

Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Лекция — 23.10.2023	2
1.1	Решение задач линейного программирования	2
1.1.1	Геометрический способ решения	2
2	Практическое занятие — 27.10.2023	6
2.1	Решение задач линейного программирования	6
2.1.1	Геометрический способ решения	6
2.1.2	Аналитические методы решение	8
2.1.3	Домашнее задание	11

1 Лекция — 23.10.2023

Докажем следующее утверждение: множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max(\min)$$

$$AX = B, A = (a_{ij})_{m \times n}, X = (x_1, \dots, x_n)^T, B = (b_1, \dots, b_m)^T$$

Пусть X_1^*, X_2^* — решение системы ограничений, то есть, $AX_1^* = AX_2^* = B$

Покажем, что $X^* = \alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ также является решением системы ограничений.

$$AX^* = A(\alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*) = \alpha * AX_1^* + (1 - \alpha) * AX_2^* = \alpha B + (1 - \alpha)B = B$$

Так как X^* — это выпуклое множество...

1.1 Решение задач линейного программирования

Теорема 1 Если задача линейного программирования (далее — ЗЛП) имеет оптимальное решение, то линейная функция $F(\bar{x})$ достигает своего оптимума (то есть, максимума или минимума) в одной из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Отметим, что если оптимальное решение достигается более чем в одной точке, то оно является выпуклой линейной комбинацией этих точек.

Теорема 2 Каждому допустимому базисному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_n^*)$ ЗЛП соответствует одна из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Таким образом, любое оптимальное решение ЗЛП является одной из угловых точек, то есть допустимым базисным решением.

1.1.1 Геометрический способ решения

Рассмотрим решение на плоскости. Оно возможно в следующих случаях:

1. Имеем две переменные: $n = 2$
2. Количество неизвестных минус количество уравнений равно двум: $n - m = 2$

Чтобы показать геометрическое решение, необходимо выбрать m переменных из x_1, \dots, x_n в качестве основных (главных, базисных), а остальные переменные назовем свободными.

Пусть x_1, x_2 — свободные переменные, а x_3, \dots, x_n — базисные.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \implies$$

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases}$$

$$\text{Так как } x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \implies \begin{cases} \beta_i + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нужно показать геометрически множество решений этой системы, которое является выпуклым многоугольником.

1. Если нет пересечений в системе ограничений, то решение не существует.
2. Если есть пересечение, то решение будет.

$F(\bar{x})$ выше было записано в следующем виде: $F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$. Необходимо переписать ее, выразив базисные переменные через свободные в следующем виде: $F(\bar{x}) = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_0$

Если рассматривается задача на максимум, то решение нужно искать в направлении возрастания функции $F(\bar{x})$. Направление возрастания функции $F(\bar{x})$ — вектор градиент: $\text{grad } F = \left\{ \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n} \right\}$. В нашем случае: $\text{grad } F = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

То есть, необходимо нарисовать на плоскости x_1ox_2 уравнение прямых $\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = c$ (опорные прямые), перпендикулярные $\text{grad } F$

Если мы хотим найти максимум, то на многоугольнике решений надо найти точку, через которую проходит линия уровня (то есть, опорная прямая) с наибольшим значением уровня (то есть, константы c). Получающаяся точка и является оптимальным решением.

В случае задачи на минимум необходимо двигаться в направлении $-\text{grad } F$.

