Определенные интегралы и функции многих переменных

1. Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке (задание 1)

Средним значением функции $y = f(x)$ на промежутке $[a, b]$ называется величина

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = \mu$.

Геометрический смысл среднего значения функции заключается в следующем. Если $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$, равна площади прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$. (см. рис. 1)

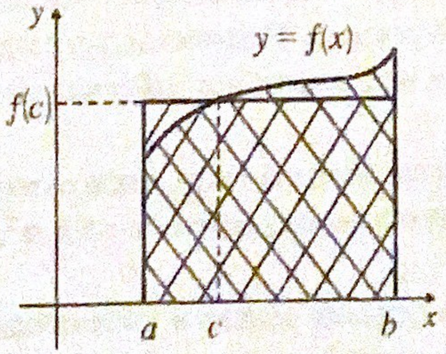

Рис. 1

Пример 1. Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке [1,2].

Решение.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-1}\int\limits_1^2 (5x^4 - 2)dx = (x^5 - 2x)|_1^2 = 29.$$

2. Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом (задание 2)

Функция $\Phi(x)$ дана в виде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Если функция f непрерывна в точке x, то $\Phi'(x) = f(x)$ (обратите внимание, что теперь аргументом функции f является уже переменная x, а не t). Соответственно $\Phi''(x) = f'(x)$.

Теперь чтобы найти точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, остается лишь вспомнить первый семестр и разыскать заброшенные куда-то расчетки (те, что по исследованию функций, построению графиков и т.д.)

Теперь, зная как вычислять Φ'(x) и Φ''(x), можно найти точки экстремума и точки перегиба функции Φ(x). Для этого остается лишь вспомнить первый семестр и разыскать заброшенные куда-то расчетки (те, что по исследованию функций, построению графиков и т.д.)

Заметим лишь, что для поиска координат y (ординат) найденных точек потребуется все же проинтегрировать функцию $f(t)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(t)|_a^x = F(x) - F(a),$$

где F — некоторая первообразная для функции f.

Пример 2. $\Phi(x) = \int_1^x (t - t^3)dt.$

Решение. Нетрудно найти

$$\Phi'(x) = f(x) = x - x^3 = x(1 - x^2), \quad \Phi''(x) = 1 - 3x^2,$$

а также

$$\Phi(x) = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}.$$

Тогда $\Phi'(x) = 0$ при $x = 0, x = 1$ и $x = -1$ (критические точки). Так как $\Phi''(0) = 1 > 0$, $\Phi''(\pm 1) = -2 < 0$, то согласно вторым достаточным условиям существования экстремума при $x = 0$ функция $\Phi(x)$ имеет минимум, а при $x = \pm 1$ — максимум (можно использовать также первые достаточные условия — определить, как меняется знак производной при переходе через каждую критическую точку). Таким образом, точка $(0; -\frac{1}{4})$ — точка минимума, а точки $(\pm 1; 0)$ — точки максимума (для вычисления координат y этих точек использовано полученное выше явное выражение для функции $\Phi(x)$).

Из уравнения $\Phi''(x) = 1 - 3x^2 = 0$ получаем точки перегиба: $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (как нетрудно убедиться, функция $\Phi''(x)$ в этих точках меняет знак). Ординаты для найденных точек перегиба предлагаем Вам найти самостоятельно.

3. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь (задания 3 и 4)

Прежде всего необходимо нанести на рисунок все указанные линии, найти точки их пересечения и определить, площадь какой фигуры следует найти. Некоторые варианты получающихся рисунков приведены на рис. 2 (для линий, заданных в декартовых координатах).

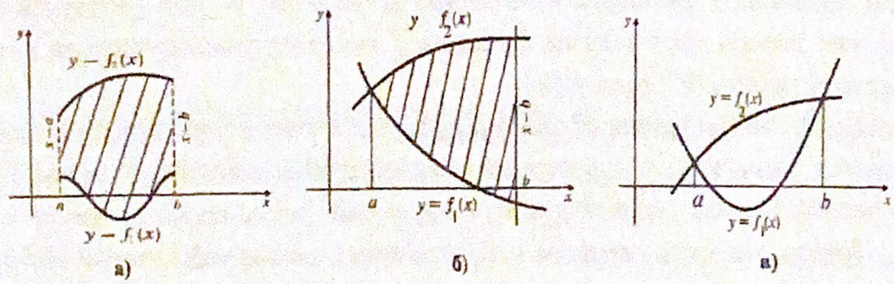

Рис. 2

Во всех приведенных (и аналогичных) случаях площадь фигуры определяется с помощью интеграла:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx,$$

где $y = f_2(x)$ — "верхняя" линия, а $y = f_1(x)$ — "нижняя", т.е. $f_2(x) \geq f_1(x)$ при $x \in [a, b]$.

