Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 23.10.2023

Докажем следующее утверждение: множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i \to max(min)$
$AX = B$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $B = (b_1, \ldots, b_m)^T$
Пусть X_1^*, X_2^* — решение системы ограничений, то есть, $AX_1^* = AX_2^* = B$
Покажем, что $X^* = \alpha X_1^* + (1 - \alpha) X_2^*$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ также является решением системы ограничений.
$AX^* = A(\alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*) = \alpha * AX_1^* + (1 - \alpha) * AX_2^* = \alpha B + (1 - \alpha)B - B$
Так как X^* — это выпуклое множество...

1.1 Решение задач линейного программирования

Теорема 1 *Если задача линейного программирования (далее — ЗЛП) имеет оптимальное решение, то линейная функция $F(\overline{x})$* ***достигает своего оптимума (то есть, максимума или минимума) в одной из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений****.*
Отметим, что ***если оптимальное решение достигается более чем в одной точке****, то* ***оно является выпуклой линейной комбинацией этих точек****.*

Теорема 2 *Каждому допустимому базисному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_n^*)$ ЗЛП* ***соответствует одна из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений****.*
Таким образом, ***любое оптимальное решение ЗЛП является одной из угловых точек****, то есть* ***допустимым базисным решением****.*

1.1.1 Геометрический способ решения

Рассмотрим решение на плоскости. Оно возможно в следующих случаях:

1. Имеем две переменные: $n = 2$
2. Количество неизвестных минус количество уравнений равно двум: $n - m = 2$

Чтобы показать геометрическое решение, необходимо выбрать m переменных из $x_1, \ldots, x_n$ в качестве основных (главных, базисных), а остальные переменные назовем свободными.
Пусть x_1, x_2 — свободные переменные, а $x_3, \ldots, x_n$ — базисные.

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \implies$$

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \\ \ldots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases}$$

Так как $x_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, n} \implies \begin{cases} \beta_i + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
Нужно показать геометрически множество решений этой системы, которое является выпуклым многоугольником.

1. **Если нет пересечений в системе ограничений, то решение не существует**.
2. **Если есть пересечение, то решение будет**.

$F(\overline{x})$ выше было записано в следующем виде: $F(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$. **Необходимо переписать ее, выразив базисные переменные через свободные в следующем виде**: $F(\overline{x}) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0$
Если рассматривается задача на максимум, то **решение нужно искать в направлении возрастания функции** $F(\overline{x})$. Направление возрастания функции $F(\overline{x})$ — вектор градиент: $grad\ F = \{\frac{\delta F}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\}$. В нашем случае: $grad\ F = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

То есть, **необходимо нарисовать на плоскости x_1ox_2 уравнение прямых** $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = c$ (опорные прямые), перпендикулярные $grad\ F$

Если мы хотим найти максимум, то на многоугольнике решений надо найти точку, через которую проходит линия уровня (то есть, опорная прямая) с наибольшим значением уровня (то есть, константы c). Получающаяся точка и является оптимальным решением.

В случае **задачи на минимум** необходимо двигаться в направлении $-grad\ F$.

Пример №1 Решить геометрически задачу линейного программирования:

$$F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \implies \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \implies \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2. В результате получаем выпуклый шестиугольник.

$gradient\ F = (2, 3)$

Опорная прмая: $2x_1 + 3x_2 = c$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \implies x_1 = 18 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \implies 36 - 6x_2 + x_2 = 16 \implies x_2 = 4 \implies x_1 = 6 \end{cases}$$

Получаем решение: $X^* = (6, 4), F(X^*) = 24$

Пример №2 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Мы можем найти решение графически, так как $n = 6$, $m = 4$, $n - m = 2$. Из этой системы мы можем получить:

$$\begin{cases} x_4 = 13 + x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_5 = 26 - 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_2 \leq 1 + 2x_1 \\ x_1 \leq 3x_2 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2. Получаем многоугольник. Преобразуем $F(\overline{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\overline{x}) = 4x_1 - 3x_2 - (13 + x_1 - 3x_2) + (26 - 4x_1 - x_2) = -x_1 - x_2 + 13$$

