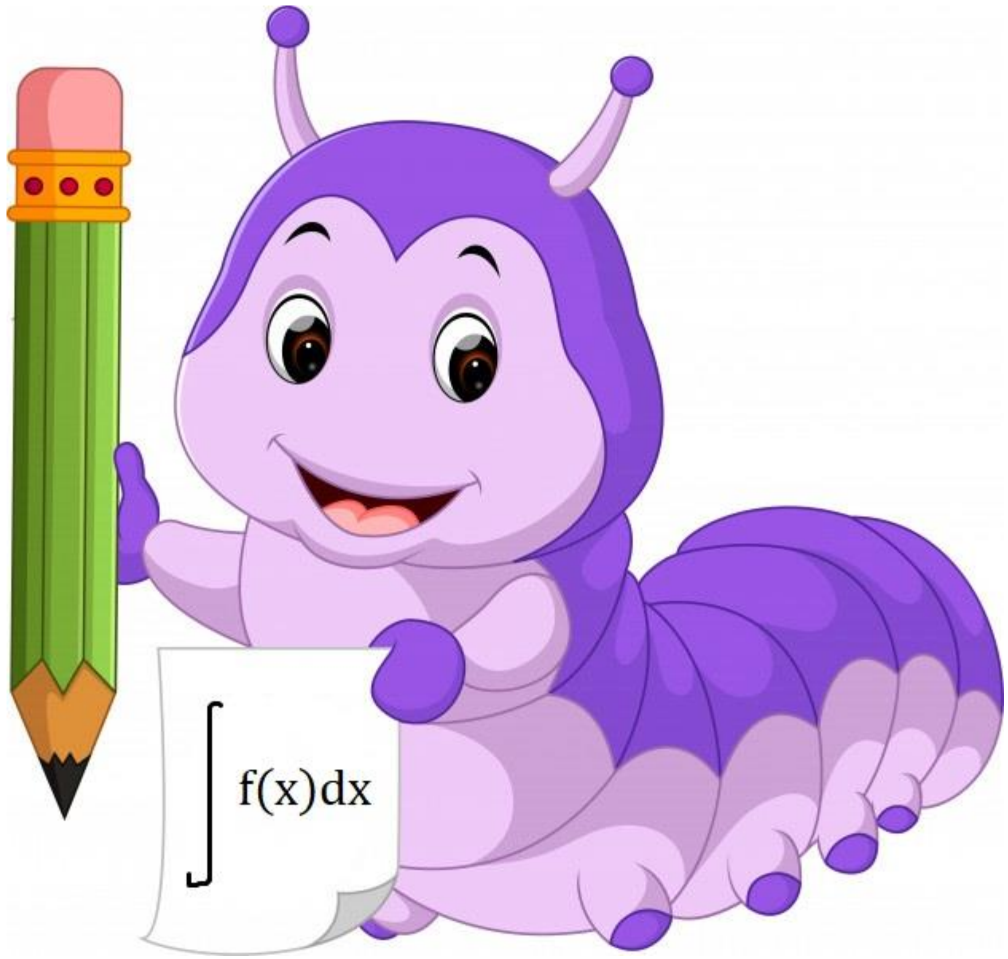
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ



Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для любого $x \in (a, b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на (a, b), то любая первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид

$F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на интервале (a, b) называется

неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале (a, b) и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Свойства неопределенного интеграла:

- 1) $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x) dx$;
- 2) $\int A f(x)\, dx = A \int f(x)\, dx$, где $A \neq 0$,

  A =const;
- 3) $(\int f(x) dx)' = f(x)$; $d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx$;
- 4) $\int F'(x) dx = F(x) + C$; $\int d\, dF(x) = F(x) + C$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

Вычислить интегралы , пользуясь только свойствами неопределённого интеграла и таблицей