Если линии заданы в полярной системе координат (уравнения таких линий имеют вид $r = r(\varphi)$ или $\varphi = \varphi_0$, а связь полярных координат с декартовыми: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), то все аналогично. При этом следует помнить, что всегда $r \geq 0$, а линия $\varphi = \varphi_0$ представляет собой луч, выходящий из начала координат и составляющий с положительным направлением оси Ox угол φ_0 (отсчет — против часовой стрелки). Некоторые варианты областей в этом случае приведены на рис. 3.

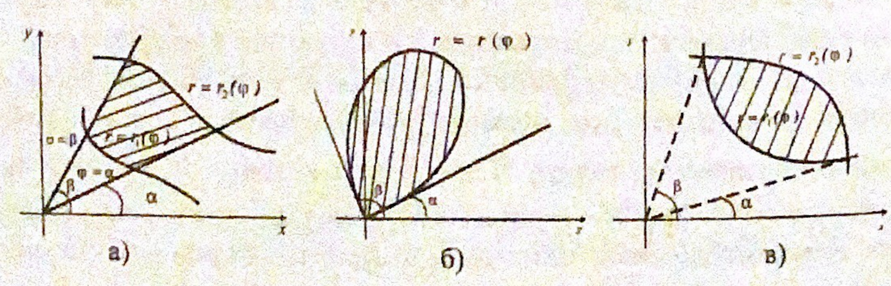

Рис. 3

Для случаев а) и в) площадь фигуры определяется с помощью интеграла

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))d\varphi,$$

а для случая б) — с помощью интеграла

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Заметим, что если в результате вычислений получилось S<0, то необходимо найти ошибку, так всегда площадь S≥0. При этом результат S=0 тоже сомнителен.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^2/2 + 1$.

Решение. Найдем точки пересечения кривых:
$x^2 = x^2/2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ — абсциссы точек пересечения.

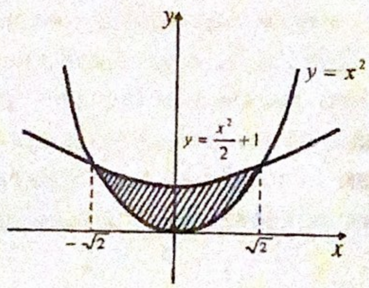

Рис. 4

Нанесем заданные кривые на рис. 4 и определим фигуру, площадь которой требуется найти. Согласно сказанному выше из чертежа получаем, что

$$S = \int_{a}^{b}(f_2(x) - f_1(x))dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2/2 + 1 - x^2)dx =$$

$$= (x - x^3/6)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

Пример 4. Найти площадь одного лепестка фигуры, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\sin 4\varphi}$, $(a > 0)$.

Решение. Найдем область определения функции $r(\varphi)$:
$\sin 4\varphi \geq 0 \Rightarrow 2\pi n \leq 4\varphi \leq \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Взяв один лепесток $(n = 0)$, получим $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Этот лепесток изображен на рис. 5.

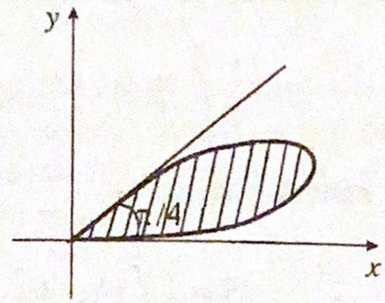

Рис. 5

Найдем теперь его площадь:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \sin 4\varphi d\varphi = -\frac{1}{2}a^2\frac{1}{4}\cos 4\varphi\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

В завершение раздела заметим, что если верхняя или (и) нижняя линия не имеет одинакового выражения на $[a, b]$ (например, если линия $f_2(x)$ составлена из двух линий $f_{21}(x)$ и $f_{22}(x)$), то для преодоления этой неприятности следует область разбить на две или большее число областей, взять для каждой свой интеграл, а затем результаты просуммировать. То же самое относится и к линиям в полярных координатах, а также к последующим разделам, связанным с приложениями определенного интеграла.

4. Объем тела вращения вокруг осей Ox, Oy (задание 5)

Этот раздел практически повторяет предыдущий (когда кривые заданы в декартовых координатах), только интеграл для определения объема будет иметь следующий вид:

$$V_x = \pi\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx,$$

если вокруг оси Ox вращается фигура типа изображенной на рис. 2 (но только при $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$).

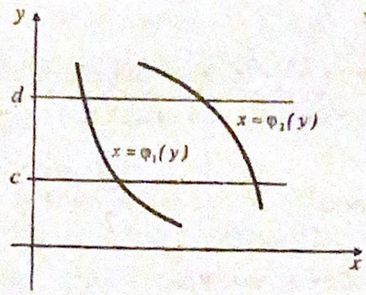

Рис. 6

Если фигура вращается вокруг оси Oy, то все аналогично. Подчеркнем лишь, что в этом случае уравнения кривых должны быть представлены в виде $x=\varphi(y)$ а не $y=f(x)$! Тогда например, для фигуры, изображенной на рис. 6, интеграл запишется так:

$$V_y = \pi \int\limits_c^d (\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y))dy.$$

Пример 5. Найти объемы тел вращения фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $\quad y = x^2/2 + 1$ и $x = 0$, относительно осей Ox и Oy.

