Высшая математика

Лисид Лаконский

December 2022

Содержание

1 Высшая математика - 09.12.2022

1.1 Функции нескольких переменных

Для функций нескольких переменных существуют лишь частные производные; пусть $z = z(x; y)$, то $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$;
$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{z(x,y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}$

Пусть $z = 2xy + xy^3$. тогда $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)y + (x+\Delta x)y^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x to 0} \frac{2xy + 2\Delta xy + xy^3 + \Delta xy^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} = 2y + y^3$;
$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{2x(y+\Delta y) + x(y+\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{2xy + 2x\Delta y + xy^3 + 3xy^2\Delta y + 3xy(\Delta y)^2 + x(\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} 2x + 3xy^2 + 3xy\Delta y + x(\Delta y)^2 = 2x + 3xy^2$

1.1.1 Полный дифференциал

$du = \frac{\delta u}{\delta x}\delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\delta y$ — **полный дифференциал** функции от двух переменных

Применение полного дифференциала к вычислению приближенных значений

$f(x + \Delta x) = f(x) + \delta f \approx f(x_0) + df$
Например, нам нужно вычислить $1.04^{2.02}$, тогда составим функцию
$z = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\delta x = dx = 0.04$, $\delta y = dy = 0.02$
$z(1.04; 2.02) \approx z(1; 2) + dz = 1 + \frac{\delta z}{\delta x}dx + \frac{\delta z}{\delta y}dy = 1 + yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy = 1 + 2 * 1 * 0.04 + 1^2 \ln 1 * 0.02 = 1.08$

1.1.2 Частные производные

Частные производные $\frac{\delta z}{\delta x}$ и $\frac{\delta z}{\delta y}$ тоже являются функциями, и поэтому от них можно брать частные производные.

Теорема 1 *Если функция и ее частные производные определены и непрерывны в точке M и некоторой ее окрестности, то в этой точке выполняется условие:* $\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta z}{\delta y}) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta z}{\delta x})$

Порядок взятия частных производных не имеет значения:

$$\frac{\delta^n z}{\delta x^k \delta y^{n-k}} = \frac{\delta^n z}{\delta y^{n-k} \delta x^k}$$

1.1.3 Производная функции, заданной неявно

Теорема 2 *Пусть непрерывная функция* $y = y(x)$ *задана неявно уравнением* $F(x, y) = 0$*, причем сама эта функция и ее первые производные — непрерывные функции в некоторой области,* $F'_y \neq 0$ *в интересующей нас точке, тогда* $y'_x = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

Например, у нас есть функция $x^2 + x\sin y = 0$ $(F(x, y) = x^2 + x \sin y)$, тогда возьмем производные по x и y: $F'_x = 2xy + \sin y$, $F'_y = x^2 + x\cos y$, $y'_x = -\frac{2xy+\sin y}{x^2+x\cos y}$

1.1.4 Производная сложной функции и понятие полной производной

Пусть $z = z(u; v)$, $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, и существуют непрерывные частные производные z по $u; v$, u, v по $x; y$, тогда мы можем рассматривать z как функцию от x и y: $z = z(u(x, y), v(x, y))$, но не всегда так делать целесообразно и поступать лучше следующим образом:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta z}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta y}$$

Но функция может быть и от большего количества переменных:
$z = z(x; y; t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, по аналогии $z = z(x(t), y(t), t)$ — есть зависимость лишь от t, можно говорить о полной производной:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta t}$$

Например, $z = u\sqrt{v} + vu^2$, $u = \sin(x + y)$, $v = \sqrt{x^2 + y}$, $\frac{\delta z}{\delta u} = \sqrt{v} = 2vu$,
$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2$, $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}}$, $\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$
$\frac{\delta z}{\delta x} = (\sqrt{v} + 2vu)\cos(x + y) + (\frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2) * \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$

