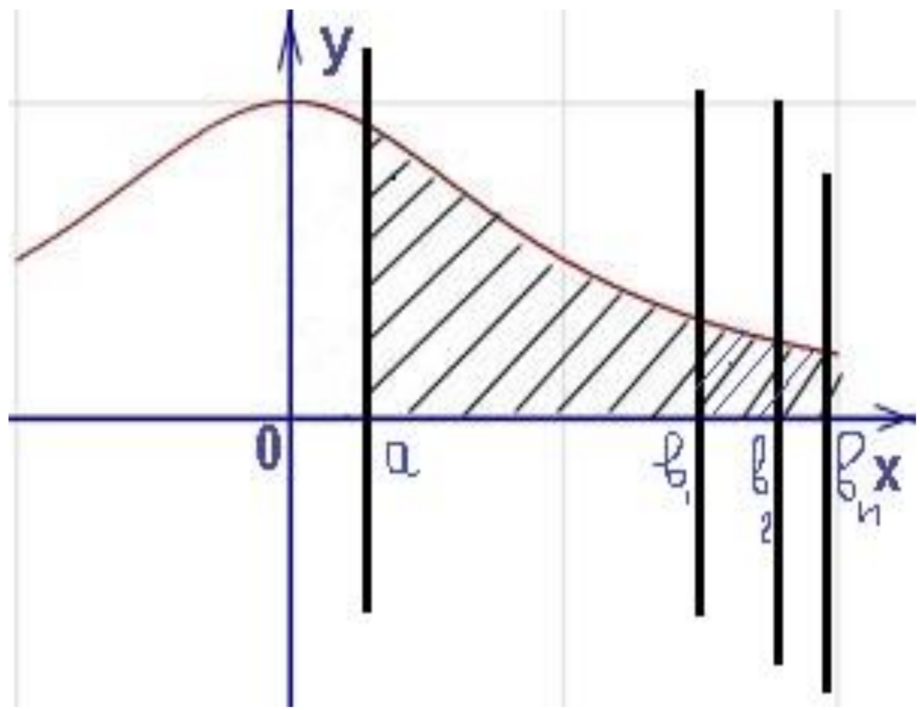
ТЕМА
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы 1го рода (с бесконечными пределами)

- *В случае, когда график функции $y = f(x)$ находится выше оси Ох, определённый интеграл выражает площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$.*

Несобственный интеграл выражает площадь неограниченной (бесконечной) криволинейной трапеции, заключённой между линиями $y = f(x)$ (на рисунке ниже - красного цвета), $x = a$ и осью абсцисс.



Площадь бесконечной криволинейной трапеции может быть конечным числом и в этом случае несобственный интеграл называется *сходящимся*. Площадь может быть и бесконечной(например ,если $f(x) = x^2$) и в этом случае несобственный интеграл называется *расходящимся*.

- Для того , чтобы вычислить несобственный интеграл 1го рода ,мы записываем определенный интеграл $\int_a^B f(x)dx$ и устремляем верхний предел к бесконечности $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B F(x)dx$

Вычислить несобственный интеграл (если он сходится).

1.$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$= $\lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B x^{-2}dx$=

= $\lim\limits_{B\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)$ и не забываем подставить верхний и нижний пределы!!!

= $\lim\limits_{B\to\infty} \left(-\frac{1}{B}+\frac{1}{1}\right) = 1$

2.$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$= $\lim\limits_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dx}{x}$= $\lim\limits_{B\to\infty} (lnx)$ но если тут подставить верхний и нижний пределы , то

= $\lim\limits_{B\to\infty} (lnB - ln1) = \infty$

Значит , этот интеграл расходится!!!

- **Несобственные интегралы с бесконечным нижним пределом**
- Аналогично определяется несобственный интеграл от непрерывной функции с **бесконечным нижним пределом** интегрирования, обозначаемый символом , а именно
- $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty} \int_{B}^{a} f(x)dx$
- **Несобственные интегралы с двумя бесконечными пределами**
- Несобственный интеграл **с двумя бесконечными пределами** интегрирования нужно предварительно представить в виде суммы двух несобственных интегралов, один из которых с конечным верхним пределом интегрирования, другой - с конечным нижним пределом интегрирования, т.е.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$
- По определению =$\lim\limits_{B\to-\infty} \int_{B}^{a} f(x)dx + \lim\limits_{C\to+\infty} \int_{a}^{C} f(x)dx$
- причём этот **несобственный интеграл считается сходящимся**, если оба предела существуют, когда *B* и *C* независимо друг от друга неограниченно возрастают по абсолютной величине.
- ***Вычислить*** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$.Разобьем интервал точкой 0 на два и запишем $\lim\limits_{B\to-\infty} \int_{B}^{0} \frac{1}{x^2+2x+2} dx + \lim\limits_{C\to+\infty} \int_{0}^{C} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$
- Чтобы найти первообразную $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ выделяем полный квадрат
- $\int \frac{1}{x^2+2x+1+1} dx$=$\int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = arctg(x+1)$
- Если перейти к пределу у нас будет
- $arctg1 - arctg(-\infty) + arctg(\infty) - arctg1 = \pi$

