

Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1	Высшая математика - 5 апреля 2023 г.	2
1.1	Степенные ряды как частный случай функциональных рядов	2
1.2	Формулы приближенных вычислений	2
1.3	Ряды Фурье	3
2	Высшая математика - 10 апреля 2023 г.	3
2.1	Уравнения касательной плоскости и нормали в заданной точке	3
2.2	Производные по направлению	4
2.3	Угол между градиентами функции	4
2.4	Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу	4
2.5	Экстремумы функции двух переменных	5
3	Высшая математика - 12 апреля 2023 г.	6
3.1	Примеры решения знакоположительных числовых рядов	6
3.2	Примеры решения знакопеременных (знакопеременных) числовых рядов	6
3.3	Примеры решения функциональных рядов	7
3.4	Примеры разложения в ряд	7
3.5	Ряды Фурье	7
3.5.1	Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций	7
4	Высшая математика - 26 апреля 2023 г.	9
4.1	Функции комплексных переменных	9
4.1.1	Предел функции комплексного переменного	9
4.1.2	Дифференцирование функций комплексного переменного	10
4.1.3	Основные элементарные функции комплексного переменного	10

1 Высшая математика - 5 апреля 2023 г.

1.1 Степенные ряды как частный случай функциональных рядов

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$
$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Теорема 1 Если степенной ряд сходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет абсолютно сходиться $\forall |x| < |x'|$

Если степенной ряд расходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет расходиться $\forall |x| > |x'|$

Определение 1 Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $(-R; R)$, что для всякого x , находящегося внутри этого интервала, ряд абсолютно сходится, а для находящегося снаружи — расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$
$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ — радиус сходимости}$$
$$|x| < R, -R < x < R$$

$$\sum \frac{x^{2n-1}}{9^n} = \frac{x^1}{9} + \frac{x^3}{81} + \frac{x^5}{729} + \dots$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+1} * 9^n}{9^n * 9 * x^{2n-1}} \right| = \frac{|x|^2}{9} < 1, |x^2| < 9, -3 < x < 3 \text{ — интервал сходимости}$$

Проверим, что происходит при $x = \pm 3$:

$$\sum_{x=3} \frac{3^{2n-1}}{9^n} = \sum \frac{1}{3}$$
$$\sum_{x=-3} \frac{(-3)^{2n-1}}{9^n} \text{ — ряд не является сходящимся}$$

Степенной ряд является **мажорируемым** на любом отрезке, целиком лежащем внутри его области сходимости.

Если **пределы интегрирования** тоже лежат внутри интервала сходимости, то **интеграл от суммы ряда будет равняться сумме отдельных интегралов от элементов данного ряда.**

Если степенной ряд имеет интервал сходимости $(-R; R)$, то ряд, полученный **почленным дифференцированием** этого ряда, **имеет тот же интервал сходимости**, и сумма этого ряда будет равна производной суммы исходного ряда, если $x \in (-R; R)$

1.2 Формулы приближенных вычислений

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad 2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad 3. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$4. \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad 5. \sinh h = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad 6. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$
$$7. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad 8. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Например,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-3/5} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{25} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{27}{125} \right) + \dots = 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 = 0.544, \text{ с точностью } 0.0054 \text{ — первый отбрасываемый член}$$

Другой пример,

$$\sqrt[5]{36} = (32 + 4)^{1/5} = 32^{1/5} \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{1/5} = 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{1/5}$$
$$(1+x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})x^3}{3!}, (1 + \frac{1}{8})^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} * \frac{1}{8} - \frac{4}{25*2} * (\frac{1}{8})^2 + \frac{36}{125*6} * (\frac{1}{3})^3$$

Дальнейшее решение тривиально и оставляется в качестве упражнения читателю

Третий пример,

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^{3/2} + \frac{1}{2!} x^{5/2} - \frac{1}{3!} x^{7/2} + \dots \right) dx =$$
$$\left(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{1}{2!} * \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{1}{3!} * \frac{2x^{9/2}}{9} + \dots \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{54} + \dots$$

