

# Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция — 23.10.2023</b>	<b>2</b>
1.1	Решение задач линейного программирования . . . . .	2
1.1.1	Геометрический способ решения . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Практическое занятие — 27.10.2023</b>	<b>5</b>
2.1	Решение задач линейного программирования . . . . .	5
2.1.1	Геометрический способ решения . . . . .	5
2.1.2	Аналитические методы решение . . . . .	6
2.1.3	Домашнее задание . . . . .	9

# 1 Лекция — 23.10.2023

Докажем следующее утверждение: множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n C_i x_i \rightarrow \max(\min)$$

$$AX = B, A = (a_{ij})_{m \times n}, X = (x_1, \dots, x_n)^T, B = (b_1, \dots, b_m)^T$$

Пусть  $X_1^*, X_2^*$  — решение системы ограничений, то есть,  $AX_1^* = AX_2^* = B$

Покажем, что  $X^* = \alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$  также является решением системы ограничений.

$$AX^* = A(\alpha X_1^* + (1 - \alpha)X_2^*) = \alpha * AX_1^* + (1 - \alpha) * AX_2^* = \alpha B + (1 - \alpha)B = B$$

Так как  $X^*$  — это выпуклое множество...

## 1.1 Решение задач линейного программирования

**Теорема 1** Если задача линейного программирования (далее — ЗЛП) имеет оптимальное решение, то линейная функция  $F(\bar{x})$  достигает своего оптимума (то есть, максимума или минимума) в одной из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Отметим, что если оптимальное решение достигается более чем в одной точке, то оно является выпуклой линейной комбинацией этих точек.

**Теорема 2** Каждому допустимому базисному решению  $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_n^*)$  ЗЛП соответствует одна из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений.

Таким образом, любое оптимальное решение ЗЛП является одной из угловых точек, то есть допустимым базисным решением.

### 1.1.1 Геометрический способ решения

Рассмотрим решение на плоскости. Оно возможно в следующих случаях:

1. Имеем две переменные:  $n = 2$
2. Количество неизвестных минус количество уравнений равно двум:  $n - m = 2$

Чтобы показать геометрическое решение, необходимо выбрать  $m$  переменных из  $x_1, \dots, x_n$  в качестве основных (главных, базисных), а остальные переменные назовем свободными.

Пусть  $x_1, x_2$  — свободные переменные, а  $x_3, \dots, x_n$  — базисные.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \implies$$

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases}$$

$$\text{Так как } x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n} \implies \begin{cases} \beta_i + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нужно показать геометрически множество решений этой системы, которое является выпуклым многоугольником.

1. Если нет пересечений в системе ограничений, то решение не существует.
2. Если есть пересечение, то решение будет.

$F(\bar{x})$  выше было записано в следующем виде:  $F(\bar{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ . Необходимо переписать ее, выразив базисные переменные через свободные в следующем виде:  $F(\bar{x}) = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_0$

Если рассматривается задача на максимум, то решение нужно искать в направлении возрастания функции  $F(\bar{x})$ . Направление возрастания функции  $F(\bar{x})$  — вектор градиент:  $\text{grad } F = \left\{ \frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n} \right\}$ . В нашем случае:  $\text{grad } F = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ .

То есть, необходимо нарисовать на плоскости  $x_1ox_2$  уравнение прямых  $\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 = c$  (опорные прямые), перпендикулярные  $\text{grad } F$

Если мы хотим найти максимум, то на многоугольнике решений надо найти точку, через которую проходит линия уровня (то есть, опорная прямая) с наибольшим значением уровня (то есть, константы  $c$ ). Получающаяся точка и является оптимальным решением.

В случае задачи на минимум необходимо двигаться в направлении  $-\text{grad } F$ .

**Пример №1** Решить геометрически задачу линейного программирования:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \implies \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \implies \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} \leq 1 \\ x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1ox_2$ . В результате получаем выпуклый шестиугольник.

