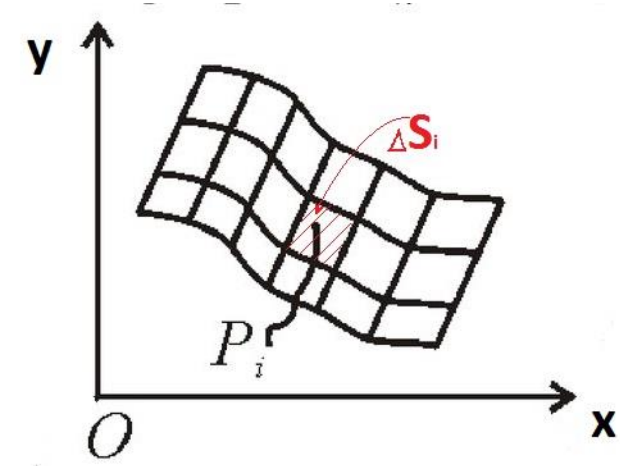
Тема: ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение двойного интеграла.

- Рассмотрим на плоскости хОу замкнутую область D, ограниченную линией L. Пусть в этой области задана непрерывная функция f(x,y).
- Разобьем область линиями на кусочки ΔS_i ,на каждом из этих кусочков выберем точку P_i и обозначим $f(P_i)$ значение функции в выбранной точке. Теперь можно составить сумму

$$f(P_1)\Delta S_1 + f(P_2)\Delta S_2 + \cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i \text{ интегральную сумму}$$



Теоремы о двойных интегралах

$$\lim_{diam\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dxdy$$

двойной интеграл от $f(x,y)$ по области D.

Т1.Двойной интеграл от суммы конечного числа функций по D равен сумме двойных интегралов от каждой функции в отдельности.

Т2.Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла.

Т3.Если область D=$D_1 + D_2$(без общих внутренних точек), и функция непрерывна во всех точках D, то интеграл по области D можно заменить суммой интегралов по D_1 и D_2.

