Теория принятия решений

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 29.09.2023

На следующем занятии будет контрольная работа по пройденным темам: всякие разные матричные игры, см. остальные конспекты.

1.1 Решение в чистых стратегиях

Пример №1 Пусть $P_A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Покажем решение в чистых стратегиях для данной матричной игры.
Найдем максимин (максимум среди всех наименьших чисел в строках) и минимакс (минимум среди всех наибольших чисел в столбцах).
$\underline{v} = max\{0, 2, 1, 2, 0\} = 2$
$\overline{v} = min\{6, 2, 5, 5, 2, 6\} = 2$
Так как $\underline{v} = \overline{v} = v = 2$, то имеются седловые точки, необходимо их найти. У игрока А оптимальными стратегиями являются A_2, A_4. У игрока В оптимальными стратегиями являются B_2 и B_5. Таким образом, мы имеем **четыре седловые точки (ситуации равновесия)**: (A_2, B_2), (A_2, B_5), (A_4, B_2), (A_4, B_5).

1.2 Решение в смешанных стратегиях

Пример №1 Пусть $P_A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем максимин (максимум среди всех наименьших чисел в строках) и минимакс (минимум среди всех наибольших чисел в столбцах).
$\underline{v} = max\{-6, -1, -1, -1, -1, -4\} = -1$
$\overline{v} = min\{2, 2, 4, 2\} = 2$
Так как $\underline{v} < \overline{v}$, наш выигрыш заключен на интервале от -1 до 2. Решение в чистых стратегиях невозможно. Кроме того, необходимо сократить размерность данной матрицы, если это возможно. Исходя из принципов доминирования, можем вычеркнуть четвертую строку: $A_4 \leq A_5$
Таким образом, $P_A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Первый столбец доминирует четвертый столбец, так что
$P_A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_6 \end{matrix} \end{array}$. Вторая строка меньше четвертой: $P_A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_6 \end{matrix} \end{array}$. Первый столбец доминирует второй, так что $P_A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} B_1 & B_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ A_6 \end{matrix} \end{array}$. Это окончательный вариант матрицы. Больше доминирующих строк или столбцов нет. Имеем тип игры $m \times 2$.
Игрок A имеет вектор смешанных стратегий: $x = \{p_1, 0, p_3, 0, p_5, p_6\}$. Игрок B имеет вектор смешанных стратегий: $y = \{q_1, 0, q_3, 0\} = \{q, 0, 1 - q, 0\}$. Задача решается с точки зрения игрока B на плоскости QoV. Имеем отрезки:
$(1) : v = -6y = 4(1 - q)$
$(3) : v = -y + 2(1 - q)$
$(5) : v = 1 * y - 1 * (1 - q)$
$(6) : v = 2y - 4(1 - q)$

Слева откладываем B_3, справа откладываем B_1. На этом рисунке мы должны выделить **верхнюю огибающую** и выделить на ней **нижнюю точку**.
N — нижняя точка верхней огибающей — есть точка пересечения третьей и пятой прямых.
Решение для игрока B: $\begin{cases} v = -y + 2(1-q) \\ v = 1 * y - 1 * (1-q) \end{cases} \implies v_A^* = -3q^* + 2 = 2q^* - 1 \implies q^* = \frac{3}{5}, v_A = \frac{1}{5}.$
Решение для игрока A: $p_1 = p_6 = 0$, $p_3 = p$,
$p_5 = 1-p, \begin{cases} v = -1p + 1(1-p) \\ v = 2p - 1(1-p) \end{cases} \implies v_A = -2p^* + 1 = 3p^* - 1 \implies p^* = \frac{2}{5}, v_A = \frac{1}{5}.$
Запишем наше решение в общем виде: $x^* = (0, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0)$, $y^* = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0)$, $v_A = \frac{1}{5}$

Пример №2 (Игра полковника Блотто) Полковнику Блотто (игрок A) поставлена задача: прорваться m полками через 2 горных перевала, охраняемых n полками противника (игрок B). Выигрыш полковника равен общему числу его полков, прорвавшихся через 2 перевала. Тогда выигрыш можно записать в следующем виде:
$max(k_1 - l_1, 0) + max(k_2 - l_2, 0)$, где k_i — число полков A на i-ом перевале, l_i — число полков B на i-ом перевале.
Составим матрицу платежей. Рассмотрим случай, когда $m = 3$, $n = 2$:

$$P_A = \begin{pmatrix} & (2,0) & (1,1) & (0,2) \\ (3,0) & 1 & 2 & 3 \\ (2,1) & 1 & 1 & 2 \\ (1,2) & 2 & 1 & 1 \\ (0,2) & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies P_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