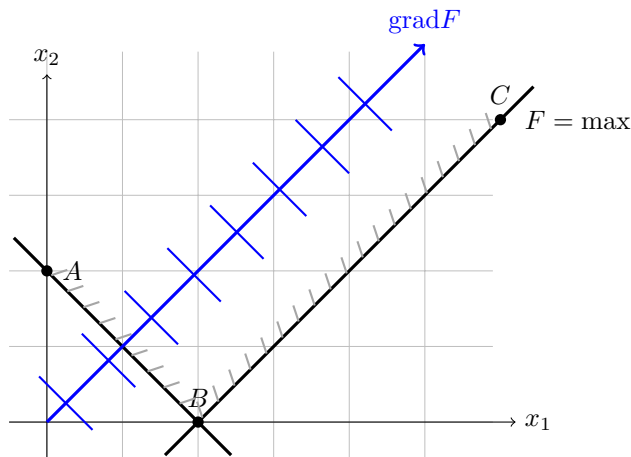


Рис. 1: Чертёж к определению геометрического способа решения ЗЛП

Пример №1 Решить геометрически задачу линейного программирования:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \implies \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \implies \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2 . В результате получаем выпуклый шестиугольник.

$\text{gradient } F = (2, 3)$

Опорная прямая: $2x_1 + 3x_2 = c$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \implies x_1 = 18 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \implies 36 - 6x_2 + x_2 = 16 \implies x_2 = 4 \implies x_1 = 6 \end{cases}$$

Получаем решение: $X^* = (6, 4), F(X^*) = 24$

Пример №2 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

При ограничениях:

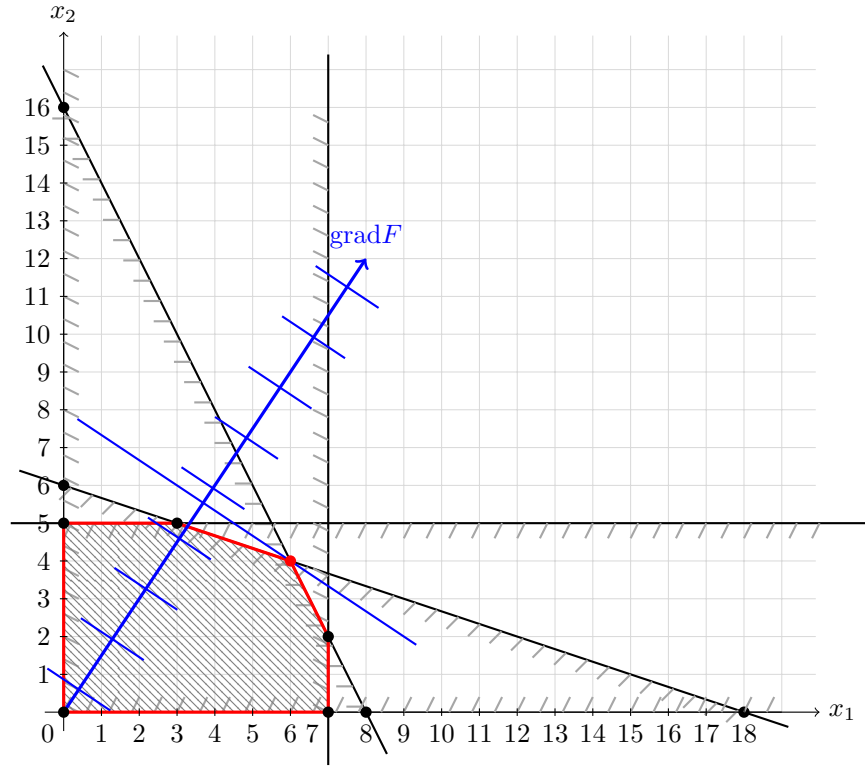


Рис. 2: Чертёж к примеру 1

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Мы можем найти решение графически, так как $n = 6$, $m = 4$, $n - m = 2$. Из этой системы мы можем получить:

$$\begin{cases} x_4 = 13 + x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_5 = 26 - 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_2 \leq 1 + 2x_1 \\ x_1 \leq 3x_2 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости $x_1 o x_2$. Получаем многоугольник. Преобразуем $F(\bar{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - (13 + x_1 - 3x_2) + (26 - 4x_1 - x_2) = -x_1 - x_2 + 13$$