$\text{gradient } F = (2, 3)$

Опорная прямая:  $2x_1 + 3x_2 = c$

Рассмотрим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \implies x_1 = 18 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \implies 36 - 6x_2 + x_2 = 16 \implies x_2 = 4 \implies x_1 = 6 \end{cases}$$

Получаем решение:  $X^* = (6, 4), F(X^*) = 24$

**Пример №2** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \rightarrow \min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 6} \end{cases}$$

Мы можем найти решение графически, так как  $n = 6, m = 4, n - m = 2$ . Из этой системы мы можем получить:

$$\begin{cases} x_4 = 13 + x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_5 = 26 - 4x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = -x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -13 \\ 4x_1 + x_2 \leq 26 \\ x_2 \leq 1 + 2x_1 \\ x_1 \leq 3x_2 \\ x_1x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1ox_2$ . Получаем многоугольник. Преобразуем  $F(\bar{x})$ , чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = 4x_1 - 3x_2 - (13 + x_1 - 3x_2) + (26 - 4x_1 - x_2) = -x_1 - x_2 + 13$$

Таким образом:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 13$$

$$\text{gradient } F = \{-1, -1\}, -\text{gradient } F = \{1, 1\}$$

Построим его на графике вместе с опорными линиями в его направлении. Видим:  $A = \{5, 6\}, F(A) = -5 - 6 + 13 = 2$ . Проверим другие точки:  $B = \{6, 2\}, F(B) = -6 - 2 + 13 = 5, C = \{2, 5\}, F(C) = -2 - 5 + 13 = 6$ . Окончательно убеждаемся:  $A$  — т.  $\min$

$$x_4 = x_5 = 0, x_3 = 1 + 2 * 5 - 6 = 5, x_6 = -5 + 3 * 6 = 13 \implies X^* = (5, 6, 5, 0, 0, 13), F(X^*) = 2$$

**Пример №3** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 - x_3 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Сложим вместе первое и второе уравнение:

$$x_1 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2 - x_1 \geq 0$$

Сложим первое уравнение дважды и второе уравнение трижды:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 6 \implies x_4 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Получили:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости  $x_1 O x_2$ . Получаем четырехугольник. Преобразуем  $F(\bar{x})$ , чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3(1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2) - (2 - x_1) = x_1 + 3x_2 + 3 - x_1 - \frac{3x_2}{2} - 2 + x_1 = x_1 + \frac{3x_2}{2} + 1$$

$$\text{gradient } F = \{1, \frac{3}{2}\}$$

Нарисуем этот вектор на плоскости. Кроме того, имеем линию уровня:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = c$$

Видим, что  $\text{gradient } F$  перпендикулярен второй линии.

$$F(2; \frac{2}{3}) = 2 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3} + 1 = 4$$

$$F(0; 2) = 0 + \frac{3}{2} * 2 + 1 = 4$$

Так как решением являются две точки, то **оптимальным вектором решений является их выпуклая линейная комбинация:**

$$X^* = \alpha * A + (1 - \alpha)B, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

, где т.  $A(2, \frac{2}{3})$ , т.  $B(0, 2)$

$$X^* = (2\alpha, \frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

$$X_3^* = 2 - 2\alpha, X_4^* = 1 - \frac{1}{3} * 2\alpha - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\alpha + 2(1 - \alpha))$$

## 2 Практическое занятие — 27.10.2023

### 2.1 Решение задач линейного программирования

#### 2.1.1 Геометрический способ решения

**Пример №4** Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

$n = 4, m = 2 \Rightarrow n - m = 2$  — следовательно, геометрическое решение возможно.

Выберем переменные  $x_1, x_2$  в качестве свободных, выразим через них переменные  $x_3, x_4$ : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

.

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \Rightarrow x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Построим на плоскости  $x_1 O x_2$  область, отвечающую двум данным неравенствам. Получаем четырехугольник. Чтобы найти оптимальное решение, необходимо найти градиент. Перепишем  $F(\bar{x})$ :

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + 5 - x_1 - 2x_2 - (9 - 3x_1 - 2x_2) = -4 + 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{gradient } F = \{3, 4\}$$

Обозначим на графике в качестве точки и проведем из нуля вектор. Кроме того, необходимо найти линию уровня, имеющую наибольшее пересечение с угловой точкой. Линия уровня в нашем случае имеет уравнение:

$$3x_1 + 4x_2 = c$$

Решение является т.  $A$  — пересечение двух прямых:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 \\ 4x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$x_3, x_4$  в данной точке будет равняться нулю. Так что имеем вектор решения:  $x^* = (2; \frac{3}{2}; 0; 0)$ ,  
 $F(x^*) = -4 + 3 * 2 + 1 * \frac{3}{2} = 8$  — **максимальное значение**

### 2.1.2 Аналитические методы решение

Одним из аналитических методов решения ЗЛП является так называемый **симплекс-метод**. Его суть заключается в том, что мы обходим угловые точки, но делаем это не геометрически, а аналитическим способом. Для его реализации необходимо установить следующие элементы:

1. **Способ определения** какого-либо изначального допустимого базисного решения — то есть, удовлетворяющего системе ограничений:

$$AX = B$$

$$X = (\beta_1, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0), \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m} - \text{допустимое базисное решение};$$

2. **Набор правил, определяющих переход** к наилучшему по сравнению с предыдущим решению;
3. **Критерий проверки** оптимальности найденного решения.

