# Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

October 2022

## Содержание

# 1 Алгебра и геометрия - 04.10.2022

### 1.0.1 Ранг матрицы

Пусть дана матрица $A$ размера $m * n$.

Возьмем любые $k$ ($k \leq min(n;m)$) строк и $k$ столбцов матрицы $A$.

На их пересечении стоят элементы, образующие определитель $k$-того порядка, который и называется минором $k$-го порядка.

Под минором 1-го порядка матрицы $A$ понимается любой элемент.

Рангом $r$ матрицы $A$ называется наивысший порядок минора матрицы $A$, отличный от нуля.

Следовательно, если у нас матрица из четырех строк и трех столбцов, максимальный минор может быть три на три. Но если все они равны нулю, то мы не можем сказать, что ранг матрицы равен нулю.

Из определения следует:

1. $r$ - целое число ($0 \leq r \leq min(m;n)$)
2. Все миноры ($r+1$) порядка либо нулевые, либо не существуют.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}, r(A) = 3$

Миноры 1-го порядка: любой элемент матрицы.

Миноры второго порядка: любой определитель этой матрицы 2x2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Миноры третьего порядка: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \det A = 64 \neq 0$

Минора четвертого порядка у данной матрицы не существует.

## 1.1 Действия над матрицами

1. Умножение строки или столбца на число, отличное от нуля.
2. Сложение: прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.
3. Перемещение (замена местами) двух строк или двух столбцов.
4. Вычеркивание нулевой строки или столбца.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 5 & 9 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

## 1.2 Теорема Кронекера-Капелли

Рассмотрим систему $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + ... + a_{1n} * x_n = b_1 \\ ... \\ a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + ... + a_{mn} * x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Система называется совместной, если она имеет решение. (*) Операции только над строками.

$$r(A) = r(A|B) \equiv r$$

Если $r = n$, то система имеет единственное решение. Если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений, зависящих от $(n - r)$ свободных неизвестных.

## 1.3 Метод Гаусса

Если столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ свободных членов - нулевой, то система называется однородной.

Однородная система всегда имеет решение, и она всегда совместна, так как имеет тривиальное (нулевое) решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$.

Если в однородной системе число неизвестных $n$ равно числу уравнений $m$, то она имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \end{cases} . \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0, r(A|B) = 2 = r(A)$$

$r < n \rightarrow$ система имеет бесконечное кол-во решений, зависящих от (4 - 2) $=$ 2 свободных неизвестных.

Пусть $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix}$ - базисный минор, тогда $x_1$ и $x_2$ - базисные члены, а $x_3$ и $x_4$ - свободные.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -9 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем данную матрицу, делая по главной диагонали базисного минора единицы, а по побочной нули.

$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{17}{11} & \\ 0 & 1 & \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

Выпишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = \frac{17}{11} \\ 0x_1 + 1_x2 + \frac{9}{11}x_3 - \frac{4}{11}x_4 = \frac{1}{11} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 + \frac{17}{11} \\ x_2 = -\frac{9}{11}x_3 + \frac{4}{11}x_4 + \frac{1}{11} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $x_3 = c_1$, а $x_4 = c_2$ $(c_1, c_2 \in R)$, тогда наша система приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2 + \frac{17}{11} \\ x_3 = -\frac{9}{11}c_1 + \frac{4}{11}c_2 + \frac{1}{11} \\ x_3 = c_1 \\ c_4 = c_2 \end{cases} \tag{5}$$

Исследуем на совместность систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases} \tag{6}$$

$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 & \\ 0 & -2 & -7 & -2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, r(A|B$
$3, r(A) = 2$

Следовательно, система несовместна и решений не имеет.

# 2 Алгебра и геометрия - 07.10.2022

## 2.1 Собственные значения и собственные векторы матрицы

Матрицы могут представляться на плоскости - для этого нужны собственные значения и собственные векторы.

Пусть дана квадратная матрица $A$ $n$-ого порядка. Ненулевой вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором матрицы $A$, если под действием этой матрицы он переходит в коллинеарный ему:

$$A * X = \lambda X, \lambda \in R$$

Где $\lambda$ - собственное значение соответствующего ему вектора матрицы $A$.

Для нахождения $\lambda$ составляют характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если $\lambda_0$ - cобственное значение матрицы $A$, то соответствующие собственные векторы находим из системы однородных линейных уравнений.

(*) Однородными называются системы, где матрица-столбец свободных членов $B$ полностью состоит из нулей

$$(A - \lambda_0 E) * X = 0$$

### 2.1.1 Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 + 3 - \lambda - 8 + 2\lambda - 4 + 2\lambda = (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) + 3\lambda - 9 = 24 - 12\lambda - 14\lambda + 7\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 23\lambda + 15 = 0$

$\lambda_1 = 1$, вынесем общий множитель:

$\frac{-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15}{\lambda - 1} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15)$

Решаем через дискриминант или через теорему Виета: что угодно.