Таким образом:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 13$$

$$\text{gradient } F = \{-1, -1\}, -\text{gradient } F = \{1, 1\}$$

Построим его на графике вместе с опорными линиями в его направлении. Видим: $A = \{5, 6\}$, $F(A) = -5 - 6 + 13 = 2$. Проверим другие точки: $B = \{6, 2\}$, $F(B) = -6 - 2 + 13 = 5$, $C = \{2, 5\}$, $F(C) = -2 - 5 + 13 = 6$. Окончательно убеждаемся: A — т. \min

$$x_4 = x_5 = 0, x_3 = 1 + 2 * 5 - 6 = 5, x_6 = -5 + 3 * 6 = 13 \implies X^* = (5, 6, 5, 0, 0, 13), F(X^*) = 2$$

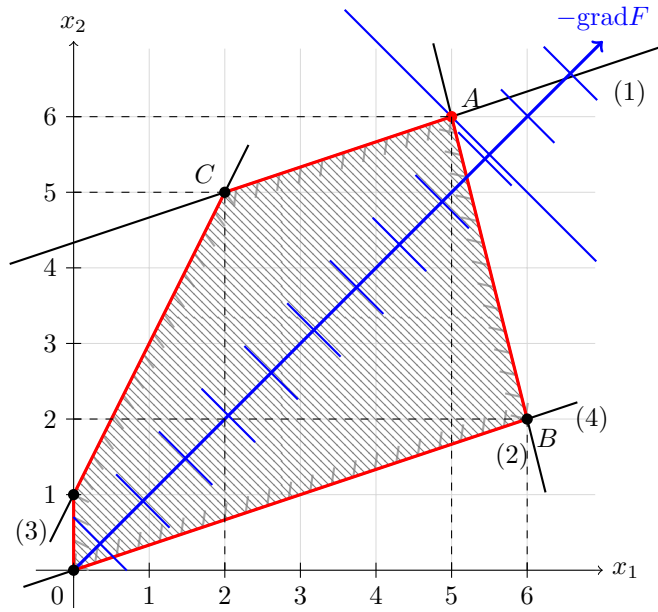


Рис. 3: Чертёж к примеру 2

Пример №3 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Сложим вместе первое и второе уравнение:

$$x_1 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2 - x_1 \geq 0$$

Сложим первое уравнение дважды и второе уравнение трижды:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 6 \implies x_4 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Получили:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости $x_1 o x_2$. Получаем четырехугольник. Преобразуем $F(\bar{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3(1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2) - (2 - x_1) = x_1 + 3x_2 + 3 - x_1 - \frac{3x_2}{2} - 2 + x_1 = x_1 + \frac{3x_2}{2} + 1$$

$$\text{gradient } F = \{1, \frac{3}{2}\}$$

Нарисуем этот вектор на плоскости. Кроме того, имеем линию уровня:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = c$$

Видим, что $\text{gradient } F$ перпендикулярен второй линии.

$$F(2; \frac{2}{3}) = 2 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3} + 1 = 4$$

$$F(0; 2) = 0 + \frac{3}{2} * 2 + 1 = 4$$

Так как решением являются две точки, то **оптимальным вектором решений является их выпуклая линейная комбинация**:

$$X^* = \alpha * A + (1 - \alpha)B, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

, где т. $A(2, \frac{2}{3})$, т. $B(0, 2)$

$$X^* = (2\alpha, \frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

$$X_3^* = 2 - 2\alpha, X_4^* = 1 - \frac{1}{3} * 2\alpha - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

