Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Высшая математика - 12 апреля 2023 г.

1.1 Примеры решения знакоположительных числовых рядов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \neq 0$, то ряд точно является расходящимся
Иначе проверяем достаточные признаки:

1. Первый признак сравнения
2. Второй признак сравнения
3. Признак Д'Аламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Пример №1 $\sum \frac{2n+1}{n+1}$ — не выполняется необходимый признак, следовательно, расходится

Пример №2 $\sum \sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sim \sum \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$
Проверим: $\lim \frac{\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{2\sqrt{n}}} = 1$ — следовательно, ряды ведут себя одинаково
$\sum \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ – расходится, так как $\frac{1}{2} < 1$

Пример №3 $\sum \frac{n^3}{3^n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{3*n^3} = \frac{1}{3} < 1$ — ряд сходящийся

Пример №4 $\sum \frac{2^n}{n^2+n} \sim \sum \frac{2^n}{n^2}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n*2}{(n+1)^2} * \frac{n^2}{2^n} = 2 > 1$ — расходящийся

Пример №5 $\sum 2^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}(\frac{n+1}{n})^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}(2^{-1} * (\frac{n+1}{n})^n) = \frac{1}{2}\lim(1+\frac{1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1$ — расходящийся

Пример №6 $\sum(\frac{n}{n+1})^{n^2}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n}{n+1})^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{e} < 1$ — ряд сходится

Пример №7 $\sum \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}$
$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_1^B \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_1^B \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}(\frac{1}{x}) = \lim\limits_{B\to\infty}\cos\frac{1}{x}\Big|_1^B = \lim\limits_{B\to\infty}(\cos\frac{1}{B} - \cos 1) = 1 - \cos 1$ — интеграл сходится, следовательно, ряд тоже сходится

Пример №8 $\sum ne^{-\frac{n^2}{2}}$
$\int\limits_1^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_1^B xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \dots$
$d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = e^{-\frac{x^2}{2}} * (-x)$
$\dots = -\lim\limits_{B\to\infty}\int\limits_1^B d(e^{-x^2/2}) = -\lim\limits_{B\to\infty} e^{-x^2/2}\Big|_1^B = \frac{1}{\sqrt{e}}$ — сходящийся ряд

1.2 Примеры решения знакочередующихся (знакопеременных) числовых рядов

Если сходится $\sum |a_n|$, то ряд из $\sum a_n$ **сходится абсолютно**
Признак Лейбница

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

2. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1}$

Пример №9 $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}$
$\sum \frac{n}{2^n}$, проверим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2*n} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится абсолютно

Пример №10 $\sum(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n^2}$
$\sum \frac{3^n}{n^2}$, проверим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = 3$ — абсолютной сходимости нет
Проверим сходимость по Лейбницу: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n \ln 3}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n (\ln 3)^2}{2} = \infty$ — не выполнен необходимый признак, никакой сходимости нет

Пример №11 $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{6n-5}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6}$ — тоже расходящийся ряд по необходимому признаку

Пример №12 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
Можем легко проверить, что абсолютной сходимости нет, но есть сходимость по Лейбницу: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$

1.3 Примеры решения функциональных рядов

Пример №1 $\sum \frac{(-1)^n * n}{n^2+1}(x+2)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{\frac{(-1)^{n+1}*(n+1)}{(n+1)^2+1}(x+2)^{n+1}}{\frac{(-1)^n * n}{n^2+1}(x+2)^n}| = |x+2| \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n+1}{(n+1)^2+1} * \frac{n^2+1}{n}| = |x+2| < 1$

$-1 < x+2 < 1 \Longleftrightarrow -3 < x < -1$ — **область сходимости** данного ряда

Проверим граничные значения:

Если $x = -1$, то $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ — условно сходится

Если $x = -3$, то $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}(-1)^n = \sum \frac{n}{n^2+1}$ — расходящийся

Обновим границы: $-3 < x \leq -1$

Пример №2 $\sum \frac{(-1)^n n!}{n^2}(x-1)^n$

Ряд из модулей: $\sum \frac{n!}{n^2}(x-1)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{(n+1)!(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2 n!(x-1)^n}| = |x-1| \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) < 1$ только при $x = 1$

Область сходимости: $x = 1$

1.4 Примеры разложения в ряд

Пример №1 $\ln(3x-2) = \ln(3(x-2+2)-2) = \ln(3(x-2)+4) = \ln 4(1+\frac{3(x-2)}{4}) = \ln 4 + \ln(1+\frac{3}{4}(x-2)) = \ln 4 + \frac{3}{4}(x-2) - \frac{1}{2}(\frac{3}{4}(x-2))^2 + \frac{1}{3}(\frac{3}{4}(x-2))^3 - \dots$

1.5 Ряды Фурье

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$

1.5.1 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

1. $f(-x) = f(x)$ четная $[-\pi; \pi]$
   $a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x$, $b_n = 0$

2. $f(-x) = -f(x)$ нечетная $[-\pi; \pi]$
   $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x$

Пример №1 $f(x) = x^2$, промежуток $[-\pi; \pi]$
$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2$
$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos nnx \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x^2 & \mathrm{d}v = \cos nx \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}(\frac{x^2}{n} \sin nx - \frac{2}{n}(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx)) \Big|_0^{\pi} =$
$\frac{4}{\pi n^2}(\pi \cos \pi n - 0) = \frac{4 \cos \pi n}{n^2} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots)$
$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots)$

Ряды Фурье с **произвольным периодом** (например, на $[-l; l]$) записываются следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum(a_n \frac{\cos \pi nx}{x} + b_n \frac{\sin \pi nx}{l})$$

И тогда $a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} \, \mathrm{d}x$, $b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} \, \mathrm{d}x$