Практическое занятие — 15.09.2023

Решение матричной (2×2) игры

Общий вид матрицы:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Пусть нижняя цена игры меньше верхней цены игры: $\underline{v} < \overline{v}$. Задача должна быть решена в классе смешанных стратегий.

Векторы смешанных стратегий для:

1. Игрок А: $x = (p_1, p_2) = (p, 1-p)$, $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p$, $0 \leq p \leq 1$. Если $p = 1$, то выбирается стратегия A_1, если $p = 0$, то A_2.
2. Игрок Б: $y = (q_1, q_2) = (q, 1-q)$, $q_1 = p$, $q_2 = 1 - p$, $0 \leq q \leq 1$. Если $q = 1$, то выбирается стратегия B_1, если $q = 0$, то B_2.

Из свойств оптимальных смешанных стратегий (а именно, из свойства №1), следует, что если $p \neq 1$ и $p \neq 0$, то
$v = H_A(i, y*), i = \overline{1, m}$
Если $q_j^* > 0$, то $v = H_A(x^*, j), j = \overline{1, n} \implies$

$$\begin{cases} v = H_A(x^*, 1) \\ v = H_A(x^*, 2) \end{cases}$$

x^* — вектор оптимальной смешанной стратегии, определяется числом p: $x^* = (p^*, 1 - p^*)$. Таким образом, можем записать:

$$\begin{cases} v = H_A(p^*, 1) \\ v = H_A(p^*, 2) \end{cases}$$

$\implies H_A(p, 1) = H_A(p, 2) = v, p = p^*$

$$H_A(p, j) = (p, 1-p) * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

$H_A(p,1) = a_{11}p + a_{21}(1-p)$
$H_A(p,2) = a_{12}p + a_{22}(1-p)$
$a_{11}p + a_{21}(1-p) = a_{12}p + a_{22}(1-p) = u$, $p = p^*$
$p^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$, $v = \frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$

Выше мы получили **решение для игрока А**. Найдем теперь решение для игрока Б.
Будем действовать аналогично, исходя из свойства №1 оптимальных смешанных стратегий.

$v = H_A(i, y^*) = H_A(i, q_*)$, $\forall i = \overline{1, m}$, $m = 2$

$$\begin{cases} v = H_A(1, q), \ q = q^* \\ v = H_A(2, q) \end{cases}$$

$H_A = (1, q) = (a_{11}, a_{12}) \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = a_{11}q + a_{12}(1-q)$
$H_A(2, q) = (a_{21}, a_{22}) \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix} = a_{21}q + a_{22}(1-q)$
Отсюда:
$a_{11}q + a_{12}(1-q) = a_{21}q + a_{22}(1-q) = v$, $q = q^*$
$q^* = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$

Примеры

Пример №1

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$x = (p, 1-p)$, $y = (q, 1-q)$
$y = -1$, $\overline{v} = 1 \implies -1 \leq v \leq 1$. Ситуации равновесия в чистых стратегиях для данной игры не существует.

Найдем решение для игрока А:

$$\begin{cases} v = p + (-1)(1-p) \\ v = (-1) * p + (1-p), \ p = p^* \end{cases}$$

Отсюда:
$p-(1-p)=p+1-p=v \implies 2p-1=1-2p=v, p=p^*$
$\implies p^*=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Найдем средний выигрыш: $v=2*\frac{1}{2}=0$.
$x^*=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
Таким образом, игрок А должен чередовать свои стратегии, чтобы его средний выигрыш был равен нулю.

Найдем решение для игрока Б:

$$\begin{cases} v=q+-1*(1-q) \\ v=-q+(1-q),\ q=q^* \end{cases}$$

Отсюда: $q-1+q=-q+1-q=v, q=q^* \implies q^*=\frac{1}{2}$
$y^*=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

Пример №2

$$P=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Проверим, существуют ли решения в чистых стратегиях, для этого найдем $\underline{v}=max\{-3;-7\}=-3$, $\overline{v}=max\{5;1\}=1$. Отсюда:
$-3<v<1$
$x=(p,1-p)$, $y=(q,1-q)$ — стратегии игроков А и Б.

