Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Высшая математика - 5 апреля 2023 г.

1.1 Степенные ряды как частный случай функциональных рядов

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$
$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$

Теорема 1 *Если степенной ряд сходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет абсолютно сходиться* $\forall|x| < |x'|$
Если степенной ряд расходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет расходиться $\forall|x| > |x'|$

Определение 1 ***Интервалом сходимости*** *степенного ряда называется интервал $(-R; R)$, что для всякого x, находящегося внутри этого интервала, ряд абсолютно сходится, а для находящегося снаружи — расходится*

$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$
$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ — **радиус сходимости**
$|x| < R$, $-R < x < R$

$\sum\frac{x^{2n-1}}{9^n} = \frac{x^1}{9} + \frac{x^3}{81} + \frac{x^5}{729} + \dots$
$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty}|\frac{x^{2n+1}*9^n}{9^n*9*x^{2n-1}}| = \frac{|x|^2}{9} < 1$, $|x^2| < 9$, $-3 < x < 3$ — **интервал сходимости**
Проверим, что происходит при $x = \pm3$:
$\sum\limits^{x=3}\frac{3^{2n-1}}{9^n} = \sum\frac{1}{3}$
$\sum\limits^{x=-3}\frac{(-3)^{2n-1}}{9^n}$ — ряд не является сходящимся

Степенной ряд является **мажорируемым** на любом отрезке, целиком лежащем внутри его области сходимости.

Если **пределы интегрирования** тоже лежат внутри интервала сходимости, то **интеграл от суммы ряда будет равняться сумме отдельных интегралов от элементов данного ряда**.

Если степенной ряд имеет интервал сходимости $(-R; R)$, то ряд, полученный **почленным дифференцированием** этого ряда, **имеет тот же интервал сходимости**, и сумма этого ряда будет равна производной суммы исходного ряда, если $x \in (-R; R)$

1.2 Формулы приближенных вычислений

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \dots$
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
4. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$
5. $\sinh h = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$
6. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$
7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
8. $(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$

Например,
$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-3/5} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}(\frac{9}{25}) - \frac{1}{6}(\frac{27}{125}) + \dots = 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 = 0.544$, с точностью 0.0054 — первый отбрасываемый член

Другой пример,
$\sqrt[5]{36} = (32 + 4)^{1/5} = 32^{1/5}(1 + \frac{1}{8})^{1/5} = 2(1 + \frac{1}{8})^{1/5}$
$(1 + x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})x^3}{3!}$, $(1 + \frac{1}{8})^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} * \frac{1}{8} - \frac{4}{25*2} * (\frac{1}{8})^2 + \frac{36}{125*6} * (\frac{1}{3})^3$
Дальнейшее решение тривиально и оставляется в качестве упражнения читателю

Третий пример,
$\int\limits_0^1\sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1\sqrt{x}(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1(x^{1/2} - x^{3/2} + \frac{1}{2!}x^{5/2} - \frac{1}{3!}x^{7/2} + \dots)\,\mathrm{d}x =$
$(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{1}{2!} * \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{1}{3!} * \frac{2x^{9/2}}{9} + \dots)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{54} + \dots$

1.3 Ряды Фурье

Функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется **тригонометрическим рядом**, где a_0, a_n, b_n — **коэффициенты тригонометрического ряда**

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она **представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции** на интервале $[-\pi;\pi]$, то есть **является суммой данного ряда**, тогда
$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$

Попробуем с помощью этих формул составить тригонометрический ряд Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}-1;-\pi<x<0\\1;0\le x\le\pi\end{cases}$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}(1)\,\mathrm{d}x)=(-x)\Big|_{-\pi}^{0}+x\Big|_{0}^{\pi}=0-\pi+\pi-0=0$
$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(-\int\limits_{-\pi}^{0}\cos kx\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\pi})=0$
$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin kx\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{\pi k}(\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}-\cos kx\Big|_{0}^{\pi})=\frac{1}{\pi k}(\cos 0-\cos k\pi-\cos k\pi+\cos 0)=$
$\frac{1}{\pi k}(1-\cos k\pi-\cos k\pi+1)=\begin{cases}0, k \text{ — четное}\\\frac{4}{\pi k}, k \text{ — нечетное}\end{cases}$
$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5})$. где n — нечетное

Определение 2 *Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной** на $[a;b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, так что на каждом из этих интервалов эта функция либо не возрастает, либо не убывает.*
Таким образом, функция может иметь разрывы, но эти разрывы могут быть только первого рода.

Теорема 2 *Если $f(x)$ — периодическая функция ($T=2\pi$), являющаяся кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье ($\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$), построенный для этой функции, сходится во всех точках.*
Сумма полученного ряда равняется значению $f(x)$ в точках непрерывности функции. А в точках, где функция имеет разрыв, сумма равна среднему арифметическому между пределом справа и пределом слева для функции $f(x)$

2 Высшая математика - 10 апреля 2023 г.