1.3 Ряды Фурье

Функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ называется **тригонометрическим рядом**, где a_0, a_n, b_n — коэффициенты тригонометрического ряда

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она **представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции** на интервале $[-\pi; \pi]$, то есть **является суммой данного ряда**, тогда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Попробуем с помощью этих формул составить тригонометрический ряд Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} -1; -\pi < x < 0 \\ 1; 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} (1) dx \right) = (-x) \Big|_{-\pi}^0 + x \Big|_0^{\pi} = 0 - \pi + \pi - 0 = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \cos kx dx + \int_0^{\pi} \cos kx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \sin kx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} \right) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 \sin kx dx + \int_0^{\pi} \sin kx dx \right) = \frac{1}{\pi k} \left(\cos kx \Big|_{-\pi}^0 - \cos kx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi k} (\cos 0 - \cos k\pi - \cos k\pi + \cos 0) =$$

$$\frac{1}{\pi k} (1 - \cos k\pi - \cos k\pi + 1) = \begin{cases} 0, k - \text{четное} \\ \frac{4}{\pi k}, k - \text{нечетное} \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \right), \text{ где } n - \text{нечетное}$$

Определение 2 Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной** на $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, так что на каждом из этих интервалов эта функция либо не возрастает, либо не убывает.

Таким образом, функция может иметь разрывы, но эти разрывы могут быть только первого рода.

Теорема 2 Если $f(x)$ — периодическая функция ($T = 2\pi$), являющаяся кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье $(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx))$, построенный для этой функции, сходится во всех точках.

Сумма полученного ряда равняется значению $f(x)$ в точках непрерывности функции. А в точках, где функция имеет разрыв, сумма равна среднему арифметическому между пределом справа и пределом слева для функции $f(x)$

2 Высшая математика - 10 апреля 2023 г.

2.1 Уравнения касательной плоскости и нормали в заданной точке

$$F(x, y, z) = 0$$

Исходная точка $M(x_0; y_0; z_0) \in F$, если $F(x_0; y_0; z_0) = 0$

$$\text{Уравнение касательной } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\text{Уравнение нормали: } \frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$$

$$A = \left. \frac{\delta F}{\delta x} \right|_M, B = \left. \frac{\delta F}{\delta y} \right|_M, C = \left. \frac{\delta F}{\delta z} \right|_M$$

Если $A, B, C = 0$ или $A, B, C = 1$, то мы оставляем такую дробь в уравнении нормали

Пример №1 Написать уравнение касательной и нормали к плоскости $x + y^2 + z^2 = 5$, $M(1; 0; 2)$

$$F(x, y, z) : x + y^2 + z^2 - 5 = 0$$

$$A = \left. \frac{\delta F}{\delta x} \right|_M = 1, B = \left. \frac{\delta F}{\delta y} \right|_M = 0, C = \left. \frac{\delta F}{\delta z} \right|_M = -4$$

$$\text{Уравнение нормали: } \frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-2}{-4}$$

$$\text{Уравнение касательной: } 1(x-1) + 0(y-0) - 4(z+2) = 0 \iff x - 4z - 9 = 0$$

2.2 Производные по направлению

$u = f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = \{m, n, p\}$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$

$$1. \vec{\text{grad}} u = \frac{\delta u}{\delta x} * \vec{i} + \frac{\delta u}{\delta y} * \vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z} * \vec{k} = \left\{ \frac{\delta u}{\delta x}, \frac{\delta u}{\delta y}, \frac{\delta u}{\delta z} \right\}$$

$$2. \vec{e}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \left\{ \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \right\} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}$$

$$3. \frac{\delta u}{\delta l} = \left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_M * \cos \alpha + \left. \frac{\delta u}{\delta y} \right|_M * \cos \beta + \left. \frac{\delta u}{\delta z} \right|_M * \cos \gamma$$

Модуль градиента функции в какой-либо точке это максимально возможное значение производной этой функции в этой точке.

