

Высшая математика

Лисид Лаконский

December 2022

Содержание

1	Высшая математика - 09.12.2022	2
1.1	Функции нескольких переменных	2
1.1.1	Полный дифференциал	2
1.1.2	Частные производные	2
1.1.3	Производная функции, заданной неявно	3
1.1.4	Производная сложной функции и понятие полной про- изводной	3
1.1.5	Производная по направлению	3
1.1.6	Градиент функции	4
1.1.7	Локальный экстремум функции двух переменных	4
2	Высшая математика - 13.12.2022	5
2.1	Функции нескольких переменных	5
2.1.1	Частные производные	5

1 Высшая математика - 09.12.2022

1.1 Функции нескольких переменных

Для функций нескольких переменных существуют лишь частные производные; пусть $z = z(x, y)$, то $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}$;

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}$$

Пусть $z = 2xy + xy^3$. тогда $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x+\Delta x)y + (x+\Delta x)y^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2xy + 2\Delta xy + xy^3 + \Delta xy^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} = 2y + y^3;$$

$$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2x(y+\Delta y) + x(y+\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2xy + 2x\Delta y + xy^3 + 3xy^2\Delta y + 3xy(\Delta y)^2 + x(\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} 2x + 3xy^2 + 3xy\Delta y + x(\Delta y)^2 = 2x + 3xy^2$$

1.1.1 Полный дифференциал

$du = \frac{\delta u}{\delta x} \delta x + \frac{\delta u}{\delta y} \delta y$ — полный дифференциал функции от двух переменных

Применение полного дифференциала к вычислению приближенных значений

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \delta f \approx f(x_0) + df$$

Например, нам нужно вычислить $1.04^{2.02}$, тогда составим функцию

$$z = x^y, x_0 = 1, y_0 = 2, \delta x = dx = 0.04, \delta y = dy = 0.02$$

$$z(1.04; 2.02) \approx z(1; 2) + dz = 1 + \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy = 1 + yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy =$$

$$1 + 2 * 1 * 0.04 + 1^2 \ln 1 * 0.02 = 1.08$$

1.1.2 Частные производные

Частные производные $\frac{\delta z}{\delta x}$ и $\frac{\delta z}{\delta y}$ тоже являются функциями, и поэтому от них можно брать частные производные.

Теорема 1 Если функция и ее частные производные определены и непрерывны в точке M и некоторой ее окрестности, то в этой точке выполняется условие: $\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta z}{\delta y}) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta z}{\delta x})$

Порядок взятия частных производных не имеет значения:

$$\frac{\delta^n z}{\delta x^k \delta y^{n-k}} = \frac{\delta^n z}{\delta y^{n-k} \delta x^k}$$

1.1.3 Производная функции, заданной неявно

Теорема 2 Пусть непрерывная функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, причем сама эта функция и ее первые производные — непрерывные функции в некоторой области, $F'_y \neq 0$ в интересующей нас точке, тогда $y'_x = \frac{-F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$

Например, у нас есть функция $x^2 + x \sin y = 0$ ($F(x, y) = x^2 + x \sin y$), тогда возьмем производные по x и y : $F'_x = 2xy + \sin y$, $F'_y = x^2 + x \cos y$,
 $y'_x = -\frac{2xy + \sin y}{x^2 + x \cos y}$

1.1.4 Производная сложной функции и понятие полной производной

Пусть $z = z(u; v)$, $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, и существуют непрерывные частные производные z по $u; v$, u, v по $x; y$, тогда мы можем рассматривать z как функцию от x и y : $z = z(u(x, y), v(x, y))$, но не всегда так делать целесообразно и поступать лучше следующим образом:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta x}, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta u} \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta z}{\delta v} \frac{\delta v}{\delta y}$$

Но функция может быть и от большего количества переменных: $z = z(x; y; t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, по аналогии $z = z(x(t), y(t), t)$ — есть зависимость лишь от t , можно говорить о полной производной:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta t}$$

Например, $z = u\sqrt{v} + vu^2$, $u = \sin(x + y)$, $v = \sqrt{x^2 + y}$, $\frac{\delta z}{\delta u} = \sqrt{v} = 2vu$,
 $\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2$, $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y}}$, $\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}$
 $\frac{\delta z}{\delta x} = (\sqrt{v} + 2vu) \cos(x + y) + (\frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2) * \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}$

Другой не менее славный пример: $z = te^{x-2y} + xt^2$, $x = \sin t$, $y = t^3$, мы желаем посчитать $\frac{\delta z}{\delta t}$, для этого посчитаем много различной фигни:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = te^{x-2y} + t^2, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = te^{x-2y}(-2), \quad \frac{\delta z}{\delta t} = e^{x-2y} + 2xt,$$

$$\frac{\delta z}{\delta t} = (te^{x-2y} + t^2) \cos t - 2te^{x-2y} * 3t^2 + e^{x-2y} + 2xt$$

1.1.5 Производная по направлению

Пусть D — некоторое пространство, определяющееся функцией $u = u(x; y; z)$, и т. $M(x; y; z)$, т. $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ лежат в данном пространстве, от нее отложен некоторый $\vec{S} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, при этом

