Лекция — 11.09.2023

Укажем **принципы оптимальности для игроков матричной игры**.
Решение игры:

- Игрок А: если он выбрал стратегию A_i, то игрок Б выберет такую стратегию B_j, для которой выигрыш игрока А будет минимальным: $min\ a_{ij}\ (1 \leq j \leq n)$, далее игрок А максимизирует свой выигрыш по всем своим стратегиям $max\ min\ a_{ij}\ (1 \leq i \leq m 1 \leq j \leq n)$ = $\underline{v}$ (**максимин** или нижняя цена игры — гарантированный выигрыш игрока А). Принцип выбора игроком А своей стратегии, основанный на максимизации минимального выигрыша, называют принципом максимина, а соответствующую стратегию максиминной.
- Игрок Б: пусть он выбрал стратегию B_j, тогда А выбирает такую стратегию A_i, при которой выигрыш игрока А максимальный: $max\ a_{ij}\ (1 \leq i \leq m)$. После этого игрок Б может гарантировать себе минимальный проигрыш, который будет равен $min\ max\ a_{ij}\ (1 \leq j \leq n 1 \leq i \leq m)$ = $\overline{v}$ (**минимакс** или верхняя цена игры — минимальный проигрыш игрока Б)

Цена игры v_A — средний выигрыш игрока А. В любой матричной игре всегда выполняется следующее неравенство:

$$\underline{v} \leq v_A \leq \overline{v}$$

Лемма. $\underline{v} \leq \overline{v}$
Доказательство. $a_{ij} \leq max\ a_{ij}\ (1 \leq i \leq m) \implies$
$min\ a_{ij}\ (1 \leq j \leq n) \leq min\ max\ a_{ij} = \overline{v}$
$\underline{v} = max\ min\ a_{ij} \implies \underline{v} \leq \overline{v}$

Ситуация равновесия в матричной ($m \times n$) игре

Ситуацией равновесия в матричной игре называется такая ситуация, от которой невыгодно отклоняться каждому из игроков.
Обозначим ситуацию равновесия таким образом: (A_i^*, B_i^*) или (i^*, j^*).
Ситуация называется равновесной (или седловой точкой), если одновременно выполняется следующее:

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

$$a_{i^*j} \geq a_{i^*j^*}$$

$a_{i^*j^*} = v_A^*$ — выигрыш игрока А в ситуации (i^*, j^*)
В ситуации равновесия: $v^* = \underline{v} = \overline{v}$. Если это равенство выполняется, то говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях. **Соответствующие максиминные и минимаксные стратегии игроков А и Б называются равновесными или оптимальными**.
Матричная игра может иметь или одну ситуацию равновесия, или несколько ситуаций равновесия, либо не иметь ни одной.
Если (i_1^*, j_1^*) и (i_2^*, j_2^*) — ситуации равновесия, то ситуации (i_1^*, j_2^*) и (i_2^*, j_1^*) также являются равновесными.

Пример:
$P = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Найти ситуацию равновесия. Найдем максимин и минимакс:
$\underline{v} = max\,\{-5, 4, -4\} = 4 \implies A_2$ — оптимальная стратегия
$\overline{v} = min\,\{5, 5, 4, 20, 4\} = 4 \implies B_3, B_5$ — оптимальные стратегии
Максимин равен минимаксу, следовательно, в игре есть ситуация равновесия. И их две: (A_2, B_3) и (A_2, B_5) — ситуации равновесия.

Смешанной расширение матричной игры

Смешанное расширение игры рассматривается в том случае, если $\underline{v} \leq \overline{v}$.
В этом случае игрокам следует выбирать свои стратегии случайным образом. При этом не сообщая об этом противнику.

Случайная величина, значение которой является стратегией (ее номером) игроков, называется **смешанной стратегией**.

Зададим смешанные стратегии для матричной $(m \times n)$ игры.
Смешанной стратегией x игрока А называется вектор:
$x = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$, p_i — вероятность выбора игроком A_i-ой стратегии.
Смешанной стратегией y игрока А называется вектор:
$y = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $0 \leq q_i \leq 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$, q_j — вероятность выбора игроком B_j-ой стратегии.

Найдем выигрыш игрока А в ситуации (x, y). В ситуации (A_i, B_j) выигрыш составляет $a_{ij} \implies a_{ij} p_i q_j$. Средний выигрыш будет равен:

$$H_A(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = x * P * y^T$$

Ситуацией (x^*, y^*) называется ситуация равновесия в смешанных стратегиях, а x^* и y^* — оптимальные (равновесные) смешанные стратегии игроков А и Б, если для всех x, y:

$$H_A(x, y) \leq H_A(x^*, y^*) \leq H_A(x^*, y)$$

Тогда цена игры $v_A = v^* = H_A(x^*, y^*)$
Приведенной определение означает, что:

- $v_A = max_x\, min_y\, H_A(x, y) = min_y\, max_x\, H_A(x, y)$

Основные теоремы теории игр

Теорема (Джон фон Нейман): любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

- Игрок А выбрал i-ую стратегию: $x^{(i)} = (i) = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$
- То же самое для игрока Б

Основные свойства оптимальных смешанных стратегий

1. Пусть $x^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ и $y^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ — оптимальные смешанные стратегии игроков А и Б, $v = H_A(x^*, y^*)$ — цена игры. Тогда оптимальная смешанная стратегия x^* игрока А (и аналогично для игрока Б) смешивается только из таких его чистых стратегий A_i, то есть отличны от нуля те вероятности p_i те вероятности, для которых:

$$v = H_A(i, y^*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*$$

   Оптимальная смешанная стратегия y^* игрока Б смешивается из таких B_j, то есть отличны от нуля такие вероятности q_j, для которых:

$$v = H_A(x^*, j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^*$$

2. Для того, чтобы (x^*, y^*) была ситуацией равновесия, а $v = H_A(x^*, y^*)$ — ценой игры, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$:

$$H_A(i, y^*) \leq v \leq H_A(x^*, j)$$

3. Для того, чтобы (x^*, y^*) была ситуацией равновесия, а $v = H_A(x^*, y^*)$ — ценой игры, необходимо и достаточно, чтобы:

$$max_i H_A(i, y^*) = min_j H_A(x^*, j)$$

или

$$max_i min_j H_a(i, y) = min_j max_x H_A(x, j)$$

4. В матричной игре множества оптимальных смешанных стратегий игроков являются выпуклыми многогранниками (многоугольниками).
5. Пусть платежная матрица $P = (a_{ij})_{n \times n}$ является кососимметрической, то есть $a_{ij} = -a_{ji} (\forall i \neq j)$. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков А и Б совпадают: $x^* = y^*$ и цена игры равна нулю: $v^* = 0$