Пример №1 Пусть $u = xyz$, $M = (-1; 0; 1)$, $\vec{l} = \{-1; 1; -2\}$

$$1. \vec{\text{grad}} u = \{yz; xz; xy\} = \{0; -1; 0\}$$

$$2. \vec{e}_l = \left\{ \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right\}$$

$$3. \text{Ответ: } \frac{\delta u}{\delta l} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

2.3 Угол между градиентами функции

Допустим, имеем $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Пример №1 $z = x^2 y$ с градиентом в точках $A(1; 1)$, $B(2; 0)$

$$\vec{\text{grad}} z = \{2xy; x^2\}, \left. \vec{\text{grad}} z \right|_A = \{2; 1\}, \left. \vec{\text{grad}} z \right|_B = \{0; 4\}$$

$$\text{Ответ: } \cos \phi = \frac{4}{\sqrt{5} * \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2.4 Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу

Полный дифференциал — сумма частных производных функции

$$\text{Допустим, имеем } z(x, y), dz = \frac{\delta z}{\delta x} dx + \frac{\delta z}{\delta y} dy$$

Для того, чтобы найти исходную функцию, нам необходимо:

$$1. P(x, y) = \frac{\delta z}{\delta x}, Q(x, y) = \frac{\delta z}{\delta y}$$

2. Проверить равенство $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$. Если равенство соблюдается — у дифференциала есть исходная функция, если не соблюдается — дальнейшего решения нет

3. $z = \int P(x, y) dx + C_1(y) = \Phi_1(x, y) + C_1(y)$, **либо**
 $z = \int Q(x, y) dy + C_2(x) = \Phi_2(x, y) + C_2(x)$, где C_1, C_2 — функции, которые не рассматривались в рамках интегрирования

$$4. C_1(y) = \int (Q(x, y) - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y}) dy, \text{ либо } C_2(x) = \int (P(x, y) - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x}) dx$$

Пример №1 $dz = (y^2 - 1) dx + (2xy + 3y) dy$

1. $P = y^2 - 1, Q = 2xy + 3y$

2. $\frac{\delta P}{\delta y} = 2y, \frac{\delta Q}{\delta x} = 2y, 2y = 2y$ — равенство соблюдается, следовательно, исходная функция существует

3. $z = \int (y^2 - 1) dx + C_1(y) = y^2 x - x + C_1(y) = \dots,$
 $C_1(y) = \int (2xy + 3y - 2yx) dy = \frac{3y^2}{2} + C, \dots = y^2 x - x + \frac{3y^2}{2} + C$

$$Q(x, y) = \frac{\delta \Phi_1}{\delta y} + \frac{d(C_1(y))}{dy} \implies \frac{d(C_1(y))}{dy} = Q - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y}$$

2.5 Экстремумы функции двух переменных

1. $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ или не существует} \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \text{ или не существует} \end{cases}$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{vmatrix} M_0$

(a) если $\Delta > 0$ и $\frac{\delta f}{\delta x} \Big|_{M_0} < 0$, то M — точка максимума

(b) если $\Delta > 0$ и $\frac{\delta^2 f}{\delta x} \Big|_{M_0} < 0$, то M — точка минимума

(c) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума

(d) если $\Delta = 0$, то неизвестно

Пример №1 $z = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2} - x - y + 14$

1. $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$, решая, находим $x = 0, y = 1; x = 1, y = 0$

2. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 2x \Big|_{x=0, y=1} = 0, 2x \Big|_{x=1, y=0} = 2$

$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 1, \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 1$

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Следовательно, в точке $M_1(0; 1)$ нет экстремума, $M_2(1; 0)$ — точка минимума

3 Высшая математика - 12 апреля 2023 г.