Таким образом:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 13$$

$$gradient\ F = \{-1, -1\}, -gradient\ F = \{1, 1\}$$

Построим его на графике вместе с опорными линиями в его направлении. Видим: $A = \{5, 6\}, F(A) = -5 - 6 + 13 = 2$. Проверим другие точки: $B = \{6, 2\}, F(B) = -6 - 2 + 13 = 5$, $C = \{2, 5\}, F(C) = -2 - 5 + 13 = 6$. Окончательно убеждаемся: A — т. min

$x_4 = x_5 = 0$, $x_3 = 1 + 2 * 5 - 6 = 5$, $x_6 = -5 + 3 * 6 = 13 \implies X^* = (5, 6, 5, 0, 0, 13), F(X^*) = 2$

Пример №3 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 - x_3 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Сложим вместе первое и вторoе уравнение:

$$x_1 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2 - x_1 \geq 0$$

Сложим первое уравнение дважды и второе уравнение трижды:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 6 \implies x_4 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Получили:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости $x_1 o x_2$. Получаем четырехугольник. Преобразуем $F(\overline{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$F(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 + 3(1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2) - (2 - x_1) = x_1 + 3x_2 + 3 - x_1 - \frac{3x_2}{2} - 2 + x_1 = x_1 + \frac{3x_2}{2} + 1$

$$gradient\ F = \{1, \frac{3}{2}\}$$

Нарисуем этот вектор на плоскости. Кроме того, имеем линию уровня:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = c$$

Видим, что $gradient\ F$ перепендикулярен второй линии.

$$F(2; \frac{2}{3}) = 2 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3} + 1 = 4$$

$$F(0; 2) = 0 + \frac{3}{2} * 2 + 1 = 4$$

Так как решением являются две точки, то **оптимальным вектором решений является их выпуклая линейная комбинация**:

$$X^* = \alpha * A + (1 - \alpha)B, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

, где т. $A(2, \frac{2}{3})$, т. $B(0, 2)$

$$X^* = (2\alpha, \frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

$$X_3^* = 2 - 2\alpha, X_4^* = 1 - \frac{1}{3} * 2\alpha - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

2 Практическое занятие — 27.10.2023

2.1 Решение задач линейного программирования

2.1.1 Геометрический способ решения

Пример №4 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$n = 4, m = 2 \implies n - m = 2$ — следовательно, геометрическое решение возможно.
Выберем переменные x_1, x_2 в качестве свободных, выразим через них переменные x_3, x_4: вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

.
Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные x_1, x_2:

$$\begin{cases} 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим на плоскости x_1ox_2 область, отвечающую двум данным неравенствам. Получаем четырехугольник. Чтобы найти оптимальное решение, необходимо найти градиент. Перепишем $F(\overline{x})$:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 + 5 - x_1 - 2x_2 - (9 - 3x_1 - 2x_2) = -4 + 3x_1 + 4x_2$$

$$gradient\ F = \{3, 4\}$$

Обозначим на графике в качестве точки и проведем из нуля вектор. Кроме того, необходимо найти линию уровня, имеющую наибольшее пересечение с угловой точкой. Линия уровня в нашем случае имеет уравнение:

$$3x_1 + 4x_2 = c$$

Решение является т. A — пересечение двух прямых:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 \\ 4x_2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

x_3, x_4 в данной точке будет равняться нулю. Так что имеем вектор решения: $x^* = (2; \frac{3}{2}; 0; 0)$,
$F(x^*) = -4 + 3 * 2 + 1 * \frac{3}{2} = 8$ — **максимальное значение**

2.1.2 Аналитические методы решение

Одним из аналитических методов решения ЗЛП является так называемый **симплекс-метод**. Его суть заключается в том, что мы обходим угловые точки, но делаем это не геометрически, а аналитическим способом. Для его реализации необходимо установить следующие элементы:

1. **Способ определения** какого-либо изначального допустимого базисного решения — то есть, удовлетворяющего системе ограничений:

   $AX = B$

   $X = (\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0)$, $\beta_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, m}$ — допустимое базисное решение;

2. **Набор правил, определющих переход** к наилучшему по сравнению с предыдущим решению;

3. **Критерий проверки** оптимальности найденного решения.

