НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве E, если $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in E$.

Если $\Phi(x)$ и $F(x)$– две первообразные функции $f(x)$, то $\Phi(x)=F(x)+C$, где C –постоянное число.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где C - произвольная постоянная.

При этом функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением*, x - *переменной интегрирования*, знак $\int$ - *знаком интеграла*.

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
4. $\int df(x) = f(x) + C.$
5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx, \quad где\ K - const.$
6. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

Таблица интегралов

Из определения 2 и таблицы производных вытекает таблица интегралов.

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1).$

В частности, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\quad \int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$
8. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C, \quad \int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + C,$

$\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C, \quad \int \dfrac{dx}{1 + x^2} = -arcctgx + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x - a}{x + a}\right| + C.$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \ |x| < |a|.$
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + C, \quad \alpha \neq 0, \alpha \in R.$
15. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C.$
16. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

17. $\int shxdx = chx + C.$

18. $\int chxdx = shx + C.$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C.$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C.$

2. Интегрирование методом подведения под знак дифференциала и замены переменной

Если $\int f(t)dt = F(t) + C$ и функция $t = \varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$, то

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Применяя это утверждение, можно введением вспомогательной переменной некоторые интегралы свести к табличным.

Указание. Интегралы из разделов 1-4 находятся, используя свойства интегралов, таблицу интегралов и подходящую подстановку, или, что одно и то же, подведением под знак дифференциала.

Пример 1. Найти $\int \sin^4 x \cos x dx$.

Решение. Решим сначала методом подведения под знак дифференциала:

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Этот же интеграл найдем методом подстановки. Произведем подстановку $\sin x = t$. Тогда

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Решение. Произведем подстановку $\ln x = t$. Тогда

$$\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} = \left| \begin{matrix} \ln x = t, \\ \frac{dx}{x} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{1 + t^2} = arctgt + C = arctg \ln x + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{3^{arctgx} dx}{1 + x^2}$.

Решение. Заметим, что $\frac{dx}{1 + x^2} = d(arctgx)$. Поэтому

$$\int \frac{3^{arctgx} dx}{1 + x^2} = \int 3^{arctgx} d(arctgx) = \frac{3^{arctgx}}{\ln 3} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{2^x + 1}$.

Решение. $\int \frac{dx}{2^x + 1} = \int \frac{2^x + 1 - 2^x}{2^x + 1} dx = \int \frac{2^x + 1}{2^x + 1} dx - \int \frac{2^x}{2^x + 1} =$

$$= \int dx - \frac{1}{\ln 2} \int \frac{d(2^x + 1)}{2^x + 1} = x - \frac{1}{\ln 2} \ln(2^x + 1) + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{e^{\arcsin x}+x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Решение. $\int \frac{e^{\arcsin x}+x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$$= \int e^{\arcsin x} d(\arcsin x) - \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x = e^{\arcsin x} - \sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C.$$

3. Некоторые простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен:

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (ax^2+bx+c>0),$$

$$I_3 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \quad I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad (ax^2+bx+c>0)$$

Для нахождения интегралов I_1 и I_2 в квадратном трехчлене выделим полный квадрат и тогда получим интегралы, сводящиеся к табличным.

В каждом из интегралов I_3 и I_4 произведем тождественные преобразования подынтегральных функций, так чтобы в числителе получить дифференциал квадратного трехчлена, т.е. $d(ax^2+bx+c) = (2ax+b)dx$ и тогда получим интегралы, сводящиеся к табличным.

Указание. Интегралы из разделов 5 и 6 можно найти методом подведения под знак дифференциала, а именно: сначала тождественными преобразованиями получаем в числителе дифференциал квадратного трехчлена, затем искомый интеграл представляем как сумму интегралов. Тогда первое слагаемое берется по формуле N2 или N1, а второе слагаемое после дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата интегрируется по одной из формул NN 11-14. Задания из разделов 5 и 6 можно также выполнить заменой переменной, дополнив квадратный трехчлен до полного квадрата $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ и сделав замену переменной $t = x+\frac{b}{2a}$.

Пример 6. Найти $\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}dx.$

Решение. Этот пример будем интегрировать подведением под знак дифференциала. Сначала в числителе дроби получим производную квадратного трехчлена:

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}dx = \int \frac{\frac{1}{6}(6x+2)-\frac{1}{3}-1}{3x^2+2x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1}dx - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}.$$

Так как $(6x+2)dx = d(3x^2+2x+1)$, то

$$\int \frac{x-1}{3x^2+2x+1}dx = \frac{1}{6}\int \frac{d(3x^2+2x+1)}{3x^2+2x+1} - \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\ln|3x^2+2x+1| -$$

$$-\frac{4}{9}\int \frac{dx}{x^2+2x\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\ln|3x^2+2x+1| - \frac{4}{9}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} =$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{4}{9}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}}arctg\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{4}{3\sqrt{2}}arctg\frac{3x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 7. Найти $\int\frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx.$

Решение. Найдем интеграл заменой переменной:

$$\int\frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx=\int\frac{x+4}{\sqrt{9/4-(x+1/2)^2}}dx=\left|t=x+\frac{1}{2},\ dt=dx\right|=\int\frac{t+7/2}{\sqrt{(3/2)^2-t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left((3/2)^2-t^2\right)}{\sqrt{(3/2)^2-t^2}}+\frac{7}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(3/2)^2-t^2}}=-\sqrt{(3/2)^2-t^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{t}{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$$

4. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - дифференцируемые функции, тогда справедлива следующая формула интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (*)$$

Интегрирование по частям применяется, когда подынтегральное выражение $f(x)dx$ можно так представить в виде udv, что стоящий в правой части равенства (*) интеграл окажется не сложнее исходного интеграла.