1. $\int(\sqrt[3]{x}+5x^2-2/x)dx=$

$\int x^{1/3}dx+5\int x^2dx-2\int\frac{1}{x}dx=$

$\frac{x^{4/3}}{4/3}+5\frac{x^3}{3}-2ln|x|+C$

2. $\int\frac{dx}{4x^2+9}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{1}{4}\frac{2}{3}arctg\,\frac{x}{3/2}$

3. $\int(\frac{1}{4x^2}+\cos x)dx=\frac{1}{4}\int x^{-2}\,dx$

$+\int cosx\,dx=\frac{1}{4}\frac{1}{(-x)}+sinx+C$

4. $\int\frac{2x+\sqrt{x^5}-\sqrt[3]{x}}{x}dx=$ поделим

$=\int(2+x^{3/2}-x^{-\frac{2}{3}})\mathrm{dx}=$

$=2\int dx+\int x^{3/2}dx-\int x^{-\frac{2}{3}}dx=$

$=2x+\frac{x^{5/2}}{5/2}-\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+C$

МЕТОД ПОДВЕДЕНИЯ ПОД ЗНАК ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Теорема. Формулы интегрирования не меняются, если вместо независимой переменной *t* подставить дифференцируемую функцию *t*(*x*).

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f\big(t(x)\big)d(t(x)) = F(t(x)) + C$

Например

$\int cos(x)dx = sin(x) + C$ *,тогда*

$$\int cos(2x+1)d(2x+1) = sin(2x+1) + C$$

А что делать если мы хотим найти

$\int \cos(2x+1)\,dx$ *? Мы хотим ,чтобы вместо dx было d(2x+1)! Так как d(2x+1)=2dx*

$\int \cos(2x+1)\,dx$ = *1/2* $\int \cos(2x+1)2\,dx$ =

=*1/2* $\int \cos(2x+1)\,d$ *(2x+1)*=

=*1/2* $sin(2x+1) + C$

Примеры

1. $\int (2x+3)^2 dx \qquad dx = \frac{1}{2} d(2x+3)$

$$\int (2x+3)^2 dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^2 d(2x+3) = \frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{6}(2x+3)^3 + C$$

2. $\int \sqrt{x+4}\,dx = \int (x+4)^{\frac{1}{2}} d(x+4) = \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C =$

$$= \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4} + C$$

3. $\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{\frac{1}{a} d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{2}\ln|ax+b| + C$

4. $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$

5. $\int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

6. $\int \cos\frac{x}{4}dx = 4\int \cos\frac{x}{4} d\left(\frac{x}{4}\right) = 4\sin\frac{x}{4} + C$

7. $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} arctg 2x + C$

Сделать самостоятельно:

1. $\int e^{4x+1}dx = \frac{1}{4}\int e^{4x+1} d(4x+1) = \frac{1}{4}e^{4x+1} + C.$

2. $\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$

4. $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \int \frac{d(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

5. $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{d(x/2)}{\sin^2(x/2)} = -\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{3+(2x)^2}} = \frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{3+4x^2}\right| + C.$

7. $\int \cos(5x+2)dx = \frac{1}{5}\int \cos(5x+2)d(5x+2) = \frac{1}{5}\sin(5x+2) + C.$

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

$$\int \boldsymbol{u\,dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\,du}$$

Важно правильно выбрать-что будет играть роль u ,а что- dv.

Если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию , за $\boldsymbol{u}$ принимаем многочлен, все остальное будет $\boldsymbol{dv}$.

Если под знаком интеграла стоит произведение многочлена на обратную тригонометрическую (арк-функцию) или логарифмическую функцию , за $\boldsymbol{u}$ принимаем функцию, все остальное будет $\boldsymbol{dv}$

Примеры.