Вычисление двойного интеграла

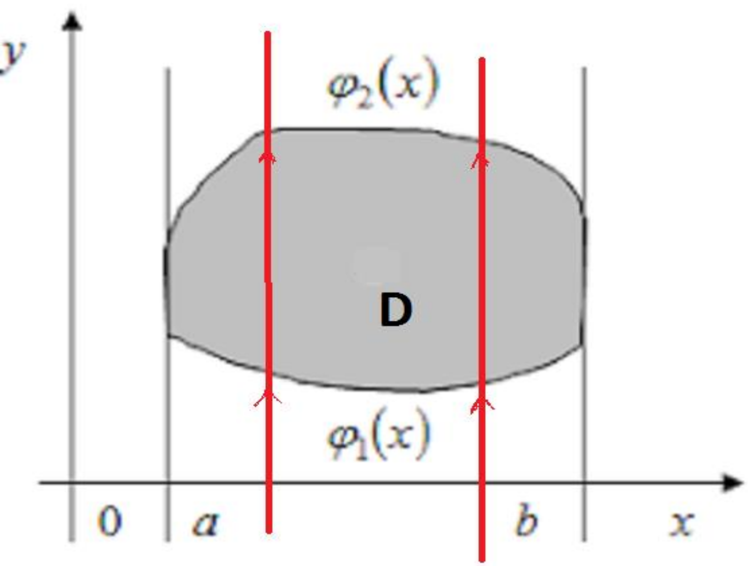


Рис. 1

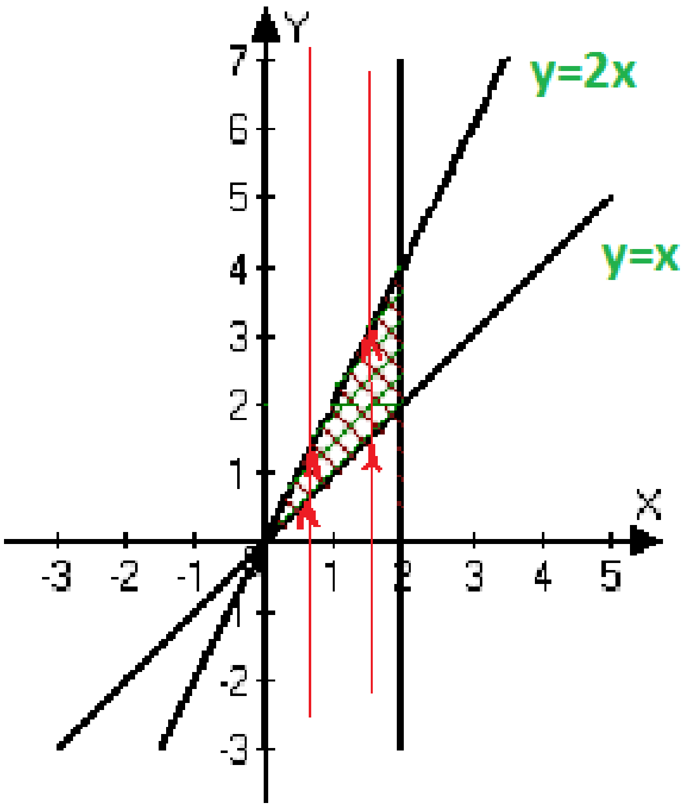
Пусть область D ограничена линиями $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$, непрерывными на $[a; b]$ и прямыми $x = a, x = b$. Такая область называется правильной в направлении оси оу. Тогда двойной интеграл по области D равен двукратному интегралу

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$
$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx =$$
$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

внутренний интеграл

А все вместе-называется повторным интегралом

Попробуем правильно расставить пределы и перейти к повторным интегралам (D-заштрихованная область)



$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

Мы видим ,что в нашей заштрихованной области x меняется от 0 до 2. Это пишем как пределы первого интеграла.

Дальше рисуем красные линии, параллельные оу, они все входят в область на прямой y=x, а выходят на y=2x.Это пределы внутреннего интеграла.

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy$$

Таким образом мы пока только расставили пределы. Если задана функция f(x,y) и мы хотим вычислить интеграл, нужно: сначала разобраться с внутренним интегралом(интегрируем по y, x=const, после подстановки пределов получим Ф(x)), и дальше эту функцию Ф(x) интегрируем по x и подставляем пределы a и b .

Пусть $f(x, y) = x + 8y$

Сначала $\int_{x}^{2x}(x + 8y)dy =$

$(xy + 8\frac{y^2}{2})\Big|_{x}^{2x}$ $= x \cdot 2x + 4(2x)^2 -$

$x \cdot x - 4x^2 = 13x^2$ нашли внутренний интеграл. Теперь надо найти

$\int_0^2 13x^2 dx = \frac{13\,x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{13 \cdot 8}{3} = \frac{104}{3}$

Пусть область D ограничена непрерывными линиями $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ и прямыми $y = c, y = d$.

Такая область называется правильной в направлении оси ох.

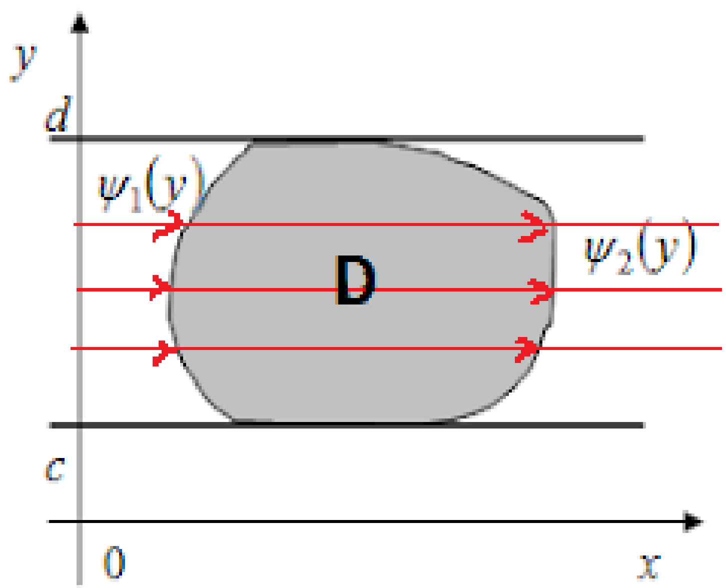


Рис. 2

Для того , чтобы верно расставить пределы в такой области-ВАЖНО:

вместо $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ надо выразить ***х через у,***