Решение для игрока А: $(-3)p+5(1-p)=1*p+(-7)(1-p)=v$,
$p=p^* \implies 5-8p=8p-7=v \implies p^*=\frac{12}{16}=\frac{3}{4} \implies x^*=(\frac{3}{4};\frac{1}{4})$.
Цена игры: $v=5-8*\frac{3}{4}=-1$ — средний выигрыш отрицателен.

Решение для игрока А. Вместо столбцов матрицы составляем элементарные комбинации строк:
$(-3)q+1(1-q)=5q-7(1-q)=v, q=q^* \implies$
$\implies -4q+1=12q-7 \implies q^*=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.
$y^*=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$. Цена игры никак не поменялась: $v=-4*\frac{1}{2}+1=-1$, все еще отрицательное.

Некоторые размышления

К сожалению, эти чрезвычайно простые решения 2×2 матричных игр невозможно перенести на матричные игры большей размерности.
В общем случае мы получаем неравенства. Просто так записать, что что-то равно, мы уже не способны.
Сложность состоит в том, что мы не знаем, все ли стратегии смешаны.
Другой подход к решению игр — геометрический.

Геометрическая интерпретация решения матричной (2×2) игры

Пусть имеем матрицу

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Нам ее необходимо перенести на плоскость XoY. На ней отложим единичный отрезок.

$x = 0 : A_1$, $x = 1 : A_2$

Отложим точки a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}. Построим отрезки, их соединяющие.

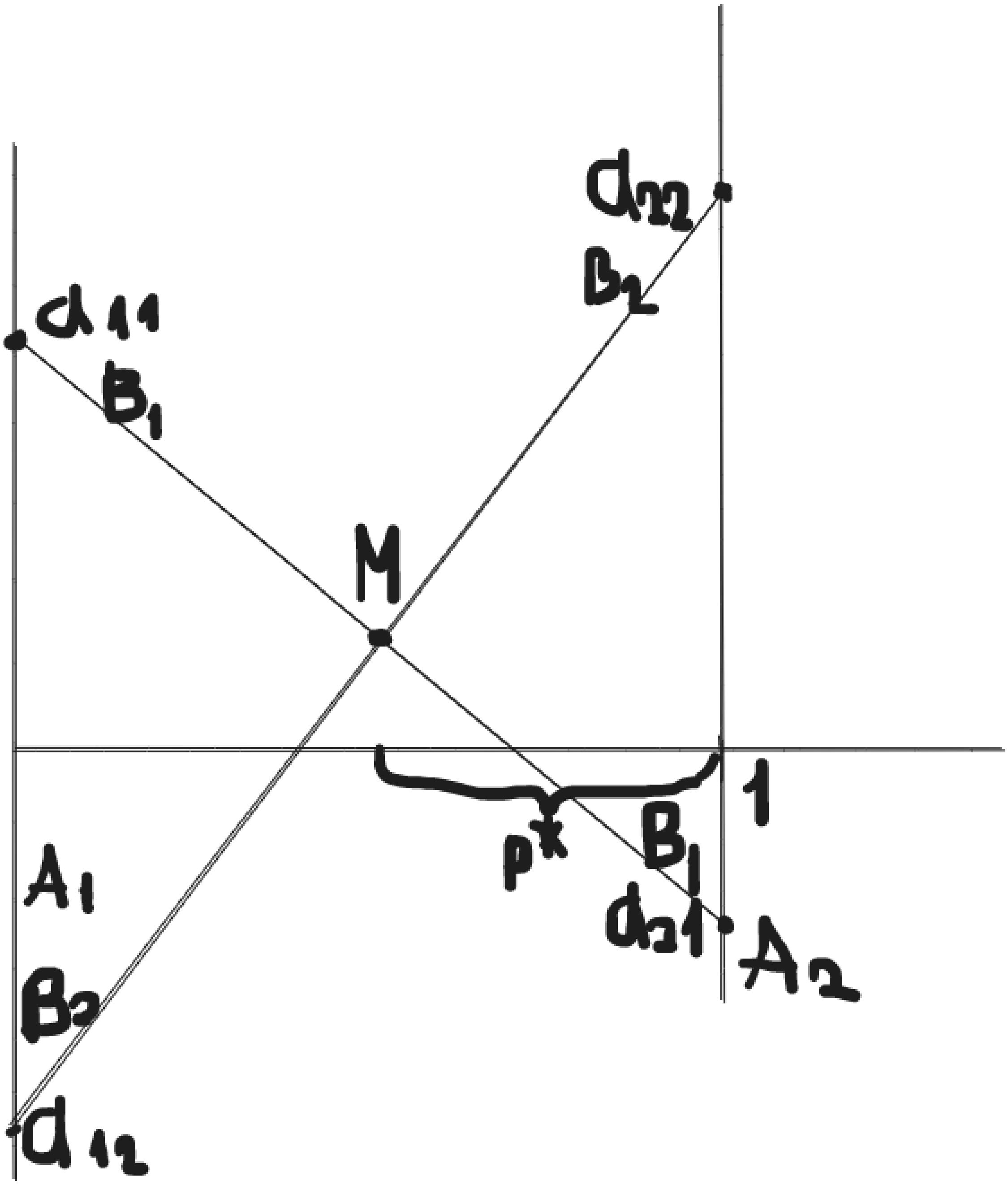
Точка пересечения этих двух линий, M — это решение задачи.

