарности.

$(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det X = -14 + 28 + 3 - 12 + 7 - 14 = 2 \neq 0$, следовательно, мы можем разложить данный вектор по трем некомпланарным векторам.

$\overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r}$

$\overrightarrow{p} = 1 * \overrightarrow{i} - 1 * \overrightarrow{j} + 2 * \overrightarrow{k}, \overrightarrow{q} = 2 * \overrightarrow{i} + 2 * \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{r} = 3 * \overrightarrow{i} + 7 * \overrightarrow{j} - 7 * \overrightarrow{k}$

$x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r} = x * \overrightarrow{i} - x * \overrightarrow{j} + 2x\overrightarrow{k} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{k} + 3z\overrightarrow{i} + 7z\overrightarrow{j} - 7z\overrightarrow{k}$

Далее для разложения по базису нам необходимо вынести $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$
$... = (x+2y+3z) + \overrightarrow{j}(-x+2y+7z) + \overrightarrow{k}(2x-y-7z)$
$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ -x+2y+7z=2 \\ 2x-y-7z=0 \end{cases} \tag{12}$$

Решим данную систему уравнений каким угодно способом, сначала составив расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2 \\ x_3 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x_2 \\ x_1 = -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Тогда $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$

3 Алгебра и геометрия - 14.10.2022

3.1 Центр масс

Если точки A и B заданы координатами $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB} : \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Разделить отрезок в соотношении $\lambda \neq -1$ это значит на прямой AB найти такую точку M, что вектор $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Если заданы координаты точек $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты делящей точки $M(x_m; y_m; z_m)$ находят по формулам:
$x_m = \frac{x_1 = \lambda x_2}{1+\lambda}, y_m = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z_m = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

Если M - середина AB, то $\lambda = 1$, а формулы
$x_m = \frac{x_1+x_2}{2}, y_m = \frac{y_1+y_2}{2}, z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$

3.1.1 Пример

Дано: $A_1(1; 3), m_1 = 10; A_2(7; 8), m_2 = 30; A_3(0; 4), m_3 = 5$. Определить S - центр масс системы.
Пусть C_1 делит A_1A_2 в соотношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = 3$, тогда
$x_c = \frac{1+3*7}{4} = \frac{22}{4}, y_c = \frac{27}{4}$
Пусть S делит CA_3 в соотношении $\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2} = \frac{1}{8}$, тогда
$x_s = \frac{11}{2} * \frac{8}{9} = \frac{44}{9}, y_s = \frac{\frac{27}{4}+\frac{11}{8}*4+\frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{29}{4} * \frac{8}{9} = \frac{58}{9}$.
Ответ: $S(\frac{44}{9}; \frac{58}{9})$

3.1.2 Некоторые нюансы

1) Можно доказать, что центр масс $S(x_s; y_s; z_s)$ материальной системы точек $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), ..., A_n(x_n; y_n; z_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, ..., m_n$ имеет следующие координаты:
$x_s = \frac{x_1*m_1+x_2*m_2+...+x_n*m_n}{m_1+m_2+...+m_n}, y_s = \frac{y_1*m_1+...+y_n*m_n}{m_1+...+m_n}, z_s = \frac{z_1*m_1+...+z_n*m_n}{m_1+...+m_n}$

2) Центры масс треугольника с координатами $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$ (то есть, центр масс однородной треугольной пластины) находится в точке пересечения медиан.
Если предпложить, что $n = 3, m_1 = m_2 = m_3$, то
$S(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$

3.2 Направляющие косинусы

Пусть α, β, γ - углы, которые образуют $\overrightarrow{a} = \{x, z, z\}$ с осями O_x, O_y, O_z. Тогда направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{a}$ связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и определяются формулами:
$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x_2+y_2+z_2}}, \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{a}|}$

3.2.1 Пример

Найти длину и направляющие косинусы $\overrightarrow{AM}$, если т. M делит AB в соотношении $\lambda = -2$, где $A(5;6;-1), B(0;-3;2)$.
Найдем координаты точки M: $x_m = -5, y_m = -12, z_m = 5$. Таким образом, $M(-5;-12;5)$.
$\overrightarrow{AM} = \{-10;-18;-6\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{100+324+36} = \sqrt{460} = 2\sqrt{115}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{-10}{2\sqrt{115}} \approx -0.466, \cos\beta = \frac{-18}{2\sqrt{115}} \approx -0.839, \cos\gamma = \frac{-6}{2\sqrt{115}} \approx 0.28.$
Выполним проверку: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{100}{460} + \frac{324}{460} + \frac{36}{460} = 1$

