Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 28.10.2022

1.1 Производная неявно заданной функции

Неявно заданная функция - это функция, заданная неявно (очень полезное определение).
Например, $y = y(x)$ - явный вид; $y^2 + xy - \sin x = 0$, $F(x, y)$ - неявный вид.

Берем производную всего выражения, при этом помним, что y является функцией от x.

1.1.1 Примеры

Пример 1.
$y^2 + xy - \sin x = 0$
$2y * y'_x + 1 * y + x * y'_x - \cos x = 0$
$2y * y' + xy' = \cos x - y$
$y'(2y + x) = \cos x - y$
$y' = \frac{\cos x - y}{2y + x}$

Пример 2.
$2y * y'_x + 1 * y + x * y'_x - \cos x = 0$
$2y' * y' + 2y * y'' + y' * y' + xy'' + \sin x = 0$
$y''(2y + x) = -(\sin x + 3y')$
$y'' = -\frac{(\sin x + 3y')}{2y + x}$

Пример 3.
$y * \operatorname{tg} x + x^3 y^2 - x^2 = 0$
$y' * \operatorname{tg} x + y * \frac{1}{\cos^2 x} + 3x^2 * y^2 + x^3 * 2y * y' - 2x = 0$
$y'(\operatorname{tg} x + 2x^3 y) = 2x - 3x^2 y^2 - \frac{y}{\cos^2 x}$
$y' = \frac{2x - 3x^2 y^2 - \frac{y}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + 2x^3 y}$

1.2 Производная параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ - производная функции, заданной параметрически
$y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} * x'_t - y'_t * x''_{tt}}{(x'_t)^3}$ - вторая производная функции, заданной параметрически

1.2.1 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \tag{2}$$

Editor note: добавить табличку с значениями t и график

Эту же функцию можно задать неявно: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Пример 2.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - t^2 \end{cases} \tag{3}$$

Выразим из уравнения t, получим: $y = 2x - \frac{x^2}{9}$ - уравнение параболы.

$x'_t = 3$, $y'_t = 6 - 2t$, $y'_x = \frac{6-2t}{3} = 2 - \frac{2t}{3} = 2 - \frac{2x}{9}$

Пример 3.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{4}$$

$y = \sqrt{1 - x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}$

1.3 Метод логарифмического дифференцирования

1.3.1 Примеры

Пример 1.
Имеем функцию $y(x) = \frac{\sqrt{x+1} * \sqrt[3]{2x+5}}{(x^2+6)^5(x-4)^6}$.
Пользуясь свойствами логарифмов, максимально упростим данную запись:

$\ln y = \ln \frac{\sqrt{} \sqrt[3]{}}{()^5()^6}$
$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(2x+5) - 5\ln(x^2+6) - 6\ln(x-4)$

Берем производную от обеих частей этого равенства, помня о том, что $\ln y$ является сложной функцией:

$\frac{1}{y} * y'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{2}{2x+5} - 5\frac{2x}{x^2+6} - 6\frac{1}{x-4}$
$y'(x) = y(...) = \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+5}}{(x^2+6)^5(x-4)^6}(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{3(2x+5)} - \frac{10x}{x^2+6} - \frac{6}{x-4})$

Пример 2.
Имеем функцию $y = x^{\operatorname{tg} x}$

$\ln y(x) = \ln x^{\operatorname{tg} x}$
$\ln y(x) = \operatorname{tg} x * \ln x$
$\frac{1}{y} * y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ln x + \operatorname{tg} x * \frac{1}{x}$
$y'(x) = y(...) = x^{\operatorname{tg} x}(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x})$

1.4 Производные и дифференциалы высших порядков

Имеем функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $[a; b]$.
Предполагаем, что ее производная не имеет никаких необычных свойств на данном отрезке: не имеет острых углов, разрывов и так далее.
В этом случае мы эту производную $y' = f'(x)$, если она дифференцируема на отрезке $[a; b]$, можем дифференцировать.

$y = e^x$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sin x$
$y' = e^x$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y' = \cos x$
$y'' = e^x$	$y'' = \frac{2}{x^3}$	$y'' = -\sin x$
$y''' = e^x$	$y''' = -\frac{2*3}{x^4}$	$y''' = -\cos x$
$y'''' = e^x$	$y'''' = \frac{2*3*4}{x^5}$	$y'''' = \sin x$
$y''''' = e^x$	$y''''' = -\frac{2*3*4*5}{x^6}$	$y''''' = \cos x$
$y^{(n)} = e^x$	$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$	$y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$

Работая с производными и дифференциалами высших порядков, следует пользоваться следующими свойствами:

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$
3. $(uv)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} = C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - формула Лейбница

1.4.1 Примеры

Пример 1.
Найти производную 10-го порядка функции $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)\sin x$

$u = \sin x$ $u' = \cos x$	$v = 3x^2 + 2x + 1$ $v' = 6x + 2$ $v'' = 6$

$$f'(x) = (\sin x)^{(10)}(3x + 2x + 1) + 10(\sin x)^{(9)}(6x + 2) + \frac{10*9}{2}(\sin x)^{(8)} * 6$$

$$u^{(8)} = \sin x,\ u^{(9)} = \cos x,\ u^{10} = (-\sin x)$$

$$f'(x) = (-\sin x)(3x + 2x + 1) + 10(\cos x)(6x + 2) + \frac{10*9}{2}(\sin x) * 6$$

1.5 Дифференциалы высших порядков

$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}^2 f = f''(x)\,\mathrm{d}x^2$ - дифференциал второго порядка
$\mathrm{d}^n f = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^{(n)}$

Если для дифференциала первого порядка можно говорить об инвариантности формы, то для дифференциалов высших порядков инвариантности формы нет, и вышеизложенные равенства верны только если x - независимая переменная.