

# Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Практическое занятие — 27.10.2023</b>	<b>2</b>
1.1	Решение задач линейного программирования . . . . .	2
1.1.1	Геометрический способ решения . . . . .	2
1.1.2	Аналитические методы решение . . . . .	3
1.1.3	Домашнее задание . . . . .	6

# 1 Практическое занятие — 27.10.2023

## 1.1 Решение задач линейного программирования

### 1.1.1 Геометрический способ решения

**Пример №4** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$n = 4, m = 2 \Rightarrow n - m = 2$  — следовательно, геометрическое решение возможно.

Выберем переменные  $x_1, x_2$  в качестве свободных, выразим через них переменные  $x_3, x_4$ : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

.

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \Rightarrow x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим на плоскости  $x_1 O x_2$  область, отвечающую двум данным неравенствам. Получаем четырехугольник. Чтобы найти оптимальное решение, необходимо найти градиент. Перепишем  $F(\bar{x})$ :

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 5 - x_1 - 2x_2 - (9 - 3x_1 - 2x_2) = -4 + 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{gradient } F = \{3, 4\}$$

Обозначим на графике в качестве точки и проведем из нуля вектор. Кроме того, необходимо найти линию уровня, имеющую наибольшее пересечение с угловой точкой. Линия уровня в нашем случае имеет уравнение:

$$3x_1 + 4x_2 = c$$

Решение является т.  $A$  — пересечение двух прямых:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 \\ 4x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x_3, x_4$  в данной точке будет равняться нулю. Так что имеем вектор решения:  $x^* = (2; \frac{3}{2}; 0; 0)$ ,  
 $F(x^*) = -4 + 3 * 2 + 1 * \frac{3}{2} = 8$  — **максимальное значение**

### 1.1.2 Аналитические методы решение

Одним из аналитических методов решения ЗЛП является так называемый **симплекс-метод**. Его суть заключается в том, что мы обходим угловые точки, но делаем это не геометрически, а аналитическим способом. Для его реализации необходимо установить следующие элементы:

1. **Способ определения** какого-либо изначального допустимого базисного решения — то есть, удовлетворяющего системе ограничений:

$$AX = B$$

$$X = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0), \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m} - \text{допустимое базисное решение};$$

2. **Набор правил, определяющих переход** к наилучшему по сравнению с предыдущим решению;

3. **Критерий проверки** оптимальности найденного решения.

На начальном этапе необходимо выбрать  $m$  базисных переменных и выразить эти переменные через оставшиеся, свободные (количество которых равно  $n - m$ )

Пусть базисными являются переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$x_i = \alpha_{i, m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{i, n} x_n + \beta_i, i = \overline{1, m}$$

Начальное допустимое базисное решение:

$$X^{(0)} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0\}$$

где

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0, \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m}$$

В изначальное уравнение подставляем базисные переменные, выраженные через свободные:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=m+1}^n \gamma_i x_i + \gamma_0 \rightarrow \max$$

**Критерий оптимальности:** если все коэффициенты  $\gamma_i$  в выражении  $F(\bar{x})$  через свободные переменные будет отрицательным, то данное решение будет оптимальным; если же существуют  $\gamma_k > 0$ , то решение не является оптимальным. И номер  $k$  показывает, какую переменную необходимо перевести в базис. Но в базисе **не может быть** больше  $n$  переменных. Следовательно, необходимо убрать одну из предыдущих базисных переменных. Это и есть **переход к наилучшему по сравнению с предыдущим решению**.

**Пример №1** Решить аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 < 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Мы не можем запустить симплекс-метод для данной системы неравенств. Необходимо выполнить переход к канонической ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Все данные переменные неотрицательны. Далее необходимо выбрать базисные переменные. Пусть ими будут  $x_3, x_4, x_5, x_6$ , так как они легко выражаются через  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо проверить решение на оптимальность. Для этого в  $F(\bar{x})$  необходимо подставить только свободные переменные — так уже есть. Видим, что коэффициенты в  $F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2$  положительны.