При этом к u следует относить такую функцию, которая после дифференцирования станет проще, а на роль dv оставить такое выражение, интеграл от которого найти умеем.

Как правило, метод интегрирования по частям применяется к произведению алгебраической функции на трансцендентную.

Для нахождения интегралов

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx,\ \int P(x)a^{\alpha x}dx,\ \int P(x)\cos\alpha x dx,$$
$$\int P(x)\sin\alpha x dx,\ \int P(x)ch\alpha x dx,\ \int P(x)sh\alpha x dx,$$

где $P(x)$- многочлен, за u принимаем $P(x)$.

Для нахождения интегралов

$$\int P(x)\ln x dx,\ \int P(x)\log_a x dx,\ \int P(x)\arccos x dx,$$
$$\int P(x)\arcsin x dx,\ \int P(x)arctgx dx,\ \int P(x)arcctgx dx,$$

где $P(x)$- многочлен, за u принимаем трансцендентную функцию.

При определении функции v по ее дифференциалу dv, т.е. $v=\int dv=v+C$, мы можем брать любую произвольную постоянную, удобно считать эту постоянную равной нулю.

Указание. Задания из разделов 7-11 выполняются при помощи формулы (*) интегрирования по частям.

Пример 8. Найти $\int x7^x dx.$

Решение. Принимаем $u=x\Rightarrow du=dx,\quad dv=7^x dx\Rightarrow v=\int 7^x dx=\frac{7^x}{\ln 7}.$

Тогда по формуле (*) имеем

$$\int x7^x\,dx = \left|\begin{array}{l} u = x,\; du = dx; \\ dv = 7^x\,dx, \quad v = \int 7^x\,dx = \dfrac{7^x}{\ln 7} \end{array}\right| = x\frac{7^x}{\ln 7} - \frac{1}{\ln 7}\int 7^x\,dx = \frac{x7^x}{\ln 7} - \frac{7^x}{(\ln 7)^2} + C.$$

Пример 9. Найти $\int (x^3+5)\cos 2x dx$.

Решение. Здесь три раза будем интегрировать по частям:

$$\int (x^3+5)\cos 2x dx = \left|\begin{array}{l} u = x^3+5, \quad du = 3x^2 dx; \\ dv = \cos 2x dx,\; v = \int \cos 2x dx = \dfrac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right| = (x^3+5)\frac{1}{2}\sin 2x -$$

$$-\frac{3}{2}\int x^2 \sin 2x dx = \left|\begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx; \\ dv = \sin 2x dx,\; v = -\dfrac{1}{2}\cos 2x \end{array}\right| = \frac{1}{2}(x^3+5)\sin 2x - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x dx\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = x \quad du = dx; \\ dv = \cos 2x dx,\; v = \dfrac{1}{2}\sin 2x \end{array}\right| = \frac{1}{2}(x^3+5)\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+5)\sin 2x + \frac{3}{4}x^2\cos 2x - \frac{3}{4}x\sin 2x - \frac{3}{8}\cos 2x + C =$$

$$= \frac{1}{4}(2x^3 - 3x + 10)\sin 2x + \frac{3}{8}(2x^2-1)\cos 2x + C.$$

Пример 10. Найти $\int e^{ax}\sin bx dx$.

Решение. Здесь и в некоторых других случаях после двукратного применения формулы (*) интегрирования по частям, приходим в правой части к выражению, содержащему исходный интеграл, т. е. получаем уравнение с исходным интегралом в качестве неизвестного.

Обозначая интеграл через I, имеем

$$I = \int e^{ax}\sin bx dx = \left|\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx; \\ dv = \sin bx dx,\; v = -\dfrac{1}{b}\cos bx \end{array}\right| = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx; \\ dv = \cos bx dx,\; v = \dfrac{1}{b}\sin bx \end{array}\right| = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\left(\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I + C_1.$$

Получено уравнение относительно неизвестного интеграла I :

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I + C_1.$$

Решая это уравнение, находим

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{1}{b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C_1.$$

Отсюда, обозначая $\dfrac{b^2C_1}{a^2+b^2} = C$, находим

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)e^{ax} + C.$$

Замечание. В таких интегралах за u можно взять и тригонометрическую, и показательную функцию. Важно, что в первом случае при второй замене за u также следует взять тригонометрическую функцию, а во втором - также показательную.

Пример 11. Найти $\int\sqrt{5x^2+9}dx$.

Решение. Этот интеграл тоже можно найти методом интегрирования по частям. Обозначая интеграл через J, имеем

$$J=\int\sqrt{5x^2+9}dx=\left|\begin{matrix} u=\sqrt{5x^2+9},\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{5x^2+9}}10x\,dx, \\ dv=dx,\quad v=x \end{matrix}\right|=x\sqrt{5x^2+9}-$$

$$-\int x\frac{5x}{\sqrt{5x^2+9}}dx=x\sqrt{5x^2+9}-\int\frac{5x^2+9-9}{\sqrt{5x^2+9}}dx=x\sqrt{5x^2+9}-\int\sqrt{5x^2+9}dx+$$

$$+\frac{9}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\dfrac95}}=x\sqrt{5x^2+9}-J+\frac{9}{\sqrt5}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac95}\right|+C_1.$$

Отсюда

$$2J=x\sqrt{5x^2+9}+\frac{9}{\sqrt5}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac95}\right|+C_1.$$

Полагая $\dfrac{C_1}{2}=C$, находим

$$J=\frac12x\sqrt{5x^2+9}+\frac{9}{2\sqrt5}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac95}\right|+C.$$

Пример 12. Найти $\int\ln x\,dx$.

