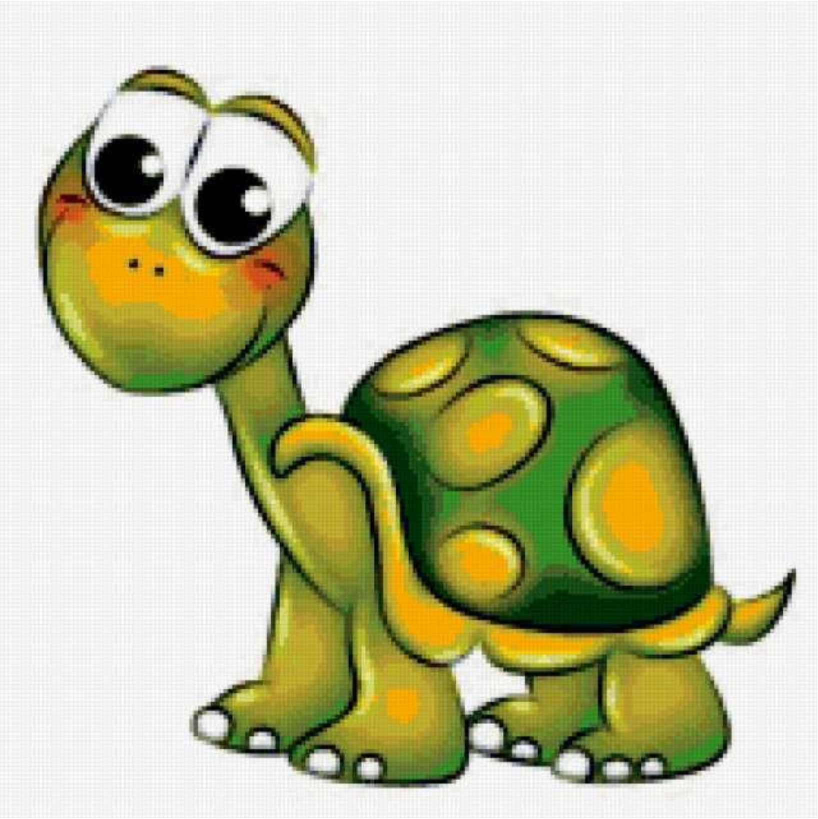
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 2



1.Определенный интеграл зависит от функции и пределов интегрирования ,но не зависит от переменной интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a f(y)dy = \int_a^b f(z)dz$$

2. Когда мы вводили понятие определенного интеграла, то предполагали, что $a < b$.

Если же $a > b$, то $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. Если $a = b$, то для любой функции $f(x)$ $\int_a^a f(x)dx = 0$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция непрерывна на сегменте $[a;b]$. Тогда она интегрируема на любом сегменте , лежащем внутри $[a;b]$. Отметим произвольную точку z $\epsilon[a;b]$. Назовем $\int_a^z f(x)dx = F(z)$ **интегралом с переменным верхним пределом**

Теорема:

Непрерывная на сегменте $[a;b]$ функция имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных будет $F(z) = \int_a^z f(x)dx$

Следствие:

Т.к. любые две первообразные отличаются на константу, то произвольная первообразная Ф(x)=F(x)+C=$\int_a^x f(t)dt + C$

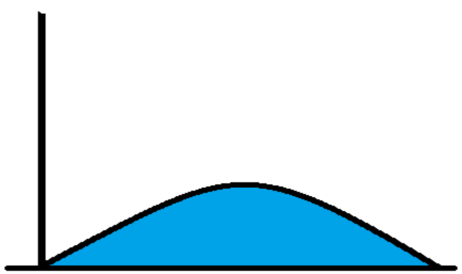
Ф(a)=F(a)+C=$\int_a^a f(t)dt + C = C$

Ф(b)=F(b)+C=$\int_a^b f(t)dt + C$=$\int_a^b f(t)dt$ +**Ф(a)**

И теперь перепишем формулу $\int_{\text{а}}^{\text{в}} \boldsymbol{f(x)dx} = \Phi(\text{в}) - \Phi(\text{а})$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Геометрический смысл определенного интеграла- это площадь фигуры под кривой!



ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

Теорема.

Пусть функция *f(x)* определена и непрерывна на $[a;b]$, а функция *g(x)* определена и имеет непрерывную производную $g^{/}(x)$ на $[\alpha;\beta]$. При этом $g(\alpha)=a, g(\beta)=b$ и функция $g(x)$принимает значения из сегмента $[a;b]$.

