

# Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция — 23.10.2023</b>	<b>2</b>
1.1	Решение задач линейного программирования . . . . .	2
1.1.1	Геометрический способ решения . . . . .	2

# 1 Лекция — 23.10.2023

Докажем следующее утверждение: множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max(\min)$$

$$AX = B, A = (a_{ij})_{m \times n}, X = (x_1, \dots, x_n)^T, B = (b_1, \dots, b_m)^T$$

Пусть  $X_1^*, X_2^*$  — решение системы ограничений, то есть,  $AX_1^* = AX_2^* = B$

Покажем, что  $X^* = \alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$  также является решением системы ограничений.

$$AX^* = A(\alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*) = \alpha * AX_1^* + (1 - \alpha) * AX_2^* = \alpha B + (1 - \alpha)B = B$$

Так как  $X^*$  — это выпуклое множество...

## 1.1 Решение задач линейного программирования

**Теорема 1** Если задача линейного программирования (далее — ЗЛП) имеет оптимальное решение, то линейная функция  $F(\bar{x})$  достигает своего оптимума (то есть, максимума или минимума) в одной из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Отметим, что если оптимальное решение достигается более чем в одной точке, то оно является выпуклой линейной комбинацией этих точек.

**Теорема 2** Каждому допустимому базисному решению  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_n^*)$  ЗЛП соответствует одна из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Таким образом, любое оптимальное решение ЗЛП является одной из угловых точек, то есть допустимым базисным решением.

### 1.1.1 Геометрический способ решения

Рассмотрим решение на плоскости. Оно возможно в следующих случаях:

1. Имеем две переменные:  $n = 2$
2. Количество неизвестных минус количество уравнений равно двум:  $n - m = 2$

Чтобы показать геометрическое решение, необходимо выбрать  $m$  переменных из  $x_1, \dots, x_n$  в качестве основных (главных, базисных), а остальные переменные назовем свободными.

Пусть  $x_1, x_2$  — свободные переменные, а  $x_3, \dots, x_n$  — базисные.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \implies$$

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases}$$

$$\text{Так как } x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \implies \begin{cases} \beta_i + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нужно показать геометрически множество решений этой системы, которое является выпуклым многоугольником.

1. Если нет пересечений в системе ограничений, то решение не существует.
2. Если есть пересечение, то решение будет.

$F(\bar{x})$  выше было записано в следующем виде:  $F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ . Необходимо переписать ее, выразив базисные переменные через свободные в следующем виде:  $F(\bar{x}) = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_0$

Если рассматривается задача на максимум, то решение нужно искать в направлении возрастания функции  $F(\bar{x})$ . Направление возрастания функции  $F(\bar{x})$  — вектор градиент:  $\text{grad } F = \left\{ \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n} \right\}$ . В нашем случае:  $\text{grad } F = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ .

То есть, необходимо нарисовать на плоскости  $x_1ox_2$  уравнение прямых  $\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = c$  (опорные прямые), перпендикулярные  $\text{grad } F$

Если мы хотим найти максимум, то на многоугольнике решений надо найти точку, через которую проходит линия уровня (то есть, опорная прямая) с наибольшим значением уровня (то есть, константы  $c$ ). Получающаяся точка и является оптимальным решением.

В случае задачи на минимум необходимо двигаться в направлении  $-\text{grad } F$ .

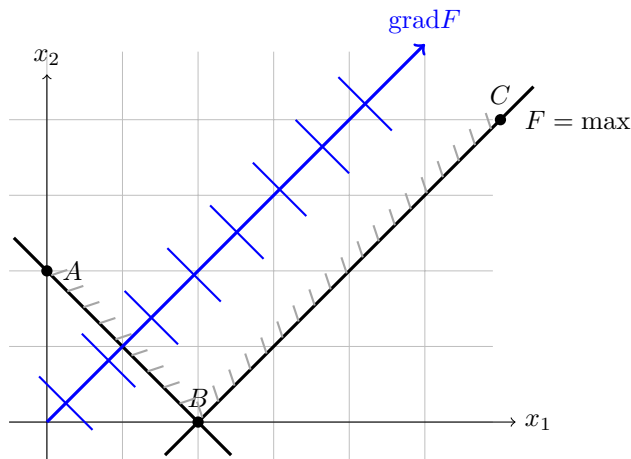


Рис. 1: Чертёж к определению геометрического способа решения ЗЛП

**Пример №1** Решить геометрически задачу линейного программирования:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \implies \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \implies \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1ox_2$ . В результате получаем выпуклый шестиугольник.