Другой не менее славный пример: $z = te^{x-2y} + xt^2$, $x = \sin t$, $y = t^3$, мы желаем посчитать $\frac{\delta z}{\delta t}$, для этого посчитаем много различной фигни:
$\frac{\delta z}{\delta x} = te^{x-2y} + t^2$, $\frac{\delta z}{\delta y} = te^{x-2y}(-2)$, $\frac{\delta z}{\delta t} = e^{x-2y} + 2xt$,
$\frac{\delta z}{\delta t} = (te^{x-2y} + t^2)\cos t - 2te^{x-2y} * 3t^2 + e^{x-2y} + 2xt$

1.1.5 Производная по направлению

Пусть D — некоторое пространство, определяющееся функцией $u = u(x; y; z)$, и т. $M(x; y; z)$, т. $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ лежат в данном пространстве, от нее отложен некоторый $\vec{S} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, при этом
$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
$\Delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\Delta z + E_1\Delta x + E_2\Delta y + E_3\Delta z$
$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta z}\frac{\Delta z}{\Delta S} + \dots$
$\frac{\delta u}{\delta s} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\delta u}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta u}{\delta y}\cos\beta + \frac{\delta u}{\delta z}\cos\gamma$

Пример $M\vec{M_1} = \{3;4\} = \{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\}$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$
Пусть $u(x;y) = x^2 + 3\sqrt{y}$, т. $M(1;1)$, т. $M_1(4;5)$; $M \to M_1$ в точке M, в этой точке $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x = 2$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{3}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{2}$

1.1.6 Градиент функции

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = u(x,y,z)$, определим вектор, координатами которого являются значения частных производных, и назовем его **градиентом функции**:

$$gradu = \frac{\delta u}{\delta x}\overrightarrow{c} + \frac{\delta u}{\delta y}\overrightarrow{j} + \frac{\delta u}{\delta z}\overrightarrow{k}$$

$\frac{\delta u}{\delta s} = \text{Пр}_{\overrightarrow{s}}(gradu)$ — производная по направлению в данной точке имеет наибольшее значение, если направление $\overrightarrow{s}$ совпадает с направлением градиента функции, равное модулю этого градиента.

1.1.7 Локальный экстремум функции двух переменных

Функция $z = z(x;y)$ **имеет локальный максимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $z(x_0,y_0) > z(x,y)$ в окрестности точки $M(x,y) \neq M_0(x_0,y_0)$, но достаточно близких к ней.
Функция $z = z(x;y)$ **имеет локальный минимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $z(x_0,y_0) < z(x,y)$ в окрестности точки $M(x,y) \neq M_0(x_0,y_0)$, но достаточно близких к ней.

Теорема 3 (необходимое условие локального экстремума) *Если функция $z(= zx;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$, то каждая частная производная или обращается в ноль в этой точке, или не существует: $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$ (*), и такие точки называются стационарными (точками возможного экстремума)*

Теорема 4 (достаточное условие локального экстремума) *Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, выполнены условия (*), и функция $z = z(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно: $A = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $B = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $C = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$,*
$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, то если $\Delta > 0$ — экстремум есть ($A(C) < 0$ — максимум, $A(C) > 0$ — минмум), $\Delta < 0$ — экстремума не существует, $\Delta = 0$ — спорный случай, который стоит рассматривать отдельно

2 Высшая математика - 13.12.2022

2.1 Функции нескольких переменных

Определение 1 *Если заданы два непустых множества D и G и каждому элементу M множества D по определенному правилу ставится в соответствие один и только один элемент множества G, то говорят, что на области определения задана функция со множеством значений G*
Область определения представляет собой часть координатной плоскости, ограниченной плоской кривой.

$$Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \iff Z^2 = 1 - x^2 - y^2, 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 0$$

Определение 2 *Линией уровня функции двух переменных называется линия на координатной плоскости, где функция сохраняет постоянное значение*

Определение 3 *Поверхностью уровня функции двух переменных называется поверхность, в точках которых функция сохраняет постоянное значение*

$f = \frac{y}{x}, \frac{y}{x} = c \iff y = cx$ — линия уровня плоскости.