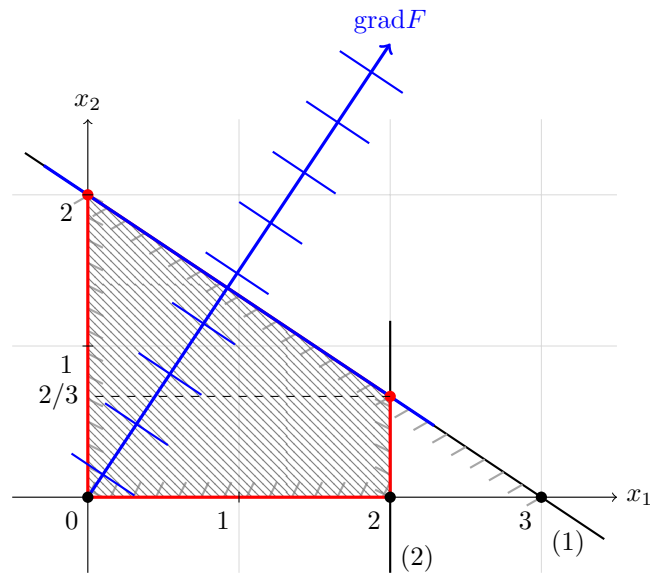


Рис. 4: Чертёж к примеру 3

2 Практическое занятие — 27.10.2023

2.1 Решение задач линейного программирования

2.1.1 Геометрический способ решения

Пример №4 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$n = 4, m = 2 \implies n - m = 2$ — следовательно, геометрическое решение возможно.

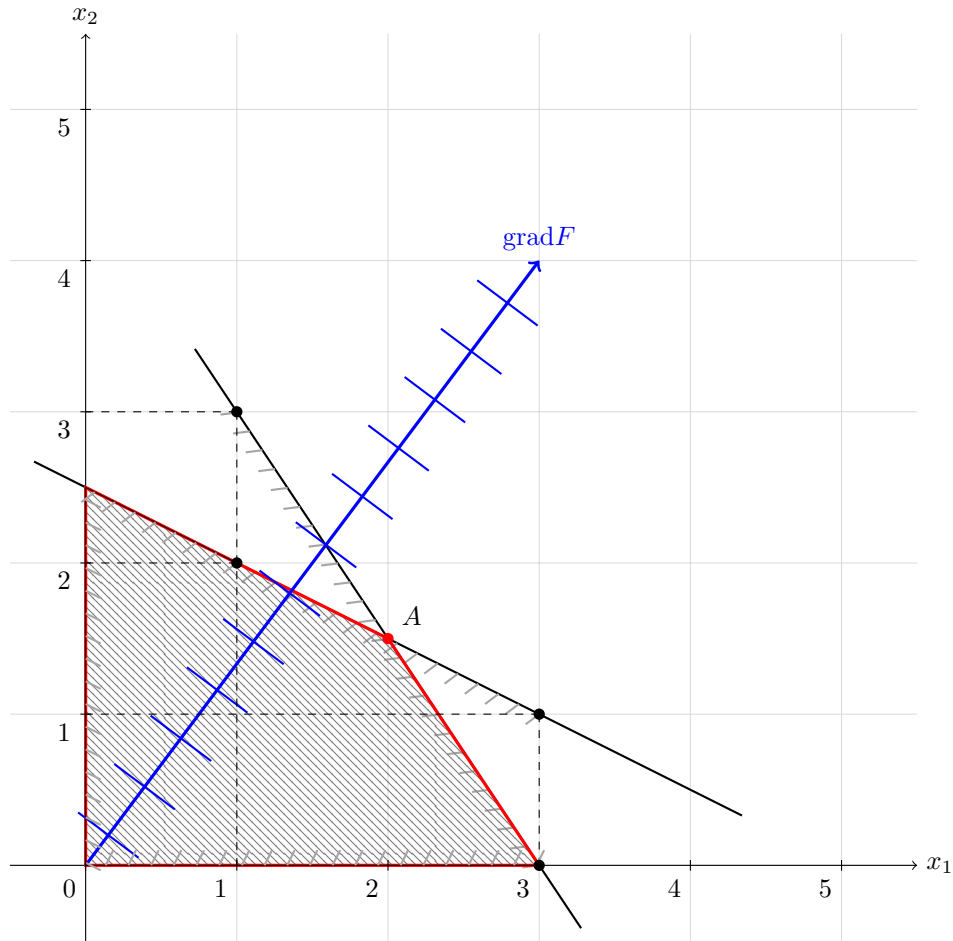


Рис. 5: Чертёж к примеру 4

Выберем переменные x_1, x_2 в качестве свободных, выразим через них переменные x_3, x_4 : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

.