Решение. Изобразим фигуру на рис. 7 (см. также пример 3).

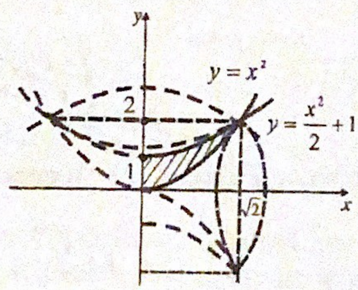

Рис. 7

Для первого объема сразу можно записать

$$V_x = \pi \int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} ((x^2/2+1)^2 - x^4)dx =$$

$$= \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(x^2 + 1 - \frac{3}{4}x^4\right) dx = \pi(\frac{x^3}{3} + x - \frac{3}{20}x^5)\Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \pi \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} - \frac{3}{20}4\sqrt{2}\right) = \frac{16\sqrt{2}\pi}{15}.$$

Чтобы найти второй объем, необходимо прежде всего выразить в уравнениях кривых переменную x (или сразу x^2) через y:

$$y = x^2 \Rightarrow x^2 = y, \qquad y = \frac{x^2}{2} + 1 \Rightarrow x^2 = 2(y-1).$$

Глядя на рис. 7, мы видим, что кривая $\varphi_1(y)$ на отрезке $[0;2]$ не имеет единого выражения: на $[0;1]$ имеем $\varphi_1(y) = 0$, а на $[1;2]$ будет $\varphi_1(y) = \sqrt{2(y-1)}$. Поэтому для поиска V_y потребуется записать два интеграла:

$$V_y = \pi \int_0^1 (y-0)dy + \pi \int_1^2 (y - 2(y-1))dy.$$

Эти интегралы вычисляются элементарно.

5. Длина дуги кривой (задания 6 и 8)

Вычисление длины дуги кривой, заданной в декартовых или полярных координатах, по сути не отличается от вычисления площади криволинейной трапеции (см. задания 3, 4), только интегралы имеют соответственно вид

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \qquad \text{и} \qquad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}d\varphi.$$

Если же кривая задана параметрически, т.е. в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad t \in [t_1; t_2],$$

то интеграл имеет вид

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Для построения кривой, заданной параметрически, можно либо попытаться исключить переменную t из системы уравнений, либо строить кривую по точкам с помощью таблицы вида

t	t_1	t_2	...
x	x_1	x_2	...
y	y_1	y_2	...

Эта таблица аналогична таблицам, по которым Вы строите графики функций y= *f(x)*, но сверху у нее приписана строка, соответствующая переменной t Вы берете значения t_1, t_2, … этой переменной, находите точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), … , которые и наносите на график. При этом часто очень эффективен прием, когда сначала берется нужное значение x или y, по нему из соответствующего уравнения системы определяется t , а по этому t – оставшаяся координата. Например, берем x=0, определяем t_o из уравнения $0=x(t_o)$ (первое уравнение системы), а затем из второго уравнения системы находим $y_o=y(t_o)$. Таким образом, точка $(0,y_o)$ найдена.

Пример 6. Найти длину дуги $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, $\quad x \in [-a; a]$.

Решение. $y' = a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{a}\cdot\dfrac{1}{a} = \mathrm{sh}\,\dfrac{x}{a}$. Тогда

$$l = \int\limits_{-a}^{a}\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx = \int\limits_{-a}^{a}\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} = 2a\,\mathrm{sh}\,1.$$

Пример 7. Найти длину четверти окружности радиуса a.

Решение. Четверть окружности, лежащая в первой координатной четверти ($x \geq 0, y \geq 0$), имеет параметрическое задание

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, \qquad t \in [0; \pi/2].$$

Поскольку $x' = -a\sin t, \quad y' = a\cos t$, то

$$l = \int\limits_{0}^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = a\int\limits_{0}^{\pi/2}dt = at\big|_0^{\pi/2} = \frac{a\pi}{2},$$

что согласуется с известной Вам формулой $L = 2\pi a$ длины всей окружности.

Пример 8. Найти длину дуги кривой $r = a(1-\cos\varphi)$, $(a > 0)$.

Решение. При $\varphi = 0$ имеем $r = 0$. Далее при увеличении угла φ до значения π происходит увеличение радиуса r до значения $2a$. Затем при изменении угла φ до значения 2π радиус снова уменьшается до нуля. Таким образом, кривая имеет вид, изображенный на рис. 8.

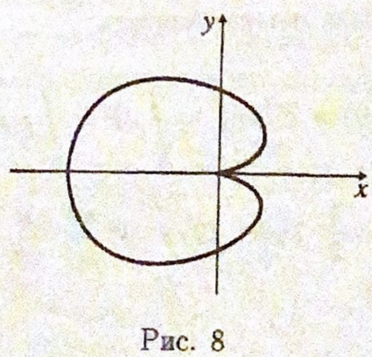

Рис. 8

Чтобы найти ее длину, надо рассмотреть диапазон изменения угла φ от 0 до 2π. Поскольку кривая симметрична относительно оси Ox, то можно взять $\varphi \in [0; \pi]$, а интеграл удвоить. Тогда

$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2a\int_0^{\pi} \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\,d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -8a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

6. Задачи из физики (задание 9)

Рассматриваемые в задании 9 задачи решаются с помощью определенного интеграла.

