Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 30.10.2023

1.1 Решение задач линейного программирования

Как было показано выше, при поиске max функции $f(x)$ принцип оптимальности в симплекс методе выглядел следующим образом: если в выражении $f(x)$ через свободные переменные все коэффициенты при этих переменных отрицательные, то выбранное допустимое базисное решение будет оптимальным. Если же ищется минимум функции $f(x)$, то в соответствии с принципом оптимальности все коэффициенты при этих переменных должны быть положительными, что и определяет решение.

1.1.1 Реализация симплекс-метода при помощи симплекс-таблиц

Рассмотрим реализацию симплекс-метода при помощи реализации симплекс-таблиц. Пусть рассматривается каноническая задача линейного программирования, в которой имеется n переменных и m ограничений—равенств, при этом $m \leq n$.
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i \to max\ (min)$
$AX = B, X \geq 0,\ A = (a_{ij})_{m\times m},\ X = (x_1, \ldots, x_n)^T,\ B = (b_1, \ldots, b_m)^T$
Ход решения:
Некоторые m переменных выбираются в качестве базисных. Их мы всегда можем выразить через свободные в следующем виде:
$x_i = \beta_i - \alpha_{i,m+1}x_{m+1} - \cdots - \alpha_{i,n}x_n,\ i = \overline{1,m}$, где $x_{m+1,\ldots,x_n}$ — свободные переменные
$x_{m+1} = \cdots = x_n = 0 \implies X^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \ldots, \beta_m^{(0)}, 0, \ldots, 0)$, $X^{(0)}$ является допустимым решением, если все $\beta i \geq 0$
Пусть решение допустимо, преобразуем функцию $F(\overline{x})$. То есть, подставим в нее базисные переменные, выраженные через свободные:
$F(\overline{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i(\beta_i^{(0)} - \alpha_{i,m+1}^{(0)}x_{m+1} - \cdots - \alpha_{i,n}^{(0)}x_n) + \sum\limits_{i=m+1}^{n} c_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\beta_i^{(0)} + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,j}^{(0)}c_i)x_j =$
$\Delta_0^{(0)} \pm \sum\limits_{j=m+1}^{n} \Delta_j^{(0)}x_j$, $\Delta_0^{(0)}$ — свободный коэффициент, $\Delta_j^{(0)}$ — обозначение для коэффициентов.
$\Delta_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i\beta_i = C_\delta * X_\delta$
Знак плюс в формуле выше берется для задачи на минимум, знак минус берется для задачи на максимум. Можем переписать: $\Delta_j^{(k)} = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)}c_i = c_j - C_\delta * X_j$ — для задачи на минимум, $\Delta_j^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)}c_i - c_j = C_\delta * X_j - c_j$ — для задачи на максимум.
C_δ состоит из коэффициентов c_i, соответствующих базисным переменным. $X_\delta = (\beta_1^0, \ldots, \beta_m^{(0)})$, нули в него не входят.
Все коэффициенты системы ограничений, а также c_i, Δ_0 и Δ_j удобно свести в **симплекс-таблицу**, которая отражает ход решения, достигнутое решение и признак оптимальности на каждом шаге алгоритма.
На нулевом шаге симплекс-таблица будет иметь следующий вид:
Перерисовать с фотографии
$\Delta_1 = \cdots = \Delta_m = 0$ (для базисных переменных). Последний столбец Θ определдяет базисную переменную, которую необходимо вывести из базиса. **Признак оптимальности достигнутого решения**: если на некотором шаге s все $\Delta_j^{(s)} \geq 0$, $j = \overline{1,n}$, то полученное допустимое базисное решение $X^{(s)}$ будет оптимальным, то есть $X^{(s)} = X^*$ и $F(X^*) = F^* = \Delta_0^{(S)} = max\ (min)\ F(\overline{x})$
Пусть на некотором шаге s некоторые из $\Delta_j^{(s)}$ отрицательны, то есть $\Delta_j < 0$. Тогда решение не является оптимальным и необходимо перейти к новому допустимому базисному решению. Далее из множества отрицательных Δ_j выберем то, которое по модулю оптимально. Например, это будет $\Delta_l^{(S)}$. Тогда переменную x_l необходимо перевести в базис. Соответствующий столбец X_l называется **разрешающим столбцом**.
Далее по каждой строке симплекс-таблицы находим ограничение на новую базисную переменную x_l. Для этого делим поэлементно значения X_δ на значения X_l
Правило определения θ_i на шаге s:

