Теория принятия решений

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 18.09.2023 **2**
1.1 Геометрические методы решения матричных игр . . . 2
1.1.1 Решение матричной $2 \times n$ игры . . . 2
1.1.2 Решение матричной $m \times 2$ игры . . . 3
1.2 Домашнее задание . . . 4

1 Практическое занятие — 18.09.2023

Определение 1 *Лемма о масштабе. Говорит о стратегической эквивалентности двух игр, отличающихся только масштабом измерений. Пусть имеется две матричные игры, каждая из которых задается своей матрицей:* (P_A, v_A), (P'_A, v'_A), *причем* $P'_A = \alpha * P_A + \beta$ *(*α, β *— числа), тогда оптимальные векторы стратегий в этих играх совпадают:* $x^* = (x')^*$, $y^* = (y')^*$, *а цена игры изменится:* $v'_A = \alpha * v_A + \beta$.

Пример: $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Эту матрицу* P' *можно получить следующим образом:*

$P + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies P' = \frac{1}{2}(P+1)$

Аналитическое решение для матрицы $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*:*

1. *A:* $x' = (p', 1-p')$

   $1 * p' + 0(1-p') = 0 * p' + 1(1-p') \implies p' = 1 - p' \implies (p')^* = \frac{1}{2}$

   $(x')^* = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

   $v' = (p')^* = \frac{1}{2}$

   $v' = \frac{1}{2}(v+1) = \frac{1}{2} \implies v = 0$

1.1 Геометрические методы решения матричных игр

1.1.1 Решение матричной $2 \times n$ игры

$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$

Рассмотрим $PoV(x = p, y = v)$, $x = (p, 1-p)$ *— смешанная стратегия игрока A,* $y = (q_1, \dots, q_n$ *— смешанная стратегия игрока B,* $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Тогда цена игры $v = max_p min_j H_A(p, j)$, *где* $H_A(p,j) = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} = a_{ij} * p + a_{2j}(1-p)$.

Рассмотрим прямые линии $v = a_{1j} * p + a_{2j}(1-p)$, $p = p^*$.

Для того, чтобы определить, какие линии дают оптимальное решение, нужно построить уравнение этих прямых на плоскости и найти их минимум: $min_j\{a_{1j}p + a_{2j}(1-p)\}$ *— нижняя огибающая семейства прямых. На графике отмечаем самые нижние части всех прямых линий. Далее на этой нижней огибающей необходимо найти наивысшую точку (то есть, максимум). Именно эта точка дает решение:* $M(p^*, v^*)$, $v^* = v_A = v$ *— цена игры. Точка* M *является точкой пересечения двух участков нижней огибающей, которые показывают, какие стратегии выбрал игрок B.*

Пусть прямые $H_A(p,k)$ *и* $H_A(p,l)$ *дают точку пересечения. Тогда, чтобы найти решение, их нужно приравнять между собой:*

$v = H_A(p,k) = H_A(p,l)$, $p = p^*$. *Или, если записать в общем виде:* $v = a_{1k} * p + a_{2k}(1-p) = a_{1l}p + a_{2l}(1-p)$, $p = p^*$

Решение для B

$q_j = 0, j \neq k, l$. $q_k = q$, $q_l = 1 - q$

$v = a_{1k}q + a_{1l}(1-q) = a_{2k}q + a_{2l}(1-q)$, $q = q^*$

Частные случаи решений в зависимости от формы нижней огибающей

1. *Нижняя огибающая имеет одну наивысшую точку* $M(p^*, v^*)$

   (a) $p^* = 0$. *Точка* M *не является точкой пересечения двух участков нижней огибающей, как было записано ранее. Она лежит на какой-то* j*-ой прямой. Значит, игрок B в качестве оптимальной выбирает* j*-ую стратегию.*

   (b) $p^* = 1$. *Ситуация, симметричная предыдущему пункту. Игрок A выбирает стратегию* A_1. *Какую стратегию выбирает игрок B? Ту, на которую лежит точка* M, *то есть,* B_j, *соответствующую* j*-ой прямой, на которой лежит точка* M.

   (c) $0 \leq p^* \leq 1$. *Решение смотри выше: где мы рассматривали самое первое решение матричной* $2 \times n$ *игры на оси* PoV.

2. *Нижняя огибающая содержит горизонтальные участки, соответствующие j-ой строке игрока B. В этом случае решение в смешанных стратегиях отсутствует, есть решение только в чистых стратегиях. Так как игрок B выбирает какую-то j-ую стратегию, то это столбец $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix}$. Тогда игрок A выберет такую свою чистую стратегию, при которой его выигрыш максимален.*

   В данном случае не надо искать точку пересечения прямых на плоскости. Решаем в чистых стратегиях, как мы все давно прекрасно умеем делать.