Пример 9. Определить силу P давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием $a = 8$ м и высотой $H = 6$ м.

Решение. Из физики известно, что сила давления воды на площадку ΔS, находящуюся на глубине h, определяется по формуле $\Delta P = \rho g h \Delta S$, где $\rho = 1000$ кг/м^3 — плотность воды, а $g \approx 10$ м/сек^2 — ускорение свободного падения. Тогда давление на бесконечно малую часть шлюза dS, которая имеет ширину a, бесконечно малую высоту dh и расположена на глубине h, будет равно

$$dP = \rho\, g\, h\, dS = \rho\, g\, a\, h\, dh.$$

Пусть $P(h)$ — сила давления воды на часть шлюза от глубины 0 до глубины h. Тогда $P(0) = 0$, $P(H) = P$ (искомая сила) и с учетом свойств определенного интеграла можно записать

$$P = P(H) - P(0) = P(h)\big|_0^H = \int_0^H dP = \int_0^H \rho\, g\, a\, h\, dh = \frac{1}{2}\rho g a h^2\Big|_0^H =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g a H^2 = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 10\cdot 8\cdot 6^2\,\frac{кг}{м^3}\cdot\frac{м}{с^2}\cdot м^3 = 1.44\cdot 10^6 н.$$

7. Вычисление несобственных интегралов (задание 10)

Несобственные интегралы бывают двух родов — 1-го и 2-го. Рассмотрим сначала интегралы 1-го рода — с бесконечным пределом (бесконечными пределами) интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном интервале $[a, +\infty)$. Тогда интеграл $J(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ имеет смысл при $\forall b > a$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом 1-го рода от функции $f(x)$ по бесконечному интервалу $[a,+\infty)$ и обозначают $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. В этом случае несобственный интеграл называют сходящимся, а если предел не существует, то – расходящимся. Итак,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Аналогичным образом определим

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если в несобственном интеграле оба предела интегрирования бесконечны, то его разбивают на два интеграла, каждый из которых исследуется отдельно: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где c — любое конечное число. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то расходится и интеграл слева.

Пример 10. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2-4x+8}$.

Решение. Поскольку в этом примере оба предела бесконечны, разбиваем интеграл на два и вычисляем каждый из них согласно определению:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2-4x+8} + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-4x+8} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{(x-2)^2+4} +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{(x-2)^2+4} = \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Bigg|_a^0\right) + \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Bigg|_0^b\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{a\to-\infty} \left(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg} \frac{a-2}{2} \right) + \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b-2}{2} - \operatorname{arctg}(-1) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \text{ так как } \lim_{x\to+\infty} arctgx = -\lim_{x\to-\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$$

Рассмотрим теперь несобственные интегралы 2-го рода — от разрывных функций.

Пусть $f(x)$ непрерывна на полуинтервале [a,b), в окрестности точки b имеет разрыв 2-го рода и интегрируема на [a,b-ε] при $\forall \varepsilon > 0$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ в обычном смысле не существует.

В этом случае несобственным интегралом (2-го рода) от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называют предел

$$\lim_{\varepsilon\to0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

если он существует. Обозначают его $\int_a^b f(x)dx$ и говорят, что интеграл сходится. Если же предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл расходится или не существует.

Итак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если функция разрывна при $x = a$, то аналогично полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0+0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx,$$

а если при $x = c$, $a < c < b$, то исходный интеграл разбивают на два несобственных интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

каждый из которых исследуют согласно сказанному выше. В этом случае интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, если сходится каждый из интегралов $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, и расходится, если расходится хотя бы один из них.

Пример 11. Вычислить $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 2$, которая лежит внутри отрезка $[0;3]$, по которому производится интегрирование. Таким образом, в этой задаче $a = 0$, $b = 3$, $c = 2$. Вычисляем несобственный интеграл согласно определению:

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim_{\delta\to 0+0} \int\limits_{2+\delta}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\,\Big|_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0+0} \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\,\Big|_{2+\delta}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{2^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{1^2} - \lim_{\delta\to 0+0} \frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2} = \frac{3}{2}\left(1 - \sqrt[3]{4}\right).$$

8. Изображение в плоскости xOy области определения функции двух переменных (задание 11)

Чтобы найти область определения функции (в том числе и функции двух переменных), следует найти области определения всех входящих в нее функций. Например, подкоренное выражение для корня четной степени не должно быть отрицательным, знаменатель дроби — не равен нулю и т.д. Для функций двух переменных таким образом получим систему, состоящую из неравенств типа $\varphi(x,y) \geq 0$ или $\psi(x,y) > 0$ (в том числе, возможно, и двойных неравенств), а также выражений типа $g(x,y) \neq 0$. Указанные неравенства задают некоторые области в плоскости xOy, которые и следует изобразить. При этом если граница области не принадлежит самой области (область задана строгим неравенством), то эта граница изображается пунктиром. Пересечение указанных областей после выбрасывания линий $g(x,y) = 0$ и будет представлять собой искомую область определения.