Решение. Заметим, что, если подынтегральная функция содержит сомножителем логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то их следует принимать за u, так как в результате дифференцирования эти функции упрощаются.

Имеем

$$\int\ln x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\ du=\dfrac1x dx, \\ dv=dx,\ v=x \end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\frac1x dx=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C.$$

Пример 13. Найти $\int\dfrac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{\ln^2 x}{x^2}dx=\left|\begin{matrix} u=\ln^2 x,\ du=2\ln x\cdot\dfrac1x dx, \\ dv=\dfrac{dx}{x^2},\quad v=-\dfrac1x \end{matrix}\right|=-\ln^2 x\cdot\frac1x+2\int\frac{\ln x}{x^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=\ln x,\ du=\dfrac1x dx, \\ dv=\dfrac{dx}{x^2},\quad v=-\dfrac1x \end{matrix}\right|=-\ln^2 x\cdot\frac1x+2\left(\ln x\left(-\frac1x\right)+\int\frac{dx}{x^2}\right)=-\frac1x\ln^2 x-\frac2x\ln x-\frac2x+C=$$

$$=-\frac1x\left(\ln^2 x+2\ln x+2\right)+C.$$

Пример 14. Найти $\int x(arctgx)^2\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int x(arctgx)^2\,dx = \left| \begin{array}{l} u = (arctgx)^2, \quad du = 2arctgx \cdot \dfrac{1}{1+x^2}dx; \\ xdx = dv; \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = (arctgx)^2\frac{x^2}{2} - \int\frac{x^2 arctgx}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2(arctgx)^2 - \int\frac{(x^2+1-1)arctgx}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2(arctgx)^2 - \int arctgx dx + \int\frac{arctgx}{x^2+1}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = arctgx,\, du = \dfrac{1}{1+x^2}dx; \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \frac{1}{2}x^2(arctgx)^2 - \left(xarctgx - \int\frac{xdx}{1+x^2}\right) + \int arctgx d(arctgx) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2(arctgx)^2 - xarctgx + \frac{1}{2}\ln(1+x^3) + \frac{1}{2}(arctgx)^2 + C = \frac{1}{2}(x^2+1)(arctgx)^2 -$$

$$- xarctgx + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 15. Найти $\int x^2\sin^2 5xdx$.

Решение. Здесь, прежде чем интегрировать по частям, следует понизить степень синуса по формуле $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$:

$$\int x^2\sin^2 5xdx = \int x^2\frac{1-\cos 10x}{2}dx = \frac{1}{2}\int x^2 dx - \frac{1}{2}\int x^2\cos 10xdx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2xdx; \\ dv = \cos 10xdx,\, v = \dfrac{1}{10}\sin 10x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}\left(x^2\frac{1}{10}\sin 10x - \frac{1}{5}\int x\sin 10xdx\right) = \left| \begin{array}{l} u = x,\, du = dx, \\ dv = \sin 10x,\, v = -\dfrac{1}{10}\cos 10x \end{array} \right| = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{20}x^2\sin 10x +$$

$$+ \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{10}x\cos 10x + \frac{1}{10}\int\cos 10xdx\right) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{20}x^2\sin 10x - \frac{1}{100}x\cos 10x + \frac{1}{1000}\sin 10x + C.$$

5. Интегрирование рациональных дробей

Определение 3. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов с действительными коэффициентами, т. е.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Определение 4. Если степень числителя меньше степени знаменателя: $m < n$, то рациональная дробь называется правильной. Если $m \ge n$ то рациональная дробь называется неправильной.

Если рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ - неправильная, то делением многочлена $P_m(x)$ на многочлен $Q_n(x)$ следует предварительно выделить в этой дроби целую часть, т.е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $M_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ - многочлены степени $m-n \ge 0$ и $r < n$ соответственно.

Тогда $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx = \int M_{m-n}(x)dx + \int \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}dx.$

Интегрировать многочлен $M_{m-n}(x)$ мы умеем, как сумму степенных функций. Наша задача - проинтегрировать правильную рациональную дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$, $r < n$.

Многочлен $Q_n(x)$ степени n имеет n корней повторяющихся и неповторяющихся, среди которых могут быть комплексно-сопряженные, т. е. $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. Учитывая это, многочлен $Q_n(x)$ раскладывается на множители

$$Q_n(x) = b_n(x-x_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_kx+q_k)^{t_k},$$

где множители первой степени порождены действительными корнями многочлена $Q_n(x)$, повторяющимися s_i раз, а множители второй степени порождены парой комплексно-сопряженных корней многочлена $Q_n(x)$, повторяющихся t_j раз, т. е.

$$(x-\alpha-i\beta)^{t_j}(x-\alpha+i\beta)^{t_j} = \left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{t_j} = \left(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2\right) =$$
$$= \left(x^2+p_jx+q_j\right)^{t_j}.$$

Рациональная дробь

$$\frac{R_r(x)}{Q_n(x)} = \frac{R_r(x)}{b_n(x-x)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_l)^{s_l}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}$$

раскладывается в сумму простейших дробей по следующему правилу:

$$\frac{R_r(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{s_1}}{(x-x_1)^{s_1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-x_l} + \ldots + \frac{B_{s_l}}{(x-x_l)^{s_l}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \frac{M_{t_1}x+N_{t_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}} + \ldots + \frac{L_1x+H_1}{x^2+p_kx+q_k} + \frac{L_2x+H_2}{(x^2+p_kx+q_k)^2} +$$
$$+ \ldots + \frac{L_{t_k}x+H_{t_k}}{(x^2+p_kx+q_k)^{t_k}}. \qquad (**)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{s_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{s_l}, M_1, M_2, \ldots, M_{t_1}, \ldots, N_1, N_2, \ldots, N_{t_1}, L_1, L_2, \ldots, L_{t_k}, H_1, H_2, \ldots, H_{t_k}$ определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $R_r(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части (**) после приведения ее к общему знаменателю. Можно также определить эти коэффициенты, подставляя в равенство (**) вместо x любые числа (удобнее после приведения равенства (**) к общему знаменателю вместо x подставлять корни многочлена $Q_n(x)$).