$M(x^*, y^*) \implies x^* = 1 - p^*, y^* = u$.
$max_p min_j H_A(p, j) = v$

$B_1B_1 : \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-a_{11}}{a_{21}-a_{11}} = x$
$B_2B_2 : \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-a_{12}}{a_{22}-a_{12}} = x$

Из этих уравнений находим точку пересечения M.

Это есть решение для игрока А. *Примечание: на рисунке преподавателя точка M лежит на оси OX. Но у меня на скорую руку получилось иначе.*



Решение для игрока Б строится симметрично решению для игрока А.

$x = 0 : B_1$, $x = 1 : B_2$

Откладывать нужно числа, лежащие в столбцах: на первой оси a_{11}, a_{21}, на второй оси a_{12}, a_{22}. Таким же образом соединим их точки, их пересечение обозначим как N.

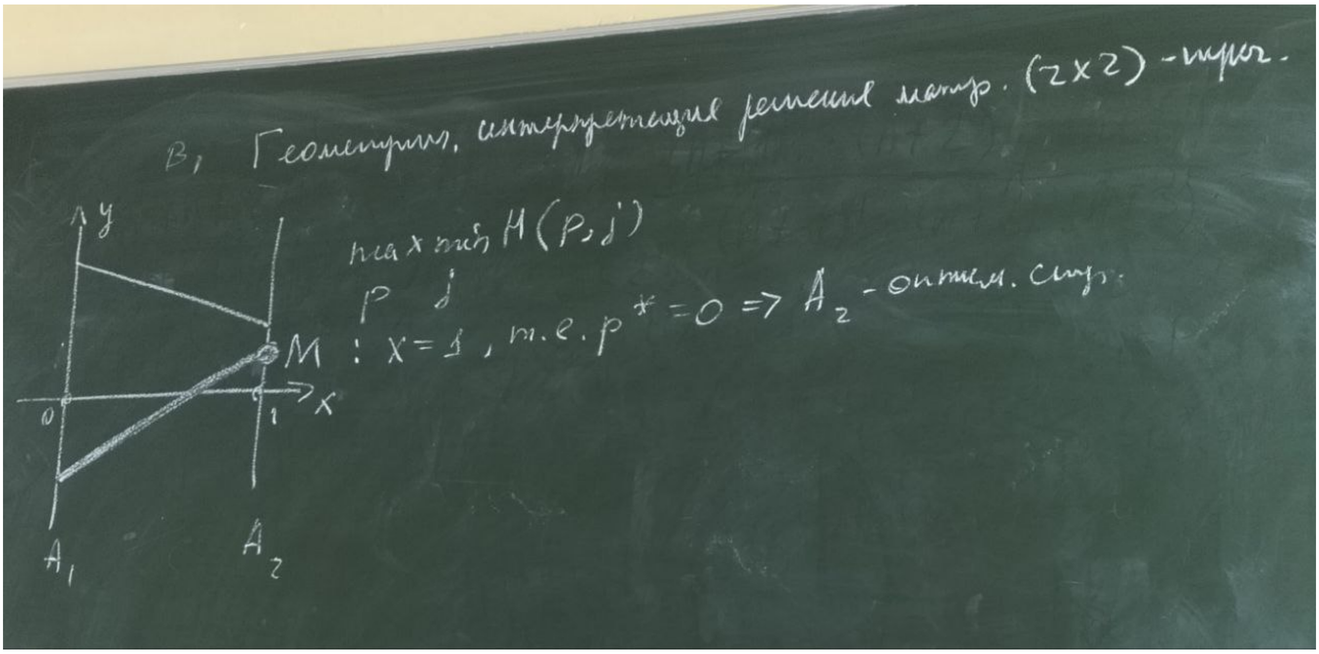
$N(x^*, y^*)$, $x^* = 1 - q$, $y^* = u$.
$min_q max_i H_A(i, q) = v$

