Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

Содержание

1 Высшая математика — 3 мая 2023 г.

1.1 Образы

Допустим, имеем $z_0 = 1 + i$, воздействуем на нее функцией $w = z^2 + i = (1+i)^2 + i = 1 + 2i + i^2 + i = 3i$
Другой пример: $z_0 = \frac{1+i}{2}$, $w = (z-i)^2 = (\frac{1+i}{2} - i)^2 = \frac{(1+i)^2}{4} - (i + i^2) + i^2 = \frac{1+2i+i^2}{4} - i = -\frac{i}{2}$
Третий пример: $z_0 = 1 - \frac{i}{2}$, $w = \frac{Im\ z}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

$z = x + 2i$
$z^2 + \overline{z}^2 = 1$
$(x+2i)^2 + (x-2i)^2 = 1 \iff (x^2 + 4xi + 4i^2) + (x^2 - 4xi + 4i^2) = 1 \iff 2x^2 + 8i^2 = 1$

$|z| - 3\ Im\ z = 6$
$\sqrt{x^2+y^2} - 3y = 6 \iff x^2 + y^2 = 36 + 36y + 9y^2 \iff x^2 - 8(y + \frac{9}{4})^2 = 36 - \frac{81}{2}$

Найти образы линий для отображения, заданного $w = z^2$

1. $x = 4$
2. $|z| = 4$
3. $arg\ z = \frac{\pi}{4}$

$w = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$$\begin{cases} x = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ \frac{v^2}{64} = 16 - u \end{cases}$$

Рассмотрим следующий случай:

$$\begin{cases} |z| = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$u^2 + v^2 = 16^2$
$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 = 16^2$

И последний случай:

$$\begin{cases} arg\ z = \frac{\pi}{3} \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$v = 2x\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$, $x^2 = \frac{v}{2\sqrt{3}}$
$u = x^2 - y^2 = x^2 - 3x^2 = -2x^2$, $x^2 = -\frac{u}{2}$

1.2 Конформные отображения, свойства аналитических функций

Пусть C — комплексная плоскость (множество всех точек комплексной плоскости), C^* — расширенная комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой
Окрестность z_0 — любой круг радиуса r, окрестность бесконечно удаленной точки — $|z| > R$
D — множество на расширенной комплексной плоскости, f — функция комплексного переменного, определенного на множестве D
Отображение $w = f(z)$ **называется конформным** в точке $z_0 \in D$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0 и обладает свойством постоянства растяжений в этой точке
Отображение конформно в бесконечно удаленной точке, если $w = \phi(z) = f(\frac{1}{z})$ конформно в $z = 0$
Свойство: **суперпозиция конформных отображений является конформным отображением**

$f(z)$ на F **однолистная**, если $z_1 \neq z_2(bF)$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$
Отображение с помощью аналитической, однолистной функции в конечной области D **является конформным** в этой области D

Свойства аналитических функций:

1. Аналитическая функция является непрерывной
2. Сумма, разность, произведение и частное аналитических функций — тоже аналитическая функция
3. Суперпозиция аналитических функций тоже является аналитической
4. Если $f'(z_0) = 0$, ϕ — обратная функция, $\phi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

1.3 Разные весёлые примеры

1. $f(z) = \frac{z+i}{i-\overline{z}} = \frac{x+iy+i}{i-x+iy} = -\frac{(x+i(y+1))(x+i(y+1))}{(x-i(y+1))(x+i(y+1))} = -\frac{x^2+2ix(y+1)+i^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(y+1)^2+x^2}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$
2. $f(z) = 2i - z + iz^2 = 2i - x - iy + i(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2i - x - iy + ix^2 - iy^2 - 2xy = (-x - 2xy) + i(x^2 - y - y^2 + 2)$
$\frac{\delta u}{\delta x} = -1 - 2y \quad \frac{\delta v}{\delta y} = -1 - 2y$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -2x \qquad \frac{\delta v}{\delta x} = 2x$
$f' = \frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x} = (-1 - 2y) + i\ 2x = -1 - 2y + 2ix$
$f = 2i - z + iz^2$, $f' = -1 + i * 2z = -1 + i(2x + 2iy) = -1 + 2ix - 2y = -1 - 2y + 2ix$
3. $f(z) = Re\ (z^2 + i) + i\ Im\ (z^2 - i) = Re\ (x^2 - y^2 + 2ixy + i) + i\ Im(x^2 - y^2 + 2ixy - i) = (x^2 - y^2) + i(2xy - 1)$
$\frac{\delta u}{\delta x} = -2x \quad \frac{\delta v}{\delta y} = 2x$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -2y \quad \frac{\delta v}{\delta x} = 2y$

1.4 Восстановление функции по ее действительной или мнимой части

Теорема 1 *Заданием действительной или мнимой части аналитическая в D функция* ***определяется с точностью до константы****.*

Определение 1 *Функция называется гармонической, если выполняется условие Лапласа* $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} = 0$
Восстановление возможно, если функция является гармонической.

Пример №1 Проверить что $u = x^3 - 3xy^2$ является гармонической функцией и, считая ее действительной частью, восстановить аналитическую функцию.

$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 6x$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$
Видим, что функция действительно **является гармонической**.

Мы знаем, что функция должна удовлетворять условию Коши-Римана
$3x^2 - 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y}$, $v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2y - \frac{3y^3}{3} + C(x)$
$\frac{\delta v}{\delta x} = 6xy$, $6xy = 6xy + \frac{\delta C}{\delta x}$, $x = const$

$f = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3 + c)$ — мы восстановили аналитическую функцию по ее действительной части.