Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 03.10.2022

1.1 Предел функции

1. Любую константу мы можем вынести за предел
2. Предел от суммы двух функций $f(x) + g(x)$ дает в нам результате разложения сумму двух пределов
3. Предел от произведения двух функций разлагается на произведение двух пределов
4. Предел частного от двух функций ($g(x) \neq 0$) равен частному двух пределов, если нет неопределенности

1.2 Виды неопределенностей

Неопределенности бывают следующие: $\frac{\inf}{\inf}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{-\inf}$, $\frac{0}{\inf}$, $1^{\inf}$, 0^0, $\inf^0$

1.2.1 Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Пусть $f(x)$ and $g(x)$ are многочлены, k_1, $k_2 \geq 1$.

$f(x) = (x-a)^{k_1} f_1(x)$

$g(x) = (x-a)^{k_2} f_1(x)$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim x \to a \frac{(x-a)^{k_1} f_1(x)}{(x-a)^{k_2} g_1(x)} = \lim x \to a (x-a)^{k_1-k_2} * \lim x \to a \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Результат выражения выше равен 0 при $k_1 > k_2$, A при $k_1 = k_2$ и inf иначе.

1.2.2 Неопределенность вида $\frac{\inf}{\inf}$

В числителе и знаменателе многочлены, пределы которых стремятся к inf.

Если $a = \inf$, тогда предел будет $\lim\limits_{x \to \inf} \frac{a_x x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ равен нулю при $m < n$, $\frac{a^m}{b^n}$ при $m = n$, иначе inf

1.2.3 Неопределенность вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{\inf}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, т.к. при $x \to 0$ обе эти функции являюстя бесконечно малыми, отношение эквивалентных велчиин дает 1

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен нулю, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой величиной в окресности точки a

Две бесконечно малые величины $f(x), g(x)$ называются эквивалетнтными бесконечно-малыми величинами в окрестности точки a, если предел их отношения равен единице

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2*\sin\frac{10x}{2}*\sin\frac{-5x}{2}}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{1}{10}$$

1.2.4 Неопределенность вида $1^{\inf}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пример:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

2 Высшая математика - 12.10.2022

2.1 Непрерывность функции

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел этой функции при x, стремящемся к x_0, равный $f(x_0)$.

2.1.1 Свойства непрерывных функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные в точке x_0 функции, тогда:

1. Функция, полученная в результате сложения и вычитания двух непрерывных в данной точке функций также будет непрерывна в рассматриваемой точке x_0

2. Функция, которая стала результатом произведения двух непрерывных функций, тоже будет непрерывна в точке x_0

3. Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет непрерывна в точке x_0, если $g(x) \neq 0$

4. Для того, чтобы $g = f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$

5. Основные элементарные функции: $a^x, x^a, \log_a x, \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \arctan x, \arcsin x, ...$ непрерывны на всей области определения

6. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b находится хотя бы одна т. $x = c$, при которой $f(c) = 0$, $a < c < b$

2.1.2 Пример

$x^3 + x^2 + x - 1 = 0, x_0 = c, (a, b) = (\frac{1}{2}; 1)$
$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}, f(1) = 2$, следовательно $\exists x_0 = c, f(c) = 0, \frac{1}{2} < c < 1$

2.2 Точки разрыва функции

Опр. 2. Точка $x_0 \in R$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самого x_0, если равенство $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

То есть, либо $x_0 \notin D_f$ и значение $f(x_0)$ не определено, либо $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не существует, либо обе части равенства определены, но не равны между собой.

2.2.1 Типы точек разрыва

1. x_0 - точка разрыва 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}$, то x_0 - устранимая точка разрыва первого рода

2. x_0 - точка разрыва второго рода, если выполнено хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\inf$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}=\pm\inf$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\inf$

2.2.2 Первый пример

$f(x)=\frac{x}{\sin x}$, так как результат частного двух простых функций, то она непрерывна при $\sin x\neq 0$, то есть точками разрыва являются нули функции $\sin x$: $x=\pi k, k\in Z$

При $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $f(0)$ не существует, следовательно функция сама по себе в этой точке не непрерывна.