На начальном этапе необходимо выбрать  $m$  базисных переменных и выразить эти переменные через оставшиеся, свободные (количество которых равно  $n - m$ )

Пусть базисными являются переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

$$x_i = \alpha_{i, m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{i, n} x_n + \beta_i, i = \overline{1, m}$$

Начальное допустимое базисное решение:

$$X^{(0)} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0\}$$

где

$$x_{m+1} = \dots = x_n = 0, \beta_i \geq 0, \forall i = \overline{1, m}$$

В изначальное уравнение подставляем базисные переменные, выраженные через свободные:

$$F(\bar{x}) = \sum_{i=m+1}^n \gamma_i x_i + \gamma_0 \rightarrow \max$$

**Критерий оптимальности:** если все коэффициенты  $\gamma_i$  в выражении  $F(\bar{x})$  через свободные переменные будет отрицательным, то данное решение будет оптимальным; если же существуют  $\gamma_k > 0$ , то решение не является оптимальным. И номер  $k$  показывает, какую переменную необходимо перевести в базис. Но в базисе **не может быть** больше  $n$  переменных. Следовательно, необходимо убрать одну из предыдущих базисных переменных. Это и есть **переход к наилучшему по сравнению с предыдущим решению**.

**Пример №1** Решить аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 < 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Мы не можем запустить симплекс-метод для данной системы неравенств. Необходимо выполнить переход к канонической ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{cases}$$

Все данные переменные неотрицательны. Далее необходимо выбрать базисные переменные. Пусть ими будут  $x_3, x_4, x_5, x_6$ , так как они легко выражаются через  $x_1, x_2$ :

$$\begin{cases} x_3 = 18 - x_1 - 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо проверить решение на оптимальность. Для этого в  $F(\bar{x})$  необходимо подставить только свободные переменные — так уже есть. Видим, что коэффициенты в  $F(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2$  положительны.

Если  $x_1 = x_2 = 0$ , то  $x^{(0)} = (0, 0, 18, 16, 5, 21)$  — допустимое базисное решение. Не является оптимальным, так как  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_i > 0$

В базис вводят переменную, у которой  $\gamma_i$  максимально. В нашем случае  $\max \gamma_i = \gamma_2 = 3$ . Следовательно, вводим  $x_2$  в базис. Подставим в систему выше  $x_1 = 0$ :

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ \text{нет ограничений} : x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Надо выбрать минимальное ограничение:  $x_2 \leq 5$ . Следовательно, с строчки  $x_5 = 5 - x_2 \geq 0$  необходимо начать. Следовательно, заменим  $x_5$  в базисе на  $x_2$  (уберем  $x_5$ , введем  $x_2$ )

$$\begin{cases} x_5 = 5 - x_2 \geq 0 \\ x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_2) = 3 - x_1 + 3x_2 \geq 0 \\ x_4 = 16 - 2x_1 - (5 - x_2) = 11 - 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$x_1, x_2$  — свободные переменные. Следовательно,  $x^{(1)} = (0, 5, 3, 11, 0, 21)$ ,  $F(x^0) = 2x_1 + 3(5 - x_2) = 15 + 2x_1 - 3x_2$ . Решение не является оптимальным, так как  $\gamma_1 > 0$  — следовательно,  $x_1$  переводим в базис.  $x_5 = 0$ :

$$\begin{cases} 5 \geq 0 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 \leq \frac{11}{2} \\ x_1 \leq \frac{21}{3} \end{cases}$$

Меньшим является  $x_1 \leq 3$ , соответствующее строке  $x_3 = 18 - x_1 - 3(5 - x_2) = 3 - x_1 + 3x_2 \geq 0$  в предыдущей системе. Следовательно, необходимо удалить  $x_3$ . Перепишем данное уравнение. Необходимо  $x_1$  выразить через  $x_3, x_5$ :