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ несобственных интегралов 1го рода

- *Теорема.* Если подынтегральная функция непрерывна на $[a;\infty)$ и является неограниченной при $x \to \infty$,то несобственный интеграл 1го рода расходится.
- *Замечание.* Если функция ограничена, то интеграл может как сходиться , так и расходиться!!

- ПРИЗНАК СРАВНЕНИЯ.
- Пусть две *неотрицательные* функции $f(x)и\ g(x)$ **непрерывны** на промежутке $[a;\infty)$, и для всех x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ.

Пусть две *неотрицательные* функции $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** на промежутке $[a;\infty)$, и существует конечный предел отношения $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{0}$. Тогда интегралы $\int_a^\infty g(x)dx$ и $\int_a^\infty f(x)dx$ ведут себя одинаково (т.е. сходятся или расходятся одновременно)

- **«ЭТАЛОННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ»**
- $\boldsymbol{\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx}$**-** сходятся при р$>1$, расходятся при р$\leq 1, \mathrm{a}>0$
- $\boldsymbol{\int_a^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx}$**-** сходятся при р$>1$, расходятся при р$\leq 1$, $\mathrm{a}>1$

Исследовать на сходимость

1.$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x dx}{x^2}$ подынтегральная функция непрерывна и ограничена на промежутке интегрирования. $\sin^2 x\leq 1$ поэтому мы сравниваем подынтегральную функцию с $\boldsymbol{\frac{1}{x^p}}$ р=2,а т.к.$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ при р>1 сходится , то и наш интеграл будет сходиться.

Исследовать на сходимость
(*с помощью предельного признака*)

1) $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}} \sim \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1+2/3}} = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$$ сход.

Мы предположим, что наш интеграл можно сравнить с интегралом от $\frac{1}{x^{5/3}}$.
Но это надо проверить

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}}{\frac{1}{x^{5/3}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{5/3}}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = 1$$

Высшие степени числ. и знам. совпад.

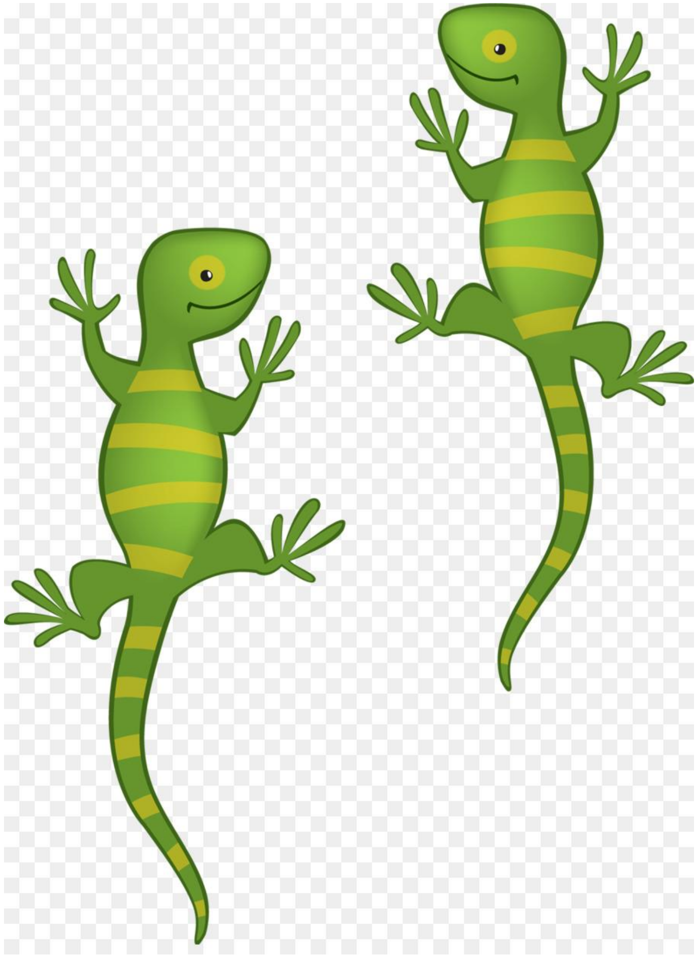
$1 = Const \neq 0$ – можно применить предельный признак

2) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^4}} \sim \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$$ – сход.