2.1 Уравнения касательной плоскости и нормали в заданной точке

$F(x,y,z)=0$
Исходная точка $M(x_0;y_0;z_0)\in F$, если $F(x_0;y_0;z_0)=0$

Уравнение касательной $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
Уравнение нормали: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$

$A=\frac{\delta F}{\delta x}\Big|_M$, $B=\frac{\delta F}{\delta y}\Big|_M$, $C=\frac{\delta F}{\delta z}\Big|_M$
Если $A,B,C=0$ или $A,B,C=1$, то мы оставляем такую дробь в уравнении нормали

Пример №1 Написать уравнение касательной и нормали к плоскости $x + y^2 + z^2 = 5$, $M(1; 0; 2)$
$F(x, y, z): \ x + y^2 + z^2 - 5 = 0$
$A = \frac{\delta F}{\delta x}\Big|_M = 1$, $B = \frac{\delta F}{\delta y}\Big|_M = 0$, $C = \frac{\delta F}{\delta z}\Big|_M = -4$
Уравнение нормали: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+2}{4}$
Уравнение касательной: $1(x - 1) + 0(y - 0) - 4(z + 2) = 0 \Longleftrightarrow x - 4z - 9 = 0$

2.2 Производные по направлению

$u = f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = \{m, n, p\}$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$

1. $\vec{grad}\ u = \frac{\delta u}{\delta x} * \vec{i} + \frac{\delta u}{\delta y} * \vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z} * \vec{k} = \{\frac{\delta u}{\delta x}; \frac{\delta u}{\delta y}; \frac{\delta u}{\delta z}\}$
2. $\vec{e_l} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \{\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$
3. $\frac{\delta u}{\delta l} = \frac{\delta u}{\delta x}\Big|_M * \cos\alpha + \frac{\delta u}{\delta y}\Big|_M * \cos\beta + \frac{\delta u}{\delta z}\Big|_M * \cos\gamma$

Модуль градиента функции в какой-либо точке это максимально возможное значение производной этой функции в этой точке.

Пример №1 Пусть $u = xyz$, $M = (-1; 0; 1)$, $\vec{l} = \{-1; 1; -2\}$

1. $\vec{\mathrm{grad}}u = \{yz; xz; xy\} = \{0; -1; 0\}$
2. $\vec{e_l} = \{\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}\}$
3. **Ответ**: $\frac{\delta u}{\delta l} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

2.3 Угол между градиентами функции

Допустим, имеем $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$
$\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$

Пример №1 $z = x^2 y$ с градиентом в точках $A(1; 1)$, $B(2; 0)$
$\vec{grad}\ z = \{2xy; x^2\}$, $\vec{grad}\ z\Big|_A = \{2; 1\}$, $\vec{grad}\ z\Big|_B = \{0; 4\}$
Ответ: $\cos\phi = \frac{4}{\sqrt{5} * \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2.4 Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу

Полный дифференциал — сумма частных производных функции
Допустим, имеем $z(x, y)$, $\mathrm{d}z = \frac{\delta z}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta z}{\delta y}\,\mathrm{d}y$
Для того, чтобы найти исходную функцию, нам необходимо:

1. $P(x, y) = \frac{\delta z}{\delta x}$, $Q(x, y) = \frac{\delta z}{\delta y}$
2. Проверить равенство $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$. Если равенство соблюдается — у дифференциала есть исходная функция, если не соблюдается — дальнейшего решения нет
3. $z = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x + C_1(y) = \Phi_1(x, y) + C_1(y)$, **либо**
   $z = \int Q(x, y)\,\mathrm{d}y + C_2(x) = \Phi_2(x, y) + C_2(x)$, где C_1, C_2 — функции, которые не рассматривались в рамках интегрирования
4. $C_1(y) = \int(Q(x, y) - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y})\,\mathrm{d}y$, **либо**
   $C_2(x) = \int(P(x, y) - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x})\,\mathrm{d}x$

Пример №1 $\mathrm{d}z = (y^2-1)\,\mathrm{d}x + (2xy+3y)\,\mathrm{d}y$

1. $P = y^2 - 1$, $Q = 2xy + 3y$
2. $\frac{\delta P}{\delta y} = 2y$, $\frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$, $2y = 2y$ — равенство соблюдается, следовательно, исходная функция существует
3. $z = \int (y^2-1)\,\mathrm{d}x + C_1(y) = y^2x - x + C_1(y) = \dots$,
   $C_1(y) = \int (2xy + 3y - 2yx)\,\mathrm{d}y = \frac{3y^2}{2} + C$, $\dots = y^2x - x + \frac{3y^2}{2} + C$

$Q(x,y) = \frac{\delta \Phi_1}{\delta y} + \frac{\mathrm{d}(C_1(y))}{\delta y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}(C_1(y))}{\mathrm{d}y} = Q - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y}$

2.5 Экстремумы функции двух переменных

1. $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ или не существует} \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \text{ или не существует} \end{cases}$
2. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{vmatrix} M_0$
   (a) если $\Delta > 0$ и $\frac{\delta f}{\delta x}\Big|_{M_0} < 0$,то M — точка максимума
   (b) если $\Delta > 0$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x}\Big|_{M_0} < 0$,то M — точка минимума
   (c) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума
   (d) если $\Delta = 0$, то неизвестно

Пример №1 $z = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2} - x - y + 14$

1. $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$, решая, находим $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 0$
2. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 2x\Big|_{x=0,y=1} = 0$, $2x\Big|_{x=1,y=0} = 2$
   $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 1$, $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 1$
   $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
   Следовательно, в точке $M_1(0;1)$ **нет экстремума** , $M_2(1;0)$ — **точка минимума**