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3x_5 \geq 0 \\ x_2 = 5 - x_5 \geq 0 \\ x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0 \\ x_6 = 21 - 3(3 - x_3 + 3x_5) = 12 + 3x_3 - 9x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_5 = 0 \implies x^{(2)} = (3, 5, 0, 5, 0, 12)$$

$F(\bar{x}) = 15 + 2 * (3 - x_3 + 3x_5) - 3x_5 = 21 - 2x_3 + 3x_5$ . В этом решении  $F(x^{(2)}) = 21 > F(x^{(1)})$ . Решение неоптимально, необходимо переводить  $x_5$  в базис.

Подставим  $x_3 = 0$ :

$$\begin{cases} 3 + 3x_5 \geq 0 \implies x_5 \geq -1 \implies \text{ограничений нет} \\ x_5 \leq 5 \\ x_5 \leq 1 \\ x_5 \leq \frac{12}{9} \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

Меньшим является  $x_5 \leq 1$ , соответствующее строке  $x_4 = 11 - 2(3 - x_3 + 3x_5) + x_5 = 5 + 2x_3 - 5x_5 \geq 0$  в предыдущей системе. Необходимо  $x_5$  выразить через  $x_4, x_3$ :

$$x_5 = 1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4$$

Теперь это уравнение подставим в оставшиеся:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 6 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 \\ x_2 = 5 - (1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 4 - \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_6 = 12 + 3x_3 - 9(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 3 - \frac{3}{5}x_3 + \frac{9}{5}x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_3 = x_4 = 0 \implies x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3)$$

$$F(\bar{x}) = 21 - 2x_3 + 3(1 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4. \text{ Оптимальное решение достигнуто: } x^* = x^{(3)} = (6, 4, 0, 0, 1, 3).$$

Решение исходной задачи:  $x_{\text{исх}}^* = (6, 4)$

**Пример №2** Найти аналитически решение ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$

Выберем переменные  $x_1, x_2$  в качестве свободных, выразим через них переменные  $x_3, x_4$ : вычтем из первого уравнения второе, получим

$$x_1 + x_3 + 2x_2 = 5 \implies x_3 = 5 - x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Вычтем из второго уравнения два первых уравнения:

$$-3x_1 - 2x_2 - x_4 = -9 \implies x_4 = 9 - 3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

Таким образом, мы получили систему неравенств на две переменные  $x_1, x_2$ .

$x_1 = x_2 = 0 \implies x^{(0)} = (0, 0, 5, 9)$ . Перепишем  $F(\bar{x})$ , получим  $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4x_2$  — решение неоптимально,  $F(x^{(0)}) = -4$ . Переводим в базис переменную  $x_2$ , так как у нее наибольший коэффициент.

$x_1 = 0$ :

$$\begin{cases} x_3 = 5 - 2x_2 \geq 0 \implies x_3 \leq \frac{5}{2} \\ x_4 = 9 - 2x_2 \geq 0 \implies x_2 \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Минимальное из них  $\frac{5}{2}$ . Следовательно, необходимо избавляться от  $x_3$ .

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0 \\ x_4 = 9 - 3x_1 - 2(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 4 - 2x_1 + x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Перепишем  $F(\bar{x}) = -4 + 3x_1 + 4(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3) = 6 + x_1 - 2x_3$ ,  $x^{(1)} = (0, \frac{5}{2}, 0, 4)$ ,  $F(x^{(1)}) = 6$ . Решение неоптимально, так как имеем положительный коэффициент. Переведём  $x_1$  в базис.

$x_3 = 0$ :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 5 \\ x_4 = 4 - 2x_1 \geq 0 \implies x_1 \leq 2 — \text{минимальное} \end{cases}$$

Следовательно, второе уравнение необходимо переписать. Получим:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \geq 0 \\ x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4) - \frac{1}{2}x_3 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq 0 \end{cases}$$



Перепишем  $F(\bar{x}) = 6 + 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 - 2x_3 = 8 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$ ,  $x^{(2)} = (2, \frac{3}{2}, 0, 0)$ ,  $F(x^{(2)}) = 8$ . Оптимальное решение, так как все с отрицательным коэффициентом.

### 2.1.3 Домашнее задание

Решить геометрически и аналитически ЗЛП:

$$F(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 \rightarrow \max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1, 4} \end{cases}$$