Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 18.10.2022

1.1 Асимптоты функции

Асимптоты функции могут быть:

- Вертикальные
- Наклонные (в том числе горизонтальные)

1.1.1 Вертикальные асимптоты

Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва, в которой хотя бы один односторонний предел бесконечен, то вертикальная прямая, параллельная оси ординат, проходящая через эту точку, называется **вертикальной асимптотой**.

Вертикальных асимптот у функции может быть бесконечное множество.

Например, $f(x) = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

1.1.2 Наклонные асимптоты

Если следующие пределы: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$ существуют и конечны, то прямая, заданная уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Если $k = 0$, то асимптота называется горизонтальной.

Наклонных асимптот у функции может быть только две.

1.1.3 Примеры

Пример 1. Найти асимптоты функции $f(x) = \frac{x}{1+e^{-x}}$.

Найдем вертикальные асимптоты данной функции. Для начала найдем точки разрыва.
Данная функция **непрерывна**, так как знаменатель не может быть равен нулю.
Следовательно, вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты: посчитаем пределы.
$k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 1, k_- = \lim\limits_{k \to -\inf} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 0$
$b_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x}{1+e^{-x}} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - x - xe^{-x}}{1+e^{-x}} = 0, b_- = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x}{1+e^{x}}) = 0$

При $x \to +\infty, y = x$ - наклонная асимптота.
При $x \to -\infty, y = 0$ - горизонтальная асимптота.

1.2 Производные функции

Определение. Если для $f(x)$ существует предел
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x, и обозначается $y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}; f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

1.2.1 Свойства производных функции

Принятые обозначения: c - константа, u, v - функции.

1. $(c)' = 0$
2. $(cu)' = c * u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u * v)' = u'v + uv'$
5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6. Если $y = f(u), u = \phi(x)$, то $(f(\phi(x)))' = f'(u) * u'$.
   Пример: $\cos 3x = -\sin 3x * 3 = -3 \sin x$
   Еще один пример: $\operatorname{tg}^{2x} e^x = 2 \operatorname{tg} e^x * \frac{1}{\cos^2 e^x} * e^x$

1.2.2 Таблица производных

1. $(u^a)' = a * u^{a-1} * u', a \in R$
   $(\frac{1}{u}) = (u^{-1})' = -1 * \frac{1}{u^2} * u'$
   $(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} * u'$
2. $(a^u) = a^u * \ln a * u'$
   $(e^u)' = e^u * u'$
3. $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \log_a e * u' = \frac{1}{u \ln a} * u'$
   $(\ln u)' = \frac{1}{u} * u', (\ln |u|)' = \frac{1}{u} * u'$
4. $(\cos u)' = \sin x$
5. $(\sin u)' = -\cos x$
6. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} * u'$
7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} * u'$
8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} * u'$
11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} * u'$
12. $(\sinh u)' = \cosh u * u'$
13. $(\cosh u)' = \sinh u * u'$
14. $(\tanh u)' = \frac{1}{\cosh^2 u} * u'$
15. $(\coth u)' = -\frac{1}{\sinh^2 u} * u'$

1.2.3 Гиперболические функции

1. $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
2. $\sinh u = \frac{e^u - u^{-u}}{2}$
3. $\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$
4. $\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}$

1.2.4 Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \coth t \\ y = b \cosh t \end{cases} \tag{1}$$

1.2.5 Показательно-степенная функция

Производную показательно-степенной функции можно найти следующим образом:
$(u^v)' = v * u^{v-1} * u' + u^v \ln u * v'$

1.2.6 Примеры

Пример 1. $y = \operatorname{tg} 3x + 5x^2$, $y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + 10x$

Пример 2. $y = \cos(3x^2 + x)$, $y' = -\sin(3x^2 + x) * (6x + 1)$

Пример 3. $y = x^3 * \cos x$, $y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Пример 4. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $y' = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

Пример 5. $y = \ln(2x^2 + x - 1)$, $y' = \frac{1}{2x^2+x-1} * (4x + 1)$

Пример 6. $y = \operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2})$, $y' = 2\operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2}) * \frac{1}{\cos^2(x+e^{-x^2}} * (1 + e^{-x^2})$

Пример 7. $y = (\cos x)^{x^2}$,
$y' = x^2(\cos x)^{x^2-1} * (-\sin x) + (\cos x)^{x^2} * \ln(\cos x) * 2x$

Пример 8. $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$, $y' = 2 * \frac{1}{3} * x^{\frac{1}{3}-1} * x^{-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$

Пример 9. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$, $y' = 8(x^2 + 5x + 7)^7 * (2x + 5)$