$A_1A_1 : \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-a_{11}}{a_{12}-a11} = x$
$A_2A_2 = \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-a_{21}}{a_{22}-a_{21}} = x$
$\frac{y-a_{11}}{a_{12}-a11} = \frac{y-a_{21}}{a_{22}-a_{21}} = x^*$

Из этих уравнений находим точку пересечения M.

Этот способ решения применим лишь для чистых стратегий.

Также возможен следующий случай:

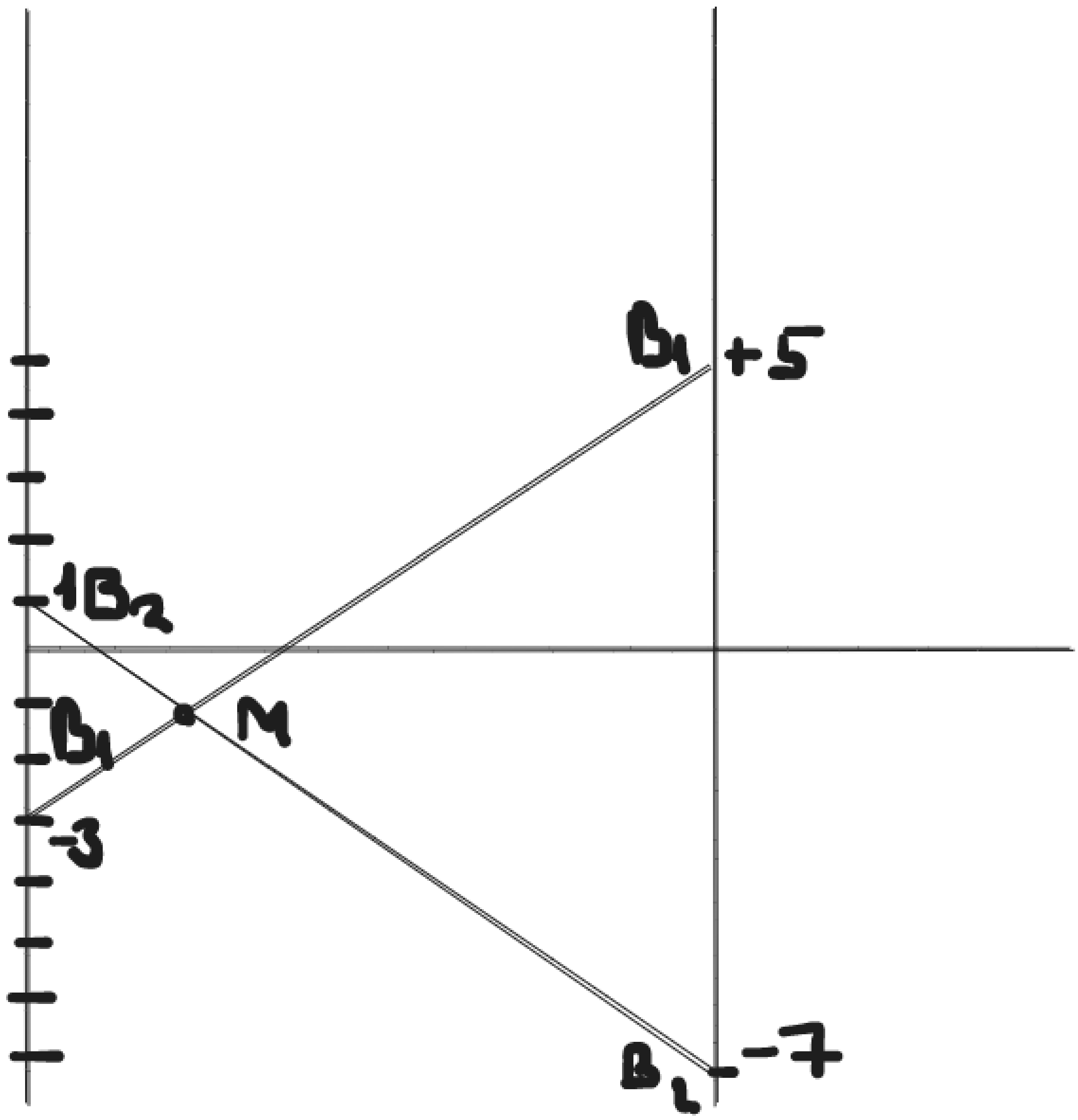


Примеры

Пример №1

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

Решение для игрока A:



$B_1B_1 : x = \frac{y-(-3)}{5-(-3)}$

$B_2B_2 : x = \frac{y-1}{-7-1}$

Найдем решение, для этого приравняем оба уравнения:

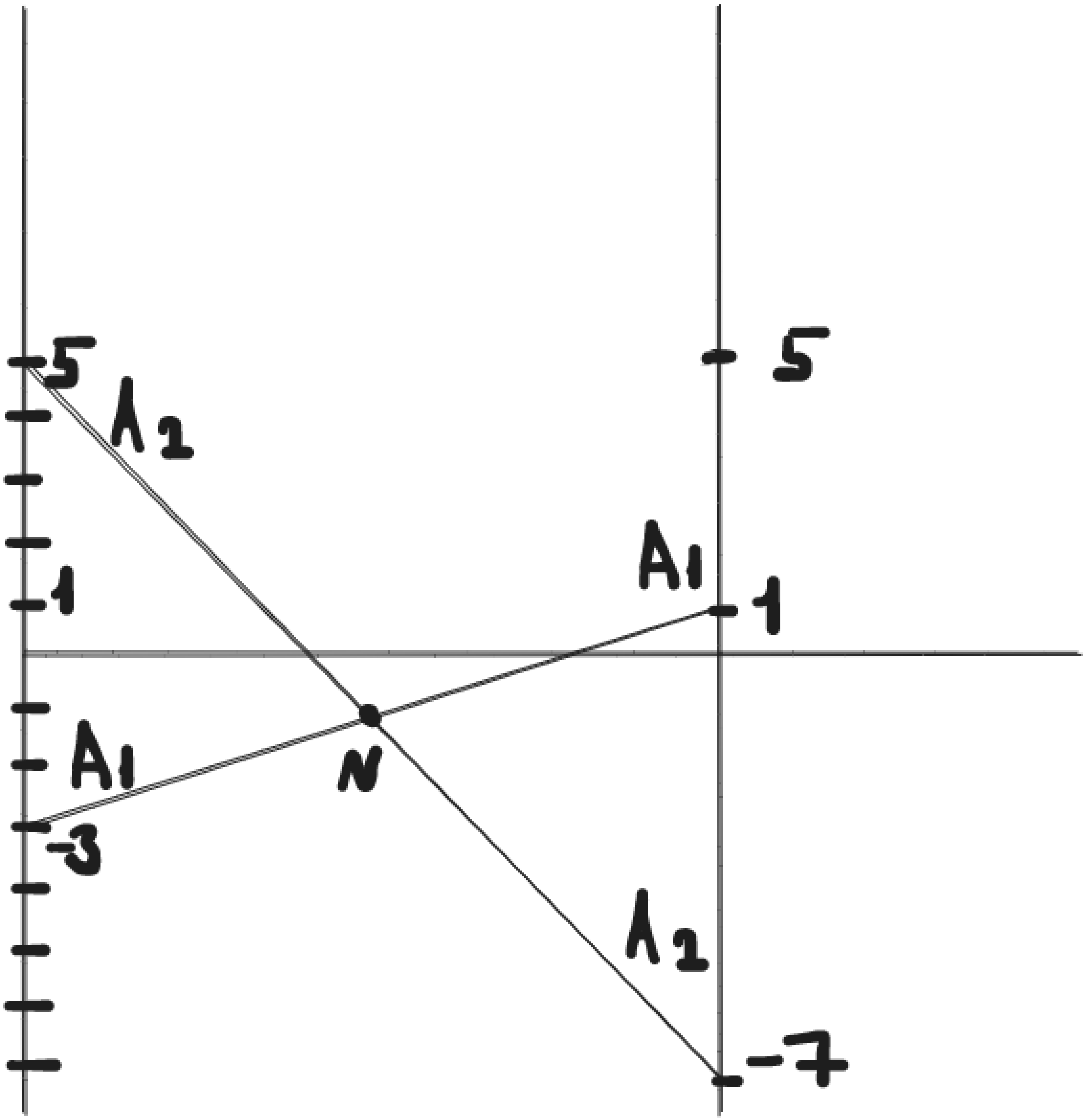
$\frac{y+3}{8} = \frac{y-1}{-8}$, $y = y^* = v$

Получим: $-8y - 24 = 8y - 8$, $y = y^*$, $y^* = -\frac{16}{16} = -1$

$x^* = \frac{y^*+1}{8} = \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4} = q - p^* \implies p^* = \frac{3}{4}$

$x = (\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$, $v = -1$

Решение для игрока Б:



$A_1A_1 : x = \frac{y-(-3)}{1-(-3)}$

$A_2A_2 : x = \frac{y-5}{-7-5}$

$14x = y + 3$, $-12x = y - 5 \implies y = 4x - 3$, $y = 5 - 12x \implies$

$4x - 3 = 5 - 12x$, $x = x^*$

$16x = 8 \implies x^* = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 1 - q^* \implies y = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$v = y^* = 4x^* - 3 = 4 * \frac{1}{2} - 3 = -1$

Решение матричных игр размерности $(2 \times n)$

Геометрический подход к решению игры 2×2 может быть обобщен на решение матричных игр размерности $(2 \times n)$ и $(n \times 2)$

Пусть

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Игрок А по-прежнему имеет две стратегии, а игрок Б имеет n стратегий.

Стратегия игрока А: $x = (p, 1-p)$, $0 \le p \le 1$
Стратегия игрока Б: $y = (q_1, q_2, \dots q_n)$, $0 \le q_j \le 1$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$

Воспользуемся первым свойством оптимальных смешанных стратегий:
$v = min_j H_A(p^*, j) = max_p min_j H_A(p, j)$
$H_A(p, j) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p)$

Для геометрического решения необходимо построить графики этих функций $H_A(p, j)$
Рисуем линии $v = H_A(p, j)$, $j = \overline{1, n}$ на плоскости VoP. У нас будет не две линии, а может быть сколько угодно: три, четыре, пять, двадцать...