Определив коэффициенты, интегрирование правильной рациональной дроби сведется к сумме интегралов от дробей вида

$$I.\ \frac{A}{x-a};\quad II.\ \frac{A}{(x-a)^k},\ k \ge 2, k \in N;\quad III.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0;$$

$$IY.\ \frac{Lx+H}{(x^2+px+q)^k},\quad k \ge 2, k \in N, \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0,$$

которые называются *простейшими*.

Простейшая дробь $\frac{A}{x-a}$ (*первого типа*) интегрируется по формуле 2 таблицы интегралов, дробь $\frac{A}{(x-a)^k}$ (*второго типа*) интегрируется по формуле 1.

Интегрирование простейшей дроби $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (*третьего типа*) рассмотрено в разделе 3 (пример 6). Интегрирование простейшей дроби $\frac{Lx+H}{(x^2+px+q)^k}$ (*четвертого типа*) после выделения в числителе производной квадратного трехчлена и выделения полного квадрата в этом трехчлене сводится к вычислению интегралов

$$\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}=-\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}+C \quad \text{и} \quad \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},\ \text{где } t=x+\frac{p}{2}.$$

Последний интеграл вычисляется по частям, а именно обозначая интеграл через J_k, имеем:

$$J_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}-\int\frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{a^2}\int t\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\left|\begin{array}{l} u=t,\ du=dt; \\ \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=dv,\ v=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}J_{k-1}-\frac{1}{a^2}\left(t\cdot\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}-\int\frac{1}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1}dt\right)=\frac{1}{a^2}J_{k-1}+\frac{1}{a^2}\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(k-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}=\frac{1}{a^2}J_{k-1}+\frac{1}{a^2}\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}-$$

$$-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2(k-1)}J_{k-1}=\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1}+\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Таким образом, мы получаем рекуррентное соотношение

$$J_k=\frac{2k-3}{2a^2(k-1)}J_{k-1}+\frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}, \qquad (***)$$

которое позволяет нахождение J_k свести к нахождению J_{k-1}.

Применяя последовательно (***) к интегралу J_k сведем его нахождение к интегралу

$$J_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

Указание. Вразделах 12-15 помещены интегралы от рациональных дробей.

Пример 16. Найти $\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2}dx$.

Решение. Под знаком интеграла - неправильная рациональная дробь. Разделив числитель на знаменатель, получим, что заданная рациональная дробь представляется как многочлен плюс правильная рациональная дробь, т. е.

$$\frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2} = \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} = x^3+2x^2+6x+10+\frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2}dx = \int (x^3+2x^2+6x+10)dx + \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2}dx = \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x^2+10x+$$
$$+\int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2}dx.$$

Последний интеграл есть интеграл от правильной рациональной дроби, разложим эту дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Отсюда $17x^2-10x+1 = A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$.

Полагаем в этом равенстве $x=0$ и $x=1$ (корни знаменателя):

$$x=0 \Rightarrow A=1.$$
$$x=1 \Rightarrow B=8.$$

Приравниваем коэффициенты при x^2:

$x^2\big|$ $17 = A+C \Rightarrow C = 17-A = 17-1 = 16.$

Следовательно,

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2}dx = \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x^2+10x+\int\frac{dx}{x}+\int\frac{8dx}{(x-1)^2}+\int\frac{16dx}{x-1} =$$
$$= \frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+3x^2+10x+\ln|x|-\frac{8}{x-1}+16\ln|x-1|+C.$$

Пример 17. Найти $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

Решение. Дробь $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$ - правильная, ее разложение на сумму простейших дробей имеет вид: $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$.

Отсюда $1 = A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x$.

При $x=0 \Rightarrow A=1$.

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 0 = A+B,\ B=-A=-1; \\ x^3 & 0 = C,\ C=0; \\ x^2 & 0 = 2A+B+D,\ D=-2A-B=-2+1=-1; \\ x & 0 = C+E,\ E=0. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Пример 18. Найти $\int\frac{x+7}{\left(x^2+6x+13\right)^3}dx.$

Решение.

$$\int\frac{x+7}{\left(x^2+6x+13\right)^3}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+6)-3+7}{\left(x^2+6x+13\right)^3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+6}{\left(x^2+6x+13\right)^3}dx+4\int\frac{dx}{\left((x+3)^2+4\right)^3}=$$

$$=\left|x+3=t,\ dx=dt\right|=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+6x+13\right)}{\left(x^2+6x+13\right)^3}+4\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^3}=-\frac{1}{4\left(x^2+6x+13\right)^2}+4J_3.$$