На начальном этапе необходимо выбрать m базисных переменных и выразить эти переменные через оставшиеся, свободные (количество которых равно $n - m$)
Пусть базисными являются переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$x_i = \alpha i_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \alpha i_n + \beta i,\ i = \overline{1.m}$$

Начальное допустимое базисное решение:

$$X^{(0)} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0\}$$

где

$$x_{m+1} = \cdots = x_n = 0, \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m}$$

В изначальное уравнение подставляем базисные переменные, выраженные через свободные:

$$F(\overline{x}) = \sum_{i=m+1}^{n} \gamma_i x_i + \gamma_0 \to max$$

Критерий оптимальности: если все коэффициенты γ_i в выражении $F(\overline{x})$ через свободные переменные будет отрицательным, то данное решение будет оптимальным; если же существуют $\gamma_k > 0$, то решение не является оптимальным. И номер k показывает, какую переменную необходимо перевести в базис. Но в базисе **не может быть** больше n переменных. Следовательно, необходимо убрать одну из предыдущих базисных переменных. Это и есть **переход к наилучшему по сравнению с предыдущим решению**.

Пример №1 Решить аналитически ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 < 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Мы не можем запустить симплекс-метод для данной системы неравенств. Необходимо выполнить переход к канонической ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Все данные переменные неотрицательны. Далее необходимо выбрать базисные переменные. Пусть ими будут x_3, x_4, x_5, x_6, так как они легко выражаются через x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо проверить решение на оптимальность. Для этого в $F(\overline{x})$ необходимо подставить только свободные переменные — так уже есть. Видим, что коэффициенты в $F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2$ положительны.
Если $x_1 = x_2 = 0$, то $x^{(0)} = (0, 0, 18, 16, 5, 21)$ — допустимое базисное решение. Не является оптимальным, так как $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_i > 0$
В базис вводят переменную, у которой γ_i максимально. В нашем случае $max\ \gamma_i = \gamma_2 = 3$. Следовательно, вводим x_2 в базис. Подставим в систему выше $x_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ \text{нет ограничений} : x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Надо выбрать минимальное ограничение: $x_2 \leq 5$. Следовательно, с строчки $x_5 = 5 - x_2 \geq 0$ необходимо начать. Следовательно, заменим x_5 в базисе на x_2 (уберем x_5, введем x_2)

$$\begin{cases} x_5 = 5 - x_5 \geq 0 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5) = 3 - x_1 + 3x_5 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_5) = 11 - 2x_1 + x_5 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 — свободные переменные. Следовательно, $x^{(1)} = (0, 5, 3, 11, 0, 21)$, $F(x^0) = 2x_1 + 3(5 - x_5) = 15 + 2x_1 - 3x_5$.
Решение не является оптимальным, так как $\gamma_1 > 0$ — следовательно, x_1 переводим в базис.
$x_5 = 0$:

$$\begin{cases} 5 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{11}{2} \\ x_1 \leq \frac{21}{3} \end{cases}$$

