

# Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

## Содержание

<b>1</b>	<b>Высшая математика - 03.10.2022</b>	<b>3</b>
1.1	Предел функции . . . . .	3
1.2	Виды неопределенностей . . . . .	3
1.2.1	Неопределенность типа $\frac{0}{0}$ . . . . .	3
1.2.2	Неопределенность вида $\frac{\inf}{\inf}$ . . . . .	3
1.2.3	Неопределенность вида $\frac{0}{0}, \frac{\inf}{\inf}$ . . . . .	3
1.2.4	Неопределенность вида $1^{\inf}$ . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Высшая математика - 12.10.2022</b>	<b>5</b>
2.1	Непрерывность функции . . . . .	5
2.1.1	Свойства непрерывных функций . . . . .	5
2.1.2	Пример . . . . .	5
2.2	Точки разрыва функции . . . . .	5
2.2.1	Типы точек разрыва . . . . .	6
2.2.2	Первый пример . . . . .	6
2.2.3	Второй пример . . . . .	6
2.2.4	Третий пример . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Высшая математика - 14.10.2022</b>	<b>7</b>
3.1	Бесконечно большие и бесконечно малые функции . . . . .	7
3.1.1	Применение бесконечно малых к вычислению пределов . . . . .	7
3.1.2	Таблица эквивалентных бесконечно малых . . . . .	7
3.1.3	Некоторые соображения и примеры . . . . .	8
3.2	Производные и дифференциалы функции . . . . .	8
3.2.1	Свойства производных . . . . .	8
3.2.2	Дифференцируемость функций . . . . .	9
3.2.3	Геометрический смысл производной . . . . .	9
3.2.4	Уравнение касательной и нормали к графику функции . . . . .	9
3.2.5	Производная сложной функции . . . . .	9
3.2.6	Обратная функция и ее производная . . . . .	10

<b>4</b>	<b>Высшая математика - 18.10.2022</b>	<b>11</b>
4.1	Асимптоты функции . . . . .	11
4.1.1	Вертикальные асимптоты . . . . .	11
4.1.2	Наклонные асимптоты . . . . .	11
4.1.3	Примеры . . . . .	11
4.2	Производные функции . . . . .	12
4.2.1	Свойства производных функции . . . . .	12
4.2.2	Таблица производных . . . . .	12
4.2.3	Гиперболические функции . . . . .	12
4.2.4	Уравнение гиперболы . . . . .	13
4.2.5	Показательно-степенная функция . . . . .	13
4.2.6	Примеры . . . . .	13

# 1 Высшая математика - 03.10.2022

## 1.1 Предел функции

1. Любую константу мы можем вынести за предел
2. Предел от суммы двух функций  $f(x) + g(x)$  дает в нас результате разложения сумму двух пределов
3. Предел от произведения двух функций разлагается на произведение двух пределов
4. Предел частного от двух функций ( $g(x) \neq 0$ ) равен частному двух пределов, если нет неопределенности

## 1.2 Виды неопределенностей

Неопределенности бывают следующие:  $\frac{\inf}{\inf}, \frac{0}{0}, \frac{\inf}{-\inf}, \frac{0}{\inf}, 1^{\inf}, 0^0, \inf^0$

### 1.2.1 Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Пусть  $f(x)$  and  $g(x)$  are многочлены,  $k_1, k_2 \geq 1$ .

$$f(x) = (x - a)^{k_1} f_1(x)$$

$$g(x) = (x - a)^{k_2} f_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} x \rightarrow a \frac{(x-a)^{k_1} f_1(x)}{(x-a)^{k_2} f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow a} x \rightarrow a (x-a)^{k_1-k_2} * \lim_{x \rightarrow a} a \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Результат выражения выше равен 0 при  $k_1 > k_2$ , А при  $k_1 = k_2$  и  $\inf$  иначе.

### 1.2.2 Неопределенность вида $\frac{\inf}{\inf}$

В числителе и знаменателе многочлены, пределы которых стремятся к  $\inf$ .