Для нахождения интеграла J_3 применим два раза соотношение (***):

$$J_3=\int\frac{dt}{\left(t^2+4\right)^3}=\frac{2\cdot3-3}{2\cdot4\cdot(3-1)}J_2+\frac{t}{2\cdot4\cdot(3-1)\left(t^2+4\right)^{3-1}}=\frac{3}{16}\left(\frac{2\cdot2-3}{2\cdot4\cdot(2-1)}J_1+\frac{t}{2\cdot4\cdot(2-1)\left(t^2+4\right)^{2-1}}\right)+$$

$$+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+\frac{t}{8\left(t^2+4\right)}\right)+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}+C=\frac{3}{256}arctg\frac{t}{2}+$$

$$+\frac{3t}{128\left(t^2+4\right)}+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}+C.$$

Поэтому

$$\int\frac{x+7}{\left(x^2+6x+13\right)^3}dx=-\frac{1}{4\left(x^2+6x+13\right)^2}+4J_3=-\frac{1}{4\left(x^2+6x+13\right)^2}+$$

$$+4\left(\frac{3}{256}arctg\frac{t}{2}++\frac{3t}{128\left(t^2+4\right)}+\frac{t}{16\left(t^2+4\right)^2}\right)+C=-\frac{1}{4\left(x^2+6x+13\right)^2}+$$

$$+\frac{3}{64}arctg\frac{x+3}{2}+\frac{3(x+3)}{32\left((x+3)^2+4\right)}+\frac{x+3}{4\left((x+3)^2+4\right)^2}+C=\frac{x+2}{4\left(x^2+6x+13\right)^2}+$$

$$+\frac{3}{64}arctg\frac{x+3}{2}+\frac{3(x+3)}{32\left(x^2+6x+13\right)}+C.$$

6. Интегрирование тригонометрических функций

Для интегрирования произведений синусов и косинусов различных аргументов применяются формулы:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Указание. Интегралы из раздела 16 берутся при помощи этих формул.

Пример 19. Найти $\int \sin 5x \cdot \cos 9x dx$.

Решение.

$$\int \sin 5x \cdot \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int (\sin(5x-9x)+\sin(5x+9x))dx = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{28}\cos 14x + C.$$

Нахождение интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ следует разделить на два случая:

а) если хотя бы одно из чисел m или n - нечетное положительное целое число и

б) когда m и n - четные неотрицательные числа.

В случае а) отделяем от нечетной степени сомножитель первой степени, подводим его под знак дифференциала и, выражая оставшуюся четную степень через функцию, которая стоит под знаком дифференциала, приходим к табличному интегралу.

В случае б), когда m и n четные неотрицательные числа, понижаем степени с помощью тригонометрических формул

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Для вычисления интегралов вида $\int tg^m x dx$, $\int ctg^m x dx$ отделяем вторую степень $tg^2 x$ или $ctg^2 x$, выражаем их по формулам

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \; ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

и учитываем при этом, что

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx), \; \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx).$$

Указание. Интегралы изразделов 17-19 находятся по этим правилам.

Пример 20. Найти $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 2x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \frac{\sin^2 2x \sin 2x}{\cos^2 2x} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos^2 2x} d(\cos 2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{\cos^2 2x} + \frac{1}{2}\int d(\cos 2x) = \frac{1}{2\cos 2x} + \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Пример 21. Найти $\int \cos^5 3x dx$.

Решение.

$$\int \cos^5 3x dx = \int \cos^4 3x \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int (1-\sin^2 3x)^2 d(\sin 3x) =$$

$$= \frac{1}{3}\int (1 - 2\sin^2 3x + \sin^4 3x) d(\sin 3x) = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9}\sin^3 3x + \frac{1}{15}\sin^5 3x + C.$$

Пример 22. Найти $\int \sin^4 5x \cos^2 5x dx$.

Решение. Здесь обе функции $\sin 5x, \cos 5x$ - в четной степенях. Понижаем эти степени:

$$\int \sin^4 5x \cos^2 5x dx = \frac{1}{4}\int (2\sin 5x \cos 5x)^2 \sin^2 5x dx = \frac{1}{4}\int (\sin 10x)^2 \frac{1-\cos 10x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 10x - \sin^2 10x \cos 10x) dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 20x) dx - \frac{1}{80}\int \sin^2 10x d(\sin 10x) =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{320}\sin 20x - \frac{1}{240}\sin^3 10x + C.$$

Пример 23. Найти $\int ctg^5\frac{x}{3}dx$.

Решение. $\int ctg^5\frac{x}{3}dx=\int ctg^3\frac{x}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}-1\right)dx=-3\int ctg^3\frac{x}{3}d\left(ctg\frac{x}{3}\right)-\int ctg^3\frac{x}{3}dx=$

$=-\frac{3}{4}ctg^4\frac{x}{3}-\int ctg\frac{x}{3}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}-1\right)dx=-\frac{3}{4}ctg^4\frac{x}{3}+3\int ctg\frac{x}{3}d\left(ctg\frac{x}{3}\right)+\int ctg\frac{x}{3}dx=$

$=-\frac{3}{4}ctg^4\frac{x}{3}+\frac{3}{2}ctg^2\frac{x}{3}+3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C.$

Интегралы вида $\int R(tgx)dx$, $\int R(ctgx)dx$, где $R(tgx)$ - рациональная функция от тангенса, а $R(ctgx)$ - рациональная функция от котангенса, приводятся к интегрированию рациональной дроби аргумента t с помощью подстановки $t=tgx,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ или $t=ctgx,\ dx=-\frac{dt}{1+t^2}$.