Итого имеем:

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$

Найдем теперь собственные векторы.

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$:

$$\begin{cases} (4-1)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-1)x_3 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

В матричном виде:
$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Преобразуем обратно в систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда видим, что $x_1 = x_3, x_2 = x_3$

Пусть $x_1 = 1$, тогда $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, видим что $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Последовательно найдем теперь второй и третий собственный векторы: $X_2$ и $X_3$.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-3)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-3)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-3)x_3 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Преобразуем в матричный вид: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Из этого видно, что $x_1 = x_2, x_1 = -x_3$

$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Найдем третий собственный вектор.

Пусть $\lambda = \lambda_3 = 5$, тогда $(A - \lambda E) * X = 0$

$$\begin{cases} (4-5)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + (3-5)x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + (2-5)x_3 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Запишем данную систему уравнений в матричном виде: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

Чему соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Я зашел в какую-то фигню, где-то ошибся, но, в общем, ответ должен получиться следующий: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## 2.2 Векторная алгебра. Операции над векторами

Вектором $\overrightarrow{AB}$ называется направленный отрезок $AB$, заданный своим началом $A$ и концом $B$.

Длиной (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $AB$.

Два вектора называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой (параллельны друг другу).

Три вектора называются компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Координаты $x, y, z$ вектора $\overrightarrow{a}$ это коэффициенты разложения вектора по базису, то есть по трем некомпланарным векторам, обозначаемым как $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$.

$\overrightarrow{e_1} = \{1, 0, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 1, 0\}, \overrightarrow{e_2} = \{0, 0, 1\}, \overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{e_1} + y * \overrightarrow{e_2} + z * \overrightarrow{e_3}$

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ взаимно перпендикулярны и единичные векторы: $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, то такой базис называется ортонормированным.

### 2.2.1 Пример

Разложить вектор $\overrightarrow{a} = \{4; 2; 0\}$, если возможно, по векторам $\overrightarrow{p} = \{1; -1; 2\}$, $\overrightarrow{q} = \{2; 2; -1\}$, $\overrightarrow{r} = \{3; 7; -7\}$

Для того, чтобы это было возможно, должно соблюдаться следующее выражение: $(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} \neq 0$ - достаточное условие некомпланарности.

$(\overrightarrow{p} * \overrightarrow{q}) * \overrightarrow{r} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$

$\det X = -14 + 28 + 3 - 12 + 7 - 14 = 2 \neq 0$, следовательно, мы можем разложить данный вектор по трем некомпланарным векторам.

$\overrightarrow{a} = x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r}$

$\overrightarrow{p} = 1 * \overrightarrow{i} - 1 * \overrightarrow{j} + 2 * \overrightarrow{k}, \overrightarrow{q} = 2 * \overrightarrow{i} + 2 * \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{r} = 3 * \overrightarrow{i} + 7 * \overrightarrow{j} - 7 * \overrightarrow{k}$

$x * \overrightarrow{p} + y * \overrightarrow{q} + z * \overrightarrow{r} = x * \overrightarrow{i} - x * \overrightarrow{j} + 2x\overrightarrow{k} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{i} + 2y\overrightarrow{j} - y\overrightarrow{k} + 3z\overrightarrow{i} + 7z\overrightarrow{j} - 7z\overrightarrow{k}$

Далее для разложения по базису нам необходимо вынести $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$
$... = (x + 2y + 3z) + \overrightarrow{j}(-x + 2y + 7z) + \overrightarrow{k}(2x - y - 7z)$
$\overrightarrow{a} = x\overrightarrow{p} + y\overrightarrow{q} + z\overrightarrow{r}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + 7z = 2 \\ 2x - y - 7z = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Решим данную систему уравнений каким угодно способом, сначала составив расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -7 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 2 \\ x_3 = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}x_2 \\ x_1 = -x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1 \\ x_1 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \tag{14}$$

Тогда $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q} + \overrightarrow{r}$

# 3 Алгебра и геометрия - 14.10.2022

## 3.1 Центр масс

Если точки $A$ и $B$ заданы координатами $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB} : \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Разделить отрезок в соотношении $\lambda \neq -1$ это значит на прямой $AB$ найти такую точку $M$, что вектор $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Если заданы координаты точек $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты делящей точки $M(x_m; y_m; z_m)$ находят по формулам:
$x_m = \frac{x_1 = \lambda x_2}{1+\lambda}, y_m = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z_m = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$

Если $M$ - середина $AB$, то $\lambda = 1$, а формулы
$x_m = \frac{x_1+x_2}{2}, y_m = \frac{y_1+y_2}{2}, z_m = \frac{z_1+z_2}{2}$

