Дискретная математика

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 26.09.2023

Импликацией, эквивалентностью, сложением по модулю два, коимпликацией, штрихом Шеффера и стрелкой Пирса называются функции, заданные, соответственно, следующими таблицами истинности:

x	y	$x \to y$	$x \sim y$	$x \bigoplus$	$x \leftarrow y$	$x \vert y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0

1.1 Нормальные формы: ДНФ, КНФ, СДНФ, СКНФ, АНФ

Можно составлять с помощью законов алгебры логики или таблицы истинности (или с помощью чего еще хочется). Допустим, имеем:

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ $f = \overline{x}\overline{y}z + x\overline{y}\overline{z} + x\overline{y}z + xyz$

ДНФ $f = x\overline{y} + xz + \overline{y}z$

СКНФ $f = (x + y + z)(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + \overline{z})(\overline{x} + \overline{y} + z)$

КНФ $f = (x + z)(x + \overline{y})(\overline{y} + z)$

Полином Жегалкина (АНФ) Метод треугольника (часто называемый методом треугольника Паскаля) позволяет преобразовать таблицу истинности в полином Жегалкина путём построения вспомогательной треугольной таблицы в соответствии со следующими правилами:

1. Строится полная таблица истинности, в которой строки идут в порядке возрастания двоичных кодов от 000...00 до 111...11.
2. Строится вспомогательная треугольная таблица, в которой первый столбец совпадает со столбцом значений функции в таблице истинности.
3. Ячейка в каждом последующем столбце получается путём суммирования по модулю 2 двух ячеек предыдущего столбца — стоящей в той же строке и строкой ниже.
4. Столбцы вспомогательной таблицы нумеруются двоичными кодами в том же порядке, что и строки таблицы истинности.
5. Каждому двоичному коду ставится в соответствие один из членов полинома Жегалкина в зависимости от позиций кода, в которых стоят единицы. Например, ячейке 111 соответствует член ABC, ячейке 101 — член AC, ячейке 010 — член B, ячейке 000 — член 1 и т. д.
6. Если в верхней строке какого-либо столбца стоит единица, то соответствующий член присутствует в полиноме Жегалкина.

АНФ для таблицы, представленной выше:

$$f = z \oplus yz \oplus x \oplus xz \oplus xy$$

1.2 Минимизация булевых функций: метод Куайна

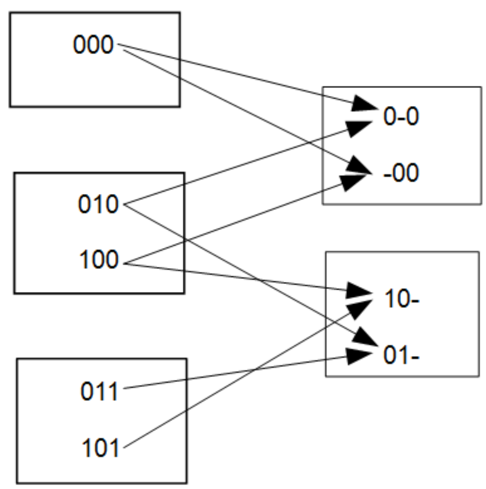
Минимизировать СДНФ булевой функции методом Квайна и по карте Карно. Привести к скобочной форме, построить логическую схему. Пусть функция трех переменных, задана таблицей истинности:

n	x	y	z	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Запишем СДНФ нашей функции:

$$f = \overline{xyz} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{yz} \vee x\overline{y}z$$

Решим задачу методом Квайна (Квайна-Мак-Класки). Выпишем в двоичном коде слагаемые СДНФ в нашем примере и объединим в блоки по числу единиц (весу Хэмминга). Склеиваются две элементарные конъюнкции в том случае, когда соответствующие наборы различаются ровно в одном разряде (расстояние Хэмминга равно 1). Из этого следует, что они принадлежат соседним блокам. При склейке вместо исчезнувшей переменной ставим прочерк (пример: $000 \vee 010 = 0-0$). Простые импликанты не участвуют в дальнейших склейках (не имеют потомков). В нашем примере это 0-0, -00, 10-, 01-.



Второй шаг — это поиск минимального покрытия строками таблицы Квайна (импликантной таблицы). Наиболее мощным и универсальным является метод функций Петрика, но его недостатком является большой объѐм вычислений. В нашем случае таблица Квайна имеет вид:

		000	010	011	100	101
A	0-0	+	+			
B	-00	+			+	
C	01-		+	+		
D	10-				+	+

В первой строке таблицы стоят слагаемые СДНФ, а в первом столбце перечислены простые импликанты. Знаки «+» стоят там, где простая импликанта содержит данное слагаемое СДНФ. Составим и приведѐм к дизъюнктивной форме в соответствии с правилами раскрытия скобок и поглощения функцию Петрика. Для составления функции Петрика надо для каждого столбца взять дизъюнкцию простых импликант, отмеченных «+», и перемножить получившиеся выражения:

$K = (A \vee B)(A \vee C)C(B \vee D)D = (A \vee B)((A \vee C)C)((B \vee D)D) = (A \vee B)CD = ACD \vee BCD$

Каждому слагаемому теперь соответствует тупиковая ДНФ, конъюнкции надо заменить на дизъюнкции. В нашем случае обе ТДНФ являются минимальными:

МДНФ1$= A \vee C \vee D = \overline{x}\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{x}y$; МДНФ2$= B \vee C \vee D = \overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y \vee x\overline{y}$

Запишем результат в скобочной форме: $\overline{x}\overline{z} \vee \overline{x}y \vee x\overline{y} = \overline{x}(\overline{z} \vee y) \vee x\overline{y}$, $\overline{y}\overline{z} \vee \overline{x}y \vee x\overline{y} = \overline{y}(\overline{z} \vee x) \vee \overline{x}y$