Пример 24. Найти $\int\frac{tg^2x+1}{tgx(tg^2x-1)}dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=tgx,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

Тогда $\int\frac{tg^2x+1}{tgx(tg^2x-1)}dx=\int\frac{t^2+1}{t(t^2-1)(t^2+1)}dt=\int\frac{dt}{t(t-1)(t+1)}=I.$

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей:

$\frac{1}{t(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}.$

Откуда $1=A(t-1)(t+1)+Bt(t+1)+Ct(t-1)$.

Полагая $t=0,t=1,t=-1$, находим, что $A=-1,B=\frac{1}{2},C=\frac{1}{2}$.

Окончательно получаем

$I=\int\frac{-1}{t}dt+\int\frac{\frac{1}{2}}{t-1}dt+\int\frac{\frac{1}{2}}{t+1}dt=-\ln|t|+\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|+C=$

$=\ln\left|\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{tg^2x-1}}{tgx}\right|+C.$

Указание. Часть интегралов из раздела 19 берутся с помощью таких подстановок.

Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(\sin x,\cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегрированию рациональной дроби аргумента t при помощи универсальной подстановки

$$t=tg\frac{x}{2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Указание. Интегралы из раздела 20 берутся при помощи универсальной подстановки.

Пример 25. Найти $\int\frac{dx}{3\cos x+2}$.

Решение. Произведем универсальную подстановку

$t = tg\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{3\cos x+2} = \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)} = 2\int\frac{dt}{3-3t^2+2+2t^2} = -2\int\frac{dt}{t^2-5} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+\sqrt{5}}{tg\frac{x}{2}-\sqrt{5}}\right| + C.$$

Некоторые интегралы типа $\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx$, когда одно из чисел m или n отрицательное, можно брать по частям.

Пример 26. Найти $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

Решение.

$$J = \int\frac{dx}{\cos^3 x} = \left|u = \frac{1}{\cos x}, du = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x};\quad dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, v = tgx\right| = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int\frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}dx = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int\frac{dx}{\cos^3 x} + \int\frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - J + \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C_1.$$

Решая полученное уравнение относительно J, находим

$$J = \int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$, где R есть рациональная функция от своих аргументов, а $\frac{m_1}{n_1}, ..., \frac{m_k}{n_k}$ - несократимые рациональные дроби, находятся с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где $s = HOK(n_1, ..., n_k)$ (НОК-наименьшее общее кратное).

Указание. Интегралы из раздела 21 находятся, применяя эту подстановку.

Пример 27. Найти $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$.

Решение. Так как $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}, HOK(2,3)=6,$ то производим подстановку $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$. Тогда

$$\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}=\int \frac{6t^5dt}{(t^2+4)t^3}=6\int \frac{t^2}{t^2+4}dt=6\int \frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=$$

$$=6\int dt-24\int \frac{dt}{t^2+4}=6t-24\cdot \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=6\sqrt[6]{x}-12arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2}+C.$$

Тригонометрические подстановки

Интегралы вида $\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx, \quad \int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx, \quad \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$ с помощью тригонометрических подстановок приводятся к интегралам $\int R(\sin x,\cos x)dx$, которые мы рассмотрели в разделе 6. Здесь значок R обозначает рациональную функцию от своих аргументов.

В первом случае

$$x=atgt \Rightarrow dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt \text{ или } x=actgt \Rightarrow dx=-\frac{a}{\sin^2 t}dt;$$

во втором случае

$$x=a\cos t \Rightarrow dx=-a\sin tdt \text{ или } x=a\sin t \Rightarrow dx=a\cos tdt;$$

в третьем случае

$$x=\frac{a}{\sin t} \Rightarrow dx=-\frac{a\cos t}{\sin^2 t}dt \text{ или } x=\frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Указание. Интегралы из раздела 22 находятся с помощью одной из описанных подстановок.

Пример 28. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

Решение. Произведя подстановку $x=2tgt \Rightarrow dx=\frac{2}{\cos^2 t}dt$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}=\int \frac{2dt}{\cos^2 t\sqrt{(4tg^2t+4)^3}}=2\int \frac{dt}{\cos^2 t\cdot \frac{8}{\cos^3 t}}=\frac{1}{4}\int \cos tdt=\frac{1}{4}\sin t+C.$$

Для перехода к старой переменной удобно воспользоваться определением тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике.

Из нашей подстановки $x=2tgt \Rightarrow tgt=\frac{x}{2}$ можно считать, что в прямоугольном треугольнике с острым углом t, x - противолежащий катет, 2 - прилежащий катет. Тогда гипотенуза по теореме Пифагора равна $\sqrt{4+x^2}$. Из этого же треугольника $\sin t$ есть отношение противолежащего катета x к гипотенузе $\sqrt{4+x^2}$, т.е. $\sin t=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$.

Подставим вместо $\sin t$ в окончательный результат дробь $\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$, тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Пример 29. Найти $\int \frac{x^3 dx}{(9-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Решение. Произведем подстановку $x = \frac{3}{2}\cos t \Rightarrow dx = -\frac{3}{2}\sin t dt$.

Искомый интеграл примет вид

$$\int \frac{x^3 dx}{(9-4x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\frac{27}{8}\cos^3 t \cdot \frac{3}{2}\sin t dt}{\left(9 - 4\cdot\frac{9}{4}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{16}\int \frac{\cos^3 t \sin t dt}{\sin^2 t \sin t} = -\frac{3}{16}\int \frac{(1-\sin^2 t)d(\sin t)}{\sin^2 t} =$$

$$= \frac{3}{16\sin t} + \frac{3}{16}\sin t + C = \frac{3}{16}\frac{3}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{3}{16}\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3} + C = \frac{9}{16\sqrt{9-4x^2}} + \frac{1}{16}\sqrt{9-4x^2} + C.$$

(Из подстановки $x = \frac{3}{2}\cos t \Rightarrow \cos t = \frac{2x}{3}$ можно заключить, что $2x$ - прилежащий катет,

3- гипотенуза, $\sqrt{9-4x^2}$ - противолежащий катет и $\sin t = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$.)

