Дискретная математика

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Лекция — 19.09.2023

1.1 Теория множеств

Определение 1 *Множество — совокупность каких-либо объектов.*

Обозначаются множества большими буквами. Например, в математике приняты следующие обозначениия числовых множеств: N — натуральные, Z — целые, Q — рациональные, R — действительные, C — комплексные.

1.1.1 Способы задания множеств

1. Непосредственным перечислением. Например: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
2. Условием, объединяющим его элементы. Например: $A = \{\text{множество положительных чисел}\} = \{a_i : \forall i a_i > 0\}$
3. Порождающей формулой или процедурой. Например:
   $B = \{\text{множество положительных нечетных чисел}\} = \{b_i : \forall i b_i = 2n - 1, n \in N\}$

1.1.2 Типы множеств

Множества делятся на 2 основных типа: **дискретный** и **непрерывный** тип.

Определение 2 *Между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие $\Leftrightarrow \forall a_i \in A : \exists b_j \in B$. То есть, a_i соответствует b_j и только ему.*

Определение 3 *Два множества X и Y называются **эквивалентными** или имеющими одинаковую мощность (обозначается $X \sim Y$), если между множествами X и Y может быть установлено взаимно однозначное соответствие*

Определение 4 *Множество называется **счетным**, если его элементы упорядочены и их можно пронумеровать, присвоить им порядковый номер.*

Определение 5 *Множество M **дискретного типа**, если оно не более чем счётное, иначе оно **непрерывного типа**.*

1.1.3 Операции над множествами

1. **объединение**, обозначается как $A \cup B$ — множество, содержащее все элементы из A и B
2. **разность**, обозначается как $A \setminus B$, реже $A - B$ — множество элементов A, не входящих в B
3. **дополнение**, обозначается как $A \setminus A$ или $-A$ — множество всех элементов, не входящих в A (в системах, использующих универсальное множество)
4. **пересечение**, обозначается как $A \cap B$ — множество из элементов, содержащихся как в A, так и в B
5. **симметрическая разность**, обозначается как $A \triangle B$, $A - B$ — множество элементов, входящих только в одно из множеств — A или B.

Определение 6 ***Прямое, или декартово произведение** двух непустых множеств — множество, элементами которого являются все возможные упорядоченные пары элементов исходных множеств*

Свойства операций

1. Коммутативность
   $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. Идемпотентность
   $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

5. Закон де Моргана
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

6. Операции с множествами
   $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

7. Операции с множеством
   $A \cup U = U \implies U = \overline{\emptyset} \implies \overline{U} = \emptyset$, $A \cap U = A$

8. Законы поглощения
   $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$

1.1.4 Мера множеств

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
2. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
3. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$

1.1.5 Отношения множеств

Отношением называется пара (X, R), где $R \subseteq X \times X$. Так как элементами множества $X \times X$ являются упорядоченные пары, то отношение – это множество упорядоченных пар. Поскольку каждая пара связывает два элемента из X, то отношение называется **бинарным**. Тот факт, что два элемента x и y из X связаны отношением R, обозначается xRy или $(x, y) \in R$.

Определение 7 ***Областью определения*** *Бинарного отношения R называется множество Δ_R элементов $x \in X$, для которых существуют такие $y \in Y$, что xRy.*

Определение 8 ***Областью значений*** *Бинарного отношения R называется множество E_R элементов $x \in X$, для которых существуют такие $y \in Y$, что yRx.*

Определение 9 ***Обратным отношением*** *R^{-1} для бинарного отношения R называется множество упорядоченных пар xRy, таких, что yRx.*

Виды бинарных отношений

1. **Рефлексивное отношение** — двуместное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любого x этого множества элемент x находится в отношении R к самому себе, то есть для любого элемента x этого множества имеет место xRx. Примеры рефлексивных отношений: равенство, одновременность, сходство.

2. **Антирефлексивное отношение** (иррефлексивное отношение; так же, как антисимметричность не совпадает с несимметричностью, иррефлексивность не совпадает с нерефлексивностью) — бинарное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любого элемента x этого множества неверно, что оно находится в отношении R к самому себе (неверно, что xRx).

3. **Транзитивное отношение** — двуместное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z из xRy и yRz следует $xRz (xRy \wedge yRz \to xRz)$. Примеры транзитивных отношений: «больше», «меньше», «равно», «подобно», «выше», «севернее».

4. **Нетранзитивное отношение** — двуместное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x, y, z этого множества из xRy и yRz не следует $xRz(\neg(xRy \wedge yRz \to xRz))$. Пример нетранзитивного отношения: «x отец y»

5. **Симметричное отношение** — бинарное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых элементов x и y этого множества из того, что x находится к y в отношении R, следует, что и y находится в том же отношении к x — $xRy \to yRx$. Примером симметричных отношений могут быть равенство, отношение эквивалентности, подобие, одновременность.

6. **Антисимметричное отношение** — бинарное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x и y из xRy и yRx следует $x = y$ (то есть RR^{-1} выполняются одновременно лишь для равных между собой членов).

7. **Асимметричное отношение** — бинарное отношение R, определённое на некотором множестве и отличающееся тем, что для любых x и y из xRy следует $\neg yRx$. Пример: отношения «больше» ($>$) и «меньше» ($<$).

8. **Отношение эквивалентности** — бинарное отношение R между объектами x и y, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным. Примеры: равенство, равномощность двух множеств, подобие, одновременность.

9. **Отношение порядка** — отношение, обладающие только некоторыми из трёх свойств отношения эквивалентности: отношение рефлексивное и транзитивное, но несимметричное (например, «не больше») образует нестрогий порядок, а отношение транзитивное, но нерефлексивное и несимметричное (например, «меньше») — строгий порядок.