Если  $a = \inf$ , тогда предел будет  $\lim_{x \rightarrow \inf} \frac{a_n x^m + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0}$  равен нулю при  $m < n$ ,  $\frac{a^m}{b^n}$  при  $m = n$ , иначе  $\inf$

### 1.2.3 Неопределенность вида $\frac{0}{0}, \frac{\inf}{\inf}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , т.к. при  $x \rightarrow 0$  обе эти функции являются бесконечно малыми, отношение эквивалентных велчинн дает 1

Если предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow a$  равен нулю, то функция  $f(x)$  называется бесконечно малой величиной в окресности точки  $a$

Две бесконечно малые величины  $f(x), g(x)$  называются эквивалетнтными бесконечно-малыми величинами в окрестности точки  $a$ , если предел их отношения равен единице

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2 * \sin \frac{10x}{2} * \sin \frac{-5x}{2}} = \frac{\sin^2 x}{2 * \sin 5x * \sin 2x} = \frac{\sin^2 x}{2 * \sin 5x * \sin 2x} = \frac{1}{10}$$

#### 1.2.4 Неопределенность вида $1^{\inf}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

## 2 Высшая математика - 12.10.2022

### 2.1 Непрерывность функции

**Опр. 1.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и существует предел этой функции при  $x$ , стремящемся к  $x_0$ , равный  $f(x_0)$ .

#### 2.1.1 Свойства непрерывных функций

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  - непрерывные в точке  $x_0$  функции, тогда:

1. Функция, полученная в результате сложения и вычитания двух непрерывных в данной точке функций также будет непрерывна в рассматриваемой точке  $x_0$
2. Функция, которая стала результатом произведения двух непрерывных функций, тоже будет непрерывна в точке  $x_0$
3. Функция  $\frac{f(x)}{g(x)}$  будет непрерывна в точке  $x_0$ , если  $g(x) \neq 0$
4. Для того, чтобы  $g = f(x)$  была непрерывна в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ ,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
5. Основные элементарные функции:  $a^x$ ,  $x^a$ ,  $\log_a x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\arctan x$ ,  $\arcsin x$ , ... непрерывны на всей области определения
6. Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ , и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками  $a$  и  $b$  находится хотя бы одна т.  $x = c$ , при которой  $f(c) = 0$ ,  $a < c < b$

#### 2.1.2 Пример

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0, x_0 = c, (a, b) = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, f(1) = 2, \text{ следовательно } \exists x_0 = c, f(c) = 0, \frac{1}{2} < c < 1$$

### 2.2 Точки разрыва функции

**Опр. 2.** Точка  $x_0 \in R$  называется точкой разрыва функции  $f(x)$ , определенной в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, может быть, самого  $x_0$ , если равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

То есть, либо  $x_0 \notin D_f$  и значение  $f(x_0)$  не определено, либо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не существует, либо обе части равенства определены, но не равны между собой.

### 2.2.1 Типы точек разрыва

1.  $x_0$  - точка разрыва 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ,  $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ , то  $x_0$  - устранимая точка разрыва первого рода

2.  $x_0$  - точка разрыва второго рода, если выполнено хотя бы одно из условий:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \inf$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \pm \inf$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \pm \inf$

### 2.2.2 Первый пример

$f(x) = \frac{x}{\sin x}$ , так как результат частного двух простых функций, то она непрерывна при  $\sin x \neq 0$ , то есть точками разрыва являются нули функции  $\sin x$ :  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

При  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ,  $f(0)$  не существует, следовательно функция сама по себе в этой точке не непрерывна.

Рассмотрим два конечных односторонних предела,  $\lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

Односторонние разрывы равны между собой, следовательно,  $x = 0$  - устранимая точка разрыва первого рода.

При  $x = \pi$ :  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi}{0} = \pm \infty$ ,  $f(\pi)$  не существует

### 2.2.3 Второй пример

$$\begin{cases} x^2 + 1, x \leq 0 \\ x + 1, 0 < x \leq 1 \\ 2x - 1, x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим первый случай,  $x = 0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0 - 0} (x^2 + 1) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0 + 0} (x + 1) = 1$ ,  $y(0) = 1$ , таким образом точка  $x = 0$  - точка непрерывности нашей функции, разрыва нет.

Рассмотрим второй случай,  $x = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1 - 0} (2x - 1) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1 + 0} (x + 1) = 2$ , таким образом точка  $x = 1$  - неустранимая точка разрыва первого рода.

