Теория принятия решений

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Лекция — 25.09.2023

1.1 Доминирование стратегий

Сложность решения матричной игры возрасатает с увеличением размеров матрицы, поэтому перед решением игры следует проанализровать матрицу с целью сокращения ее размерности. При анализе матрицы **следует выделить стратегии, являющиеся дублирующими и заведомо невыгодными игрокам**.

Определение 1 *Стратегия A_i игрока А доминирует какую-либо его стратегию A_l, если $a_{ij} \geq a_{lj}$; $\forall j = \overline{1,n}$. Строгое доминирование: $(a_{ij} > a_i j)$*

Определение 2 *Стратегия A_i игрока А дублирует какую-либо его стратегию A_l, если $a_{ij} = a_{lj}$; $\forall j = \overline{1,n}$*

Оставлять все дублирующиеся стратегии нельзя, **нужно оставить только одну из них**. В случае доминирования стратегии **необходимо оставлять только доминирующую стратегию** A_i, а доминируемую стратегию необходимо отбросить (то есть, удалить строку из матрицы).

Определение 3 *Стратегия B_j игрока Б доминирует какую-либо его стратегию B_j, если $a_{ij} \leq a_{il}$; $\forall i = \overline{1,m}$. Мы исходим из того, что игрок Б должен удалять из матрицы большие, а не меньшие столбцы. Стратегию B_j называется доминирующей, а стратегия B_l называется доминируемой.*

1.1.1 Определение доминирования в классе смешанных стратегий

Определение 4 *Стратегия x' игрока А доминирует какую-либо его стратегию x'', если $x'p^j \geq x''p^j$; $\forall j = \overline{1,n}$, где p^j — векторы вероятностей.*

Аналогичное определение можно дать и для игрока Б:

Определение 5 *Стратегия y' игрока В доминирует какую-либо его стратегию y'', если $P_i y' \leq P_i y''$, $\forall i = \overline{1,m}$, где P_i — i-ая строка матрицы $P = (a_{ij})_{m\times n}$.*

1.1.2 Примеры

Пример №1 Допустим, $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Проанализируем данную матрицу на предмет доминирования и дублирования. Видим, что $A_2 = A_4$ — следовательно, одну из строк можем убрать. Сократим четвертую строку: $P' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Кроме того, видим, что вторая строка в матрице строго доминирует первую строку: $A_2 > A_1$. Значит, необходимо удалить строку №1. Получим матрицу: $P'' = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Таким образом, эта игра может быть решена как матрица размерности (2×3), при этом можем записать $x = (0, p, 1-p, 0)$.

Пример №2 Допустим, $P = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$. Проанализируем данную матрицу на предмет доминирования и дублирования. A_3 строго доминируется A_2, следовательно, ее сокращаем: $P' = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Больше строки невозможно сократить, но перейдем к анализу столбцов: $B_1 \leq B_2$, сокращаем второй столбец. Кроме того, $B_3 < B_2$, $B_4 < B_3$. Получаем итоговую матрицу: $P'' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Первая строка становится доминируемой, переходим к матрице: $P''' = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \implies V_A = 4$, (A_2, B_3).

1.1.3 Теоремы о доминировании стратегий

Теорема 1 *Если в матричной игре стратегия x' одного из игроков доминирует его оптимальную стратегию x^*, то стратегия x' также является оптимальной.*

Теорема 2 *Если стратегия x^* одного из игроков является оптмальной, то она недоминируема строго.*
Обратное неверно: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. В этом примере две недоминированные стратегии игроков составляют их оптимальные стратегии.

1.2 Решение матричной игры размерности $n \times n$

Определение 6 *Стратегия A_i (B_j) игроков A или B называется* ***существенной*** *(активной) стратегией, если она входит с ненулевой вероятностью в вектор оптимальных смешанных стратегий: $p_i^* > 0$ ($q_j^* > 0$). Никакая существенная стратегия не может быть доминируемой. В спектр оптимальной смешанной стратегии любого игрока входят только существенные чистые стратегии.*

Определение 7 ***Стратегия*** *x (y) игрока A (или B)* ***называется вполне смешанной****, если ее спектр состоит из всех стратегий игрока A (или B).*

Определение 8 ***Ситуация равновесия*** *(x^*, y^*)* ***называется вполне смешанной****, если ее стратегии x^* и y^* вполне смешаны.*

Теорема 3 *Вполне смешанная $(m \times n)$ игра* ***имеет единственное решение и квадратную матрицу*** *$(m = n)$. То есть, ни одна стратегия не является доминируемой и для всех них вероятности ненулевые. Покажем это: так как у игроков все стратегии существенные, то по свойству №1 оптимальных смешанных стратегий если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, а другой нет, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры.*
Рассмотрим решение для игрока A: Пусть игрок A выбирал свою оптимальную смешанную стратегию x^*, состоящую из чисел $P_1^*, \dots, P_n^*$. Игрок B выбирал чистые стратегии. Тогда $v = H_A(x^*, j)$, $\forall j = \overline{1, n}$. То есть,
$v = a_{1j}P_1^* + a_{2j}P_2^* + \dots + a_{mj}P_m^*$, $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i^* = 1$.
Единственное решение будет только при $m = n$.