3.3 Решение практической работы, вариант 21

3.3.1 Задание 5, нахождение центра тяжести системы

Дано: $A_1(5;-4), A_2(0;2), A_3(6;6), m_1 = 25, m_2 = 45, m_3 = 15$.
Согласно формуле, $S_x = \frac{5*25+0*45+6*15}{25+45+15} = \frac{215}{85} = \frac{43}{17}$,
$S_y = \frac{-4*25+2*45+6*15}{25+45+15} = \frac{80}{85} = \frac{16}{17}$.
Ответ: $S(\frac{43}{17};\frac{16}{17})$

3.3.2 Задание 6, нахождение длины и направляющих косинусов

Дано: $A(-2;-5), B(4;1), \lambda = \frac{2}{7}$.
Найдем координаты точки M:
$M_x = \frac{-2+4}{1+\frac{2}{7}} = \frac{2}{\frac{9}{7}} = \frac{14}{9}, M_y = \frac{-5+1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{-4}{\frac{9}{7}} = \frac{-4*7}{9} = -\frac{28}{9}$, таким образом $M(\frac{14}{9};-\frac{28}{9})$
$\overrightarrow{AM} = \{\frac{14}{9}+2;-\frac{28}{9}+5\} = \{\frac{32}{9};\frac{17}{9}\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{1024}{81}+\frac{289}{81}} = \sqrt{\frac{1313}{81}}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{\frac{32}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.883, \cos\beta = \frac{\frac{17}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.469.$
Ответ: сами выпишите из того, что написано выше.

4 Алгебра и геометрия - 15.10.2022

4.1 Ранг матрицы

Рангом матрицы называется порядок наибольшего минора, отличного от нуля, который можно из этой матрицы получить.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ - миноров первого порядка полно, второго - тоже, третьего - тоже имеется, четвертого - лишь один.
Если определитель четвертого порядка не равен нулю, то $r(A) = 4$, но это нужно считать.

4.1.1 Теорема об окаймляющих минорах

Если матрица A имеет ненулевой минор $\Delta \neq 0$ к-ого порядка, а все миноры, содержащие Δ $k + 1$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

4.1.2 Другой способ подсчета ранга

Ранг матрицы равен количеству не полностью нулевых строк, если данная матрица приведена к ступенчатому виду.

Например, ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ равен трем.

Если матрица не приведена к ступенчатому виду - ее надо к ней привести.

4.2 Теорема Кронекера - Капелли

Система линейных уравнений имеет решение (является совместной), если ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы.
Если ранг расширенной матрицы не совпадает с рангом матрицы системы, то решений нет.
Если $r(A) = r(A*) = n$ - то будет единственное решение.
Если $r(A) = r(A*) < n$ - решений бесконечно много - система неопределена, r неизвестных назовем **базисными**, а $n - r$ неизвестных назовем **свободными** (через них все будем выражать).

В случае однородной системы всегда имеется хотя бы нулевое решение.

4.2.1 Фундаментальная система решений

$r(A*) = r(A) = r < n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - ... \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - ... \\ ... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - ... \end{cases} \tag{15}$$

$x_1(c_1c_2...c_{n-r}), x_2(c_1c_2...c_{n-r}), c_r(c_1c_2...c_{n-r})$

4.2.2 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases} \tag{16}$$

Составим матрицу расширенную системы:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, r(A) \neq r(A*)$

Система несовместна, решений нет

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \tag{17}$$

Составим расширенную матрицу системы:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) < n$ - **бесконечное множество решений**.

Решение: $\begin{pmatrix} 1 - a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

Пример 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -4x - 4y - 4z = -4 \end{cases} \tag{18}$$

Составим расширенную матрицу системы:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) = 1$

Имеем решение: $\begin{pmatrix} 1-a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Пример 4.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

Запишем в виде матрицы:
$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -3x_5 + 16x_4 - 2x_3 \\ 8x_2 = 4x_5 - 25x_4 + 7x_3 \end{cases} \tag{20}$$

Ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит количество базисных переменных равно двум, а количество свободных - трем.

$x_2 = \frac{x_5}{2} - \frac{25x_4}{8} + \frac{7x_3}{8}, x_1 = 5x_2 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 =$
$\frac{5}{2}x_5 - \frac{125}{8}x_4 + \frac{35}{8}x_3 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3$

Итоговый ответ:
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_5 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \sim C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$X_{\text{общ}} = C_1E_1 + C_2E_2 + C_3E_3$

Пример 5.
Имеем следующую расширенную матрицу системы:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \tag{21}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4 \\ -2x_2 = -1 - 3x_3 + x4 \end{cases} \tag{22}$$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, 2x_1 = 2 + x_3 + +3x_4 - x_2 =$
$2 + x_3 + 3x_4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -x_1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X = X_{\text{ч.р}} + X_{\text{одн}}, X_{\text{одн}} = C_1E_1 + C_2E_2,\ X_{\text{ч.р}}$ - наш столбик из циферок.