

Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1	Высшая математика - 13.02.2023	2
1.1	Интегрирование по частям	2
1.2	Интегрирование многочленов	2
1.3	Задания	2
1.3.1	Задание №1	2
1.3.2	Задание №2	2
1.3.3	Задание №3	2
1.3.4	Задание №4	2
1.3.5	Задание №5	2
1.3.6	Задание №6	2
1.3.7	Задание №7	2
1.3.8	Задание №8	3

1 Высшая математика - 13.02.2023

1.1 Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Допустим, имеем $\int x e^{-3x} dx$, представим за u ту функцию, от которой проще взять производную; $u = x$, $dv = e^{-3x} dx$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-3x} dx \\ 1 * du = 1 * dx & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{array} \right| = -\frac{x e^{-3x}}{3} = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{1}{3} * \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + C = -\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{9} + C$$

1.2 Интегрирование многочленов

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{4x^2-6x+10} dx &= \int \frac{\frac{5}{8}(8x-6)+\frac{43}{4}}{4x^2-6x+10} dx = \frac{5}{8} \int \frac{8x-6}{4x^2-6x+10} dx + \frac{43}{4} \int \frac{dx}{4x^2-6x+10} \\ (4x^2-6x+10) &= 4(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}) = \frac{43}{16} \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \dots \text{ (табличное значение,} \\ &\text{тривиально посчитать дальше)} \end{aligned}$$

1.3 Задания

1.3.1 Задание №1

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x * \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

1.3.2 Задание №2

$$\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}$$

1.3.3 Задание №3

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x-3)-2}{(x-3)+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$$

1.3.4 Задание №4

$$\begin{aligned} \text{Один вариант} \quad \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ \frac{3}{2} \ln |\sqrt{t}| + C_1 + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C_2 &= \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2-x+1}| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-3x^2}} dx =$$

$$\text{Еще другой вариант} \quad \int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \int \frac{2x+6}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}} dx =$$

1.3.5 Задание №5

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{\frac{x}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2x dx = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4 \int e^{\frac{x}{2}} * x dx = \left| \begin{array}{l} x = u \\ e^{\frac{1}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = dx \\ v = 2e^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = \\ x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4(2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} dx) &= x^2 2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 15e^{\frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

1.3.6 Задание №6

$$\text{Один вариант} \quad \int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int e^{-2x} \sin x dx$$

1.3.7 Задание №7

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1-x) & du = -\frac{1}{1-x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = \ln(1-x) * x + \int x * \left(-\frac{1}{1-x}\right) dx = x \ln(1-x) - \int \frac{-x}{1-x} dx = \\ x \ln(1-x) - \int \frac{1-x+1}{1-x} dx &= x \ln(1-x) - \int \frac{1-x}{1-x} * x + \int \frac{dx}{-1+x} = x \ln(1-x) - x + \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

1.3.8 Задание №8

$$\int x \sin^2 4x \, dx$$