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\Delta u = \frac{\delta u}{\delta x} \Delta x + \frac{\delta u}{\delta y} \Delta y + \frac{\delta u}{\delta z} \Delta z + E_1 \Delta x + E_2 \Delta y + E_3 \Delta z$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta y} \frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta z} \frac{\Delta z}{\Delta S} + \dots$$

$$\frac{\delta u}{\delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\delta u}{\delta x} \cos \alpha + \frac{\delta u}{\delta y} \cos \beta + \frac{\delta u}{\delta z} \cos \gamma$$

Пример $MM_1 = \{3; 4\} = \{\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\}$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$

Пусть $u(x; y) = x^2 + 3\sqrt{y}$, т. $M(1; 1)$, т. $M_1(4; 5)$; $M \rightarrow M_1$ в точке M , в этой точке $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x = 2$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{3}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{2}$

1.1.6 Градиент функции

В каждой точке области D , в которой задана функция $u = u(x, y, z)$, определим вектор, координатами которого являются значения частных производных, и назовем его **градиентом функции**:

$$gradu = \frac{\delta u}{\delta x} \vec{e} + \frac{\delta u}{\delta y} \vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z} \vec{k}$$

$\frac{\delta u}{\delta s} = \text{Пр}_{\vec{s}}(gradu)$ — производная по направлению в данной точке имеет наибольшее значение, если направление \vec{s} совпадает с направлением градиента функции, равное модулю этого градиента.

1.1.7 Локальный экстремум функции двух переменных

Функция $z = z(x; y)$ **имеет локальный максимум** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $z(x_0, y_0) > z(x, y)$ в окрестности точки $M(x, y) \neq M_0(x_0, y_0)$, но достаточно близких к ней.

Функция $z = z(x; y)$ **имеет локальный минимум** в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $z(x_0, y_0) < z(x, y)$ в окрестности точки $M(x, y) \neq M_0(x_0, y_0)$, но достаточно близких к ней.

Теорема 3 (необходимое условие локального экстремума) Если функция $z(= z(x; y))$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то каждая частная производная или обращается в ноль в этой точке, или не существует: $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$ (*), и такие точки называются *стационарными (точками возможного экстремума)*

Теорема 4 (достаточное условие локального экстремума) Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, выполнены условия (*), и функция $z = z(x; y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно: $A = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $B = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $C = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$,

$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, то если $\Delta > 0$ — экстремум есть ($A(C) < 0$ — максимум, $A(C) > 0$ — минимум), $\Delta < 0$ — экстремума не существует, $\Delta = 0$ — спорный случай, который стоит рассматривать отдельно

2 Высшая математика - 13.12.2022

2.1 Функции нескольких переменных

Определение 1 Если заданы два непустых множества D и G и каждому элементу M множества D по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент множества G , то говорят, что на области определения задана функция со множеством значений G

Область определения представляет собой часть координатной плоскости, ограниченной плоской кривой.

$$Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \iff Z^2 = 1 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 1$$

Определение 2 Линией уровня функции двух переменных называется линия на координатной плоскости, где функция сохраняет постоянное значение

Определение 3 Поверхностью уровня функции двух переменных называется поверхность, в точках которой функция сохраняет постоянное значение

$$f = \frac{y}{x}, \frac{y}{x} = c \iff y = cx \text{ — линия уровня плоскости.}$$

2.1.1 Частные производные

Пример 1

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}, \text{ если } z(x, y) &= \frac{x}{3y+2x^2} \text{ в т. } V(1, 0) \\ \frac{\delta z}{\delta x} &= \frac{1(3y+2x^2) - x(4x)}{(3y+2x^2)^2} = \frac{3y-2x^2}{9y^2+12x^2y+4x^4} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} &= \frac{3(9y^2+12x^2y+4x^4) - (3y-2x^2)(18y+12x^2)}{(9y^2+12x^2y+4x^4)^2} = \frac{3*4 - (-2)*12}{16} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Пример 2

$$\begin{aligned} \text{Найти } \frac{\delta x}{\delta y} \text{ для } x^2 + 2xyz - \frac{z}{x} - 2yz^2 &= 0 \text{ в т. } M(2; 0; 8) \\ \frac{\delta f}{\delta y} &= 2xz - 2z^2; \frac{\delta f}{\delta z} = 2xy - \frac{1}{x} - 4yz; \frac{\delta f}{\delta x} = 2x + 2yz - \frac{(x-z)}{x^2} \\ \frac{\delta z}{\delta y} &= \frac{-\frac{\delta f}{\delta y}}{\frac{\delta f}{\delta z}} \end{aligned}$$

Пример 3

$$\begin{aligned} \text{Найти } \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}, \text{ если } z(x, y) &= \frac{x^2}{x-2y} \text{ в т. } M(1; 0) \\ \frac{\delta z}{\delta x} &= \frac{(x^2)' * (x-2y) - x^2(x-2y)'}{(x-2y)^2} = \frac{2x * (x-2y) - x^2}{(x-2y)^2} = \frac{2x^2 - 4xy}{(x-2y)^2} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} &= \frac{(2x^2 - 4xy)' * (x-2y)^2 - (2x^2 - 4xy)((x-2y)^2)'}{(x-2y)^4} = \\ &= \frac{(-4) * (x-2y)^2 - (2x^2 - 4xy) * (x^2 - 4xy + 4y^2)'}{(x-2y)^4} = \frac{-4 - 2 * (-4)}{1} = -4 + 8 = 4 \end{aligned}$$