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные x_1, x_2 :

$$\begin{cases} 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим на плоскости $x_1 o x_2$ область, отвечающую двум данным неравенствам. Получаем четырехугольник. Чтобы найти оптимальное решение, необходимо найти градиент. Перепишем $F(\bar{x})$:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 5 - x_1 - 2x_2 - (9 - 3x_1 - 2x_2) = -4 + 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{gradient } F = \{3, 4\}$$

Обозначим на графике в качестве точки и проведем из нуля вектор. Кроме того, необходимо найти линию уровня, имеющую наибольшее пересечение с угловой точкой. Линия уровня в нашем случае имеет уравнение:

$$3x_1 + 4x_2 = c$$

Решение является т. A — пересечение двух прямых:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 \\ 4x_2 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

x_3, x_4 в данной точке будет равняться нулю. Так что имеем вектор решения: $x^* = (2; \frac{3}{2}; 0; 0)$,
 $F(x^*) = -4 + 3 * 2 + 1 * \frac{3}{2} = 8$ — **максимальное значение**

2.1.2 Аналитические методы решение

Одним из аналитических методов решения ЗЛП является так называемый **симплекс-метод**. Его суть заключается в том, что мы обходим угловые точки, но делаем это не геометрически, а аналитическим способом. Для его реализации необходимо установить следующие элементы:

1. **Способ определения** какого-либо изначального допустимого базисного решения — то есть, удовлетворяющего системе ограничений:

$$AX = B$$

$X = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$, $\beta_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, m}$ — допустимое базисное решение;

2. **Набор правил, определяющих переход** к наилучшему по сравнению с предыдущим решению;

3. **Критерий проверки** оптимальности найденного решения.

На начальном этапе необходимо выбрать m базисных переменных и выразить эти переменные через оставшиеся, свободные (количество которых равно $n - m$)

Пусть базисными являются переменные x_1, x_2, \dots, x_m :

$$x_i = \alpha_{i, m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{i, n} x_n + \beta_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Начальное допустимое базисное решение:

$$X^{(0)} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0\}$$

где

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0, \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m}$$

В изначальное уравнение подставляем базисные переменные, выраженные через свободные:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=m+1}^n \gamma_i x_i + \gamma_0 \rightarrow \max$$

Критерий оптимальности: если все коэффициенты γ_i в выражении $F(\bar{x})$ через свободные переменные будет отрицательным, то данное решение будет оптимальным; если же существуют $\gamma_k > 0$, то решение не является оптимальным. И номер k показывает, какую переменную необходимо перевести в базис. Но в базисе **не может быть** больше n переменных. Следовательно, необходимо убрать одну из предыдущих базисных переменных. Это и есть **переход к наилучшему по сравнению с предыдущим решению**.

Пример №1 Решить аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 < 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Мы не можем запустить симплекс-метод для данной системы неравенств. Необходимо выполнить переход к канонической ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Все данные переменные неотрицательны. Далее необходимо выбрать базисные переменные. Пусть ими будут x_3, x_4, x_5, x_6 , так как они легко выражаются через x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо проверить решение на оптимальность. Для этого в $F(\bar{x})$ необходимо подставить только свободные переменные — так уже есть. Видим, что коэффициенты в $F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2$ положительны.