Пример 12. Найти и изобразить в плоскости xOy область определения функции

$$z = \sqrt{y - x^2} - \ln(x - y + 1) + \frac{x}{y}.$$

Решение. Функция z включает в себя следующие функции: квадратный корень, логарифм и дробь.

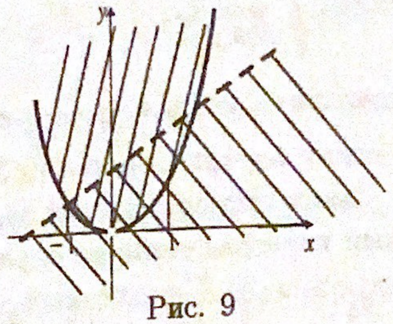

Рис. 9

Поэтому, найдя области определения этих функций, получим следующую систему:

$$\begin{cases} y - x^2 \ \geq \ 0, \\ x - y + 1 \ > \ 0, \\ y \ \neq \ 0 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y \ \geq \ x^2, \\ y \ < \ x+1, \\ y \ \neq \ 0. \end{cases}$$

Изобразив линии $y = x^2$ и $y = x + 1$ (это границы областей), отразив штриховкой сами области, соответствующие записанным неравенствам, и удалив линию $y = 0$ (что скажется лишь в удалении точки $(0; 0)$), получим искомую область определения. На рис. 9 она оказалась клетчатой.

9. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала (задание 12)

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ записывается в виде

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

где $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — частные производные. Поскольку для независимых переменных x и y имеем $dx = \Delta x$, $\quad dy = \Delta y$, а при достаточно малых Δx и Δy приращение Δz функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta z \approx dz$, где

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

то получим выражение

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \Delta z \approx f(x_0, y_0) + dz =$$

$$= f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0,\, y = y_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x = x_0,\, y = y_0} \cdot \Delta y$$

(Здесь дифференциал и частные производные взяты в точке (x_0, y_0)).

Если значения функции $f(x, y)$ и ее частных производных легко вычисляются в точке (x_0, y_0), то с помощью полученного выражения нетрудно приближенно вычислить и значения функции $f(x, y)$ в точках, достаточно близких к точке (x_0, y_0) (близость точек означает, что если $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, то Δx и Δy малы). Это и означает приближенное вычисление значений функции с помощью полного дифференциала. Реально это выглядит следующим образом. Находится точка (x_0, y_0), близкая к точке (x, y), в которой требуется вычислить значение функции, причем эта точка (x_0, y_0) должна быть такой, чтобы в ней легко вычислялась сама функция, а также ее производные. Затем находятся $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. После этого используется записанная формула.

Пример 13. Найти $\sqrt{1.01^2 + 1.99^3}$.

Решение. Здесь $z = \sqrt{x^2 + y^3}$, а в качестве точки (x_0, y_0) возьмем точку $(1; 2)$. При этом

$$\Delta x = 1.01 - 1 = 0.01, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01,$$

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{1^2 + 2^3} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = \left.\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;2)} = \frac{1}{3},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = \left.\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}\right|_{(1;2)} = 2.$$

Тогда согласно сказанному выше

$$\sqrt{1.01^2 + 1.99^3} \approx 3 + \frac{1}{3} \cdot 0.01 - 2 \cdot 0.01 \approx 2.983.$$

10. Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке (задание 13).

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ задает поверхность в трехмерном пространстве. Точка $M(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит этой поверхности, если для ее координат выполняется равенство $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Чтобы найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке M, прежде всего следует найти частные производные функции F в этой точке:

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \qquad B = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}, \qquad C = \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

(предполагается, что хотя бы одно из чисел A, B и C отлично от 0).

Тогда уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности будут иметь соответственно вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

и

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

Пример 14. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x+y^2+z^2=5$ в точке $M(1;0;-2)$.

Решение. Поскольку $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(1;0;-2)} = 1|_{(1;0;-2)} = 1$,

$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1;0;-2)} = 2y|_{(1;0;-2)} = 0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(1;0;-2)} = 2z|_{(1;0;-2)} = -4$, то уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности будут иметь соответственно вид

$$(x-1)+0(y-0)-4(z+2)=0$$

(т.е. $x-4z-9=0$) и

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+2}{-4}.$$

11. Производная по направлению (задание 14)

Чтобы найти производную функции $u=f(x,y,z)$ по направлению $\vec{l}=(m,n,p)$ в точке $M(x_0,y_0,z_0)$, следует сначала найти градиент (вектор частных производных) функции u:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Затем необходимо найти единичный вектор $\vec{e}_l$ направления $\vec{l}$:

$$\vec{e}_l=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\right)=$$

$$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\vec{l}$ (и $\vec{e}_l$).