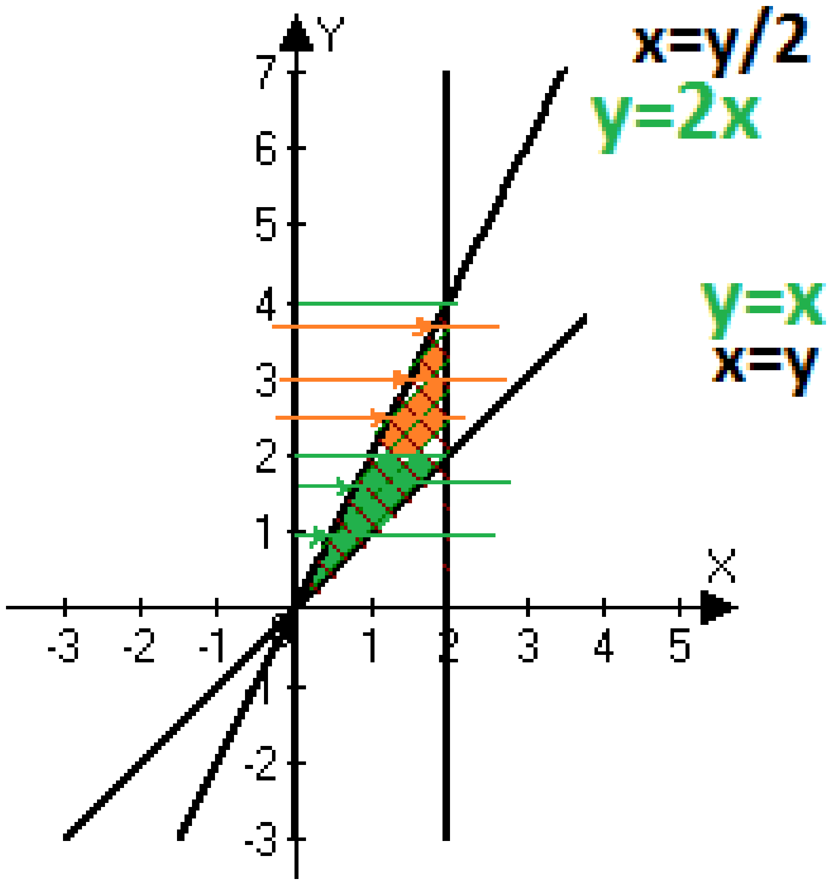
т.е. х$= \psi_1(y), x = \psi_2(y)$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right) dy =$ $\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$

Внутренний интеграл по х, внешний по у .

Чтобы определить, как меняется х, проводим прямые, параллельные ох , и смотрим, на какой линии прямая входит в область , и на какой линии выходит!

Попробуем **поменять пределы** и перейти к повторным интегралам (D-заштрихованная область)



$\iint_D f(x,y)dxdy =$ было $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy =$ а как же быть, если хотим внешний интеграл по y, а внутренний по x? Проблема в том, что если проведем прямые параллельно оси ox, то на зеленом участочке они входят на y=2x (**x=y/2**) , выходят на y=x (**x=y**),а на рыжем участке входят там же, а выходят на **x=2.**

В результате придется разделить нашу область на две маленькие области , рыжую и зеленую ,и интеграл тоже придется разделить(Т.3)

$\int_0^2 dy \int_?^? f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_?^? f(x,y)dx =$
$\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

Красным цветом выделены внутренние интегралы(их мы берем вначале, получаем функцию, зависящую только от y) ,а потом берем внешний интеграл по y.

Замечание: *пределы во внешних интегралах-всегда числа, во внутренних могут быть функции , но могут быть и числа*.

Вопрос: представить, в какой области все пределы будут константами?

Задания

Расставить пределы интегрирования двумя способами , если область D ограничена:

- 1. прямыми y=x,y=2-x и осью oy
- 2. прямыми y=x,y=2-x и осью ox
- 3.параболой y=x^2, прямой y=2-x и осью oy
- 4. параболой y=x^2, прямой y=2-x и осью ox