$\text{gradient } F = (2, 3)$

Опорная прямая:  $2x_1 + 3x_2 = c$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \implies x_1 = 18 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \implies 36 - 6x_2 + x_2 = 16 \implies x_2 = 4 \implies x_1 = 6 \end{cases}$$

Получаем решение:  $X^* = (6, 4), F(X^*) = 24$

**Пример №2** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

При ограничениях:

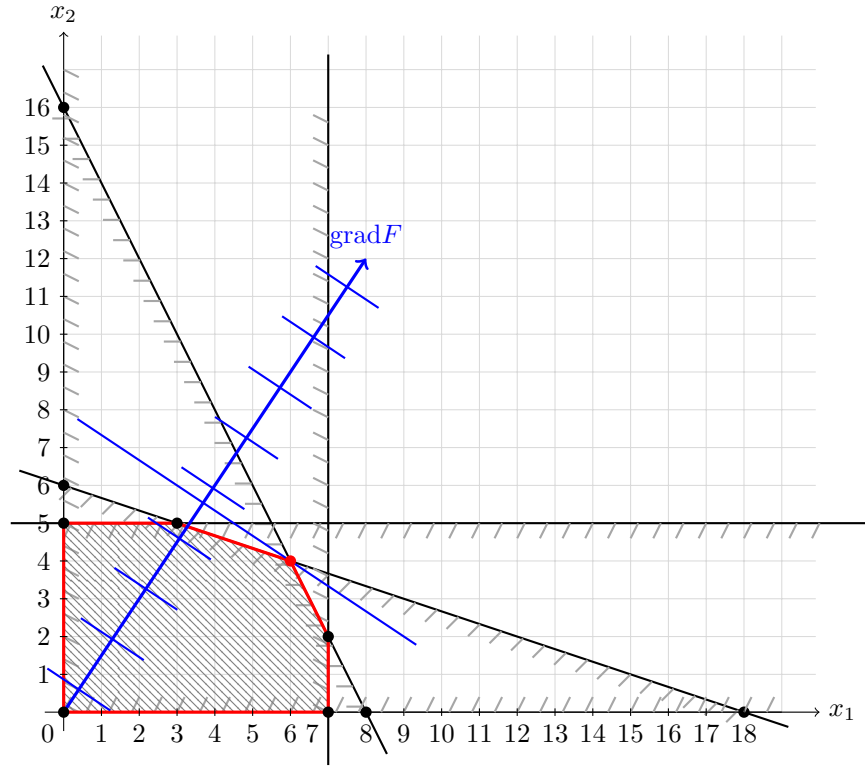


Рис. 2: Чертёж к примеру 1

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Мы можем найти решение графически, так как  $n = 6$ ,  $m = 4$ ,  $n - m = 2$ . Из этой системы мы можем получить:

$$\begin{cases} x_4 = 13 + x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_5 = 26 - 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_2 \leq 1 + 2x_1 \\ x_1 \leq 3x_2 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1 o x_2$ . Получаем многоугольник. Преобразуем  $F(\bar{x})$ , чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - (13 + x_1 - 3x_2) + (26 - 4x_1 - x_2) = -x_1 - x_2 + 13$$

Таким образом:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 13$$

$$\text{gradient } F = \{-1, -1\}, -\text{gradient } F = \{1, 1\}$$

Построим его на графике вместе с опорными линиями в его направлении. Видим:  $A = \{5, 6\}$ ,  $F(A) = -5 - 6 + 13 = 2$ . Проверим другие точки:  $B = \{6, 2\}$ ,  $F(B) = -6 - 2 + 13 = 5$ ,  $C = \{2, 5\}$ ,  $F(C) = -2 - 5 + 13 = 6$ . Окончательно убеждаемся:  $A$  — т.  $\min$

$$x_4 = x_5 = 0, x_3 = 1 + 2 * 5 - 6 = 5, x_6 = -5 + 3 * 6 = 13 \implies X^* = (5, 6, 5, 0, 0, 13), F(X^*) = 2$$