Пример 30. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$.

Решение. Полагая $x = \frac{5}{\sin t} \Rightarrow dx = -\frac{5\cos t}{\sin^2 t}dt$, будем иметь

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}} = -\int \frac{\frac{5\cos t}{\sin^2 t}dt}{\frac{5}{\sin t}\sqrt{\frac{25}{\sin^2 t} - 25}} = -\frac{1}{5}\int \frac{\cos t \sin t dt}{\cos t \sin t} = -\frac{1}{5}t + C = -\frac{1}{5}\arcsin\frac{5}{x} + C.$$

Пример 31. Найти $\int \frac{dx}{(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

Решение. Произведем подстановку $x = \frac{1}{3\sin t} \Rightarrow dx = -\frac{\cos t}{3\sin^2 t}dt$;

$$\int \frac{dx}{(9x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{\cos t dt}{3\sin^2 t\left(9\frac{1}{9\sin^2 t} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{3}\int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = -\frac{1}{3\cos t} + C = -\frac{x}{\sqrt{9x^2-1}} + C.$$

(Из подстановки $x = \frac{1}{3\sin t} \Rightarrow \sin t = \frac{1}{3x}$ можно заключить, что 1 - противолежащий катет,

$3x$ - гипотенуза, $\sqrt{9x^2-1}$ - прилежащий катет, $\cos t = \frac{\sqrt{9x^2-1}}{3x}$.)

8. Интегралы от дифференциальных биномов

Выражение вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где a,b - действительные числа, а m,n,p - рациональные числа, называется дифференциальными биномом. Выдающийся русский математик П.Л.Чебышев доказал, что интегралы $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ от дифференциальных биномов выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1. p - целое число. Если $p>0$, то двучлен $a+bx^n$ возводится в степень p по формуле бинома Ньютона:

$$\left(a+bx^n\right)^p=\sum_{k=0}^{p}C_p^k a^k\left(bx^n\right)^{p-k},\quad C_p^k=\frac{p!}{k!(p-k)!};$$

каждое слагаемое получившейся суммы умножается на x^m и далее искомый интеграл находится как сумма интегралов от степенных функций (пример32).

Если $p<0$, то подстановка $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n, приводит интеграл к интегралу от рациональной функции (пример 33).

2. $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число. Подстановка $a+bx^n=t^s$, где s - знаменатель дроби p, приводит интеграл к интегралу от рациональной функции (пример 34).

3. $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число. Подстановка $a+bx^n=t^s x^n$, где s - знаменатель дроби p, приводит искомый интеграл к интегралу от рациональной функции (пример 35).

Указание. Интегралы из разделов 23 - 25 относятся соответственно к первому, второму и третьему случаям.

Пример 32. Найти $\int\sqrt[4]{x^3}\left(2+\sqrt{x}\right)^6 dx.$

Решение. Запишем подынтегральное выражение в виде дифференциального бинома:

$$\int\sqrt[4]{x^3}\left(2+\sqrt{x}\right)^6 dx=\int x^{\frac{3}{4}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^6 dx.$$

Тогда $a=2,b=1,m=\dfrac{3}{4},n=\dfrac{1}{2},p=6.$ Число p - целое положительное. Возводим двучлен $2+x^{\frac{1}{2}}$ в шестую степень и умножаем на $x^{\frac{3}{4}}$:

$$\int x^{\frac{3}{4}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^6 dx=\int x^{\frac{3}{4}}(2^6+6\cdot2^5x^{\frac{1}{2}}+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot2^4x+\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot2^3x^{\frac{3}{2}}+\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot2^2x^2+$$

$$+6\cdot2x^{\frac{5}{2}}+x^3)dx=\int\left(64x^{\frac{3}{4}}+192x^{\frac{5}{4}}+240x^{\frac{7}{4}}+160x^{\frac{9}{4}}+60x^{\frac{11}{4}}+12x^{\frac{13}{4}}+x^{\frac{15}{4}}\right)dx=$$

$$=\frac{256}{7}x^{\frac{7}{4}}+\frac{256}{3}x^{\frac{9}{4}}+\frac{960}{11}x^{\frac{11}{4}}+\frac{640}{13}x^{\frac{13}{4}}+16x^{\frac{15}{4}}+\frac{48}{17}x^{\frac{17}{4}}+\frac{4}{19}x^{\frac{19}{4}}+C.$$

Пример 33. Найти $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(3+\sqrt[6]{x}\right)^7}.$

Решение. Запишем подынтегральное выражение в виде дифференциального бинома:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(3+\sqrt[6]{x}\right)^7}=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(3+x^{\frac{1}{6}}\right)^{-7}dx.$$

Тогда $a=3,b=1,m=-\dfrac{2}{3},n=\dfrac{1}{6},p=-7.$ Число p - целое отрицательное. Подстановка

$x = t^6$ (6- наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m = -\frac{2}{3}$ и $n = \frac{1}{6}$) сведет интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int x^{-\frac{2}{3}}\left(3 + x^{\frac{1}{6}}\right)^{-7} dx = \left| \begin{matrix} x = t^6,\ dx = 6t^5 dt; \\ x^{-\frac{2}{3}} = t^{-4},\ t = \sqrt[6]{x} \end{matrix} \right| = \int t^{-4}(3+t)^{-7} 6t^5 dt = 6\int \frac{t}{(t+3)^7} dt =$$

$$= 6\int \frac{t+3-3}{(t+3)^7} dt = 6\int \frac{dt}{(t+3)^6} - 18\int \frac{dt}{(t+3)^7} dt = -\frac{6}{5(t+3)^5} + \frac{3}{(t+3)^6} + C =$$

$$= -\frac{6}{5\left(\sqrt[6]{x}+3\right)^5} + \frac{3}{\left(\sqrt[6]{x}+3\right)^6} + C.$$

Пример 34. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+2\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Решение. Запишем подынтегральное выражение в виде дифференциального бинома:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+2\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + 2x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx.$$

Тогда $a = 1, b = 2, m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$ и число $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$ - целое.

