Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 23.10.2023

Докажем следующее утверждение: множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым множеством.
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i \to max(min)$
$AX = B$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $B = (b_1, \dots, b_m)^T$
Пусть X_1^*, X_2^* — решение системы ограничений, то есть, $AX_1^* = AX_2^* = B$
Покажем, что $X^* = \alpha X_1^* + (1-\alpha)X_2^*$, где $0 \leq \alpha \leq 1$ также является решением системы ограничений.
$AX^* = A(\alpha X_1^* + (1-\alpha)X_2^*) = \alpha * AX_1^* + (1-\alpha) * AX_2^* = \alpha B + (1-\alpha)B - B$
Так как X^* — это выпуклое множество...

1.1 Решение задач линейного программирования

Теорема 1 *Если задача линейного программирования (далее — ЗЛП) имеет оптимальное решение, то линейная функция $F(\overline{x})$* ***достигает своего оптимума (то есть, максимума или минимума) в одной из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений****.*
Отметим, что ***если оптимальное решение достигается более чем в одной точке****, то* ***оно является выпуклой линейной комбинацией этих точек****.*

Теорема 2 *Каждому допустимому базисному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_n^*)$ ЗЛП* ***соответствует одна из угловых точек многогранника (многоугольника на плоскости) решений****.*
Таким образом, ***любое оптимальное решение ЗЛП является одной из угловых точек****, то есть* ***допустимым базисным решением****.*

1.1.1 Геометрический способ решения

Рассмотрим решение на плоскости. Оно возможно в следующих случаях:

1. Имеем две переменные: $n = 2$
2. Количество неизвестных минус количество уравнений равно двум: $n - m = 2$

Чтобы показать геометрическое решение, необходимо выбрать m переменных из $x_1, \dots, x_n$ в качестве основных (главных, базисных), а остальные переменные назовем свободными.
Пусть x_1, x_2 — свободные переменные, а $x_3, \dots, x_n$ — базисные.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \implies$$

$$\begin{cases} x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \\ \dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 \end{cases}$$

Так как $x_i \geq 0$, $\forall i = \overline{1, n} \implies \begin{cases} \beta_i + \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$
Нужно показать геометрически множество решений этой системы, которое является выпуклым многоугольником.

1. **Если нет пересечений в системе ограничений, то решение не существует**.
2. **Если есть пересечение, то решение будет**.

$F(\overline{x})$ выше было записано в следующем виде: $F(\overline{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$. **Необходимо переписать ее, выразив базисные переменные через свободные в следующем виде**: $F(\overline{x}) = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_0$
Если рассматривается задача на максимум, то **решение нужно искать в направлении возрастания функции** $F(\overline{x})$. Направление возрастания функции $F(\overline{x})$ — вектор градиент: $grad\ F = \{\frac{\delta F}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta F}{\delta x_n}\}$. В нашем случае: $grad\ F = \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

То есть, **необходимо нарисовать на плоскости x_1ox_2 уравнение прямых** $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 = c$ (опорные прямые), перпендикулярные $grad\ F$
Если мы хотим найти максимум, то на многоугольнике решений надо найти точку, через которую проходит линия уровня (то есть, опорная прямая) с наибольшим значением уровня (то есть, константы c). Получающаяся точка и является оптимальным решением.
В случае **задачи на минимум** необходимо двигаться в направлении $-grad\ F$.

Пример №1 Решить геометрически задачу линейного программирования:

$$F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \implies \frac{x_1}{18} + \frac{x_2}{6} \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \implies \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{16} \le 1 \\ x_2 \le 5 \\ x_1 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2. В результате получаем выпуклый шестиугольник.
$gradient\ F = (2, 3)$
Опорная прмая: $2x_1 + 3x_2 = c$
Рассмотрим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \implies x_1 = 18 - 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 16 \implies 36 - 6x_2 + x_2 = 16 \implies x_2 = 4 \implies x_1 = 6 \end{cases}$$

Получаем решение: $X^* = (6, 4), F(X^*) = 24$

Пример №2 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to min$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0 \\ x_i \ge 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Мы можем найти решение графически, так как $n = 6$, $m = 4$, $n - m = 2$. Из этой системы мы можем получить:

$$\begin{cases} x_4 = 13 + x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ x_5 = 26 - 4x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_3 = 1 + 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_6 = -x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ x_1 x_2 \ge 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 \ge -13 \\ 4x_1 + x_2 \le 26 \\ x_2 \le 1 + 2x_1 \\ x_1 \le 3x_2 \\ x_1 x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2. Получаем многоугольник. Преобразуем $F(\overline{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:

$$F(\overline{x}) = 4x_1 - 3x_2 - (13 + x_1 - 3x_2) + (26 - 4x_1 - x_2) = -x_1 - x_2 + 13$$

Таким образом:

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 13$$

$$gradient\ F = \{-1,-1\}, -gradient\ F = \{1,1\}$$

Построим его на графике вместе с опорными линиями в его направлении. Видим: $A = \{5,6\}, F(A) = -5-6+13 = 2$. Проверим другие точки: $B = \{6,2\}, F(B) = -6-2+13 = 5$, $C = \{2,5\}, F(C) = -2-5+13 = 6$. Окончательно убеждаемся: A — т. min
$x_4 = x_5 = 0$, $x_3 = 1+2*5-6 = 5$, $x_6 = -5+3*6 = 13 \implies X^* = (5,6,5,0,0,13), F(X^*) = 2$

Пример №3 Найти геометрически решение ЗЛП:

$$F(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 + 3x_4 - x_3 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Сложим вместе первое и второе уравнение:

$$x_1 + x_3 = 2 \implies x_3 = 2 - x_1 \geq 0$$

Сложим первое уравнение дважды и второе уравнение трижды:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 6 \implies x_4 = 1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0$$

Получили:

$$\begin{cases} 2 - x_1 \geq 0 \\ \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нарисуем все эти ограничения на плоскости x_1ox_2. Получаем четырехугольник. Преобразуем $F(\overline{x})$, чтобы определить, какая из угловых точек является решением:
$F(\overline{x}) = x_1 + 3x_2 + 3(1 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2) - (2 - x_1) = x_1 + 3x_2 + 3 - x_1 - \frac{3x_2}{2} - 2 + x_1 = x_1 + \frac{3x_2}{2} + 1$

$$gradient\ F = \{1, \frac{3}{2}\}$$

Нарисуем этот вектор на плоскости. Кроме того, имеем линию уровня:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = c$$

Видим, что $gradient\ F$ перепендикулярен второй линии.

$$F(2;\frac{2}{3}) = 2 + \frac{3}{2} * \frac{2}{3} + 1 = 4$$

$$F(0;2) = 0 + \frac{3}{2} * 2 + 1 = 4$$

Так как решением являются две точки, то **оптимальным вектором решений является их выпуклая линейная комбинация**:

$$X^* = \alpha * A + (1-\alpha)B, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

, где т. $A(2, \frac{2}{3})$, т. $B(0,2)$

$$X^* = (2\alpha, \frac{2}{3}\alpha + 2(1-\alpha))$$

$$X_3^* = 2 - 2\alpha, X_4^* = 1 - \frac{1}{3} * 2\alpha - \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\alpha + 2(1-\alpha))$$