### 2.2.4 Третий пример

Исследовать точки  $x = 3, x = 1$  функции  $y = 4^{\frac{1}{x-1}}$

1)  $x = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} 4^{\frac{1}{x-1}} = 2 = y(3)$ , следовательно данная точка - точка непрерывности данной функции

2)  $x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} 4^{\frac{1}{x-1}} = \pm \infty$ , следовательно данная точка - точка разрыва второго рода.

$$\lim_{x \rightarrow 1 - 0} 4^{\frac{1}{x-1}} = 4^{-\infty} = \frac{1}{4^{\infty}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1 + 0} 4^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

## 3 Высшая математика - 14.10.2022

### 3.1 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Функция называется бесконечно малой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Функция называется бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf$ .

**Теорема 1.**  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  - бесконечно малые, если  $\alpha, \beta$  - бесконечно малые

**Теорема 2.** Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой

**Определение.** Если  $\alpha(x), \beta(x)$  бесконечно малы при  $x \rightarrow x_0$ , то

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0 \neq \pm \inf$ , то  $\alpha$  и  $\beta$  - бесконечно малые одного порядка

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то  $\alpha, \beta$  - эквивалентные бесконечно малые

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то  $\alpha$  - бесконечно малое более высокого порядка малости по сравнению с  $\beta$ .

Если, наоборот,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \inf$ , то говорят, что  $\beta$  более высокого порядка малости, чем  $\alpha$ .

Например,  $\alpha = x^3 + 2x^2, \beta = 2x + 3x^2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x+2)}{x(3x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{3x+2}$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C \neq 0 \neq \pm \inf$ , то  $\beta, \alpha^k$  - бесконечно малые одного порядка.

Например,  $\alpha = \sin^3 x, \beta = x, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = 1 \neq 0 \neq \pm \inf, \sin^3 x$  величина такого же порядка малости, как  $x^3$ .

#### 3.1.1 Применение бесконечно малых к вычислению пределов

Если при  $x \rightarrow x_0$   $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$ , то

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Например,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(4x)}{x^2 + 3x} = \dots$

Допустим,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$ .

Допустим,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x} = \inf$ .

Посчитали без толку, теперь продолжим,  $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4x)^3}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{64x^2}{x+3} = 0$ .

#### 3.1.2 Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$

Это все подходит к умножению или делению, но никак не к сложению или вычитанию.

### 3.1.3 Некоторые соображения и примеры

При  $x \rightarrow \inf$   $f(x) = x^3 + 2x + 1$  больший вклад вносит  $x^3$ , при  $x \rightarrow 0$   $f(x) = x^3 + x^2$  больший вклад вносит  $x^2$

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4x}{3}}{2x} = \frac{2}{3}$  - применение таблицы эквивалентных бесконечно малых.

$O(x)$  - бесконечно малая более высокая порядка малости.

## 3.2 Производные и дифференциалы функции

Тут есть рисунок, который мне тяжело воспроизвести. Поэтому его тут нет. Но на нем показаны  $\Delta x$  (приращение аргумента),  $\Delta f$  (приращение функции), касательная к функции.

$df = f'(x) dx$  - дифференциал функции,  $\Delta f = df + O(\Delta x)$

Производной функции называется  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ .

Производная равна пределу приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

**Пример.** Пусть у нас  $y = x^3 + 2x - 1$ . Попробуем вычислить производную.

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - 1 =$$

$$x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 1$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 1 - x^3 - 2x + 1}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2) = 3x^2 + 2$$

Поздравляю, вы написали такую простыню. Вы великолепны.

