Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Высшая математика - 11.11.2022 **2**
1.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях 2
1.1.1 Теорема Ролля 2
1.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях 2
1.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций 2
1.1.4 Теорема Ферма 3
1.2 Геометрические приложения производной 3
1.2.1 Уравнение касательной к кривой 3
1.2.2 Уравнение нормали к кривой 3
1.3 Правило Лопиталя 3
1.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ 3
1.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ 3
1.4 Формула Тейлора 3

1 Высшая математика - 11.11.2022

1.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

1.1.1 Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b); $f(a) = f(b) = 0$, тогда внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайней мере одна точка c, в которой производная обращается в ноль:
$\exists c : a < c < b$, такая что $f'(c) = 0$
Доказательство смотреть в Лакерник А. Р. "Краткий курс высшей математики Пискунов.

Первое замечение Эта теорема останется справедливой, если $f(a) = f(b) \neq 0$

Примеры Например, имеется функция: $f(x) = x^2$, рассмотрим ее на отрезке $[-2;2]$. Для нее выполняются все условия, следовательно, существует такая точка, в которой производная обращается в ноль. Можно найти, что это точка $x = 0$

1.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b), тогда $\exists c : a < c < b$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - число, введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$
Уравнение прямой, проходящей через $(a; f(a))$:
$y - f(a) = \operatorname{tg}\alpha(x - a) \Longleftrightarrow y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
$F(x) = f(x) - y$, то есть мы получили, что $F(x)$ для каждого значения x является разностью ординаты кривой и хорды.

Функция $F(x)$ **удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля**, $F'(c) = 0, F'(x) = f'(x) - Q, F'(c) = f'(c) - Q = 0, Q = f'(c)$.

Геометрический смысл Геометрический смысл теоремы Лагранжа в том, что при выполнении требуемых условий на кривой найдется точка между a и b, что касательная в которой параллельна хорде ab.

1.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций

Пусть есть $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на $[a;b]$ и дифференцируемы во внутренних точках $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ внутри $(a;b)$, **тогда** $\exists c : a < c < b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

1.1.4 Теорема Ферма

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$ и принимает во внутренней точке c наибольшее или наименьшее значение.
Тогда $f'(c) = 0$, если в этой точке существует конечная производная.

1.2 Геометрические приложения производной

1.2.1 Уравнение касательной к кривой

Касательной $y = y(x)$ в точке $A(x; y(x))$ **называется** прямая, к которой стремится секущая, проходящая через точку A и точку $B(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ при условии, что $\Delta x \to 0$

Уравнение касательной Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$:
$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

1.2.2 Уравнение нормали к кривой

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

1.3 Правило Лопиталя

1.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **удовлетворяют** условию теоремы Коши на интервале $[a;b]$ и **выполняется** условие $f(a) = g(a) = 0$
Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и они равны между собой.

Замечание Если $f'(a) = g'(a) = 0$, то можно рассматривать собственно производные в качестве функций и дальше применять правило Лопиталя .

1.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** и дифференцируемы на всех точках кроме, может, самой точки a, и $g'(x) \neq 0$, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
Если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

1.4 Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет непр. произв. до $(n + 1)$ пор.
$P_n(x)$ многочлен степени не выше n: $P_n(a) = f(a), P'_n(a) = f'(a)$
$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}, R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), a < \xi < x$

Формула Маклорена $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Примеры вывода формулы

$y = \sin x, y(0) = 0$	$y = \cos x, y(0) = 1$	$y = e^x, y(0) = 1$
$y'(0) = 1$	$y'(0) =$	$y'(0) = 1$
$y''(0) = 0$	$y''(0) =$	$y''(0) = 1$
$y'''(0) = -1$	$y'''(0) =$	$y'''(0) = 1$
$y''''(0) = 0$	$y''''(0) =$	$y''''(0) = 1$
$y'''''(0) = 1$	$y'''''(0) =$	$y'''''(0) = 1$

Отсюда $\sin x = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...,$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...,\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
Интересно рассмотреть натуральный логарифм: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
Также $(1+x)^m = 1 + mX + \frac{m(m-1}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...,$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1*3*x^3}{2^3*3!} - \frac{1*3*5*x^4}{2^4*4!}$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + ...$

Применение данных формул к вычислению пределов Допустим, имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = ...$

Распишем разложение в Тейлора: $... = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$