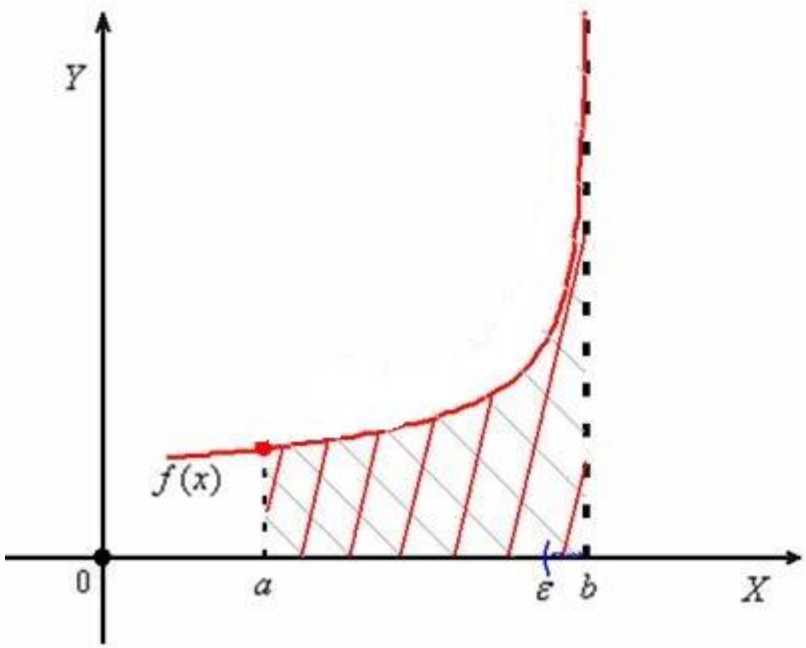
Опять же надо проверить, верно ли мы выбрали интеграл, с которым сравнивать

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x^4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+2x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}+2}} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ – можно применять предельный признак



Несобственные интегралы 2го рода (от разрывных функций)



- Теперь рассмотрим площадь такой криволинейной трапеции. Особенность в том, что функция f(x) в точке b терпит разрыв.
- $S = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx =$ $= \int_a^b f(x)dx$ несобственный интеграл 2го рода

Для интегралов 2 рода тоже есть признак сравнения:

Пусть две *неотрицательные* функции $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** на промежутке $[a; \boldsymbol{b})$, и для всех х из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$

- **«эталонные интегралы»**
- $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\propto}} \boldsymbol{dx}$ и $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})^{\propto}} \boldsymbol{dx}$ сходятся при $\propto < 1$,
- расходятся при $\propto \geq 1$

Для несобственных интегралов 2 го рода тоже можно применять и предельный признак сравнения. НО: если в при x→ ∞ в подынтегральной функции наибольшее влияние оказывают более высокие степени x, то при малых x, наоборот , мы должны обращать внимание на самую низшую степень x.

- *Рассмотрим интеграл* $\int_0^1 \frac{dx}{5x^2+\sqrt[4]{x}}$
- «Плохая» точка x=0,поэтому внимание обращаем на низшую степень x. То есть для сравнения берем интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$, который сходится , т.к. степень $\frac{1}{4} < 1$
- *Но на самом деле мы сначала должны были вычислить предел* $lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5x^2+\sqrt[4]{x}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$ *и убедиться ,что это число,*$\neq 0$

Бывают еще более замысловатые случаи . Например: чтобы исследовать сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)dx}{\sqrt{x^3}}$ мы сначала должны заметить , что при малых x $\ln(1+x) \sim x$ и наш интеграл эквивалентен $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ степень в знаменателе $\frac{1}{2} < 1$, значит интеграл сходится.

- Если же интервал интегрирования таков , что «плохими» оказываются, например , начальная и конечная точки, или-что еще хуже-точка внутри интервала-то придется его разбивать на два, и отдельно исследовать.

- А может случиться, что в интеграле $\int_a^\infty f(x)dx$ в точке а функция $\rightarrow \infty$ то есть у нас интеграл 2го рода. Опять придется разбить на 2 интеграла и исследовать. Если хотя бы один интеграл расходится, то исходный тоже расходится!

ЗАДАНИЕ НА ДОМ

- Составить по 3 интеграла 1го и 2го рода, вычислить или исследовать на сходимость!
- Если интересно , поглядите на http://mathprofi.ru- но не списывать один в один!!! Прислать мне.