ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть в пространстве задана ограниченная замкнутая область (объем) V, и пусть на области V определена функция $f(x,y,z)$.Тогда тройной интеграл $\iiint f(x,y,z)dxdydz$ будет представлять собой массу тела V плотностью $f(x,y,z)$ Чтобы посчитать такой интеграл, необходимо свести его к повторному , как и в случае двойных интегралов.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$
$$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\theta(x)} dy \int_{F(x,y)}^{\Phi(\mathrm{x,y})} f(x,y,z)dz$$

Рассмотрим на примере, как расставлять пределы

Расставить пределы в области,ограниченной плоскостями 2x+y+3z-6=0,x=0, y=0 и z=0.

Сначала находим пределы по z от z=0 до z=1/3(6-2x-y)

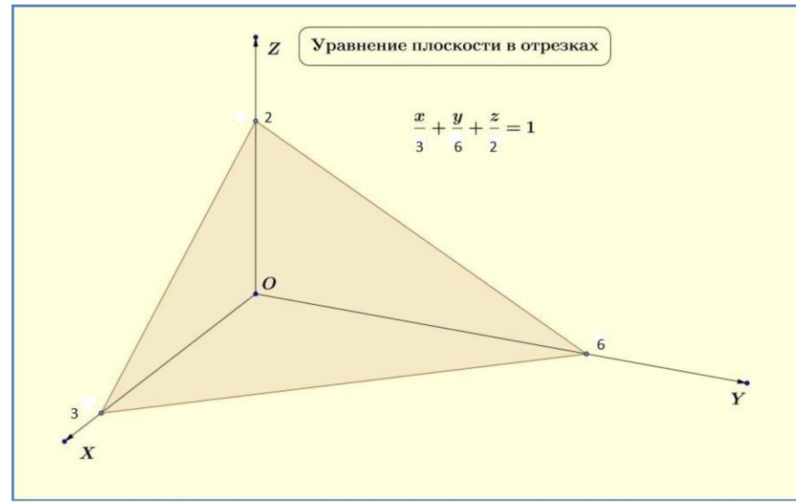
Затем смотрим на плоскость xoy.

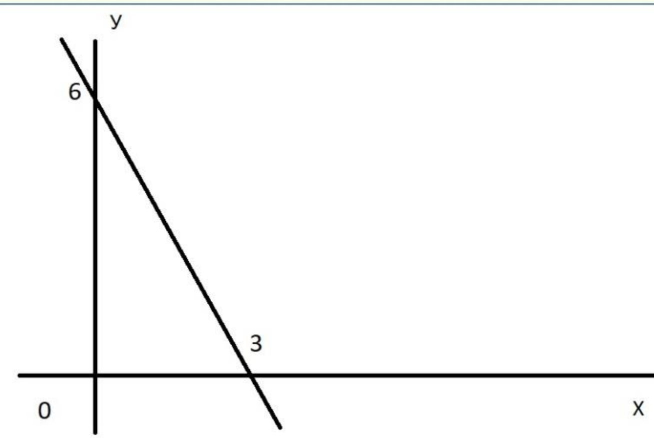
Там все делаем так, как делали в двойном интеграле. x изменяется от 0 до 3.

На плоскости прямая имеет вид y=6-2x, таким образом пределы по y расставляем от 0 до 6-2x.

Если мы почему-то хотим поставить пределы в другом порядке ,y меняется от 0 до 6,

Но не забываем, что прямая тогда имеет вид x=1/2(6-y)





$$\int_0^3 dx \int_0^{6-2x} dy \int_9^{\frac{1}{3}(6-2x-y)} f(x,y,z)dz$$

Формулу замены переменных в тройном интеграле можно получить , рассуждая так же, как и в случае двойного интеграла:

$$\iiint_{\mathrm{T}} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\mathrm{T}*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\mathcal{J}dudvdw$$

$\mathcal{J}$-якобиан перехода от переменных x,y,z к переменным u,v,w.

Наиболее употребительными криволинейными координатами в пространстве являются цилиндрические координаты и сферические координаты.

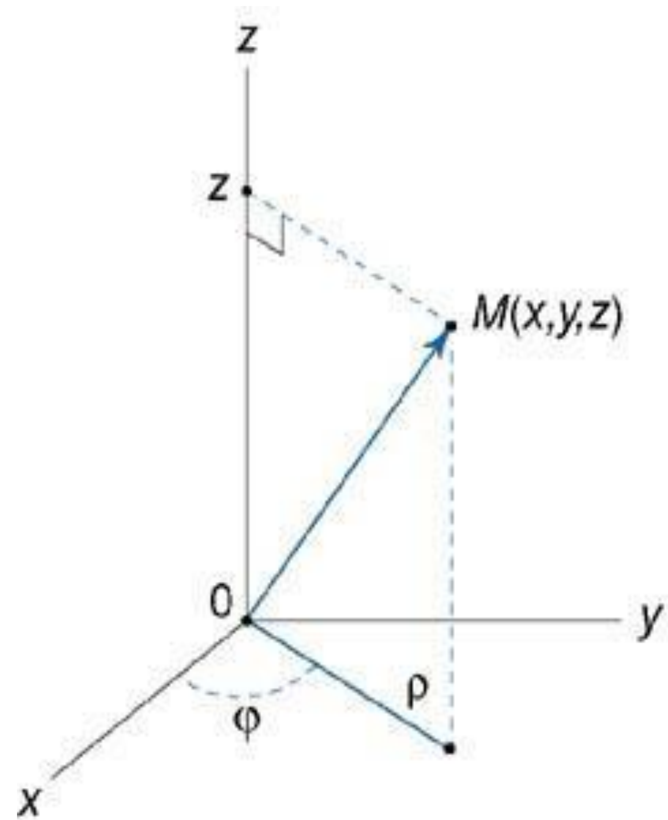
Цилиндрические координаты связаны с прямоугольными декартовыми соотношениями:

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$z=z$

Якобиан перехода $\mathcal{J}=\rho$



Сферические координаты связаны с декартовыми соотношениями

$$x = r\cos\theta\cos\varphi$$

$$y = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$z = r\sin\theta$$

где r–радиус-вектор, соединяющий начало (полюс) с данной точкой;

θ–угол, составляемый этим радиус-вектором с плоскостью xOy;

φ–угол между проекцией радиус-вектора на плоскость xOyи положительным направлением оси Ox

Цилиндрические координаты удобнее применять, но если область сферическая или коническая-лучше использовать сферические координаты.

