Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 22.03.2023

1.1 Эталонные ряды

1. $\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ — ряд сходится, $p \leq 1$ — ряд расходится
2. $\sum \frac{1}{ne_n^p n}$ — аналогично

1.2 Исследование рядов на сходимость

Пример №1 $\sum \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \sim \sum \frac{1}{n^2}$, так как $\sin \alpha \sim \alpha$

Проверим: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \sin \frac{1}{n}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \neq \pm\infty$

Пример №2 $\sum \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^12+n}+\sqrt{n^3}} = \sum \frac{n^{1/2}}{n^{12/5}} = \sum \frac{1}{n^{19/10}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^12+n}+\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{n^{19/10}}} = \dots$

1.3 Очередные признаки сходимости

Теорема 1 (Признак Д'Аламбера) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C$

Если $C > 1$ — ряд расходится, $C < 1$ — ряд сходится, если $C = 1$ — признак неприменим

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}$, $a_n = \frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)3^{2n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2(n+2)3^{2n+1}}}{\frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{2n-1}2(n+1)}{2(n+2)3^{2n+1}n} = \lim n \to \infty \frac{3^{2n-1}}{3^{2n-1} * 3^2} = \frac{1}{9} \leq 1$ — ряд является сходящимся

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-5}$, $a_n = \frac{n}{3n^2-5}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3(n+1)^2-5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3(n+1)^2-5}}{\frac{n}{3n^2-5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n^2-5)}{(3n^2+6n-2)n} - 1$ — данный признак неприменим, применяем признак сравнения

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-5} \sim \sum \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3n^2-5}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$ — данные ряды ведут себя одинаково, так как один расходящийся — другой тоже расходящийся.

Теорема 2 (Признак Коши (радикальный)) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$

Если $C > 1$ — ряд расходится, $C < 1$ — ряд сходится, если $C = 1$ — признак неприменим

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$

$\lim n \to \infty \sqrt[n]{\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{3} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} \leq 1$ — ряд сходится

Теорема 3 (Интегральный признак Коши) *Пусть для знакоположительного ряда выполняется условие* $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$

Можно ввести такую $f(x)$, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, ...

Тогда, если существует $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и он сходится, то будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_1^{\beta} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^{\beta} = -\lim\limits_{\beta\to\infty} (\frac{1}{\beta} - 1) = 1$

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{\beta\to\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim\limits_{\beta\to\infty}\ln|x|\Big|_1^{\beta}=\lim\limits_{\beta\to\infty}(\ln\beta-\ln 1)$ — расходится, ряд является расходящимся

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\to\int\limits_1^{\infty}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\beta\to\infty}\int\limits_1^{\beta}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\beta\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_1^{\beta}=\lim\limits_{\beta\to\infty}(2\sqrt{\beta}-2)$ — расходится

1.3.1 Замечания о применении признаков сходимости

1. При исследовании рядов, общий член которых представляет собой логарифмическую функцию, мы можем пользоваться следующим знанием:

   Если $p\in R$, $q>0$, то $\exists n_0\in N$, $n\geq n_0\implies \ln^p n<n^q$

2. $n!$

   $n\geq 4$, $2^n<n!<n^n$, $n\ln 2<\ln(n!)<n\ln n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

4. **Формула Стирлинга**

   $n!\sim(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$

   $\sum\frac{n!e^n}{n^{n+p}}=\sum\limits_{n}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}n^{1/2}}{n^p}=\sum\frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}}$, $p-\frac{1}{2}>1$, $p>\frac{3}{2}$

5. Если α ($\alpha\to 0$) — малый угол, то $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\arcsin\alpha$, $\arccos\alpha\to\alpha$

1.4 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-\ldots$ — **знакочередующийся ряд**, сами $u_1,u_2,u_3\dots>0$

Теорема 4 (Теорема Лейбница) *Если в знакочередующемся ряде выполнены условия $u_1>u_2>u_3>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то знакочередующийся ряд является сходящимся, его сумма положительна и не превосходит u_1*
Доказательство: найдем частичную сумму четного числа элементов, $S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\dots+(u_{2m-1}-u_{2m})$, $S_{2m}>0$
$S_{2m}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\dots-u_{2m}$, $0<S_{2m}<u_1$
$S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$, $\lim S_{2m+1}=\lim S_{2m}+0$, S_{2m+1} *также удовлетворяет всем условиям*
Так что $0<S<u_1$

***Замечание**. Теорема работает, даже если данные неравенства выполнены не с первого, а с некоторого члена.*

Пример №1 $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots\frac{(-1)^n}{n^2}\ldots$, $1>\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{16}$
$\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}=\frac{(n+1-n)(n+1+n)}{n^2(n+1)^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}>0$
Следовательно, первое условие теоремы выполняется. Второе условие тоже выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$
Следовательно, ряд сходится

Пример №2 $\sum\frac{(-1)^n}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$
Такой ряд тоже сходится

Пример №3 $\sum\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{n}$, $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$, $f'(x)=\frac{2\ln x*\frac{1}{x}*x-\ln^2 x*1}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$
Исследуем поведение данной производной, $\ln x>2$, $x>e^2$
Будем рассматривать $u_8>u_9>u_{10}\ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=\lim\frac{2\ln n*\frac{1}{n}}{1}=2\lim\frac{(\ln n)'}{(n)'}=2\lim\frac{1}{n}=0$
Все условия признака выполнены, следовательно ряд является сходящимся

1.4.1 Куча признаков и определений

Определение 1 *Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из модулей*

Теорема 5 *Абсолютно сходящийся ряд является сходящимся*

Теорема 6 *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ являются абсолютно сходящимися, то для любых чисел α и β ряд $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ тоже является абсолютно сходящимся*

Определение 2 *Если ряд сходится абсолютно, он останется сходящимся при любой перестановке его членов, и сумма ряда не зависит от порядка этих самых членов*
Замечание. *Для сходимости по Лейбницу это может и не выполняться*

Теорема 7 (Признак Дирихле) *Пусть для $\sum a_m * b_n$ последовательность $a_n \geq a_{n+1}$ монотонно стремится к нулю и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, а последовательность частичных сумм для b_n ограничена, то есть $\exists M > 0 \forall n \in N$*
$|B_n| = |\sum\limits_{i=1}^{n} b_i| \leq M$

Теорема 8 (Признак Абеля) $\sum a_m * b_n$

1. *Последовательность a_m — монотонна и ограничена*
2. *$\sum b_n$ — сходящийся*

Тогда $\sum a_n b_n$ — сходящийся

Если знакопеременный ряд сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят об **условной сходимости**

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$
Проверим на абсолютную сходимость, исследуем $\sum \frac{n^3}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1}n^3} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится абсолютно

Пример №2 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ — нет надежды на абсолютную сходимость, так как $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ — расходящийся
Сходимость будет, но лишь условная. Абсолютной сходимости нет