

Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1	Высшая математика - 13.03.2023	2
1.1	Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке	2
1.1.1	Примеры	2
1.2	Нахождение точек экстремума и точек перегиба	2
1.2.1	Примеры	2

1 Высшая математика - 13.03.2023

1.1 Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, что значение $f(c) = \mu$

Если $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$ равна площади прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$

1.1.1 Примеры

Пример №1 Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке $[1; 2]$

$$\mu = \frac{1}{2-1} \int_1^2 (5x^4 - 2) dx = (x^5 - 2x) \Big|_1^2 = (32 - 4) - (1 - 2) = 29$$

1.2 Нахождение точек экстремума и точек перегиба

Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Если f непрерывна в точке x , то $\Phi'(x) = f(x) \implies \Phi''(x) = f'(x)$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = F(t) \Big|_a^x = F(x) - F(a)$$

$f'' > 0$ - вогнутая, $f'' < 0$ — выпуклая

1.2.1 Примеры

$$\textbf{Пример №1} \quad \Phi(x) = \int_1^x (t - t^3) dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$x - x^3 = \Phi'(x) \iff x - x^3 = 0 \iff x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm 1$$

Изобразим знаки $\Phi'(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Найдем точки максимума и минимума; $x_{min} = 0$, $x_{max_1} = -1$, $x_{max_2} = 1$

$$\Phi(0) = -\frac{1}{4} - \min, \quad \Phi(\pm 1) = 0 - \max$$

$$\Phi''(x) = f'(x) = 1 - 3x^2$$

$$1 - 3x^2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Изобразим знаки $\Phi''(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Определим, на каких промежутках график функции вогнут, а на каких выпукл.

$$\Phi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}, \quad \Phi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{9}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} - \text{точки перегиба}$$