Если $x_1 = x_2 = 0$, то $x^{(0)} = (0, 0, 18, 16, 5, 21)$ — допустимое базисное решение. Не является оптимальным, так как $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_i > 0$

В базис вводят переменную, у которой γ_i максимально. В нашем случае $\max \gamma_i = \gamma_2 = 3$. Следовательно, вводим x_2 в базис. Подставим в систему выше $x_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ \text{нет ограничений} : x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Надо выбрать минимальное ограничение: $x_2 \leq 5$. Следовательно, с строчки $x_5 = 5 - x_2 \geq 0$ необходимо начать. Следовательно, заменим x_5 в базисе на x_2 (уберем x_5 , введем x_2)

$$\begin{cases} x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_2) = 3 - x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_2) = 11 - 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

x_1, x_2 — свободные переменные. Следовательно, $x^{(1)} = (0, 5, 3, 11, 0, 21)$, $F(x^0) = 2x_1 + 3(5 - x_2) = 15 + 2x_1 - 3x_2$.

Решение не является оптимальным, так как $\gamma_1 > 0$ — следовательно, x_1 переводим в базис.

$x_5 = 0$:

$$\begin{cases} 5 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{11}{2} \\ x_1 \leq \frac{21}{3} \end{cases}$$

Меньшим является $x_1 \leq 3$, соответствующее строке $x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_2) = 3 - x_1 + 3x_2 \geq 0$ в предыдущей системе. Следовательно, необходимо удалить x_3 . Перепишем данное уравнение. Необходимо x_1 выразить через x_2, x_5 :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \geq 0 \\ x_2 = 5 - x_5 \geq 0 \\ x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3(3 - x_3 + 3x_5) = 12 + 3x_3 - 9x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_5 = 0 \implies x^{(2)} = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$$

$F(\bar{x}) = 15 + 2 * (3 - x_3 + 3x_5) - 3x_5 = 21 - 2x_3 + 3x_5$. В этом решении $F(x^{(2)}) = 21 > F(x^{(1)})$. Решение неоптимально, необходимо переводить x_5 в базис.

Подставим $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} 3 + 3x_5 \geq 0 \implies x_5 \geq -1 \implies \text{ограничений нет} \\ x_5 \leq 5 \\ x_5 \leq 1 \\ x_5 \leq \frac{12}{9} \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Меньшим является $x_5 \leq 1$, соответствующее строке $x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0$ в предыдущей системе. Необходимо x_5 выразить через x_4, x_3 :

$$x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

Теперь это уравнение подставим в оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 5 - (1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_4 = 0 \implies x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$$

$F(\bar{x}) = 21 - 2x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$. **Оптимальное решение достигнуто:** $x^* = x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$.

Решение исходной задачи: $x_{\text{исх}}^* = (6, 4)$

Пример №2 Найти аналитически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Выберем переменные x_1, x_2 в качестве свободных, выразим через них переменные x_3, x_4 : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

.

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные x_1, x_2 .

$x_1 = x_2 = 0 \implies x^{(0)} = (0, 0, 5, 9)$. Перепишем $F(\bar{x})$, получим $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4x_2$ — решение неоптимально, $F(x^{(0)}) = -4$. Переводим в базис переменную x_2 , так как у нее наибольший коэффициент.

$x_1 = 0$:

$$\begin{cases} x_3 = 5 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \frac{5}{2} \\ x_4 = 9 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

Минимальное из них $\frac{5}{2}$. Следовательно, необходимо избавляться от x_3 .

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \\ x_4 = 9 - 3x_1 - 2(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 4 - 2x_1 + x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишем $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 6 + x_1 - 2x_3$, $x^{(1)} = (0, \frac{5}{2}, 0, 4)$, $F(x^{(1)}) = 6$. Решение неоптимально, так как имеем положительный коэффициент. Переведём x_1 в базис.

$x_3 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 5 \\ x_4 = 4 - 2x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 2 - \text{минимальное} \end{cases}$$

Следовательно, второе уравнение необходимо переписать. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишем $F(\bar{x}) = 6 + 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_3 = 8 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$, $x^{(2)} = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$, $F(x^{(2)}) = 8$. Оптимальное решение, так как все с отрицательным коэффициентом.

2.1.3 Домашнее задание

Решить геометрически и аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$