Тогда будет верна формула замены переменных в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g^{/}(t)dt$$

пример

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+lnx}} = \int_1^{e^2} \frac{d(lnx)}{\sqrt{1+lnx}}$$
$$= \text{замена}$$

$$z = lnx; \quad d(lnx) = dz;$$

$$\begin{cases} x = 1, & z = 0 \\ x = e^2, & z = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{1+z}} = 2\sqrt{1+z}\Big|_0^2 = 2(2-1) = 2$$

- ***Замечание.*** *При замене переменной в определенном интеграле не забывайте заменять пределы интегрирования. В этом случае вам не нужно будет делать в конце –обратную замену.*

Можно делать не одну, а несколько замен переменных

$$\int_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^{ln5} \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}d(e^x) = ,$$

только теперь делаем замену $\boldsymbol{e^x = z, x = 0 \to z = 1, x = ln5 \to z = 5}$

получим интеграл

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{z-1}}{z+3}dz = \begin{cases} \sqrt{z-1} = t\,, z = t^2+1\,, dz = 2tdt \\ \text{если } z = 1 \to t = 0, z = 5 \to t = 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 \frac{t2tdt}{t^2+1+3} = 2\int_0^2 \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt = 2\left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{4}{t^2+4}dt\right)$$

$$= 2\left(t - 2arctg\frac{t}{2}\right) \quad !!!$$

И не забываем верхний предел 2 и нижний предел 0. ***ОТВЕТ*** $\boldsymbol{4-\pi}$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ.

Теорема.

Пусть функции $u(x), v(x)$ имеют непрерывные производные на сегменте $[a; b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)dx$$

пример

$$\int_0^\pi xcos(x)dx = xsin(x)|_0^\pi - \int_0^\pi sin\,(x)dx = xsin(x)|_0^\pi + cos(x)|_0^\pi = -1 - 1 = -2$$

Геометрические приложения определенных интегралов. Площади плоских фигур.

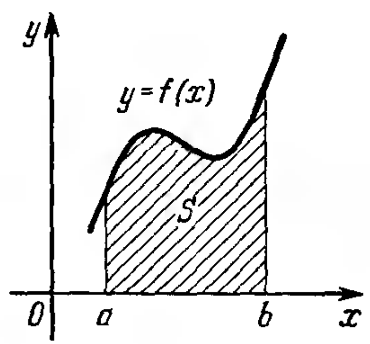


Рис. 1

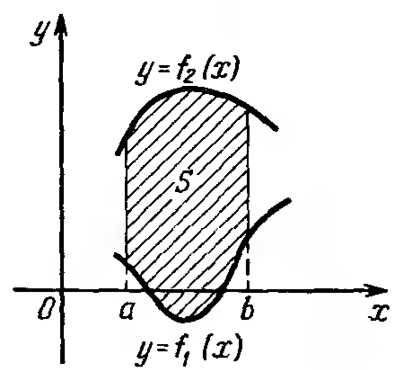


Рис. 2

- **Вычисление площади криволинейной трапеции в декартовых координатах.**
- Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$, двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ и осью Ox, или площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой графика функции $y=f(x), a\leq x\leq b$ (рис. 1) вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$.
- Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, и двумя прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 2) определяется по формуле $S=\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$.

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ КРИВОЙ.

Если фигура ограничена кривой, **имеющей параметрические уравнения** $x=x(t), y=y(t)$, прямыми $x=a, x=b$ и осью Ox, то площадь ее вычисляется по формуле $S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где пределы интегрирования находятся из уравнений $a=x(t_1), b=x(t_2), y(t)\geq 0$ на отрезке $[t_1, t_2]$).

Найти площадь, ограниченную одной аркой циклоиды. $\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$

$x^{/} = a(1 - cost)$, $0\leq t \leq 2\pi$

S=$\int_0^{2\pi} a^2(1 - cost)^2 dt$=

=$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2cost + cost^2)$dt

=$3a^2$

КРИВАЯ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ.

Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $r=r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, где φ и r– **полярные координаты**, или площадь криволинейного сектора, ограниченного дугой графика функции, $r=r(\varphi), \alpha\leq\varphi\leq\beta$, вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$

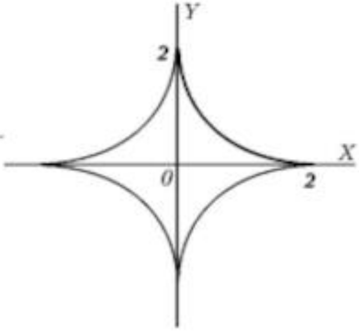
Длина дуги плоской кривой

(в декартовых и полярных координатах, и при параметрическом задании кривой).

