Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 24.10.2022

1.1 Прямая на плоскости

Ненулевой вектор $\overrightarrow{S}$, параллельный прямой l, называется направляющим вектором прямой.
Ненулевой вектор $\overrightarrow{N}$, перпендикулярный прямой l, называется вектором нормали прямой l.

1.1.1 Уравнения прямой на плоскости

1. $y = kx + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$
2. $y - y_0 = k(x - x_0)$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k
3. $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ - общее уравнение прямой (вектор нормали прямой: $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$)
4. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, A^2 + B^2 \neq 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ с заданным вектором нормали $\overrightarrow{N} = \{A; B\}$
5. $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}, m^2 + n^2 \neq 0$ - каноническое уравнение прямой (направляющий вектор $\overrightarrow{S} = \{m; n\}$, $M(x_0; y_0)$
6. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

1.1.2 Угол между двумя прямыми

$l_1 : y = k_1x + b$, $l_2 : y = k_2x + b_2$
$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{k_2-k_1}{1+k_1*k_2} \geq 0$

1. $l_1 \perp l_2 \iff k_2 = -\frac{1}{k_1}$
2. $l_1 \parallel l_2 \iff k_1 = k_2$

1.1.3 Примеры

Пример 1. Найти координаты центра описанной около треугольника ABC, где $A(0, 3)$, $B(2; 5)$, $C(-2; 7)$.
Пусть точка D - середина AB, ее координаты - $D(1; 4)$, точка P - середина BC, ее координаты - $P(0; 6)$

$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{AB} = \{2; 2\}, 2(x - 1) + 2(y - 4) = 0 \iff 2x + 2y - 10 = 0$
$\overrightarrow{BC} = \{-4; 2\}, -4(x - 0) + 2(y - 6) = 0 \iff -4x + 2y - 12 = 0$

$$\begin{cases} 2x + 2y - 10 = 0 \\ -4x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ответ: $S(-\frac{1}{3}; \frac{16}{3})$

Пример 2. Даны две вершины $A_1(2;4)$, $A_2(3;1)$, $\triangle A_1A_2A_3$, $N(4;0)$ - точка пересечения медиан.
Составить уравнение сторон этого треугольника и найти точку третьей вершины.

$X_N = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y_N = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ - координаты точки пересечения медиан.
$x_3 = 3X_N - x_1 - x_2 = 12 - 2 - 3 = 7$, $y_3 = 3Y_N - y_1 - y_2 = -5$
$A_3(7;-5)$ - координаты третьей вершины

$(A_1A_2) : \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Longleftrightarrow \frac{x-2}{3-2} = \frac{y-4}{1-4} \Longleftrightarrow -3x + y = y - 4 \Longleftrightarrow$
$-3x - y + 10 = 0$

$(A_2A_3) : 3x + 2y - 11 = 0$

$(A_1A_3) : 9x + 5y - 38 = 0$

Пример 3. Даны вершины $A_1(1;0)$, $A_2(3;5)$ треугольника $\triangle A_1A_2A_3$, $N(-1;3)$ - точка пересечения высот данного треугольника.
Определить координаты A_3.

$\overrightarrow{A_1N} = \{-2;3\}$, $-2(x-3) + 3(y-5) = 0 \longleftrightarrow -2x + 3x - 9 = 0$
$\overrightarrow{A_2N} = \{-4;-2\}$, $A_2N \perp (A_1A_3)$

Уравнение прямой A_1A_3:
$-4(x-1) - 2y \Longleftrightarrow -4x - 2y + 4 = 0 \Longleftrightarrow 2x + y - 2 = 0$

$$\begin{cases} -2x + 3y - 9 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Точка пересечения - $A_3(-\frac{3}{8}; \frac{11}{4})$

$y = \frac{2x+9}{3}, -2 = -\frac{1}{k}, k = \frac{1}{2}, \overrightarrow{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_2N} = \overrightarrow{A_3N} = \{2;1\}$

Пример 4.