Примеры *Пусть* $PA = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. *Игрок A имеет вектор стратегий:* $x = (p, 1-p)$, *игрок B:* $y = (q_1, q_2, q_3)$.
Записываем по столбцам матрицы:
$H_A(p, j) = v, j = 1, 2, 3$
$v = 2p + 4(1-p)$ — *для* B_1
$v = -3p + 5(1-p)$ — *для* B_2
$v = 5p - 1(1-p)$ — *для* B_3
Далее изобразим это на графике. Каждую пару точек соединим прямыми линиями: 2 *на оси* A_1 *и* 4 *на оси* A_2, *далее* -3 *на оси* A_1 *и* 5 *на оси* A_2, 5 *на оси* A_1 *и* -1 *на оси* A_2. *Далее найдем наименьшую точку нижней огибающей. Она содержит в себе только два участка прямых: линии* B_2 *и* B_3. *По рисунку точка* M *является пересечением второй и третьей линии.*
M — *точка пересечения второй и третьей прямых:*
$v = -3p + 5(1-p) = 5p - (1-p), p = p^* \implies 5 - 8p^* = 6p^* - 1 \implies p^* = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$.
Цена игры: $v = 5 - 8 * \frac{3}{7} = \frac{35-24}{7} = \frac{11}{7}$
Таким образом, $x^* = (\frac{3}{7}; \frac{4}{7})$.
Найдем вектор y: $q_1 = 0$, $q_2 = q$, $q_3 = 1 - q$.
$v = -3q + 5(1-q) = 2 * 0 + (-3) * q + 5(1-q)$
$v = 5q - 1 * (1-q), q = q^*$
Отсюда: $5 - 8q^* = 6q^* - 1 \implies q^* = \frac{3}{7}$.
Таким образом, вектор $q^* = (0; \frac{3}{7}; \frac{4}{7})$

1.1.2 Решение матричной $m \times 2$ игры

Платёжная матрица имеет следующий вид: $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$
Решение этой игры аналогично предыдущему случаю, но оно графически строится уже с точки зрения игрока B. Он имеет две стратегии: $y = (q, 1-q), 0 \le q \le 1$. *Игрок A имеет вектор стратегий:*
$x = (p_1, p_2, \dots, p_n), 0 \le p_i \le 1, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.
$v^* = v_A = v = min_q max_{1 \le i \le m} H_A(i, q)$
$H_A(i, q) = a_{i1} * q + a_{i2} * (1-q)$
На плоскости qOv построим семейство прямых линий $v = H_A(i, q)$, $1 \le i \le m$. *Далее на множестве этих прямых выделяем верхнюю огибающую и на этой верхней огибающей в качестве точки оптимума находим нижнюю точку* $N(q^*, v^*)$, *в которой и будет достигаться решение.*
$v^* = a_{k1}q^* + q_{k2} * (1-q^*) = a_{l1}q^* + a_{l2}(1-q^*)$, *где* k, l — *линии, составляющие верхнюю огибающую.*
Решение для A
$p_i = 0, i \ne k, l; p_k = p, p_l = 1 - p$
$P' = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} \\ a_{l1} & a_{l2} \end{pmatrix}$
$v^* = a_{k1} * p^* + a_{l1}(1-p^*) = a_{k2}p^* + a_{l2}(1-p^*)$

Пример №1 *Необходимо найти решение в смешанных стратегиях для следующей матрицы:*
$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Игрок A: $x = (p_1, p_2, \dots p_n)$
Игрок B: $y = (q, 1-q)$

$A_1 : v = 3q - 1(1-q)$
$A_2 : v = -2q + 4(1-q)$
$A_3 : v = 1 * q + 0(1-q)$
Построим график, соединим точки. Найдем верхнюю огибающую и точку $N(q^*, v^*)$. По графику видно, что мы смешиваем первую и вторую стратегию, третья стратегия не является выгодной дли игрока A.
Решение сводится к рассмотренному ранее на предыдущей паре.
***Решение для B**:*
$3q - (1-q) = -2q + 4(1-q) = v, q = q^*$
$4q^* - 1 = 4 - 6y^* \implies q^* = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
$v = 4 * \frac{1}{2} - 1 = 1$
***Решение для A**. Не забываем, что оно строится не по строкам матрицы, а по столбцам. Хотя строки являются его стратегиями, комбинациии строятся по столбцам:*
$p_3 = 0, p_2 = 1-p, p_1 = p.$
$v = 3p - 2(1-p) = -p + 4(1-p), p = p^* \implies 5p^* - 2 = 4 - 5p^* \implies p^* = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \implies x^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0), y^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), v = 5 * \frac{3}{5} - 2 = 3 - 2 = 1$

1.2 Домашнее задание

Задание №1 $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Задание №2 $P = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Задание №3 $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Задание №4 $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$