. Посмотрим на эту игру с точки зрения доминирования: первая строка доминирует вторую, а четвертая доминирует третью строку: $P_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & A_1 \\ 3 & 2 & 1 & A_4 \end{pmatrix}$. Больше отношений доминирования не наблюдается.
Игрок A имеет вектор смешанных стратегий: $x = \{p, 0, 0, 1-p\}$. Игрок B имеет вектор смешанных стратегий: $y = \{q_1, q_2, q_3\}$. Задача решается с точки зрения игрока A на плоскости PoV. Имеем отрезки.
На этом рисунке мы должны выделить **нижнюю огибающую** и выделить на ней **верхнюю точку**.
N — верхняя точка нижней огибающей — есть точка пересечения первой и третьей прямых.
Решение для игрока A: $\begin{cases} v = 1 * p + 3(1-p) \\ v = 3 * p + 1(1-p) \end{cases}$.
Решение для игрока B: $\begin{cases} v = 1 * q + 3(1-q) \\ v = 3 * q + 1(1-q) \end{cases}$, где $q = q_1, q_3 = 1-q$. Имеем: $p^* = q^* = \frac{1}{2}$, $v_A = 2$. Таким образом:
$x^* = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, $y^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

Пример №3 Пусть $P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем максимин (максимум среди всех наименьших чисел в строках) и минимакс (минимум среди всех наибольших чисел в столбцах).
$\underline{v} = max\{-3, -1, 0\} = 0$
$\overline{v} = min\{2, 1, 2\} = 1$
Так как $\underline{v} < \overline{v}$, наш выигрыш заключен на интервале от 0 до 1. Решение в чистых стратегиях невозможно. Кроме того, необходимо сократить размерность данной матрицы, если это возможно. В матрице нет доминируемых строк или столбцов. Можем применить метод обратной матрицы.
Если $|P| \neq 0$, то $x^* = \frac{uP^{-1}}{uP^{-1}u^T}$, $y^* = \frac{P^{-1}u^T}{uP^{-1}u^T}$, $v = \frac{1}{uP^{-1}u^T}$
Найдем обратную матрицу: $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$
Таким образом, $P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -5 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$u = (1,1,1)$, $uP^{-1} = -\frac{1}{5}(0-5+0, -2-8+1, -1+1-2) = -\frac{1}{5}(-5,-9,-2) = \frac{1}{5}(5,9,2)$,
$P^{-1}u^T = -\frac{1}{5}(0-2-1, -5-8+1, 0+1-2)^T = \frac{1}{5}(3,12,1)^T$, $uP^{-1}u^T = \frac{1}{5}(5+3+2) = \frac{1}{5}(3+12+1) = \frac{16}{5}$, $v_A = \frac{5}{16}$,
$x^* = v_A uP^{-1} = \frac{1}{16}(5,3,2) = (\frac{5}{16}, \frac{9}{16}, \frac{2}{16})$, $y^* = v_A(P^{-1}u^T)^T = \frac{1}{16}(3,12,1) = (\frac{3}{16}, \frac{12}{16}, \frac{1}{16})$.
Если бы матрица была бы вырожденной ($|P| = 0$), то нам необходимо было бы перейти к матрице $P' = \alpha P + \beta$, тогда $v' = \alpha * v + \beta$, $x' = x$, $y' = y$

Пример №4 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, |P| = 0, P' = \frac{1}{2}(P+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пример №5 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \underline{v} = 0, \overline{v} = 1$. Кроме того, доминируемых стратегий также не имеется. Ищем решение через обратную матрицу:
$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
По формулам получается: $uP^{-1} = (2 - \frac{1}{2} + 1, 0 + \frac{1}{2} + 0, 1 - \frac{1}{2} + 1) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $P^{-1}u^T = (3, -\frac{1}{2}, 2)$,
$uP^{-1}u^T = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 3 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2} \implies v_A = \frac{2}{9}$, $x^* = (\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, \frac{3}{9})$, $y^* = \frac{2}{9}(3, -\frac{1}{2}, 2) = (\frac{6}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{4}{9})$. Получили отрицательное число — отрицательную вероятность. Значит, в этом решении что-то не так. Этот вектор показывает, что игроку B необходимо отказаться от второй стратегии. Так как $q_2^* < 0$, то $q_2^* = 0 \implies P' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Дальше эту игру надо решать как игру 3×2.

1.3 Домашнее задание

Решить предыдущий пример, но правильно.