Изменить порядок интегрирования

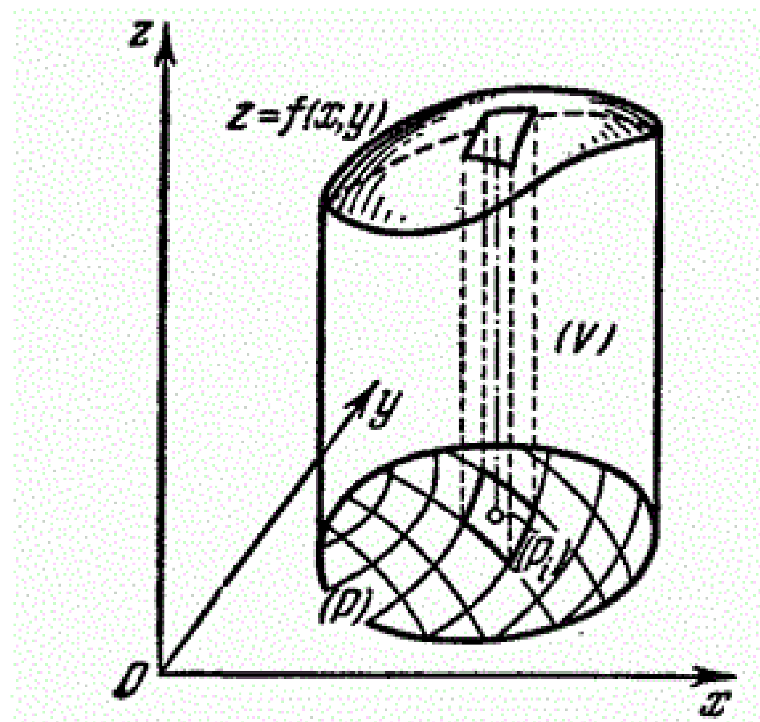
1.$\int_0^2 dx \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

2. $\int_0^2 dy \int_{y-2}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$

3. $\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)dy$

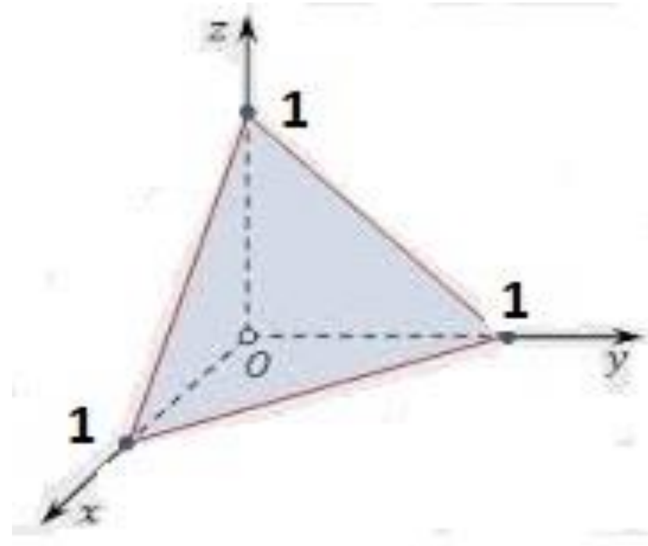
Геометрические приложения двойных интегралов.

Когда мы вводили понятие двойного интеграла, мы умножали площади кусочков на f(P_i). Это были объемы микроцилиндриков. Поэтому с помощью двойного интеграла можно вычислять объем тела, ограниченного снизу z=0, сверху поверхностью z=f(x,y), f(x,y)-неотрицательная функция и цилиндрической поверхностью(направляющие параллельны oz)



$$V = \iint_D f(x,y)dxdy$$

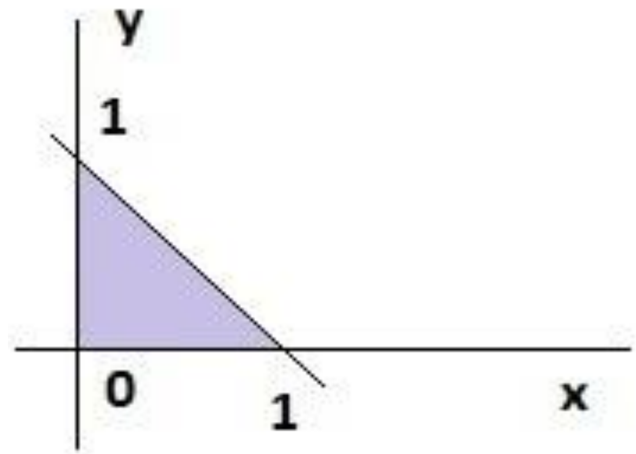
Вычислить объем тела, ограниченного плоскостями x=0,y=0,z=0 u x+y+z=1 (z=1-x-y-если явно)



$V = \iint_D (1 - x - y)dxdy$

$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy$=

$\int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2)dx = 1/6$



Вычисление площади плоской фигуры.