2.1.1 Частные производные

Пример 1

$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, если $z(x, y) = \frac{x}{3y+2x^2}$ в т. $V(1, 0)$
$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{1(3y+2x^2)-x(4x)}{(3y+2x^2)^2} = \frac{3y-2x^2}{9y^2+12x^2y+4x^4}$
$\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y} = \frac{3(9y^2+12x^2y+4x^4)-(3y-2x^2)(18y+12x^2)}{(9y^2+12x^2y+4x^4)^2} = \frac{3*4-(-2)*12}{16} = \frac{9}{4}$

Пример 2

Найти $\frac{\delta x}{\delta y}$ для $x^2 + 2xyz - \frac{z}{x} - 2yz^2 = 0$ в т. $M(2; 0; 8)$
$\frac{\delta f}{\delta y} = 2xz - 2z^2$; $\frac{\delta f}{\delta z} = 2zy - \frac{1}{x} - 4yz$; $\frac{\delta f}{\delta x} = 2x + 2yz - \frac{(x-z)}{x^2}$
$\frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\frac{-\delta f}{\delta y}}{\frac{\delta f}{\delta z}}$

Пример 3

Найти $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, если $z(x, y) = \frac{x^2}{x-26}$ в т. $M(1; 0)$
$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{(x^2)' * (x-2y) - x^2(x-2y)'}{(x-2y)^2} - \frac{2x*(x-2y)-x^2}{(x-2y)^2} = \frac{2x^2-4xy}{(x-2y)^2}$
$\frac{\delta^2 z}{\delta x}\delta y = \frac{(2x^2-4xy)' * (x-2y)^2 - (2x^2-4xy)((x-2y)^2)'}{(x-2y)^4} =$
$\frac{(-4)*(x-2y)^2-(2x^2-4xy)*(x^2-4xy+4y^2)'}{(x-2y)^2} = \frac{-4-2*(-4)}{1} = -4 + 8 = 4$

3 Высшая математика - 23.12.2022

3.1 Условный экстремум

$z = z(x, y)$, $\phi(x; y) = 0$ — условие связи

3.1.1 Функция Лагранжа

$L(x; y; \lambda) = z(x, y) + \lambda\phi(x, y)$

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{-\delta x} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$\delta^2 L$ — дифференциал второго порядка, исследуем его значение и выясняем, есть ли экстремум или его нет.

3.2 Наибольшее и наименьшее значение в области

Наибольшее и наименьшее значение в замкнутой области будет достигаться **либо в точках экстремума** в этой замкнутой области, **либо на границе** этой области.

Пример Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$

$$\begin{cases} \frac{\delta z}{\delta x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\delta z}{\delta y} = 2x + 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases} \tag{2}$$

Пусть точка $C(0; 2)$, $B(1; 2)$, $A(1; 0)$, $O(0; 0)$

OA: $y = 0$, $z = x^2 - 4x$, $z(0; 0) = 0$, $z(1; 0) = -3$ — **наименьшее значение**
AB: $z = 10y - 3$, $z(1; 2) = 17$ — **наибольшее значение**
BC: $y = 2$, $z = x^2 + 16$, $z(0; 2) = 16$
CO: $x = 0$, $z = 8y$

Более сложный пример Найти наибольшее и наименьшее значение функции $x^2 + y^2 = 4$
$L = x^2 + 2xy - 4x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 2x + 2y - 4 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 2x + 8 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

3.3 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

3.3.1 Уравнение касательной плоскости к поверхности

При задании поверхности неявно Имеем поверхность, заданную в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, чтобы найти касательную плоскость к поверхности в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, запишем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Где $A = \frac{\delta F}{\delta x}$ в заданной точке, $B = \frac{\delta F}{\delta y}$ в заданной точке, $C = \frac{\delta F}{\delta z}$ в заданной точке

При задании поверхности неявно Имеет поверхность, заданную $z = f(x, y)$, $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

3.3.2 Уравнение нормали к поверхности

$$\frac{x - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\delta F}{\delta z}} \Longleftrightarrow \frac{x - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$