Рассмотрим два конечных односторонних предела, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{\sin x}=1$

Односторонние разрывы равны между собой, следовательно, $x=0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

При $x=\pi$: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0}=\inf$, $f(\pi)$ не существует

2.2.3 Второй пример

$$\begin{cases} x^2+1, x\leq 0\\ x+1, 0<x\leq 1\\ 2x-1, x>1\end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим первый случай, $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(x^2+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)=1, y(0)=1$, таким образом точка $x=0$ - точка непрерывности нашей функции, разрыва нет.

Рассмотрим второй случай, $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}(2x-1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$, таким образом точка $x=1$ - неустранимая точка разрыва первого рода.

2.2.4 Третий пример

Исследовать точки $x=3, x=1$ функции $y=4^{\frac{1}{x-1}}$

1) $x=3, \lim\limits_{x\to 3}4^{\frac{1}{x-1}}=2=y(3)$, следовательно данная точка - точка непрерывности данной функции

2) $x=1, \lim\limits_{x\to 1}4^{\frac{1}{x-1}}=\inf$, следовательно данная точка - точка разрыва второго рода.

$\lim\limits_{x\to 1-0}4^{\frac{1}{x-1}}=4^{-\inf}=\frac{1}{4^{\inf}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+0}4^{\frac{1}{x-1}}=+\inf$

3 Высшая математика - 14.10.2022

3.1 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \inf$.

Теорема 1. $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ - бесконечно малые, если α, β - бесконечно малые
Теорема 2. Произведение бесконечно малой на ограниченую функцию является бесконечно малой
Определение. Если $\alpha(x), \beta(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$, то
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0 \neq \pm \inf$, то α и β - бесконечно малые одного порядка
Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α, β - эквивалентные бесконечно малые

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то α - бесконечно малое более высокого порядка малости по сравнению с β.
Если, наоборот, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \inf$, то говорят, что β более высокого порядка малости, чем α.
Например, $\alpha = x^3 + 2x^2, \beta = 2x + 3x^2, \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\ to0} \frac{x^2(x+2)}{x(3x+2)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+2}{3x+2}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C \neq 0 \neq \pm \inf$, то β, α^k - бесконечно малые одного порядка.
Например, $\alpha = sin^3 x, \beta = x, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim(\frac{\sin x}{x})^3 = 1 \neq 0 \neq \pm \inf$, $\sin^3 x$ величина такого же порядка малости, как x^3.

3.1.1 Применение бесконечно малых к вычислению пределов

Если при $x \to x_0$ $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$, то
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \implies \exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3(4x)}{x^2+3x} = ...$
Допустим, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim(x+3) = 3$.
Допустим, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \inf$.
Посчитали без толку, теперь продолжим, $... = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(4x)^3}{x(x+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{64x^2}{x+3} = 0$.

3.1.2 Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x\ 1 - \frac{x^2}{2}$
Это все подходит к умножению или делению, но никак не к сложению или вычитанию.

3.1.3 Некоторые соображения и примеры

При $x \to \inf$ $f(x) = x^3 + 2x + 1$ больший вклад вносит x^3, при $x \to 0$ $f(x) = x^3 + x^2$ больший вклад вносит x^2

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{3}}{2x} = \frac{2}{3}$ - применение таблицы эквивалентных бесконечно малых.

$O(x)$ - бесконечно малая более высокая порядка малости.

