Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 15.10.2022

1.1 Ранг матрицы

Рангом матрицы называется порядок наибольшего минора, отличного от нуля, который можно из этой матрицы получить.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ - миноров первого порядка полно, второго - тоже, третьего - тоже имеется, четвертого - лишь один.
Если определитель четвертого порядка не равен нулю, то $r(A) = 4$, но это нужно считать.

1.1.1 Теорема об окаймляющих минорах

Если матрица A имеет ненулевой минор $\Delta \neq 0$ к-ого порядка, а все миноры, содержащие Δ $k+1$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

1.1.2 Другой способ подсчета ранга

Ранг матрицы равен количеству не полностью нулевых строк, если данная матрица приведена к ступенчатому виду.

Например, ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ равен трем.

Если матрица не приведена к ступенчатому виду - ее надо к ней привести.

1.2 Теорема Кронекера - Капелли

Система линейных уравнений имеет решение (является совместной), если ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы системы.
Если ранг расширенной матрицы не совпадает с рангом матрицы системы, то решений нет.
Если $r(A) = r(A*) = n$ - то будет единственное решение.
Если $r(A) = r(A*) < n$ - решений бесконечно много - система неопределена, r неизвестных назовем **базисными**, а $n - r$ неизвестных назовем **свободными** (через них все будем выражать).

В случае однородной системы всегда имеется хотя бы нулевое решение.

1.2.1 Фундаментальная система решений

$r(A*) = r(A) = r < n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - ... \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - ... \\ ... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - ... \end{cases} \tag{1}$$

$x_1(c_1c_2...c_{n-r}), x_2(c_1c_2...c_{n-r}), c_r(c_1c_2...c_{n-r})$

1.2.2 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Составим матрицу расширенную системы:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, r(A) \neq r(A*)$

Система несовместна, решений нет

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Составим расширенную матрицу системы:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) < n$ - **бесконечное множество решений**.

Решение: $\begin{pmatrix} 1 - a \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$

Пример 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ -4x - 4y - 4z = -4 \end{cases} \tag{4}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, r(A) = r(A*) = 1$

Имеем решение: $\begin{pmatrix} 1-a-b \\ a \\ b \end{pmatrix}$

Пример 4.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Запишем в виде матрицы:

$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \\ 0 & 8 & -7 & 25 & -4 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \\ 0 & 16 & -14 & 50 & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -3x_5 + 16x_4 - 2x_3 \\ 8x_2 = 4x_5 - 25x_4 + 7x_3 \end{cases} \tag{6}$$

Ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит количество базисных переменных равно двум, а количество свободных - трем.

$x_2 = \frac{x_5}{2} - \frac{25x_4}{8} + \frac{7x_3}{8}, x_1 = 5x_2 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 =$
$\frac{5}{2}x_5 - \frac{125}{8}x_4 + \frac{35}{8}x_3 - 3x_5 + 16x_4 - 2x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3$

Итоговый ответ:

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{8}x_4 + \frac{19}{8}x_3 \\ \frac{1}{2}x_5 - \frac{25}{8}x_4 + \frac{7}{8}x_3 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \sim C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X_{\text{общ}} = C_1E_1 + C_2E_2 + C_3E_3$

Пример 5.

Имеем следующую расширенную матрицу системы:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ -2x_2 + 3x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \tag{7}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4 \\ -2x_2 = -1 - 3x_3 + x4 \end{cases} \tag{8}$$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, 2x_1 = 2 + x_3 + +3x_4 - x_2 =$
$2 + x_3 + 3x_4 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{2}x_4$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -x_1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X = X_{\text{ч.р}} + X_{\text{одн}}, X_{\text{одн}} = C_1E_1 + C_2E_2,\ X_{\text{ч.р}}$ - наш столбик из циферок.