Меньшим является $x_1 \leq 3$, соответствующее строке $x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_5) = 3 - x_1 + 3x_5 \geq 0$ в предыдущей системе. Следовательно, необходимо удалить x_3. Перепишем данное уравнение. Необходимо x_1 выразить через x_3, x_5:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \geq 0 \\ x_2 = 5 - x_5 \geq 0 \\ x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3(3 - x_3 + 3x_5) = 12 + 3x_3 - 9x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$x_3 = x_5 = 0 \implies x^{(2)} = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$
$F(\overline{x}) = 15 + 2 * (3 - x_3 + 3x_5) - 3x_5 = 21 - 2x_3 + 3x_5$. В этом решении $F(x^{(2)}) = 21 > F(x^{(1)})$. Решение неоптимально, необходимо переводить x_5 в базис.
Подставим $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} 3 + 3x_5 \geq 0 \implies x_5 \geq -1 \implies \text{ограничений нет} \\ x_5 \leq 5 \\ x_5 \leq 1 \\ x_5 \leq \frac{12}{9} \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Меньшим является $x_5 \le 1$, соответствующее строке $x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \ge 0$ в предыдущей системе. Необходимо x_5 выразить через x_4, x_3:

$$x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

Теперь это уравнение подставим в оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 5 - (1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$x_3 = x_4 = 0 \implies x^{(3)} = (6, 4, 0.0, 1, 3)$
$F(\overline{x}) = 21 - 2x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$. **Оптимальное решение достигнуто**: $x^* = x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$.
Решение исходной задачи: $x^*_{\text{исх}} = (6, 4)$

Пример №2 Найти аналитически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Выберем переменные x_1, x_2 в качестве свободных, выразим через них переменные x_3, x_4: вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \ge 0$$

.
Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \ge 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные x_1, x_2.
$x_1 = x_2 = 0 \implies x^{(0)} = (0, 0, 5, 9)$. Перепишем $F(\overline{x})$, получим $F(\overline{x}) = -4 + 3x_1 + 4x_2$ — решение неоптимально, $F(x^{(0)}) = -4$. Переводим в базис переменную x_2, так как у нее наибольший коэффициент.
$x_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_3 = 5 - 2x_2 \ge 0 \implies x_3 \le \frac{5}{2} \\ x_4 = 3 - 2x_2 \ge 0 \implies x_2 \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

Минимальное из них $\frac{5}{2}$. Следовательно, необходимо избавляться от x_3.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \ge 0 \\ x_4 = 9 - 3x_1 - 2(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 4 - 2x_1 + x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Перепишем $F(\overline{x}) = -4 + 3x_1 + 4(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 6 + x_1 - 2x_3$, $x^{(1)} = (0, \frac{5}{2}, 0, 4), F(x^{(1)}) = 6$. Решение неоптимально, так как имеем положительный коэффициент. Переведём x_1 в базис.
$x_3 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 \ge 0 \implies x_1 \le 5 \\ x_4 = 4 - 2x_1 \ge 0 \implies x_1 \le 2 \text{ — минимальное} \end{cases}$$

Следовательно, второе уравнение необходимо переписать. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \ge 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Перепишем $F(\overline{x}) = 6 + 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_3 = 8 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$, $x^{(2)} = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$, $F(x^{(2)}) = 8$. Оптимальное решение, так как все с отрицательным коэффициентом.

2.1.3 Домашнее задание

Решить геометрически и аналитически ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

3 Практическое занятие — 30.10.2023

3.1 Решение задач линейного программирования

Как было показано выше, при поиске max функции $f(x)$ принцип оптимальности в симплекс методе выглядел следующим образом: если в выражении $f(x)$ через свободные переменные все коэффициенты при этих переменных отрицательные, то выбранное допустимое базисное решение будет оптимальным. Если же ищется минимум функции $f(x)$, то в соответствии с принципом оптимальности все коэффициенты при этих переменных должны быть положительными, что и определяет решение.