Если  $x_1 = x_2 = 0$ , то  $x^{(0)} = (0, 0, 18, 16, 5, 21)$  — допустимое базисное решение. Не является оптимальным, так как  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_i > 0$

В базис вводят переменную, у которой  $\gamma_i$  максимально. В нашем случае  $\max \gamma_i = \gamma_2 = 3$ . Следовательно, вводим  $x_2$  в базис. Подставим в систему выше  $x_1 = 0$ :

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ \text{нет ограничений} : x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Надо выбрать минимальное ограничение:  $x_2 \leq 5$ . Следовательно, с строчки  $x_5 = 5 - x_2 \geq 0$  необходимо начать. Следовательно, заменим  $x_5$  в базисе на  $x_2$  (уберем  $x_5$ , введем  $x_2$ )

$$\begin{cases} x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_2) = 3 - x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_2) = 11 - 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2$  — свободные переменные. Следовательно,  $x^{(1)} = (0, 5, 3, 11, 0, 21)$ ,  $F(x^0) = 2x_1 + 3(5 - x_5) = 15 + 2x_1 - 3x_5$ . Решение не является оптимальным, так как  $\gamma_1 > 0$  — следовательно,  $x_1$  переводим в базис.  $x_5 = 0$ :

$$\begin{cases} 5 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{11}{2} \\ x_1 \leq \frac{21}{3} \end{cases}$$

Меньшим является  $x_1 \leq 3$ , соответствующее строке  $x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5) = 3 - x_1 + 3x_5 \geq 0$  в предыдущей системе. Следовательно, необходимо удалить  $x_3$ . Перепишем данное уравнение. Необходимо  $x_1$  выразить через  $x_3, x_5$ :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \geq 0 \\ x_2 = 5 - x_5 \geq 0 \\ x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3(3 - x_3 + 3x_5) = 12 + 3x_3 - 9x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_5 = 0 \implies x^{(2)} = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$$

$F(\bar{x}) = 15 + 2 * (3 - x_3 + 3x_5) - 3x_5 = 21 - 2x_3 + 3x_5$ . В этом решении  $F(x^{(2)}) = 21 > F(x^{(1)})$ . Решение неоптимально, необходимо переводить  $x_5$  в базис.

Подставим  $x_3 = 0$ :

$$\begin{cases} 3 + 3x_5 \geq 0 \implies x_5 \geq -1 \implies \text{ограничений нет} \\ x_5 \leq 5 \\ x_5 \leq 1 \\ x_5 \leq \frac{12}{9} \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Меньшим является  $x_5 \leq 1$ , соответствующее строке  $x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0$  в предыдущей системе. Необходимо  $x_5$  выразить через  $x_4, x_3$ :

$$x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

Теперь это уравнение подставим в оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 5 - (1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_4 = 0 \implies x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$$

$$F(\bar{x}) = 21 - 2x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4. \text{ Оптимальное решение достигнуто: } x^* = x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3).$$

$$\text{Решение исходной задачи: } x_{\text{исх}}^* = (6, 4)$$

**Пример №2** Найти аналитически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Выберем переменные  $x_1, x_2$  в качестве свободных, выразим через них переменные  $x_3, x_4$ : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные  $x_1, x_2$ .

$x_1 = x_2 = 0 \implies x^{(0)} = (0, 0, 5, 9)$ . Перепишем  $F(\bar{x})$ , получим  $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4x_2$  — решение неоптимально,  $F(x^{(0)}) = -4$ . Переводим в базис переменную  $x_2$ , так как у нее наибольший коэффициент.

$$x_1 = 0:$$

$$\begin{cases} x_3 = 5 - 2x_2 \geq 0 \implies x_3 \leq \frac{5}{2} \\ x_4 = 9 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Минимальное из них  $\frac{5}{2}$ . Следовательно, необходимо избавляться от  $x_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \\ x_4 = 9 - 3x_1 - 2(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 4 - 2x_1 + x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишем  $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 6 + x_1 - 2x_3$ ,  $x^{(1)} = (0, \frac{5}{2}, 0, 4)$ ,  $F(x^{(1)}) = 6$ . Решение неоптимально, так как имеем положительный коэффициент. Переведём  $x_1$  в базис.

$$x_3 = 0:$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 5 \\ x_4 = 4 - 2x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 2 — \text{минимальное} \end{cases}$$

Следовательно, второе уравнение необходимо переписать. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишем  $F(\bar{x}) = 6 + 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_3 = 8 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$ ,  $x^{(2)} = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$ ,  $F(x^{(2)}) = 8$ . Оптимальное решение, так как все с отрицательным коэффициентом.

### 1.1.3 Домашнее задание

Решить геометрически и аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$