Практическое занятие — 04.09.2023

Введение в теорию игр

В практической деятельности часто приходится сталкиваться с задачами, в которых **необходимо принимать решение в условиях конфликта**, то есть возникают ситуации, когда **сталкиваются две или более враждующих сторон**, преследующих, в общем, различные цели (не обязательно).
Такие ситуации и называют **конфликтными.** Конфликтная ситуация **порождается различием интересов** противоборствующих сторон и стремлением каждой из них принять оптимальное решение, которое максимально бы реализовало их цели.
Для **изучения и анализа конфликтных ситуаций** был создан специальный математический аппарат, называемый **теорией игр**.

В теории игр конфликтная ситуация **задается при помощи математической модели**: **стороны**, участвующие в конфликте; **правила игры**; **возможные варианты выигрыша** в этой игре. Понятия «**игра**» и есть **математическая модель конфликтной ситуации**. Стороны, участвующие в игре (конфликте), называются **игроками**. Исход игры называют **выигрышем**. Для каждой игры вводятся **правила**, то есть система условий, определяющая:

- **Варианты действий** (альтернатив) игроков;
- **Объем информации каждого игрока о противнике**;
- **Выигрыш**, к которому приводит некоторая совокупность действий.
  Если в игре сталкивается две стороны (игрока), то такую игру можно назвать **парной игрой**. Если же сталкивается больше двух сторон (игроков), то это **множественная игра**. В

дальнейшем будет рассматривать преимущественно парные игры.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами игры действий называется **ходом игрока**. Ход игрока может быть:

- **Личным** — **осознанный выбор** игроком определенного варианта действий (напр. игра в шашки, шахматы);
- **Случайным** — **случайно выбранное действие** (напр. раздача карт из колоды в азартной игре в карты).

  Игры с случайными ходами в теории игр **практически не рассматриваются**. **Игры с личными ходами** называются **стратегическими**.

  Стратегией игрока называется **совокупность правил**, определяющих выбор его действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

  Игрок может **выбрать стратегию заранее** (до начала игры) или может ее выбирать в **процессе самой игры**.

  Задача теории игр заключается в том, чтобы **рекомендовать игрокам определенные стратегии**, которые удовлетворяли бы **принципу (условию) оптимальности**: то есть, **один из игроков должен получить максимальный выигрыш**, когда другие придерживаются каких-то своих стратегий. Но **так должен действовать каждый игрок**.

  Исходя из принципов рационального поведения **каждый игрок должен стремиться к максимальному возможному выигрышу**.

Игры классифицируются по многим признакам:

- По **числу игроков**;
- По **количеству стратегий** (может быть конечное число стратегий или бесконечное их число);

- По **характеру взаимоотношений** между игроками (возможен сговор);
- По **характеру выигрышей**;
- По **количеству ходов**;
- ...

Матричная игра

Матричная игра — простейший вид игры двух лиц; **конечная** парная игра двух лиц с **нулевой суммой** (антагонистическая; **выигрыш одного из игроков** является **проигрышом другого игрока**).
Цены игры — среднее значение выигрыша.

Формализация матричной игры

Два игрока: **игрок А**, **игрок Б**. Выигрыш игроков: v_A, v_B.
Определение игры с нулевой суммой: $v_A + v_B = 0$.
Стратегии игроков:

- Игрок А: $A_1,\ \dots,\ A_m$
- Игрок В: $B_1,\ \dots,\ B_n$
  Определяется a_{ij} — **выигрыш игрока А**, соответствующий стратегии A_i игрока А и стратегии B_j игрока В.
  Матрица выигрышей (платежная матрица) **игрока А**:

$$P_A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

  Мы не задаем P_B, так как $P_B = -P_A$.

Примеры матричных игр

Игра «в орлянку»

У каждого из игроков имеется по одной одинаковой монете (достоинство не важно), затем игроки подбрасывают монету, зажимают ее в кулак и одновременно разжимают пальцы. **Если монеты повернуты одинаковой стороной**, то **выигрывает игрок А**. **Если монеты повернуты разными сторонами**, то **выигрывает игрок Б**.
Формализуем эту игру. Имеется две стратегии: **Г**, **Р**.

$$P_A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathit{Г} & \mathit{Р} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathit{Г} \\ \mathit{Р} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \implies P_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Игроки никак **не могут максимизировать свой выигрыш**. **Все зависит от случая**.

Игра «поиск»

Игрок А может спрятаться в одном из двух убежищ: убежище 1, убежище 2. **Игрок Б ищет игрока А** в одном из двух убежищ. **Если игрок Б нашел игрока А**, то **он получает выигрыш**. А **если не нашел**, **игрок А получает выигрыш**.

$$P_A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Спрятался в Убежище } 1 & \textit{Спрятался в Убеж} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Ищет в Убежище } 1 \\ \textit{Ищет в Убежище } 2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Если **поменять игроков ролями**, то ее матрица выигрышей **сведется к предыдущей**.

Игра «КНБ»

Два игрока должны **одновременно показать кулаком** или **камень**, или **ножницы**, или **бумагу**.

Каждый игрок имеет три стратегии: К, Н, Б.

$$P_A = \begin{array}{c} \\ К \\ Н \\ Б \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} К & Н & Б \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \implies P_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Игра «на уклонение»

Игроки А и Б **выбирают целые числа от 1 до n**. При этом выигрыш игрока А равен $a_{ij} = |i - j|$
Составить матрицу при $n = 4$:

$$P_A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

В отличие от предыдущих игр, здесь мы можем рекомендовать игроку А **первую и четвертую стратегию**, так как в них есть максимальное значение.

Домашнее задание

Придумать любую матричную (антагонистическую) игру. Можно выполнять всей группой.