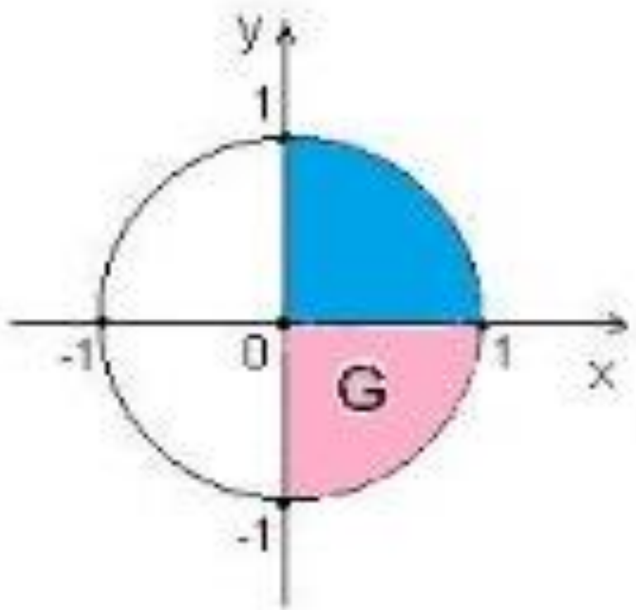
$$S = \iint_D 1\, dxdy$$

Найти площадь области, ограниченной кривыми $y = 2 - x^2, y = x$.

Сначала находим точки пересечения(лучше нарисовать картинку) M(-2;-2) и H(1;1)

$$S = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x) dx = 9/2$$

Как расставить пределы если область интегрирования круг или часть круга $x^2+y^2=1$?



Нас интересует голубая область.

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

В розовой области

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$$

А если нас интересует весь цветной полукруг?

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

Нам пришлось из формулы, задающей функцию в неявном виде $x^2 + y^2 = 1$, выразить функцию y явно. Выше оси абсцисс y- положительна, ниже оси абсцисс-отрицательна. Если бы пришлось выражать явно x, то справа x положителен , слева от оси ординат- пришлось бы брать знак минус.

Подумайте , как бы мы расставили пределы, если бы область D был бы полный круг?

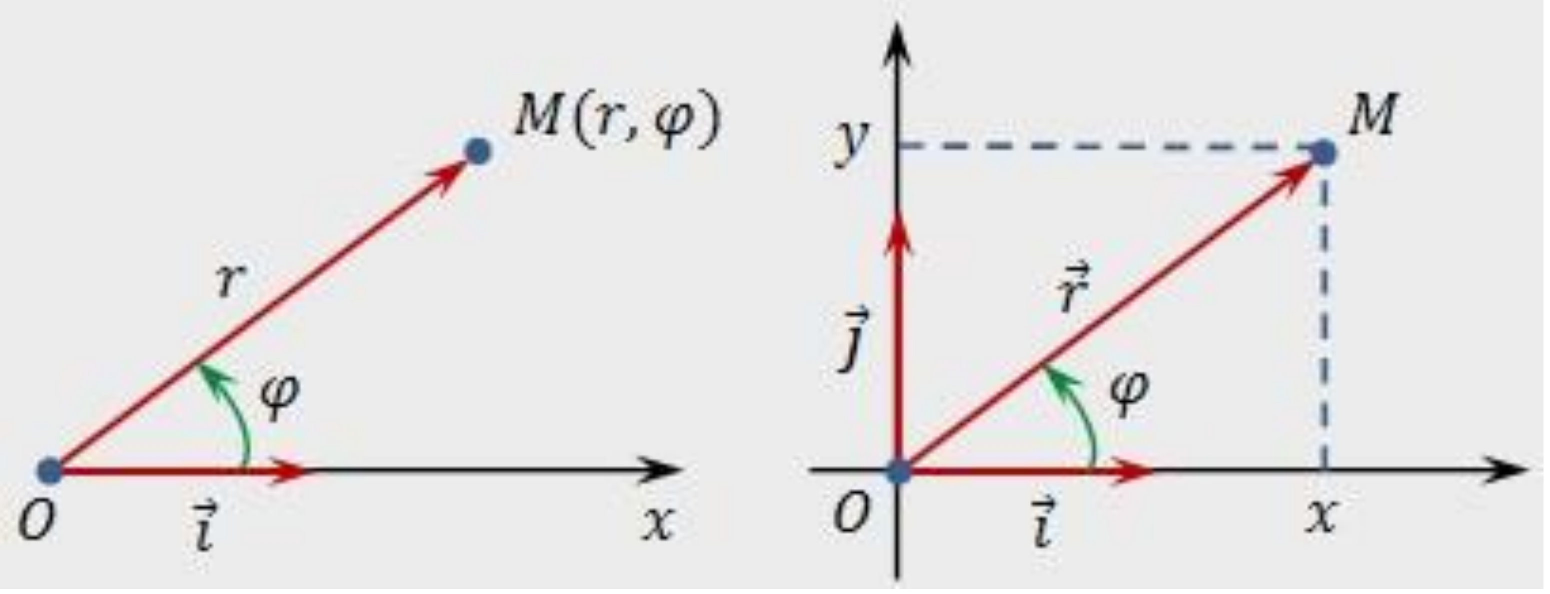
Подумайте , как расставить пределы двумя способами ,если область ограничена параболой $y = x^2$ и прямой y=4?

