Лекция — 05.09.2023

Разделы дискретной математики

1. Математическая логика;
2. Теория алгоритмов;
3. Комбинаторика;
4. Теория множеств;
5. Теория автоматов.

Математическая логика

Математическая логика оперирует такими элементами как высказывания:

- **Простое высказывание** — повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно;
- **Составные (сложные) высказывания** — высказывания, состоящие из простых высказываний, связанных логическими операциями.

Логические операции

p: сегодня первое сентября;
q: сегодня солнечная погода.

1. **Отрицание** (НЕ), обозначается символом $\neg$ или как $\overline{p}$, $-p$. Сегодня не первое сентября: $\overline{p}$, $\overline{p} = true$, $p = false$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & \overline{p} \\ T & F \\ F & T \end{pmatrix}$$

2. **Умножение** (конъюнкция, И). Обозначается как $p \wedge q$ или $p \,\&\, q$ или $p * q$. Сегодня не первое сентября, хоть и солнечная погода: $p \wedge q = false$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \wedge q \\ T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & F \\ F & F & F \end{pmatrix}$$

3. **Сложение** (дизъюнкция, ИЛИ). Обозначается как $p \vee q$ или $p + q$. Сегодня солнечная погода, хоть и не первое сентября: $p \vee q = true$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \vee q \\ T & T & T \\ T & F & T \\ F & T & T \\ F & F & F \end{pmatrix}$$

4. **Взаимоисключающее ИЛИ**. Обозначается как $p \oplus q$ (сложение по модулю 2). Сегодня солнечная погода и не первое сентября: $p \oplus q = true$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \oplus q \\ T & T & F \\ T & F & T \\ F & T & T \\ F & F & F \end{pmatrix}$$

5. **Связь условием** (**импликация**; если, то). Обозначается как $p \to q$. Если сегодня первое сентября, то будет хорошая погода — **неправильный пример**, не обозначает закон природы, нам не подходит. Зато баба с возу — кобыле легче:

$a \to b = true$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \to q \\ T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & T \\ F & F & T \end{pmatrix}$$

6. **Связь безусловием** (**эквивалентность**; тогда и только тогда; если и только если). Обозначается как $p \leftrightarrow q$. **Таблица истинности**:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \leftrightarrow q \\ T & T & T \\ T & F & F \\ F & T & F \\ F & F & T \end{pmatrix}$$

Антиоперации

7. Штрих Шеффера
   $p \mid q = \overline{p \wedge q}$.
   Таблица истинности:

$$\begin{pmatrix} p & q & p \mid q \\ T & T & F \\ T & F & T \\ F & T & T \\ F & F & T \end{pmatrix}$$

8. Стрелка Пирса
   $p \downarrow q = \overline{p \vee q}$
9. Логическая разность
   $p - q = \overline{p \to q}$
10. Сложение по модулю 2
   $p \oplus q = p\overline{q} + \overline{p}q$

Свойства логических операций

1. $p \wedge q = q \wedge p$

   $p \vee q = q \vee p$

   $p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p$

   $p \oplus q = q \oplus p$
2. $p * (q * r) = (p * q) * r$

   $p + (q + r) = (p + q) + r$

   $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

   $p \oplus (q \oplus r) = (p \oplus q) \oplus r$
3. $p * (q + r) = p * q + p * r$

   $p + q * r = (p + q) * (p + r)$

Докажем эквивалентность высказывания выше.

$$\begin{pmatrix} & & & (1) & & (2) & (3) & \\ p & q & r & q * r & p + (1) & p + q & p + r & (2) * (3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из таблицы истинности наблюдаем эквивалентность.

4. $\overline{\overline{p}} = p$
5. $p + p = p$

   $p * p = p$
6. $p * (p + q) = p$

   $p + p * q = p$
7. $p * F = F$, $p * T = p$

   $p + F = p$, $p + T = T$

8. $p * \overline{p} = F$
   $p + \overline{p} = T$
9. $\overline{p + q} = \overline{p} * \overline{q}$
   $\overline{p * q} = \overline{p} + \overline{q}$
10. $p \to q = \overline{p} + q$

Примеры

Задача Венна

Джон Венн — английский математик (логик-философ), род. 1837, умер 1923.

Задача состоит в том, чтобы сократить правила вступления в клуб. В уставе клуба записано:

1. финансовый комитет избирается из состава общего комитета;
2. никто не может быть одновременно и в общем, и в библиотечном комитете, если только он не является также членом финансового комитета;
3. никто из числа библиотечного комитета не может быть и в финансовом.

Формализуем:

1. $Ф \to О$ — если в финансовом, то обязательно в общем;
2. $\overline{Ф} \to (\overline{О \wedge Б})$
3. $Б \to \overline{Ф}$

Они все соблюдаются одновременно:

$$(Ф \to О) \wedge (\overline{Ф} \to (\overline{О \wedge Б})) \wedge (Б \to \overline{Ф}) = (\overline{Ф} + О) * (\overline{\overline{Ф}} + \overline{Б * О}) * (\overline{Б} + \overline{Ф}) =$$

$$= F + \overline{Ф} * \overline{Б} + \overline{Ф} * \overline{О} + О * Ф + О * \overline{Б} + 0 * \overline{0})(\overline{Б} + \overline{Ф})$$

$$= Ф\overline{ББ} + \overline{ФОБ} + ОФ\overline{Б} + О\overline{Б}\overline{Б} + \overline{Ф} + \overline{Б} + \overline{Ф} + \overline{Ф} + \overline{О} + \overline{Ф} + ОФ\overline{Ф} + О\overline{Б}\overline{Ф} =$$

$$= \overline{Б}(\overline{Ф} + \overline{ФО} + ОФ + О + \overline{Ф} + О\overline{Ф}) + \overline{ФО}$$

$$= \overline{Б}(О + \overline{Ф}) + \overline{Ф} * \overline{О} = \overline{Ф + О} + \overline{Б}(Ф \to О) = (Ф + О) \to (Ф \to О) * \overline{Б}$$

Логические предикаты

Предикат — функция высказывания.

Пример №1: $ц(x)$: x — *это цветок*; тогда $ц(роза) = true$, $ц(холодильник) = false$.

Пример №2: $цв(x, y)$: *предмет* x *цвета* y; тогда $цв(береза, синий) = false$, $цв(роза, черный) = false$.

Кванторы

1. **Квантор общности** (всякий, любой): $\forall$
2. **Квантор существования** (существует, найдется): $\exists$
3. **Квантор единственности**: !

Запишем высказывание «ночью все кошки серые» с помощью предикатов и кванторов.
Введем предикат: $вс(x)$: *сейчас время суток* x,
$к(x)$: x *является кошкой*; $цв(x, y)$: x *цвета* y.
Запишем: $\forall a$: $к(a) \wedge вс(ночь) \rightarrow ц(a, серый)$
Можно записать иначе: $вс(ночь) \rightarrow \forall a$: $к(a) \rightarrow ц(a, серый)$

Отрицание кванторов

$\overline{\forall x : p(x)} = \exists x : \overline{p(x)}$
$\overline{\exists x : p(x)} = \forall x : \overline{p(x)}$