### 3.1.1 Пример

Дано: $A_1(1; 3), m_1 = 10; A_2(7; 8), m_2 = 30; A_3(0; 4), m_3 = 5$. Определить $S$ - центр масс системы.
Пусть $C_1$ делит $A_1A_2$ в соотношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1} = 3$, тогда
$x_c = \frac{1+3*7}{4} = \frac{22}{4}, y_c = \frac{27}{4}$
Пусть $S$ делит $CA_3$ в соотношении $\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2} = \frac{1}{8}$, тогда
$x_s = \frac{11}{2} * \frac{8}{9} = \frac{44}{9}, y_s = \frac{\frac{27}{4}+\frac{11}{8}*4+\frac{1}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{29}{4} * \frac{8}{9} = \frac{58}{9}$.
Ответ: $S(\frac{44}{9}; \frac{58}{9})$

### 3.1.2 Некоторые нюансы

1) Можно доказать, что центр масс $S(x_s; y_s; z_s)$ материальной системы точек $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), ..., A_n(x_n; y_n; z_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, ..., m_n$ имеет следующие координаты:
$x_s = \frac{x_1*m_1+x_2*m_2+...+x_n*m_n}{m_1+m_2+...+m_n}, y_s = \frac{y_1*m_1+...+y_n*m_n}{m_1+...+m_n}, z_s = \frac{z_1*m_1+...+z_n*m_n}{m_1+...+m_n}$

2) Центры масс треугольника с координатами $A_1(x_1; y_1; z_1), A_2(x_2; y_2; z_2), A_3(x_3; y_3; z_3)$ (то есть, центр масс однородной треугольной пластины) находится в точке пересечения медиан.
Если предпложить, что $n = 3, m_1 = m_2 = m_3$, то
$S(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$

## 3.2 Направляющие косинусы

Пусть $\alpha, \beta, \gamma$ - углы, которые образуют $\overrightarrow{a} = \{x, z, z\}$ с осями $O_x, O_y, O_z$. Тогда направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ вектора $\overrightarrow{a}$ связаны соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ и определяются формулами:
$\cos\alpha = \frac{x}{|\overrightarrow{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x_2+y_2+z_2}}, \cos\beta = \frac{y}{|\overrightarrow{a}|}, \cos\gamma = \frac{z}{|\overrightarrow{a}|}$

### 3.2.1 Пример

Найти длину и направляющие косинусы $\overrightarrow{AM}$, если т. $M$ делит $AB$ в соотношении $\lambda = -2$, где $A(5;6;-1), B(0;-3;2)$.
Найдем координаты точки $M$: $x_m = -5, y_m = -12, z_m = 5$. Таким образом, $M(-5;-12;5)$.
$\overrightarrow{AM} = \{-10;-18;-6\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{100+324+36} = \sqrt{460} = 2\sqrt{115}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{-10}{2\sqrt{115}} \approx -0.466, \cos\beta = \frac{-18}{2\sqrt{115}} \approx -0.839, \cos\gamma = \frac{-6}{2\sqrt{115}} \approx 0.28.$
Выполним проверку: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{100}{460} + \frac{324}{460} + \frac{36}{460} = 1$

## 3.3 Решение практической работы, вариант 21

### 3.3.1 Задание 5, нахождение центра тяжести системы

Дано: $A_1(5;-4), A_2(0;2), A_3(6;6), m_1 = 25, m_2 = 45, m_3 = 15$.
Согласно формуле, $S_x = \frac{5*25+0*45+6*15}{25+45+15} = \frac{215}{85} = \frac{43}{17}$,
$S_y = \frac{-4*25+2*45+6*15}{25+45+15} = \frac{80}{85} = \frac{16}{17}$.
Ответ: $S(\frac{43}{17};\frac{16}{17})$

### 3.3.2 Задание 6, нахождение длины и направляющих косинусов

Дано: $A(-2;-5), B(4;1), \lambda = \frac{2}{7}$.
Найдем координаты точки $M$:
$M_x = \frac{-2+4}{1+\frac{2}{7}} = \frac{2}{\frac{9}{7}} = \frac{14}{9}, M_y = \frac{-5+1}{1+\frac{2}{7}} = \frac{-4}{\frac{9}{7}} = \frac{-4*7}{9} = -\frac{28}{9}$, таким образом $M(\frac{14}{9};-\frac{28}{9})$
$\overrightarrow{AM} = \{\frac{14}{9}+2;-\frac{28}{9}+5\} = \{\frac{32}{9};\frac{17}{9}\}, |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\frac{1024}{81}+\frac{289}{81}} = \sqrt{\frac{1313}{81}}$
Найдем направляющие косинусы:
$\cos\alpha = \frac{\frac{32}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.883, \cos\beta = \frac{\frac{17}{9}}{\sqrt{\frac{1313}{81}}} \approx 0.469.$
Ответ: сами выпишите из того, что написано выше.