Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

$\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$, так как $\mathrm{d}(x^2+1) = 2x\,\mathrm{d}x$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5)\,\mathrm{d}x)}{x^2+5x+11} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln|x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos\mathrm{d}x$

0.0.1 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x)\,\mathrm{d}x$, можем выполнить замену: $\begin{vmatrix} x = \phi(t) \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$
Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, тогда
$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\dots = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \dots$
Выполним **обратную замену**: $\dots = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, так как $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$,
$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+(x^2)^2} = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2 + C$
Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2 + C$,
так как $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$

Третий пример $\int e^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sin x = t \Longleftrightarrow x = \arcsin t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{vmatrix} = \int e^t * \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\sin x} + C$

1 Высшая математика - 08.02.2023

1.1 Метод интегрирования по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то
за u выбирают многочлен, dv — все, что осталось
Пример $\int (3x+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C$
$du = 3dx$, $v = \int \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x$
Другой пример $\int (3x^2+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x^2+1)}{5}\sin 5x + \frac{6}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то
за u выбирают функцию, а dv — все остальное
Пример $\int (3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \int (\frac{x^2}{3}+5x)\frac{\mathrm{d}x}{1} = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
$lnx = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v = (x^2+5)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = \int (x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то
не имеет значения, что выбрать за u, а что за dv, но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно
Пример $\int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x = \sin 5x * e^x - 5\int \cos 5x * e^x\,\mathrm{d}x = \dots$
Пусть $u = \sin 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 5\cos 5x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -5\sin 5x\,\mathrm{d}x$,
$v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
$\dots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5x e^x + 5\int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x)$
$y = (\sin 5x - 5\cos 5x)e^x - 25y \Longleftrightarrow 26y = (\dots)e^x \Longleftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5\cos 5x)e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x$

Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \dots$, пусть
$u = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{1(-2x)\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = \mathrm{d}x \Longrightarrow v = x$
$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, тогда
$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Longleftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}$

1.2 Рекуррентные формулы

1.2.1 Рекуррентная формула №1

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \dots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Longrightarrow \mathrm{d}u = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}x$, а $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Longrightarrow x = v$
$\dots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $y_{n+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$,
$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2y_{n+1} \Longleftrightarrow 2na^2y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}y_n$ — **рекуррентная формула**

Например, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

1.2.2 Рекуррентная формула №2

$y_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\mathrm{d}x$
$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}y_{n-2,2-m}$

1.2.3 Рекуррентная формула №3

$y_n = \int (a^2 - x^2)^n \, \mathrm{d}x$
$y_n = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} y_{n-1}$

1.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$

1.3.1 Пример №1

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$

1.3.2 Пример №2

$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|$, так как $(2x+3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2+3x+5) + C$

1.3.3 Пример №3

$\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{\mathrm{d}x+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C$

1.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a+ib$, $a-ib$
$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - x(a+ib) - x(a-ib) + (a^2-(ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = (x^2+px+q)$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей
Виды элементарных дробей:

1. $\frac{1}{x-a}$
2. $\frac{1}{(x-a)^n}$
3. $\frac{1}{x^2+px+1}$
4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$

Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей:

1. Если знаменатель имеет только действительные различные корни
   То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (**метод неопределенных коэффициентов**)
   Собираем коэффициенты при x: A + B = 2, при свободных членах: $5A - 4B = -3$, **решаем данную систему любым угодным нам способом**, получается $A = \frac{5}{9}$, а $B = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$
   $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} \, \mathrm{d}x = \frac{5}{9} \int \frac{\mathrm{d}x}{x-4} + \frac{13}{9} \int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \frac{5}{9} \ln|x-4| + \frac{13}{9} \ln|x+5|$
2. Если знаменатель имеет действительные кратные корни
   То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$
3. Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
   То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
   $\int \frac{Ax+B}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = A \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + B \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \dots$
4. Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
   То. например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$