Полярные координаты. Переход к полярным координатам в двойном интеграле.

- Полярная система координат на плоскости — это совокупность точки , называемой **полюсом**, и полупрямой , называемой **полярной осью**. Кроме того, задается **масштабный отрезок** для измерения расстояний от точек плоскости до полюса.
- Положение точки в полярной системе координат определяется расстоянием от точки до полюса ρ(**полярным радиусом**),$\rho \geq 0$, и углом φ (**полярным углом**).

Полярный угол измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси:

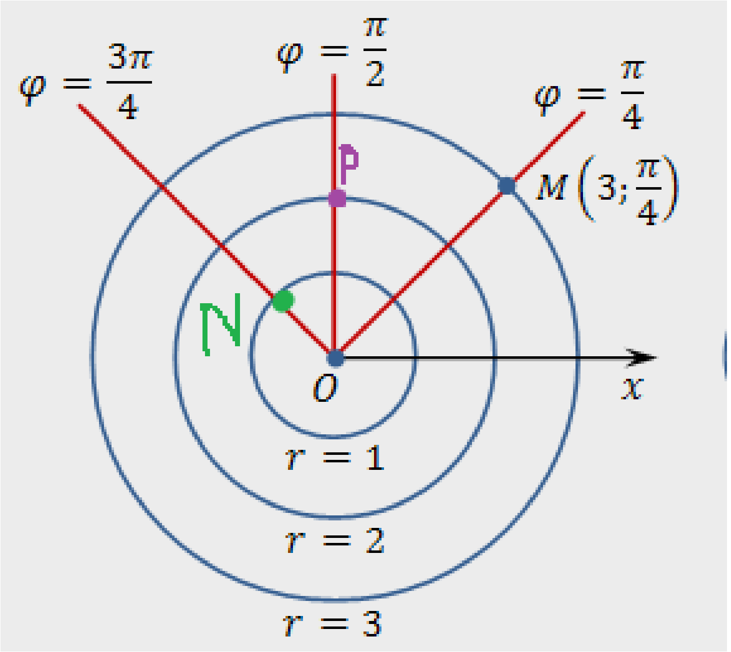
- в положительном направлении (против направления движения часовой стрелки), если значение угла положительное;
- в отрицательном направлении (по направлению движения часовой стрелки), если значение угла отрицательное.



Полярные и декартовы координаты связаны формулами $x = \rho cos\varphi$; $y = \rho sin\varphi$
Обратный переход выполняем по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ; sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



- На рисунке записаны координаты т. М в полярных координатах. Найти координаты М в декартовых координатах.
- Записать координаты точек P и N.

Когда мы расставляли пределы в двойных интегралах по части окружности, мы обратили внимание-что пределы интегрирования вышли достаточно громоздкими. А как запишется уравнение окружности в полярных координатах и нельзя ли расставлять пределы в двойном интеграле в полярных координатах?

Рассмотрим уравнение окружности $x^2+y^2=4$, в полярных координатах $x=\rho cos\varphi$; $y=\rho sin\varphi$

Подставляем в уравнение для окружности

$(\rho cos\varphi)^2+(\rho cos\varphi)^2=4$ и получаем

(вспомнив основное тригонометрическое тождество)

ρ^2=4 или $\rho=2$.

Это и есть в полярных координатах уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

Переходить в двойном интеграле в полярные координаты имеет смысл, если область интегрирования ограничена окружностью , частями окружностей и лучами , выходящими из полюса.