3.1.1 Реализация симплекс-метода при помощи симплекс-таблиц

Рассмотрим реализацию симплекс-метода при помощи реализации симплекс-таблиц. Пусть рассматривается каноническая задача линейного программирования, в которой имеется n переменных и m ограничений—равенств, при этом $m \leq n$.
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \to max\ (min)$
$AX = B, X \geq 0$, $A = (a_{ij})_{m \times m}$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $B = (b_1, \dots, b_m)^T$
Ход решения:
Некоторые m переменных выбираются в качестве базисных. Их мы всегда можем выразить через свободные в следующем виде:
$x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1}x_{m+1} - \dots - \alpha_{i,n}x_n$, $i = \overline{1,m}$, где $x_{m+1,\dots,x_n}$ — свободные переменные
$x_{m+1} = \dots = x_n = 0 \implies X^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_m^{(0)}, 0, \dots, 0)$, $X^{(0)}$ является допустимым решением, если все $\beta i \geq 0$
Пусть решение допустимо, преобразуем функцию $F(\overline{x})$. То есть, подставим в нее базисные переменные, выраженные через свободные:
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(\beta_i^{(0)} - \alpha_{i,m+1}^{(0)} x_{m+1} - \dots - \alpha_{i,n}^{(0)} x_n) + \sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \beta_i^{(0)} + \sum\limits_{j=m+1}^{n} (c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,j}^{(0)} c_i) x_j =$
$\Delta_0^{(0)} \pm \sum\limits_{j=m+1}^{n} \Delta_j^{(0)} x_j$, $\Delta_0^{(0)}$ — свободный коэффициент, $\Delta_j^{(0)}$ — обозначение для коэффициентов.
$\Delta_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \beta_i = C_\delta * X_\delta$
Знак плюс в формуле выше берется для задачи на минимум, знак минус берется для задачи на максимум. Можем переписать: $\Delta_j^{(k)} = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)} c_i = c_j - C_\delta * X_j$ — для задачи на минимум, $\Delta_j^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)} c_i - c_j = C_\delta * X_j - c_j$ — для задачи на максимум.
C_δ состоит из коэффициентов c_i, соответствующих базисным переменным. $X_\delta = (\beta_1^0, \dots, \beta_m^{(0)})$, нули в него не входят.
Все коэффициенты системы ограничений, а также c_i, Δ_0 и Δ_j удобно свести в **симплекс-таблицу**, которая отражает ход решения, достигнутое решение и признак оптимальности на каждом шаге алгоритма.
На нулевом шаге симплекс-таблица будет иметь следующий вид:
Перерисовать с фотографии
$\Delta_1 = \dots = \Delta_m = 0$ (для базисных переменных). Последний столбец Θ опредлеляет базисную переменную, которую необходимо вывести из базиса. **Признак оптимальности достигнутого решения**: если на некотором шаге s все

$\Delta_j^{(s)} \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то полученное допустимое базисное решение $X^{(s)}$ будет оптимальным, то есть $X^{(s)} = X^*$ и
$F(X^*) = F^* = \Delta_0^{(S)} = max\ (min)\ F(\overline{x})$
Пусть на некотором шаге s некоторые из $\Delta_j^{(s)}$ отрицательны, то есть $\Delta_j < 0$. Тогда решение не является оптимальным и необходимо перейти к новому допустимому базисному решению. Далее из множества отрицательных Δ_j выберем то, которое по модулю оптимально. Например, это будет $\Delta_l^{(S)}$. Тогда переменную x_l необходимо перевести в базис.
Соответствующий столбец X_l называется **разрешающим столбцом**.
Далее по каждой строке симплекс-таблицы находим ограничение на новую базисную переменную x_l. Для этого делим поэлементно значения X_δ на значения X_l
Правило определения θ_i на шаге s:

1. Если $\beta_i^{(s)}$ и $a_{i,l}^{(s)}$ имеют разные знаки, то $\theta_i^{(s)} = \infty$ считается равной бесконечности (нет ограничений);

2. Если $\beta_i^{(s)} = 0$ и $a_{i,l}^{(s)} < 0$, то также $\theta_i^{(s)} = \infty$;

3. Если $a_{i,l}^{(s)} = 0$, то $\theta_i^{(s)} = \infty$;

4. Если $\beta_i^{(s)} = 0$ и $a_{i,l}^{(s)} > 0$, то $\theta_i^{(s)} = 0$;