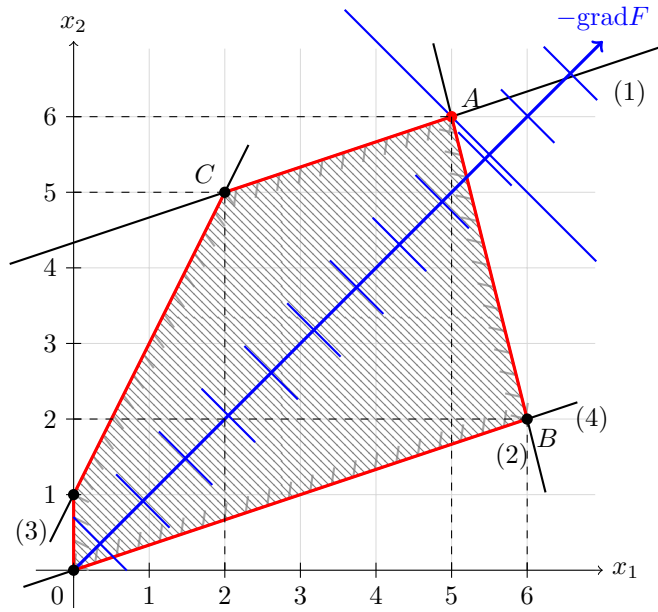


Рис. 3: Чертёж к примеру 2

**Пример №3** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Сложим вместе первое и второе уравнение:

$$x_1 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2 - x_1 \geq 0$$

Сложим первое уравнение дважды и второе уравнение трижды:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 6 \implies x_4 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Получили:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1 o x_2$ . Получаем четырехугольник. Преобразуем  $F(\bar{x})$ , чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3(1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2) - (2 - x_1) = x_1 + 3x_2 + 3 - x_1 - \frac{3x_2}{2} - 2 + x_1 = x_1 + \frac{3x_2}{2} + 1$$

$$\text{gradient } F = \{1, \frac{3}{2}\}$$

Нарисуем этот вектор на плоскости. Кроме того, имеем линию уровня:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = c$$

Видим, что  $\text{gradient } F$  перпендикулярен второй линии.

$$F(2; \frac{2}{3}) = 2 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3} + 1 = 4$$

$$F(0; 2) = 0 + \frac{3}{2} * 2 + 1 = 4$$

Так как решением являются две точки, то **оптимальным вектором решений является их выпуклая линейная комбинация**:

$$X^* = \alpha * A + (1 - \alpha)B, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

, где т.  $A(2, \frac{2}{3})$ , т.  $B(0, 2)$

$$X^* = (2\alpha, \frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

$$X_3^* = 2 - 2\alpha, X_4^* = 1 - \frac{1}{3} * 2\alpha - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

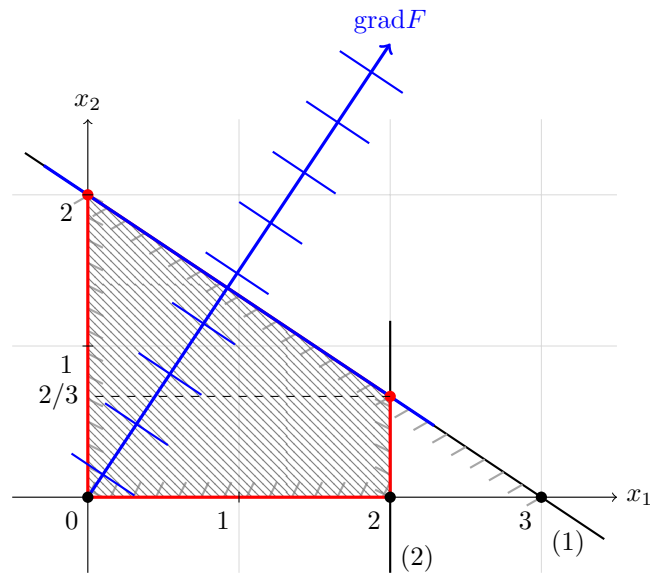


Рис. 4: Чертёж к примеру 3