После этого можно вычислить производную функции по заданному направлению. Эта производная равна скалярному произведению градиента, вычисленного в точке M, на единичный вектор заданного направления:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cdot\cos\gamma.$$

Пример 15. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(-1;0;1)$ в направлении вектора $\vec{l} = (-1;1;-2)$.

Решение. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = yz|_M = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = xz|_M = -1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = xy|_M = 0,$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Тогда производная по направлению равна

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

12. Задачи на градиент (задание 15)

Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x,y)$ называется вектор $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j}$, т.е. вектор с координатами $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Поскольку градиент — это вектор, то для выполнения задания 15 необходимо вспомнить некоторые формулы из первого семестра, а именно, формулу для угла между двумя векторами $\vec{a} = \{a_x, a_y\}$ и $\vec{b} = \{b_x, b_y\}$:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

и формулу для модуля вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

а также учесть, что максимально возможное значение производной по направлению функции z в точке M есть не что иное, как модуль градиента функции в этой точке, т.е. $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z\right|_M$.

Пример 16. Найти угол между градиентами функции $z = x^2 y$ в точках $A(1;1)$ и $B(2;0)$.

Решение. Градиент функции z равен

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = \left\{2xy, x^2\right\}.$$

В точках A и B градиент равен

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z\Big|_A = \left\{2\cdot 1\cdot 1; 1^2\right\} = \{2; 1\},$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} z\Big|_B = \left\{2\cdot 2\cdot 0; 2^2\right\} = \{0; 4\}.$$

Косинус угла между этими градиентами равен

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 0 + 1\cdot 4}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{0^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Сам же угол

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

13. Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу (задание 16)

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ имеет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

В задании 16 правая часть этого равенства задана, т.е. известны функции $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$. По этим функциям P и Q требуется найти саму функцию z.

Надо сказать, что не для всяких функций P и Q можно найти функцию z. Условием успешного поиска является выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$, которое и необходимо сразу же проверить. Если проверка дала положительный результат, то ищем функцию в виде

$$z = \int P(x, y)\,dx + C_1(y) = \Phi_1(x, y) + C_1(y),$$

где неопределенный интеграл берется по переменной x, а переменная y рассматривается как параметр (поэтому и записано $C_1(y)$, а не просто C_1). Через функцию $\Phi_1(x, y)$ здесь обозначена соответствующая первообразная.

Теперь остается найти функцию $C_1(y)$. Поскольку $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$, то взяв производную от записанного выражения для z, получим

$$Q(x, y) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{dC_1(y)}{dy} \Longrightarrow \frac{dC_1(y)}{dy} = Q - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y},$$

причем в правой части последнего равенства после преобразований окажется функция, зависящая лишь от y.

Таким образом, получим, что $C_1(y) = \int \left(Q - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right) dy$. Подставив эту функцию в записанное выше выражение для z, получим ответ (вычисляя функцию $C_1(y)$ интегрированием, не забудьте добавить константу C!).

Заметим, что аналогично можно найти z из другого равенства:

$$z = \int Q(x, y)\, dy + C_2(x) = \Phi_2(x, y) + C_2(x).$$

Тогда

$$P(x, y) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{dC_2(x)}{dx} \Longrightarrow \frac{dC_2(x)}{dx} = P - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$C_2(x) = \int \left(P - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right) dx$$

и опять остается лишь записать ответ.

Пример 17. Найти функцию $z(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$$\left(y^2 - 1\right) dx + (2xy + 3y)\, dy.$$

Решение. В данной задаче $P(x, y) = y^2 - 1, Q(x, y) = 2xy + 3y$. Прежде всего проверим выполнение тождества $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, то тождество выполняется.

Теперь согласно вышеизложенному будем искать функцию z:

$$z = \int P(x, y) dx + C_1(y) = \int \left(y^2 - 1\right) dx + C_1(y) =$$

$$= xy^2 - x + C_1(y).$$

Таким образом, здесь $\Phi_1(x, y) = xy^2 - x$. Для определения функции $C_1(y)$ запишем соотношение

$$\frac{dC_1(y)}{dy} = Q - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = 2xy + 3y - 2xy = 3y.$$

Тогда $C_1(y) = \int 3y dy = \frac{3}{2} y^2 + C$.

Окончательно получим $z(x, y) = xy^2 - x + \frac{3}{2} y^2 + C$. Для проверки следует убедиться, что $\frac{\partial z}{\partial x} = P$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$.