**Другой пример.** Попробуем доказать, что производная  $y'(\sin x) = \cos x$

$$y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$$

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \text{вспоминайте формулы} = \dots =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+\Delta x-x}{2} \cos \frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

### 3.2.1 Свойства производных

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2.  $(u * v)' = u'v + vu'$ ,  $(u * v * w)' = u'vw + u * v'w + u * v * w'$
3.  $(cu)' = cu'$
4.  $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$



### 3.2.2 Дифференцируемость функций

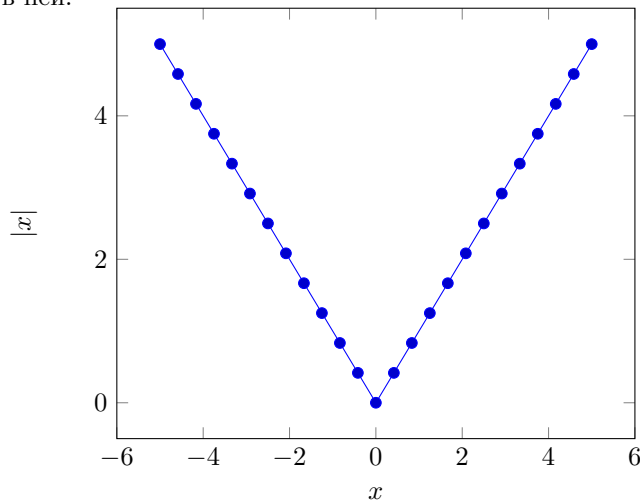
Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , то есть

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , то функция дифференцируема в точке  $x_0$ .

**Теорема.** Если функций  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то она в этой точке непрерывна.

**Замечание.** Обратное высказывание может быть и неверным.

Пример функции непрерывной в какой-то точке, но не дифференцируемой в ней.



### 3.2.3 Геометрический смысл производной

Производная - это тангенс угла наклона касательной...

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

### 3.2.4 Уравнение касательной и нормали к графику функции

Пусть у нас есть  $y = kx + b$ , дана какая-то точка  $M_0(x_0; y_0)$

**Уравнение касательной.**  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

**Уравнение нормали.**  $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

### 3.2.5 Производная сложной функции

Пусть функция  $u = u(x)$  имеет в некоторой точке производную  $u'_x(x)$ , а функция  $y = y(u)$  имеет при соответствующем значении  $u$  производную  $y'_u$ . Тогда сложная функция  $y(x) = y(u(x))$  имеет производную  $y'_x = y'_u * u'_x$

**Пример 0.** Например, у нас есть  $y(x) = y(g(f(x)))$ , то  $y'_x = y'_g * g'_f * f'_x$

**Пример 1.**  $y = 2x^2 + 3x, y' = 4x + 3$

**Пример 2.**  $y = \cos(2x^2 + 3x), y' = \sin(2x^2 + 3x) * (4x + 3)$

**Пример 3.**  $y = \sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}, y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

**Пример 4.**  $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}, y' = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{\cos(2x^2 + 3x)})} * \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

### 3.2.6 Обратная функция и ее производная

Пусть у нас есть функция  $y = f(x)$ ,  $x = a, x = b$ , а  $y(a) = c, y(b) = d$ , где  $[a; b]$  - область определения,  $[c; d]$  - область изменения функции.

**Теорема.** Если для  $y = f(x)$  существует обратная функция  $x = \phi(y)$ , у которой  $\phi'(y) \neq 0$  в некоторой точке  $y_0$ , то  $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$

**Пример 1.**  $y = \arcsin x$ , функция обратная к ней  $x = \sin y, x' = \cos y$ .  
Таким образом,  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

## 4 Высшая математика - 18.10.2022

### 4.1 Асимптоты функции

Асимптоты функции могут быть:

- Вертикальные
- Наклонные (в том числе горизонтальные)

#### 4.1.1 Вертикальные асимптоты

Если функция  $f(x)$  имеет точку разрыва, в которой хотя бы один односторонний предел бесконечен, то вертикальная прямая, параллельная оси ординат, проходящая через эту точку, называется **вертикальной асимптотой**.

Вертикальных асимптот у функции может быть бесконечное множество.

Например,  $f(x) = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

#### 4.1.2 Наклонные асимптоты

Если следующие пределы:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$  существуют и конечны, то прямая, заданная уравнением  $y = kx + b$  является наклонной асимптотой функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Если  $k = 0$ , то асимптота называется горизонтальной.

Наклонных асимптот у функции может быть только две.

#### 4.1.3 Примеры

**Пример 1.** Найти асимптоты функции  $f(x) = \frac{x}{1+e^{-x}}$ .

Найдем вертикальные асимптоты данной функции. Для начала найдем точки разрыва.