- Если гладкая кривая задана уравнением *y*=*f*(*x*), то длина ее дуги равна *l*=$\int_a^b \sqrt{1 + f^{/2}}\,$dx ,где *a* и *b*− абсциссы концов дуги.
- Если же кривая задана параметрическими уравнениями *x*=*x*(t),*y*=*y*(t)(t_1≤t≤t_2),то
- $$I = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x^{/2} + y^{/2}}\,\mathrm{dt}$$
- Если задано полярное уравнение гладкой кривой *r*=*r*(*φ*),
- α≤φ≤β, то $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r^{/2}}\,\mathrm{d\varphi}$

Задание: записать уравнения кривых : астроида, кардиоида, лемниската в декартовых и полярных координатах, в параметрическом виде (с картинками)

Пример. Найти длину части астроиды



$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_{t'}^2 + y_{t'}^2}\; dt.$$

Предварительно находим $x_t' = -6\cos^2 t \sin t, \quad y_t' = 6\sin^2 t \cos t,$

$$\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = 36\sin^2 t\cos^4 t + 36\sin^4 t\cos^2 t = 36\sin^2 t\cos^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) =$$

$$= 36\sin^2 t\cos^2 t = 9\sin^2 2t.$$

$$\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2} = 3|\sin 2t|.$$

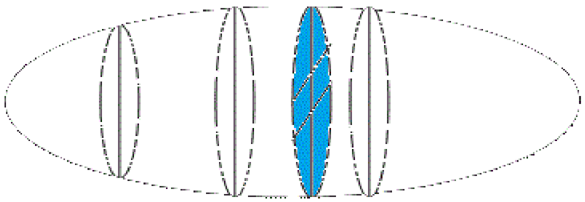
$$L = 3\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -\frac{3}{2}\cos 2t \,\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3}{2}(-1-1) = 3.$$

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений

- Представим себе тело, объем которого мы хотим определить. Пусть нам известны площади сечений S(x) тела плоскостями, перпендикулярными оси OX.
- Объем такого тела $V = \int_a^b S(x)dx$

Вычисление объемов тел по площадям поперечных сечений

- Представим себе тело, объем которого мы хотим определить. Пусть нам известны площади сечений S(x) тела плоскостями, перпендикулярными оси OX.
- Объем такого тела $V = \int_a^b S(x)dx$



Найти объем пирамиды с основанием *B* и высотой *H*

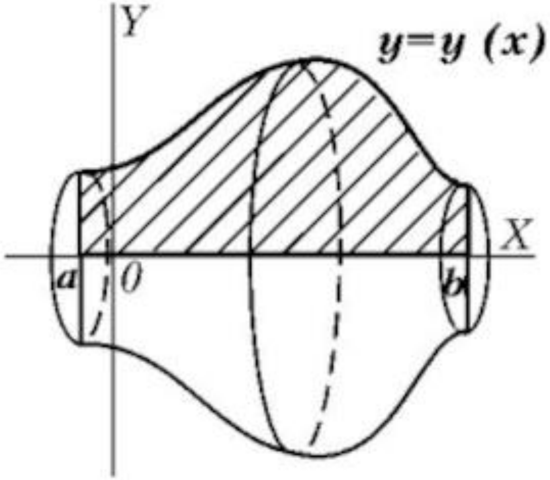
Ось *OX* перпендикулярна поверхности *B* и направлена из точки *O*. *S* – площадь сечения пирамиды плоскостью, находящейся на расстоянии *x* от вершины. Так как площади поперечных сечений пирамиды относятся как квадраты расстояний их от вершины, то имеем $\frac{S(x)}{B}=\frac{x^2}{H^2}$,$S(x) = \frac{B}{H^2}x^2$

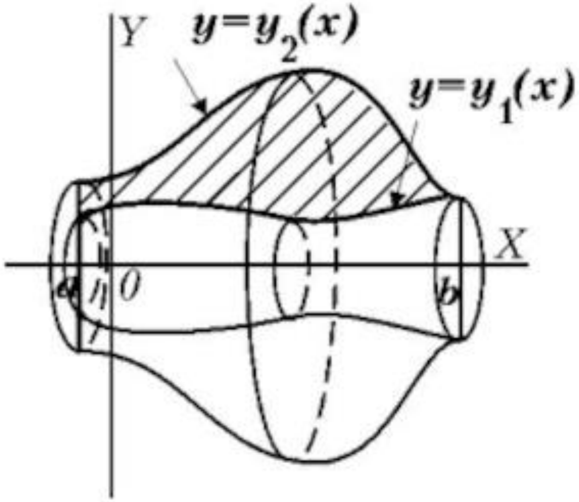
$$V = \int_a^b S(x)dx=\int_0^H \frac{B}{H^2}x^2dx = \frac{B}{H^2}\frac{x^3}{3}\Big|=\frac{1}{3}BH$$

Вычисление объемов тел вращения

Вращение вокруг оси OX

$$V_{ox} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx \qquad V_{ox} = \pi\int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\,dx$$





Объемное тело может быть получено и вращением кривой вокруг оси ОУ. (сравнить №1 и №2)

На рис.1 кривая $y = x^2$ вращается вокруг оси OX ,и мы просто делаем все по формуле.