1. Если $\beta_i^{(s)}$ и $a_{i,l}^{(s)}$ имеют разные знаки, то $\theta_i^{(s)} = \infty$ считается равной бесконечности (нет ограничений);
2. Если $\beta_i^{(s)} = 0$ и $a_{i,l}^{(s)} < 0$, то также $\theta_i^{(s)} = \infty$;
3. Если $a_{i,l}^{(s)} = 0$, то $\theta_i^{(s)} = \infty$;

4. Если $\beta_i^{(s)} = 0$ и $a_{i,l}^{(s)} > 0$, то $\theta_i^{(s)} = 0$;

5. Если $\beta_i^{(s)}$ и $a_{i,l}^{(s)}$ имеют одинаковые знаки, то $\theta_i^{(s)} = \frac{\beta_i^{(s)}}{a_{i,l}^{(s)}}$

Далее из значений θ_i нужно выбрать минимальное, которое обозначим как θ_k. k обозначает номер базисной переменной, которую нужно вывести из базиса. Соответствующую строку x_k называют **разрешающей строкой**. $\alpha_{k,l}$ называют **разрешающим элементом**.
Преобразование симплекс-таблицы начинается с разрешающей строки и элемент, который стоит на пересечении этой строки и X_l, называют **разрешающим элементом**. Необходимо:

1. все элементы разрешающей строки кроме c_k поделить на разрешающий элемент;

2. в столбцах, соответствующих базисным переменным, поставить 0 и 1, причем 1 — напротив своей базисной переменной в столбце б., 0 — в остальных случаях;

3. остальные элементы $\alpha_{i,j}$ новой симплекс-таблицы вычисляются следующим образом:

$$\alpha_{i,j}^{(s+1)} = \alpha_{i,j}^{(s)} - \frac{\alpha_{i,j}^{(s)} * \alpha_{k,j}^{(s)}}{\alpha_{k,l}^{(s)}}, \beta_i^{(s+1)} = \beta_i^{(s)} - \frac{\alpha_{i,l}^{(s)} * \beta_k^{(s)}}{\alpha k, l^{(s)}}$$

4. Для новой симплекс-таблицы вычисляются коэффициенты $\Delta_0^{(s+1)}$ и $\Delta_j^{(s+1)}$ (только для свободных переменных, так как для базисных равны нулю) и проверяем таблицу на оптимальность. То есть, если окажется, что все коэффициенты неотрицательны, то решение достигнуто. Иначе решение неоптимально и мы заново вычисляем ограничения, находим все необходимое и переходим к новой таблице.

1.1.2 Решение задач

Пример №1 Решить ЗЛП при помощи симплекс-таблиц:

$$F(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

При ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,2} \end{cases}$$

Перейдем от неравенств к равенствам (добавим дополнительные переменные):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,6} \end{cases}$$

Представим это всё в виде симплекс-таблицы (№1):

$$\begin{pmatrix} б & C_б & X_б & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_3 & 0 & 18 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{3} = 6 \\ x_4 & 0 & 16 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{1} = 16 \\ x_5 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{1} = 5 \\ x_6 & 0 & 21 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$X^{(0)} = (0, 0, X_б) = (0, 0, 0, 18, 16, 5, 7)$

$\Delta_0 = C_\delta * X_\delta$
$\delta_j = C_\delta * X_j - c_j$
Решение неоптимально. Переводим x_2 в базис. Разрешающий столбец — X_2. θ_5 — минимум. Разрешающий элемент — 1 на пересеченини x_5 и X_2. Следовательно, x_5 выводим из базиса. Необходимо составить новую симплекс-таблицу (№2):

$$\begin{pmatrix} \text{б} & C_\text{б} & X_\text{б} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \frac{3}{1} = 3 \\ x_4 & 0 & 11 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{11}{2} = 2 \\ x_2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x_6 & 0 & 21 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{21}{3} \\ \Delta_j & & 15 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \end{pmatrix}$$

Видим, что есть один отрицательный коэффициент: Δ_1. Решение неоптимально. Смотрим на столбец X_1. Они все положительны кроме одного нуля. Делим столбец. Выбираем минимум — это будет θ_1. Следовательно, разрешающий элемент — на пересечении x_3 и X_1. Необходимо составить новую симплекс-таблицу (№3):

$$\begin{pmatrix} \text{б} & C_\text{б} & X_\text{б} & X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \theta \\ x_1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \\ x_4 & 0 & 5 & 0 & 0 & -2 & 1 & 5 & 0 & \\ x_2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ x_6 & 0 & 12 & 0 & 0 & -3 & 0 & 9 & 1 & \\ \Delta_j & 21 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & & \end{pmatrix}$$