Алгебра и геометрия

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Алгебра и геометрия - 21.11.2022

1.1 Плоскость в пространстве

$\overrightarrow{N}$ - ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости, называется **вектором нормали** данной плоскости.

1.1.1 Уравнения плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0$ - общее уравнение плоскости, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, $\overrightarrow{N} = \{A; B; C\}$
$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с данным $\overrightarrow{N} = \{A; B; C\} \neq 0$
$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ и $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$
$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через 3 точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой

1.1.2 Углы между плоскостями

Косинус угла между плоскостями α_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и α_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется по формуле:
$\cos(\alpha_1; \alpha_2) = \pm\frac{\overrightarrow{N_1} * \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}| * |\overrightarrow{N_2}|} = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} * \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \geq 0$
Если $\alpha_1 \perp \alpha_2$, то $\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2}$, если $\alpha_1 || \alpha_2$, то $\overrightarrow{N_1} || \overrightarrow{N_2}$

1.1.3 Примеры решения задач

Пример 1
Составьте уравнение плоскости α, параллельной оси Ox и проходящей через точки $A(1; 0; 5)$ и $B(0; -4; 8)$.
$M_0 = A(1; 0; 5)$, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \{-1; -4; 3\}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} = \{1; 0; 0\}$
$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3(y - 0) - (-4(z - 5)) = 0 \Longleftrightarrow$
$3y - (-4z + 20) = 0 \Longleftrightarrow 3y + 4z - 20 = 0$

Пример 2
Найдите угол между плоскостями α_1: $x - y + 80 = 0$, α_2: $3x + 4y + 5z - 17 = 0$

$N_1 = \{1; -1; 0\}$, $N_2 = \{3; 4; 5\}$
$\cos(\alpha_1; \alpha_2) = \frac{3+(-4)+0}{\sqrt{2}*\sqrt{50}} = \frac{-1}{\sqrt{2}*\sqrt{50}} = 0.1$, $\angle(\alpha_1; \alpha_2) = \arccos 0.1 \approx 84.3°$

Пример 3
Найдите расстояние от точки $P(0; -1; 5)$ до плоскости α, проходящей через точку $A(8; 1; -2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = \{1; 2; -2\}$

Первый способ решения данной задачи.
$r = |\text{Пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{PA}| = |\frac{\overrightarrow{n}*\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{n}|}|$, $\overrightarrow{PA} = \{8; 2; -7\}$
$r = \frac{8+4+14}{3} = \frac{26}{3}$
Второй способ решения данной задачи
$r = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
$x + 2y - 2z - 14 = 0$ - уравнение данной плоскости
$r = \frac{|0+2*(-1)-2*5-14|}{3} = \frac{26}{3}$