Почему? Потому что в случае сферических координат уравнение сферы приобретает очень простой вид.

x=$r$cosθcosφ

y=$r$cosθsinφ

z=$r$sinθ не забываем $J = r^2 cos\theta$

Подставим это в уравнение сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$

$(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2 + (r\sin\theta)^2 = 9$

$(r\cos\theta)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + (r\sin\theta)^2 = 9$

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 9 \to r^2 = 9$,

значит уравнение сферы с центром в начале координат имеет вид r =3

Вычислить интеграл по области , ограниченной

$z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$ и $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$

$\iiint \frac{x^2}{x^2+y^2}dxdy = \iiint \frac{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 r^2 cos\theta}{(r\cos\theta\cos\varphi)^2 + (r\cos\theta\sin\varphi)^2} drd\theta d\varphi =$

$\iiint \ r^2 cos^2\varphi cos\theta drd\varphi d\theta$=и теперь надо правильно расставить пределы при переходе к повторным интегралам

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36 \ \to \ r = 6$

Значит r меняется от 0 до 6. Угол φ описывает полную окружность, значит меняется от 0 до 2π.Как определить поведение угла θ?

Пересечение сферы и конуса $x^2 + y^2$=27

Окружность R=$3\sqrt{3}$,радиус сферы 6. Значит θ меняется от 0 до $\frac{\pi}{6}$

$\int_0^{2\pi} cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{6}} cos\theta d\theta \int_0^6 r^2 \, dr$=36$\pi$

Попробуем тот же пример решить-но перейдя в цилиндрические координаты.

$x=\rho\cos\varphi$

$y=\rho\sin\varphi$

$z=z$

Якобиан перехода $\mathcal{J}=\rho$

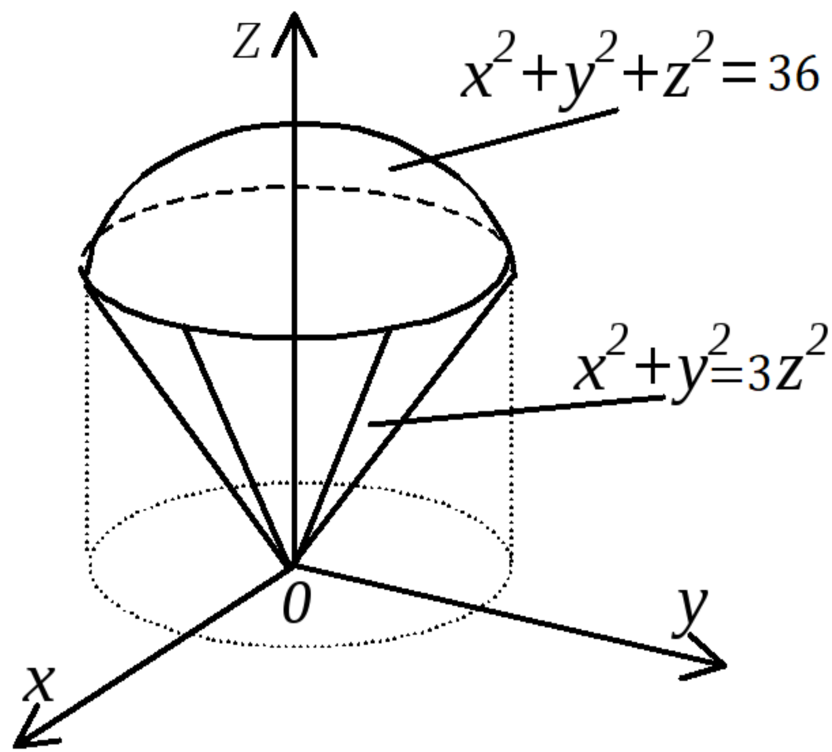
$$\iiint \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{dxdydz}=$$

$$\iiint \frac{(\rho\cos\varphi)^2\rho}{\rho^2}d\rho d\varphi dz = \text{теперь}$$

надо расставить пределы . Уголφ от о до 2π ,z меняется от значения на конусе $\frac{\rho}{\sqrt{3}}$ до значения на сфере $\sqrt{36-\rho^2}$, а чтобы найти ρ вспомним ,что радиус окружности $x^2+y^2=27$

равен $3\sqrt{3}$, т.о. имеем

$$\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^2 d\varphi \int_0^{3\sqrt{3}}\rho d\rho \int_{\frac{\rho}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{36-\rho^2}} dz$$



Геометрические и физические приложения тройных интегралов.

Объем тела

V=$\iiint_{\mathbb{V}} \, dxdydz$

Вычисление массы тела

плотностью $\mu(x, y, z)$

$$m = \iiint_{\mathbb{V}} \mu(x, y, z) \, dxdydz$$

Координаты центра масс

$$x_c = \frac{\iiint_{\mathbb{V}} x\mu(x, y, z) \, dxdydz}{\iiint_{\mathbb{V}} \mu(x, y, z) \, dxdydz}$$

y_c и z_c аналогично