Этот интеграл рационализируется с помощью второй подстановки: $1 + 2x^{\frac{1}{4}} = t^3$. Отсюда $x = \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^4 = \frac{\left(t^3-1\right)^4}{16},\ dx = \frac{3}{4}t^2\left(t^3-1\right)^3 dt.$ Тогда

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+2x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \int 4\left(t^3-1\right)^{-2} t \cdot \frac{3}{4}t^2\left(t^3-1\right)^3 dt = 3\int \left(t^3-1\right)t^3 dt =$$

$$= \frac{3}{7}t^7 - \frac{3}{4}t^4 + C = \frac{3}{7}\left(1+2x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}\left(1+2x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример 35. Найти $\int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^4}}.$

Решение. Подынтегральное выражение имеет вид: $x^{-7}\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}} dx$. Здесь $a = 1, b = -1, m = -7, n = 4, p = -\frac{1}{2}$ и $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-7+1}{4} - \frac{1}{2} = -2$ - целое.

Этот интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью третьей подстановки: $1 - x^4 = t^2x^4$. Тогда $x = \frac{1}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}, 1 - x^4 = \frac{t^2}{t^2+1},\ dx = -\frac{1}{4}\cdot 2t\left(t^2+1\right)^{-\frac{5}{4}} dt.$

Подставляя эту замену в интеграл, получим

$$\int x^{-7}\left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx = -\frac{1}{2}\int\left(t^2+1\right)^{\frac{7}{4}}\frac{\left(t^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{t}t\left(t^2+1\right)^{-\frac{5}{4}}dt = -\frac{1}{2}\int\left(t^2+1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + C = -\frac{1}{6}\left(\frac{1-x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^4}{x^4}\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

9. Подстановки Эйлера

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где $a \neq 0$, а R - рациональная функция от своих аргументов, приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью подстановок Эйлера.

1. *Первая подстановка Эйлера.* Если $a > 0$, то полагаем: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$. Перед корнем $\sqrt{a}$ можно выбирать любой знак.

2. *Вторая подстановка Эйлера.* Если $c \geq 0$, то полагаем: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$. Перед корнем $\sqrt{c}$ можно выбирать любой знак.

3. *Третья подстановка Эйлера.* Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни α и β, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$.

Указание. Интегралы из разделов 25 - 28 можно найти с помощью подстановок Эйлера.

Пример 36. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Так как здесь $a = 1 > 0$, то полагаем $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$; тогда

$$x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2,\ x = \frac{t^2-1}{1-2t},\ dx = -\frac{2\left(t^2-t+1\right)}{(1-2t)^2}dt;$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = x+t = \frac{t^2-1}{1-2t}+t = -\frac{t^2-t+1}{1-2t}$$

Подставляя полученные выражения в исходный интеграл, находим:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{-2\left(t^2-t+1\right)(1-2t)(1-2t)}{(1-2t)^2\left(t^2-1\right)\left(-\left(t^2-t+1\right)\right)}dt = 2\int\frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x+1}\right| + C.$$

Пример 37. Найти $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}$.

Решение. Так как здесь $c = 1 > 0$, то полагаем $\sqrt{1-x-x^2} = xt+1$; тогда

$$1-x-x^2 = x^2t^2+2xt+1,\ x = -\frac{2t+1}{t^2+1},\ dx = \frac{2\left(t^2+t-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}dt;$$

$$\sqrt{1-x-x^2} = xt+1 = -\frac{2t+1}{t^2+1}t+1 = -\frac{t^2+t-1}{t^2+1}$$

и

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}=\int\frac{2(t^2+t-1)(t^2+1)(t^2+1)}{(t^2+1)^2(t^2+t-1)(t^2+2t+2)}dt=2\int\frac{dt}{t^2+2t+2}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+1}=2arctg(t+1)+C=2arctg\left(\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}+1\right)+C.$$

Пример 38. Найти $\int\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x^2}dx.$

Решение. Квадратный трехчлен $4x^2+x$ имеет корни $x_1=0, x_2=-4.$ Полагаем $\sqrt{4x^2+x}=xt;$ тогда $4x^2+x=x^2t^2, x=\frac{1}{t^2-4}, dx=-\frac{2tdt}{(t^2-4)^2}; \sqrt{4x^2+x}=xt=\frac{t}{t^2-4}.$

Таким образом,

$$\int\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x^2}dx=\int\frac{t(t^2-4)^2}{t^2-4}\left(-\frac{2t}{(t^2-4)^2}\right)dt=-2\int\frac{t^2dt}{t^2-4}=-2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=$$

$$=-2\left(t+4\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)+C=-2\left(\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}-2}{\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+2}\right|\right)+C=$$

$$=-2\left(\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}\right|\right)+C=-2\left(\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}+\ln\left|8x+1-4\sqrt{4x^2+x}\right|\right)+C.$$