Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 27.03.2023

1.1 Разбор заданий по определенным интегралам

1.1.1 Задание №3 — задание №4

В декартовой системе координат Смотри прикрепленное изображение №1

$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x,\ y = f_2(x),\ y = f_1(x)$

В полярной системе координат Смотри прикрепленное изображение №2

$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (r_2^2(\phi) - r_1^2(\phi))\,\mathrm{d}\phi,\ r = r_2(\phi),\ r = r_1(\phi)$

Смотри прикрепленное изображение №3

$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi$

Примеры **Пример №1**

Пусть $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$. Найти площадь, ограниченную ими.

$x^2 = \frac{x^2}{2} + 1 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$S = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\frac{x^2}{2} + 1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x = (x - \frac{x^3}{6})\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6}) - (-\sqrt{2} - \frac{-2\sqrt{2}}{6}) = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Пример №2

Пусть $r = a\sqrt{\sin 4\phi}$, $\sin 4\phi \geq 0$, $r \geq 0$, $a > 0$, $0 \leq 4\phi \leq \pi \iff 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$

$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} (a\sqrt{\sin 4\phi})^2\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \sin 4\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{a^2}{2}(-\frac{\cos 4\phi}{4})\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}(-\frac{(-1)}{4} - (-\frac{1}{4})) = \frac{a^2}{4}$

1.1.2 Задание №5

См. прикрепленное изображение №4

$V_x = \pi\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,\mathrm{d}x,\ V_y = \pi\int\limits_c^d (\phi_2^2(y) - \phi_1^2(y))\,\mathrm{d}y$

Примеры **Пример №1**

Пусть $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x = 0$

$V_x = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} ((\frac{x^2}{2}+1)^2 - (x^2)^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (\frac{x^4}{4}+x^2+1-x^4)\,\mathrm{d}x = \pi(\frac{x^3}{3}+x-\frac{3x^5}{20})\Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{5}) = \pi(\frac{10\sqrt{2}+15\sqrt{2}-9\sqrt{2}}{15}) = \frac{16\sqrt{2}}{15}\pi$

$x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2y-2}$

$V_y = \pi\int\limits_0^1 ((\sqrt{y})^2 - (\sqrt{2y-2})^2) + \pi\int\limits_1^2 ((\sqrt{y})^2 - (\sqrt{2y-2})^2) = \pi(\frac{y^2}{2})\Big|_0^1 + \pi(2y - \frac{y^2}{2})\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \pi(4 - 2 - (2 - \frac{1}{2})) = \pi$

1.1.3 Задание №11

Примеры **Пример №1**

$Z = \sqrt{y - x^2} - \ln(x - y + 1) + \frac{x}{y}$. Изобразить область определения данной функции.

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y \geq x^2 \\ y < x + 1 \\ y \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Нарисовать эту фигню, что выше в виде системы представлена, после чего подумать и заштриховать то, что надо.

1.2 Длина дуги кривой

1.2.1 В декартовой системе координат

$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Пример №1 $y = a\cosh\frac{x}{a}$, $x \in [-a; a]$
$y' = \sinh\frac{x}{a}$, $l = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + (\sinh\frac{x}{a})^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a\sinh\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} =$
$(a\sinh 1) - (a\sinh(-1)) = 2a\sinh 1$

1.2.2 В полярной системе координат

$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi$

Пример №1 $r = a(1 - \cos\phi)$, $a > 0$
$r' = a\sin\phi$
$l = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{(a(1-\cos\phi))^2 + (a\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{(a - a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2 - 2a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi =$
$2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2(1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi)}\,\mathrm{d}\phi = 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi = 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{4(\frac{1-\cos\phi}{2})}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int\limits_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int\limits_0^\pi \sin\frac{\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi =$
$4a(-2\cos\frac{\phi}{2})\Big|_0^\pi = 4a(-(-2)) = 8agith$

1.2.3 В параметрической системе координат

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2] \tag{2}$$

$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

Пример №1 Найти длину четверти окружности радиуса a

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}, t \in [0; \frac{\pi}{2}] \tag{3}$$

$(x') = -a\sin t$, $(y') = a\cos t$
$l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = a\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = a(t\Big|_0^{\pi/2}) = \frac{a\pi}{2}$