Данная функция **непрерывна**, так как знаменатель не может быть равен нулю.

Следовательно, вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты: посчитаем пределы.

$$k_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 1, k_- = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 0$$
$$b_+ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+e^{-x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x - xe^{-x}}{1+e^{-x}} = 0, b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{1+e^x} \right) = 0$$

При  $x \rightarrow +\infty, y = x$  - наклонная асимптота.

При  $x \rightarrow -\infty, y = 0$  - горизонтальная асимптота.

## 4.2 Производные функции

**Определение.** Если для  $f(x)$  существует предел

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ , то он называется производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ , и обозначается  $y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}$ ;  $f(x) = \frac{dy}{dx}$ .

### 4.2.1 Свойства производных функции

Принятые обозначения:  $c$  - константа,  $u, v$  - функции.

1.  $(c)' = 0$
2.  $(cu)' = c * u'$
3.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4.  $(u * v)' = u'v + uv'$
5.  $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6. Если  $y = f(u)$ ,  $u = \phi(x)$ , то  $(f(\phi(x)))' = f'(u) * u'$ .  
Пример:  $\cos 3x = -\sin 3x * 3 = -3 \sin x$   
Еще один пример:  $\operatorname{tg}^{2x} e^x = 2 \operatorname{tg} e^x * \frac{1}{\cos^2 e^x} * e^x$

### 4.2.2 Таблица производных

1.  $(u^a)' = a * u^{a-1} * u', a \in R$   
 $(\frac{1}{u})' = (u^{-1})' = -1 * \frac{1}{u^2} * u'$   
 $(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} * u'$
2.  $(a^u)' = a^u * \ln a * u'$   
 $(e^u)' = e^u * u'$
3.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \log_a e * u' = \frac{1}{u \ln a} * u'$   
 $(\ln u)' = \frac{1}{u} * u', (\ln |u|)' = \frac{1}{u} * u'$
4.  $(\cos u)' = -\sin u$
5.  $(\sin u)' = \cos u$
6.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} * u'$
7.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} * u'$
8.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
9.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
10.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} * u'$
11.  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} * u'$
12.  $(\sinh u)' = \cosh u$
13.  $(\cosh u)' = \sinh u$
14.  $(\tanh u)' = \frac{1}{\cosh^2 u} * u'$
15.  $(\coth u)' = -\frac{1}{\sinh^2 u} * u'$

### 4.2.3 Гиперболические функции

1.  $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
2.  $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$
3.  $\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$
4.  $\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}$

#### 4.2.4 Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\begin{cases} x = a \coth t \\ y = b \cosh t \end{cases} \quad (2)$$

#### 4.2.5 Показательно-степенная функция

Производную показательно-степенной функции можно найти следующим образом:

$$(u^v)' = v * u^{v-1} * u' + u^v \ln u * v'$$

#### 4.2.6 Примеры

**Пример 1.**  $y = \operatorname{tg} 3x + 5x^2$ ,  $y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + 10x$

**Пример 2.**  $y = \cos(3x^2 + x)$ ,  $y' = -\sin(3x^2 + x) * (6x + 1)$

**Пример 3.**  $y = x^3 * \cos x$ ,  $y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

**Пример 4.**  $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ ,  $y' = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

**Пример 5.**  $y = \ln(2x^2 + x - 1)$ ,  $y' = \frac{1}{2x^2+x-1} * (4x + 1)$

**Пример 6.**  $y = \operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2})$ ,  $y' = 2 \operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2}) * \frac{1}{\cos^2(x+e^{-x^2})} * (1 + e^{-x^2})$

**Пример 7.**  $y = (\cos x)^{x^2}$ ,  
 $y' = x^2(\cos x)^{x^2-1} * (-\sin x) + (\cos x)^{x^2} * \ln(\cos x) * 2x$

**Пример 8.**  $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$ ,  $y' = 2 * \frac{1}{3} * x^{\frac{1}{3}-1} * x^{-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$

**Пример 9.**  $y = (x^2 + 5x + 7)^8$ ,  $y' = 8(x^2 + 5x + 7)^7 * (2x + 5)$