1.$\int (2x+1)cosxdx =$

$2x+1 = \boldsymbol{u}$ $\quad cosxdx = \boldsymbol{dv}$

$\boldsymbol{du} = 2dx$ $\quad \boldsymbol{v} = \int cosxdx = sinx$

$= (x+1)\,sinx - \int sinx\,2dx =$

$= \boldsymbol{(x+1)sinx + 2cosx + C}$

2.$\int lnxdx =$

$lnx = \boldsymbol{u}$ $\quad dx = \boldsymbol{dv}$

$\boldsymbol{du} = \boldsymbol{\frac{dx}{x}}$ $\quad \boldsymbol{v} = \int dx = x$

$$= xlnx - \int x\frac{dx}{x} = \mathrm{xlnx} - \mathrm{x} + \mathrm{C}$$

Вопрос: а где же многочлен в этом примере?

Замечание: иногда может потребоваться применять формулу интегрирования по частям . ***КОГДА?***

2.ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

$$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt} \qquad \textit{замена } \boldsymbol{x = \varphi'(t)}$$

Примеры.

$$1.\int \frac{dx}{x\ln x} = \left| \begin{array}{c} z = \ln x \\ x = e^z \\ dx = e^z dz \end{array} \right| = \int \frac{e^z dz}{e^z z} = \int \frac{dz}{z} =$$

$$\ln z + C = \boldsymbol{\ln|\ln x| + C}$$

$$2. \int \sqrt{1 - x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

понижаем степень $\cos^2 t = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + t \right) + C =$$

$$\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{t}{2} + C = \boldsymbol{\frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C}$$

РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

ПО ЧАСТЯМ

1. $\int (2x+5)\, e^{x} dx$
2. $\int x^{3} lnx dx$
3. $\int (x^{2}+2x+3)\, cosx dx$
4. $\int x\, arctg x dx$
5. $\int arctg\, x dx$

С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕНЫ

1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$, $\sqrt{x} = t$
2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$,$\sqrt{2x+1} = t$
3. $\int \sqrt{1-x^{2}}$dx , x=cost
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2}+1}}$, x=1/t

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ.

Рациональной дробью называют функции вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где РиQ –многочлены.

Дробь называется правильной, если степень P меньше степени Q.

Интегрирование элементарных дробей.

1. $\int \frac{dx}{x-a} = ln|x-a| + C$

2. $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

4. $\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} ln|x^2+a^2|$

5. $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{(x^2+a^2)^{-n+1}}{-n+1}$

Метод неопределенных коэффициентов.

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь-можно представить единственным образом в виде суммы элементарных дробей.

а)Если знаменатель дроби имеет действительные различные корни, например $\frac{2x-3}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$

б) Если знаменатель дроби имеет действительные кратные корни:$\frac{2x-3}{(x-1)^2x^3} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^2} + \frac{F}{x}$

в)Если знаменатель дроби имеет комплексные различные корни: $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$

г)Если знаменатель дроби имеет комплексные кратные корни:$\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Mx+N}{x^2+4}$

Замечание : возможны комбинированные случаи!

Пример.

Найти интеграл $\int \frac{2x-5}{x^2+4x+3} dx$ (*)

Сначала представим дробь в виде элементарных дробей.

$$\frac{2x-5}{x^2+4x+3}=\frac{2x-5}{(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}=$$

Дальше мы приводим к общему знаменателю и собираем коэффициенты при x и св.членах

$$\frac{A(x+3)}{x+1}+\frac{B(x+1)}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx+B}{(x+1)(x+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 & \text{при x} \\ 3A+B=5 & \text{при свободных членах} \end{cases}$$

A=3/2 , B=1/2

(*)= $\int \frac{2x-5}{x^2+4x+3} dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3} dx$=

$$\frac{3}{2} ln|x+1| + \frac{1}{2} ln|x+3| + C$$

Комбинированный случай

$$\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{x(x-1)(x^2+2)} dx$$

Сначала дробь представим в виде элементарных

$$\frac{3x^2 - 4x + 5}{x(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\boldsymbol{Cx+D}}{x^2+2}$$