Допустим, $m = n$:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n1}p_n = v \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{nn}p_n = v \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Решение данной системы выполняется методом обратной матрицы. Введем следующий вектор, состоящий из единиц: $u = (1, \dots, 1)$, перепишем последнее уравнение системы:
$1p_1 + 1p_2 + \dots + 1p_n = 1 \implies xu^T = 1 \implies xP = vu = (v, v, \dots, v)$. Отсюда следует, что $x^* = vuP^{-1}$. Остается лишь найти v: $x^*u^T = 1 = vuP^{-1}u^T \implies v = \frac{1}{uP^{-1}u^T} \implies x^* = \frac{uP^{-1}}{uP^{-1}u^T}$. Таким образом, чтобы найти вектор оптимальных смешанных стратегий, необходимо обратить матрицу игрока P и выполнить записанные в формуле манипуляции. Это применимо только для квадратных матриц.
Решение для B: Игрок B выбирает свою оптимальную стратегию $y^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$, а игрок A выбирает свою чистую стратегию A_i $(i = \overline{1, n})$. Таким образом, $v = H_A(i, y^*) =$

$$\begin{cases} v = a_{11}q_1^* + \dots + a_{1n}q_n^* \\ \dots \\ v = a_{n1}q_1^* + \dots + a_{nn}q_n^* \\ q_1^* + q_2^* + \dots + q_n^* = 1 \end{cases} \tag{2}$$

$\implies uy^{*^T} = 1$, $Py^{*^T} = vu^T \implies y^{*^T} = vP^{-1}u^T \implies y^{*^T} = \frac{P^{-1}u^T}{uP^{-1}u^T}$.

Лемма о масштабе Пусть имеются две матричные игры с матрицами P_A и P'_A такие, что P'_A получается из матрицы P_A в виде линейного преобразования $P'_A = \alpha P_A + \beta$ (α и β — числа), тогда в этих играх множество оптимальных стратегий игроков A и B совпадают. А $v'_A = \alpha v_A + \beta$.

Рассмотрим $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $x^* = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $y^* = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $v = 0$. Ее определитель равен нулю. Используя лемму о масштабе, заменим матрицу P на матрицу $P' = \frac{1}{2}(P+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь мы имеем единичную матрицу, $(P')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u(P)^{-1} = (1, 1, 1)$, $(P')^{-1}u^T = (1, 1)^T$, $u(P')^{-1}u^T = 1 + 1 = 2 \implies v' = \frac{1}{2}$, $x^* = \frac{1}{2} * (1, 1)$, $y^* = \frac{1}{2}(1, 1)$, $v' = \frac{1}{2}(v + 1) = \frac{1}{2} \implies v = 0$.

1.2.1 Примеры

Пример №1 Пусть $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. В этой матрице нет доминируемых стратегий, то есть, ничего сократить невозможно. Кроме того, данная матрица имеет обратную: $|P| \neq 0$. Это позволяет применить вышенаписанные способы решения.

$P^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -11 & 14 & 5 \\ 10 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Далее вычислим $uP^{-1} = (-11 + 10 + 2, 14 + 2 - 5, 5 - 7 + 4) = \frac{1}{27}(1, 11, 2)$. Далее: $uP^{-1}v^T = \frac{1}{27}(1 + 11 + 2) = \frac{14}{27} \implies v_A = \frac{1}{uP^{-1}u^T} = \frac{27}{14}$. Тогда, соответственно, $x^* = vuP^{-1} = \frac{27}{14} * \frac{1}{27}(1, 11, 2) = (\frac{1}{14}, \frac{11}{14}, \frac{2}{14})$. Найдем y^*: $P^{-1}u^T = \frac{1}{27}(-11 + 14 + 5, 10 + 2 - 7, 2 - 5 + 4) = \frac{1}{27}(8, 5, 1)$, $y^* = vP^{-1}u^T = \frac{1}{14}(8, 5, 1) = (\frac{8}{14}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14})$.