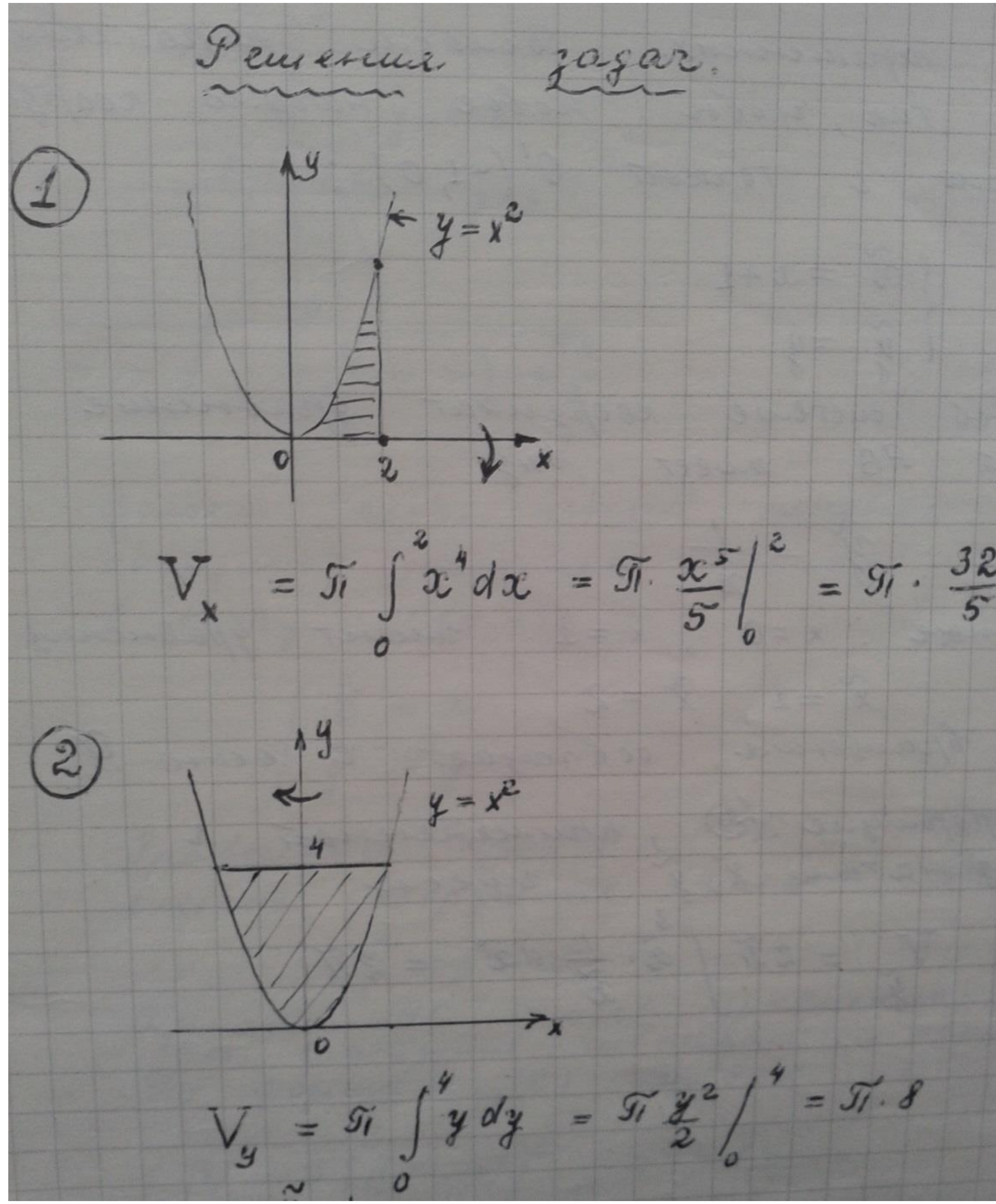
На рис.2 кривая $y = x^2$ вращается вокруг оси $\mathrm{OУ}$

Чтобы было все верно , можно выразить $x = \sqrt{y}$ и записать

$V = \pi \int_c^f x(y)^2 dy$, $c \le y \le f$

В результате в №2 получим объем параболоида.

Вопрос: а если криволинейный треугольничек с рис.1 вращать вокруг оси ОУ, можно ли найти объем получившейся фигуры и как?



ЗАДАНИЕ НА ДОМ

- 1.вычислить площадь $y = 32 - x^2, y = -4x$ отв.288
- 2.вычислить площадь $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 16$ отв.$42 - ln16$
- 3.вычислить объем тела с помощью поперечных сечений $z = 4x^2 + 9y^2, \mathrm{z} = 6$ отв.3π
- 4.вычислить объем тела вращения (вокруг оси OX) $y = \frac{2}{x}, y = 1, x = 1$ отв.π