Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 22.02.2023

1.1 Геометрические приложения определенных интегралов

1.1.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_{\text{криволинейной трапеции}}$
Если график несколько раз пересекает ось OX, надо разбить его на несколько отрезков

Пример №1 Пусть $y = x^3$; $x = -2$; $x = 1$, ось OX
$S_1 = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$, $S_2 = \int\limits_{-2} 0|x^3|\,\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^0 = 4$, $S = 4\frac{1}{4}$

1.1.2 Вычисление площадей при параметрическом задании кривой

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) = \psi(y(x)) \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha \leq t \leq b$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
$S = \int\limits_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

Пример №1

$$\begin{cases} x = 4\cos t,\ \ x \in [0;4] \\ y = 3\sin t \end{cases} \tag{2}$$

Согласно системе, $t \in [\frac{\pi}{2};0]$, поэтому
$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 3\sin t * (4\cos t)'\,\mathrm{d}t = -12\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 6(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - 0 + 0) = 3\pi$

1.1.3 Площадь в полярных координатах

Пусть имеем $\rho = f(\theta)$, различные углы $\alpha = \theta_0$, $\beta = \theta_n$, разбивающие график на секторы.

$S_i = \frac{1}{2}\Delta\Theta\rho^2$
$S = \sum\limits_{i=1}^n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n (f(\theta_i))^2\Delta\theta_i$
$S = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n (f(\theta_i))^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$

Пример №1 Имеем $x^3 + y^3 = 3xy$, найдем площадь петли листа, перейдем между обычными x и y к полярным координатам.
$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases} \iff \rho^3\cos^3\phi + \rho^3\sin^3\phi = 3\rho^2\sin\theta\cos\theta$
Получаем: $\rho = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$

$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^6\theta + 2\sin^3\theta*\cos^3\theta + \cos^6\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{vmatrix} z = \operatorname{tg}\phi & \phi = \operatorname{arctg} z & \\ \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} & \cos^2 z = \frac{1}{1+z^2} & \sin^2 z = \frac{z^2}{1+z^2} \end{vmatrix} =$
$\int\limits_0^1 \frac{9*\frac{z^2}{1+z^2}*\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}}{(\frac{z^2}{1+z^2})^3 + \frac{1}{4}(\frac{2z}{1+z^2})^3 + (\frac{1}{1+z^2})^3} = 3\int\limits_0^1 \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^6+2z^3+1} = 3\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}(z^3+1)}{(z^3+1)^2} = -\frac{3}{z^3+1}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$

1.1.4 Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой в декартовых координатах ($y = f(x)$, $[a;b]$), то $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

2. Если

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

   То $l = \int\limits_a^b \sqrt{(\phi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\,\mathrm{d}t$

3. Если имеем полярные координаты ($\rho = f(\theta)$), то $l = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta^2$

Пример №1 Допустим, имеем астроиду $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, найдем

$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2*3\cos^2 t(-\sin t)+2)^2 * (3\sin^2 t * \cos t)^2}\,\mathrm{d}t = (*)$

Упростим: $36\cos^4 t \sin^2 t + 36\sin^4 t\cos^2 t = 36\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)$

$(*) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9*4\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}(-1-1) = 3$

1.1.5 Вычисление объемов тел вращения

Вычисление объемов тел вращения с помощью метода поперечных сечений

Если разрезать тело на тонкие слои, и в каждом промежутке $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выбрать произвольную точку ξ_i, то можем записать: $V_i = Q(\xi_i)\Delta x_i$

$V = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_{x_0}^{x_n} Q(x)\,\mathrm{d}x$

Пример №1. Допустим, имеем $y^2 + z^2 = x$

$R = \sqrt{x}$, $Q = \pi r^2 = \pi x$, $n = 4$

$V = \int\limits_0^4 \pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi$

Вычисление объемов тел, полученных вращением кривой вокруг соответствующей оси

Вращение криволинейной трапеции $y = f(x)$, ось OX, $x = a$, $x = b$ вокруг оси OX

$Q = \pi f^2(x)$, $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Пример — вращение параболы $y = \sqrt{x}$ вокруг оси OX

$V = \pi\int\limits_0 4\sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0 4 = \dots$

Если же мы производим вращение вокруг оси OY, то $V = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x$

У нас еще много всякой фигни может вращаться. Например, такая фигня, что $V = \pi\int\limits_\alpha^\beta (f_1^2(x) - f_2^2(x))\,\mathrm{d}x$. Погуглите — узнаете больше

Пример №2 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

$V=\pi\int\limits_0^1 y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t(3\cos^2 t-(-\sin t))\,\mathrm{d}t=-3\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cos^2 t\,\mathrm{d}\cos t=-3\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\,\mathrm{d}\cos t=$
$-\frac{\cos^9 t}{9}-\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{3\cos^5 t}{5}+\frac{3\cos^7 t}{7}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dots$

1.1.6 Площадь поверхности тела вращения

Если $y=f(x)$ вокруг оси OX, то

$$P=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$