14. Экстремумы функции двух переменных (задание 17)

Как и в случае функций одной переменой, экстремумы функции двух переменных могут достигаться лишь в критических точках. Критическими называются точки, в которых частные производные равны нулю или не существуют. Таким образом, первым шагом при нахождении экстремумов функции $z = f(x, y)$ является поиск критических точек, для чего нужно решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 & \text{или не существует} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 & \text{или не существует} \end{cases}.$$

После того как критические точки найдены, необходимо проверить, являются ли они точками экстремума или нет. Для этого для каждой критической точки M_0 необходимо вычислить частные производные второго порядка и найти определитель

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}\right|_{M_0}.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$, то точка M_0 — точка максимума;

2) если $\Delta > 0$ и $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$, то точка M_0 — точка минимума;

3) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума; 4) если $\Delta = 0$, то ничего сказать нельзя (экстремум может быть, а может и не быть) и требуются дополнительные исследования.

Пример 18. Найти экстремумы функции

$$z = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2} - x - y + 14.$$

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y - 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + y - 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Для поиска критических точек решаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y - 1 &= 0 \\ x + y - 1 &= 0 \end{cases}.$$

Ее решением являются точки $(0;1)$ и $(1;0)$. В точке $(1;0)$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, поэтому $(1;0)$ — точка минимума.

В точке $(0;1)$ получим $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$, поэтому точка $(0;1)$ не является точкой экстремума.

15. Текстовые задачи на условный экстремум (задание 18)

Эти задачи очень различны по формулировкам. Методика же их решения в общем одинакова: следует выяснить, что в задаче максимизируется (минимизируется), что является ограничением, а что является искомыми параметрами; записать выражение оптимизируемой величины через искомые параметры и записать уравнение с ними же, являющееся ограничением; и, наконец, решить задачу на условный экстремум.

Чтобы найти экстремум функции $z = f(x, y)$ при условии, что x и y связаны уравнением $g(x, y) = 0$, т.е. найти условный экстремум, составляется вспомогательная функция

$$u(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Здесь переменными являются x, y и новая переменная λ, называемая множителем Лагранжа. Далее ищется безусловный экстремум функции u по трем переменным x, y и λ, для чего решается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \lambda} \equiv g(x, y) = 0.$$

Из этой системы находятся координаты экстремальной точки (x, y) (следует все же проверить, что найденная точка является экстремальной).

Пример 19. Определить размеры конуса наибольшего объема при условии, что его полная поверхность равна S.

Решение. В этой задаче максимизируется объем V, ограничением является условие $S_{\text{полн}} = S$, в качестве параметров конуса возьмем его высоту h и радиус R основания. Тогда можно записать выражение оптимизируемой величины V через параметры R и h: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$ и уравнение с ними же, являющееся ограничением:

$$\pi R\sqrt{R^2 + h^2} + \pi R^2 - S = 0$$

$\left(\text{т.к. } S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2\right)$.

Получилась задача на условный экстремум. Чтобы ее решить, составим вспомогательную функцию

$$u(R, h, \lambda) = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \lambda\left(\pi R\sqrt{R^2 + h^2} + \pi R^2 - S\right)$$

и приравняем нулю ее частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial h} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 + \lambda\pi R\dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial R} = \dfrac{2}{3}\pi Rh + \lambda\left(\pi\sqrt{R^2+h^2} + \dfrac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+h^2}} + 2\pi R\right) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} = \pi R\sqrt{R^2+h^2} + \pi R^2 - S = 0. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения λ и подставив это выражение во второе уравнение, после преобразований получим, что $h^2 = 8R^2$. После этого, используя третье уравнение, нетрудно получить, что оптимальные размеры конуса $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{s}{\pi}}$, $h = \sqrt{\dfrac{2s}{\pi}}$. То, что это именно оптимальные значения, следует из смысла задачи.

16. Расстановка пределов интегрирования в повторных интегралах (задание 19)

Пусть область интегрирования D имеет вид, изображенный на рис. 10, причем проекция множества D на ось Ox представляет собой отрезок $[a, b]$, а на ось Oy — соответственно $[c, d]$. Сверху область D ограничена кривой $y = \varphi_2(x)$ (дугой $A_1B_2A_2$), а снизу — кривой $\varphi_1(x)$ (дугой $A_1B_1A_2$).

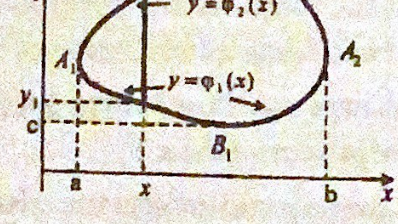

Рис. 10

В этих условиях исходный двойной интеграл $J = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ будет равен следующему повторному интегралу:

$$J = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

(Заметим, что к такому же повторному интегралу сводится двойной интеграл по области D, имеющей вид, подобный изображенному на рис. 11.)