Дальше надо приводить к общему знаменателю и собирать коэффициенты

При x^3: $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0$

При x^2: $-A + D = 3$

При x : $2A + 2B - C = -4$

Св.ч.: $-2A - D = 5$

Решая систему ,найдем

$$A = -\frac{8}{3}, B = \frac{4}{3}, C = \frac{4}{3}, D = \frac{1}{3}$$

Вместо интегрирования одной большой дроби 3 элементарных

$$-\frac{8}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{(4x+1)dx}{x^2+2}$$

$$= -\frac{8}{3}\ ln|x| + \frac{4}{3}\ ln|x-1| + \frac{2}{3}\int \frac{2xdx}{x^2+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} = -\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{3}}\ \boldsymbol{ln|x|} + \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\ \boldsymbol{ln|x-1|} + \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}\boldsymbol{ln\left|x^2+2\right|} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} \cdot \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}}\boldsymbol{arctg}\frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} + \boldsymbol{c}$$

Замечания.

1.Если у нас получилось $\frac{1}{2}ln|x| - \frac{1}{2}ln|x+1|$ то это можно заменить, используя свойства логарифмов на $ln\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

2.Что делать , если знаменатель дроби не имеет «хороших» корней?

Можно постараться выделить полный квадрат!

$$\frac{1}{x^2+8x+25}=\frac{1}{x^2+8x+16+9}=\frac{1}{(x+4)^2+3^2}$$

Значит интеграл от дроби будет

$$\frac{1}{3}arctg\frac{x+4}{3}$$

Если в числителе не 1,можно попробовать в числителе выделить дифференциал от знаменателя.

3. Что делать-если исходная дробь-неправильная?

Если исходная дробь неправильная-

Надо сначала выделить целую часть.

Можно попробовать поделить многочлен на многочлен-или так

$$\frac{2x+5}{x+1}=\frac{(2x+2)+3}{x+1}=2+\frac{3}{x+1}$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1.$\int sin^n x cos^m x dx$

Если в выражении один из показателей степени нечетный,

то можно «откусить» один косинус или синус . Например:

$\int sin^4 x cos^3 x dx$=

$\int sin^4 x cos^2 x cosxdx$=

$|cosxdx = d(sinx) - \text{замена}| =$

$$= \int sin^4 x(1 - sin^2 x)d(sinx) =$$

$\int(sin^4 x\text{-}sin^6 x)\text{dx}=\frac{sin^5 x}{5} - \frac{sin^7 x}{7} + C$

2. sinx и cosx входят в четных степенях

Тогда имеет смысл понизить степень через формулы двойного угла

$$sin^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x)$$
$$cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x)$$

Например:

$\int sin^2xdx = \frac{1}{2}\int (1 - cos2x)dx =$

$=\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}sin2x\right) + C$

3. если под интегралом только f(tgx)

Замена *tgx=z, x=arctgz,* $dx=\frac{dz}{1+z^2}$

Например:

$$\int \frac{1 + tgx}{sin2x}dx$$

$\int \frac{1+z}{\frac{2z}{1+z^2}}\frac{dz}{1+z^2}$*=1/2* $\int \frac{1+z}{z}dz=$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z} + 1\right)dz =$$

$$= \frac{1}{2}(lnz + z) + C =$$

$$\frac{1}{2}(lntgx + tgx) + C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Замена:

$$t = tg\frac{x}{2}$$

$$x = 2arctgt$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$sinx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Например: $\int \frac{sinxdx}{3+cosx} =$

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$\int \frac{4tdt}{\frac{3+3t^2+1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$\int \left(2t - \frac{2t}{t^2+2}\right) dt =$$

$$= t^2 - ln|t^2+2| + C =$$

$$= tg^2x - ln|tg^2x+2| + C$$ ответ

ЗАДАНИЕ НА ДОМ

1. $\int \frac{dx}{2sinx-cosx-1}$

2. $\int \frac{dx}{2sinx+cosx+3}$

3. $\int \frac{dx}{1+sin^2x}$, замена tgx=t

4 . $\int cos^4xdx$

5. $\int sin3xsin5xdx$,применить тригонометрическую формулу произведение синусов