5. Если $\beta_i^{(s)}$ и $a_{i,l}^{(s)}$ имеют одинаковые знаки, то $\theta_i^{(s)} = \frac{\beta_i^{(s)}}{a_{i,l}^{(s)}}$

Далее из значений θ_i нужно выбрать минимальное, которое обозначим как θ_k. k обозначает номер базисной переменной, которую нужно вывести из базиса. Соответствующую строку x_k называют **разрешающей строкой**. $\alpha_{k,l}$ называют **разрешающим элементом**.
Преобразование симплекс-таблицы начинается с разрешающей строки и элемент, который стоит на пересечении этой строки и X_l, называют **разрешающим элементом**. Необходимо:

1. все элементы разрешающей строки кроме c_k поделить на разрешающий элемент;

2. в столбцах, соответствующих базисным переменным, поставить 0 и 1, причем 1 — напротив своей базисной переменной в столбце б., 0 — в остальных случаях;

3. остальные элементы $\alpha_{i,j}$ новой симплекс-таблицы вычисляются следующим образом:

$$\alpha_{i,j}^{(s+1)} = \alpha_{i,j}^{(s)} - \frac{\alpha_{i,j}^{(s)} * \alpha_{k,j}^{(s)}}{\alpha_{k,l}^{(s)}}, \beta_i^{(s+1)} = \beta_i^{(s)} - \frac{\alpha_{i,l}^{(s)} * \beta_k^{(s)}}{\alpha k, l^{(s)}}$$

4. Для новой симплекс-таблицы вычисляются коэффициенты $\Delta_0^{(s+1)}$ и $\Delta_j^{(s+1)}$ (только для свободных переменных, так как для базисных равны нулю) и проверяем таблицу на оптимальность. То есть, если окажется, что все коэффициенты неотрицательны, то решение достигнуто. Иначе решение неоптимально и мы заново вычисляем ограничения, находим все необходимое и переходим к новой таблице.

3.1.2 Решение задач

Пример №1 Решить ЗЛП при помощи симплекс-таблиц:

$$F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$$

Перейдем от неравенств к равенствам (добавим дополнительные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Представим это всё в виде симплекс-таблицы (№1):

$$\begin{pmatrix} \text{б} & C_\text{б} & X_\text{б} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_3 & 0 & 18 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{3} = 6 \\ x_4 & 0 & 16 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{1} = 16 \\ x_5 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{1} = 5 \\ x_6 & 0 & 21 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$X^{(0)} = (0, 0, X_\text{б}) = (0, 0, 0, 18, 16, 5, 7)$
$\Delta_0 = C_\delta * X_\delta$
$\delta_j = C_\delta * X_j - c_j$
Решение неоптимально. Переводим x_2 в базис. Разрешающий столбец — X_2. θ_5 — минимум. Разрешающий элемент — 1 на пересеченини x_5 и X_2. Следовательно, x_5 выводим из базиса. Необходимо составить новую симплекс-таблицу (№2):

$$\begin{pmatrix} \text{б} & C_\text{б} & X_\text{б} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{1} = 3 \\ x_4 & 0 & 11 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{11}{2} = 2 \\ x_2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x_6 & 0 & 21 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{21}{3} \\ \Delta_j & & 15 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \end{pmatrix}$$

Видим, что есть один отрицательный коэффициент: Δ_1. Решение неоптимально. Смотрим на столбец X_1. Они все положительны кроме одного нуля. Делим столбец. Выбираем минимум — это будет θ_1. Следовательно, разрешающий элемент — на пересечении x_3 и X_1. Необходимо составить новую симплекс-таблицу (№3):

$$\begin{pmatrix} \text{б} & C_\text{б} & X_\text{б} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \\ x_4 & 0 & 5 & 0 & 0 & -2 & 1 & 5 & 0 & \\ x_2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x_6 & 0 & 12 & 0 & 0 & -3 & 0 & 9 & 1 & \\ \Delta_j & 21 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & & \end{pmatrix}$$