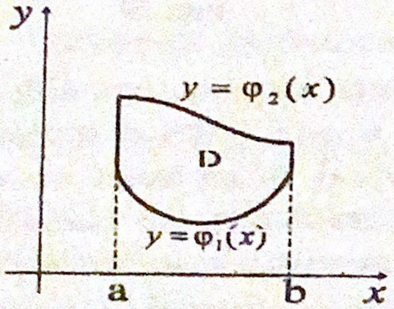

Рис. 11

В записанном повторном интеграле сначала функция $f(x,y)$ интегрируется по переменной y (при этом x считается параметром), а затем полученный результат интегрируется по переменной x. Внешний интеграл (по x) берется по проекции области D на ось Ox, а пределы внутреннего интеграла можно интерпретировать следующим образом. Зафиксируем некоторое значение $x \in [a,b]$ и посмотрим, в каких пределах y_1 и y_2 может изменяться переменная y для точек $(x,y) \in D$ при фиксированном x. Из рис. 10 видно, что этими пределами и являются $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, которые и проставлены в качестве пределов интегрирования внутреннего интеграла.

Двойной интеграл по области D, изображенной на рис. 10, можно свести к повторному интегралу с другим порядком интегрирования, если считать, что область D ограничена справа кривой $x = \psi_2(y)$ (дугой $B_1A_2B_2$), а слева — кривой $x = \psi_1(y)$ (дугой $B_1A_1B_2$). Тогда исходный двойной интеграл будет равен следующему повторному интегралу:

$$J = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

К такому же повторному интегралу сводится двойной интеграл по области D, имеющей вид, подобный изображенному на рис. 12.

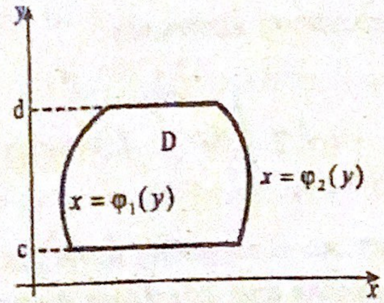

Рис. 12

Заметим еще, что если, например, дуга $A_1B_2A_2$ (см. рис. 10) не имеет единого выражения $y = \varphi_2(x)$ (часть ее описывается одним уравнением, а другая часть — другим), то для записи повторного интеграла следует разбить область D на две области, для каждой записать свой повторный интеграл, а затем эти интегралы просуммировать.

Пример 20. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ изобразить область D, ограниченную линиями $y = x^2$ и $y = 4$, расставить пределы интегрирования в различных порядках.

Решение. Область D изображена на рис. 13.

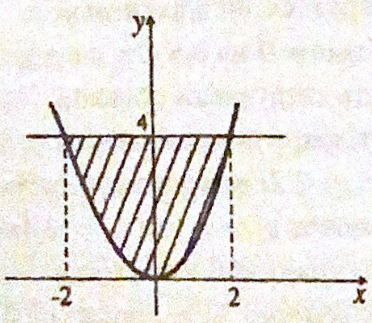

Рис. 13

Поскольку проекция области D на ось Ox представляет собой отрезок $[-2;2]$, а ее нижней и верхней границами являются соответственно функции $y = \varphi_1(x) = x^2$ и $y = \varphi_2(x) = 4$, то один из повторных интегралов имеет вид

$$J = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy.$$

Чтобы записать повторный интеграл с другим порядком интегрирования, необходимо получить уравнения линий, ограничивающих область D слева и справа, причем эти уравнения должны иметь вид $x = \psi_1(y)$,

$x = \psi_2(y)$, т.е. x должен быть выражен через y. Слева и справа область ограничивают две ветви кривой $y = x^2$. Выражая x через y, получим уравнения $x = -\sqrt{y}$ для левой ветви и $x = \sqrt{y}$ для правой. Учитывая, что проекция области D на ось Oy есть отрезок [0;4], запишем повторный интеграл в виде

$$J = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)dx.$$

17. Вычисление с помощью двойного интеграла объема тела, площади фигуры, моментов инерции и нахождение координат центра тяжести (задания 20-22)

Все эти задачи представляют собой различные приложения двойного интеграла. Для их решения необходимо записать двойной интеграл, определив область интегрирования и подынтегральную функцию, а затем согласно п.16 свести его к повторному интегралу и вычислить.

Для вычисления объема тела необходимо найти проекцию тела на одну из координатных плоскостей (на какую именно — решается с учетом простоты дальнейших вычислений). Пусть этой плоскостью является xOy (ее уравнение $z = 0$), а проекцией тела на эту плоскость является область D. Пусть тело ограничено поверхностью $z = f_1(x, y)$ снизу и поверхностью $z = f_2(x, y)$ сверху (см. рис. 14).

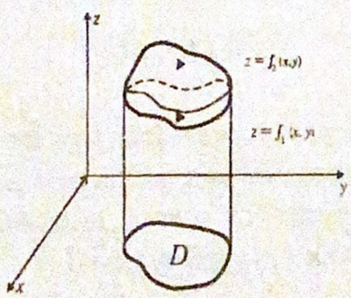

Рис. 14

Тогда выражение для объема имеет вид:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y))dxdy.$$

Масса плоской пластинки D, ограниченой линией L и имеющей поверхностную плотность $\rho(x, y)$, вычисляется по формуле

$$m = \iint_D \rho(x, y)dxdy,$$