ПЕРЕХОД К ПОЛЯРНЫМ КООРДИНАТАМ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ.

$$\int_D \int f(x, y) dxdy = \int_{D^*} \int f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$$

множитель ρ − так называемый якобиан перехода

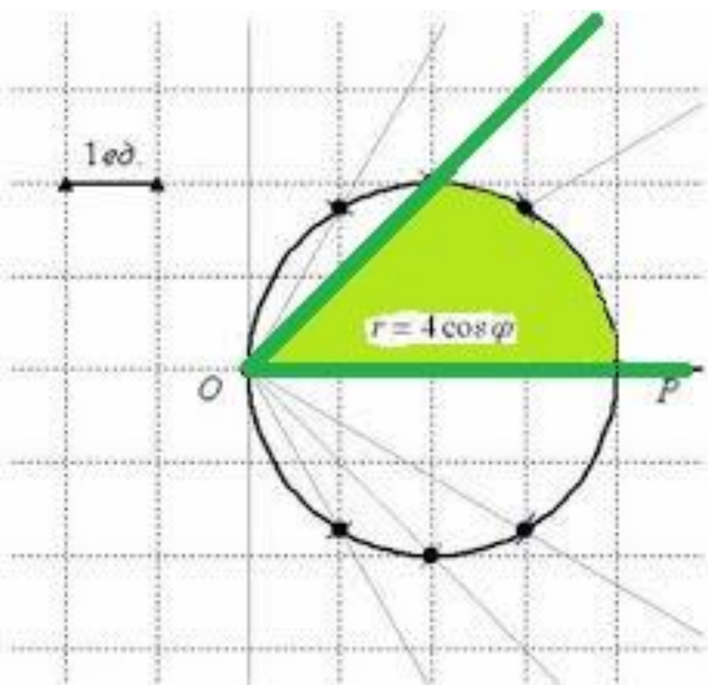
D и D^*-одна и та же область интегрирования, в декартовых и полярных координатах соответственно.

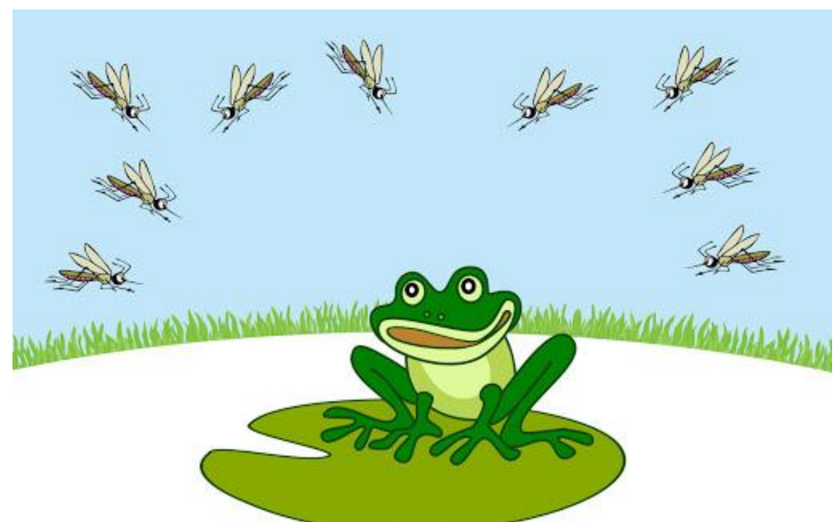
Расставить пределы в полярных координатах , если область ограничена окружностью $(x-2)^2+y^2=4$, осью ох и прямой y = x.

Сначала запишем уравнения этих линий в полярных координатах :

$x^2+y^2=4x$, подставим $x=\rho cos\varphi$; $y=\rho sin\varphi$,тогда уравнение окружности $\rho=4cos\varphi$, ось ох соответствует $\varphi=0$, прямая y = x превратится в $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f(\rho cos\varphi,\rho sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{4cos\varphi} f(\rho,\varphi)\rho d\rho$$





ЗАДАНИЯ:

1.Вычислить двойной интеграл

$\iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{4^2 - x^2 - y^2}$dxdy, где D круг r=4

2. Найти объем части параболоида ,лежащей выше плоскости XoУ : z=$4 - x^2 - y^2$

3. Найти площадь , ограниченную кривыми y=x^2 $x^2 + y^2 = 2$ (желательно и в декартовых , и в полярных координатах)