3.2 Производные и дифференциалы функции

Тут есть рисунок, который мне тяжело воспроизвести. Поэтому его тут нет. Но на нем показаны Δx (приращение аргумента), Δf (приращение функции), касательная к функции.
$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ - дифференциал функции, $\Delta f = \mathrm{d}f + O(\Delta x)$

Производной функции называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
Производная равна пределу приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Пример. Пусть у нас $y = x^3 + 2x - 1$. Попробуем вычислить производную.
$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - 1 =$
$x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 1$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{x^3+3x^2*\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+2x+2\Delta x-1-x^2-3x+1}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2) = 3x^2 + 2$
Поздравляю, вы написали такую простыню. Вы великолепны.

Другой пример. Попробуем доказать, что производная $y'(\sin x) = \cos x$
$y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$ = вспоминайте формулы = ... =
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x}{2} = \cos x$

3.2.1 Свойства производных

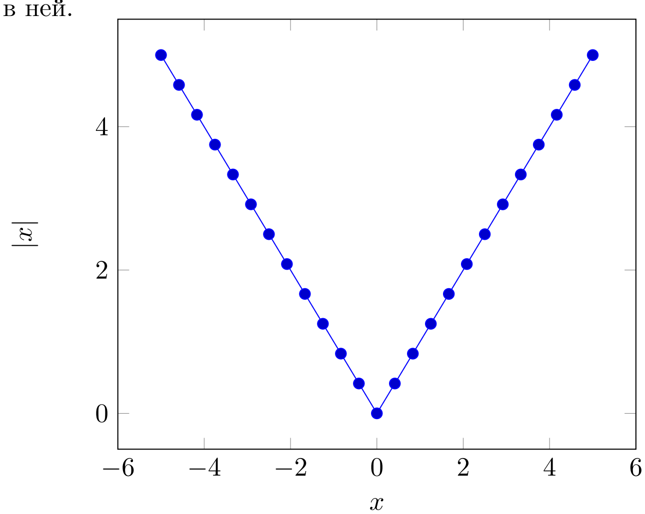
1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u * v)' = u'v + vu'$, $(u * v * w)' = u'vw + u * v'w + u * v * w'$
3. $(cu)' = cu'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

3.2.2 Дифференцируемость функций

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то функция дифференцируема в точке x_0.

Теорема. Если функций $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.
Замечание. Обратное высказывание может быть и неверным.

Пример функции непрерывной в какой-то точке, но не дифференцируемой в ней.



3.2.3 Геометрический смысл производной

Производная - это тангенс угла наклона касательной...
$\operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

3.2.4 Уравнение касательной и нормали к графику функции

Пусть у нас есть $y = kx + b$, дана какая-то точка $M_0(x_0; y_0)$

Уравнение касательной. $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали. $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

3.2.5 Производная сложной функции

Пусть функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке производную $u'_x(x)$, а функция $y = y(u)$ имеет при соответствующем значении u производную y'_u. Тогда сложная функция $y(x) = y(u(x))$ имеет проивзодную $y'_x = y'_u * u'_x$

Пример 0. Например, у нас есть $y(x) = y(g(f(x)))$, то $y'_x = y'_g * g'_f * f'_x$

Пример 1. $y = 2x^2 + 3x, y' = 4x + 3$

Пример 2. $y = \cos(2x^2 + 3x), y' = sin(2x^2 + 3x) * (4x + 3)$

Пример 3. $y = \sqrt{\cos{(2x^2 + 3x}}, y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos{2x^2+3x}}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

Пример 4. $y = \operatorname{tg}\sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}, y' = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{\cos(2x^2+3x)})} * \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x^2+3x)}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

3.2.6 Обратная функция и ее производная

Пусть у нас есть функция $y = f(x)$, $x = a, x = b$, а $y(a) = c, y(b) = d$, где $[a; b]$ - область определения, $[c; d]$ - область изменения функции.

Теорема. Если для $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \phi(y)$, у которой $\phi'(y) \neq 0$ в некоторой точке y_0, то $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$

Пример 1. $y = \arcsin x$, функция обратная к ней $x = \sin y, x' = cosy$. Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$