3.1 Примеры решения знакоположительных числовых рядов

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \neq 0$, то ряд точно является расходящимся

Иначе проверяем достаточные признаки:

1. Первый признак сравнения
2. Второй признак сравнения
3. Признак Д'Аламбера
4. Признак Коши (радикальный)
5. Признак Коши (интегральный)

Пример №1 $\sum \frac{2n+1}{n+1}$ — не выполняется необходимый признак, следовательно, расходится

Пример №2 $\sum \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sim \sum \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$

Проверим: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\frac{\pi}{2\sqrt{n}}} = 1$ — следовательно, ряды ведут себя одинаково

$\sum \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ — расходится, так как $\frac{1}{2} < 1$

Пример №3 $\sum \frac{n^3}{3^n}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{3 \cdot n^3} = \frac{1}{3} < 1$ — ряд сходящийся

Пример №4 $\sum \frac{2^n}{n^2+n} \sim \sum \frac{2^n}{n^2}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^2}{2^n \cdot (n+1)^2} = 2 > 1$ — расходящийся

Пример №5 $\sum 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{-1} * \left(\frac{n+1}{n}\right)^n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$ — расходящийся

Пример №6 $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ — ряд сходится

Пример №7 $\sum \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}$
 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = - \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{B \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} \Big|_1^B = \lim_{B \rightarrow \infty} (\cos \frac{1}{B} - \cos 1) = 1 - \cos 1$ — интеграл сходится, следовательно, ряд тоже сходится

Пример №8 $\sum n e^{-\frac{n^2}{2}}$
 $\int_1^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots$
 $d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = e^{-\frac{x^2}{2}} * (-x)$
 $\dots = - \lim_{B \rightarrow \infty} \int_1^B d(e^{-x^2/2}) = - \lim_{B \rightarrow \infty} e^{-x^2/2} \Big|_1^B = \frac{1}{\sqrt{e}}$ — сходящийся ряд

3.2 Примеры решения знакочередующихся (знакопеременных) числовых рядов

Если сходится $\sum |a_n|$, то ряд из $\sum a_n$ сходится абсолютно

Признак Лейбница

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
2. $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1}$

Пример №9 $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n}$

$\sum \frac{n}{2^n}$, проверим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится абсолютно

Пример №10 $\sum (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n^2}$

$\sum \frac{3^n}{n^2}$, проверим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = 3$ — абсолютной сходимости нет

Проверим сходимость по Лейбницу: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \ln 3}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (\ln 3)^2}{2} = \infty$ — не выполнен необходимый признак, никакой сходимости нет

Пример №11 $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6}$ — тоже расходящийся ряд по необходимому признаку

Пример №12 $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

Можем легко проверить, что абсолютной сходимости нет, но есть сходимость по Лейбницу: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

$1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots$

3.3 Примеры решения функциональных рядов

Пример №1 $\sum \frac{(-1)^n * n}{n^2+1} (x+2)^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} * (n+1)}{(n+1)^2+1} (x+2)^{n+1}}{\frac{(-1)^n * n}{n^2+1} (x+2)^n} \right| = |x+2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(n+1)^2+1} * \frac{n^2+1}{n} \right| = |x+2| < 1$

$-1 < x+2 < 1 \iff -3 < x < -1$ — **область сходимости** данного ряда

Проверим граничные значения:

Если $x = -1$, то $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ — условно сходится

Если $x = -3$, то $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1} (-1)^n = \sum \frac{n}{n^2+1}$ — расходящийся

Обновим границы: $-3 < x \leq -1$

Пример №2 $\sum \frac{(-1)^n n!}{n^2} (x-1)^n$

Ряд из модулей: $\sum \frac{n!}{n^2} (x-1)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2 n! (x-1)^n} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) < 1$ только при $x = 1$

Область сходимости: $x = 1$

3.4 Примеры разложения в ряд

Пример №1 $\ln(3x-2) = \ln(3(x-2+2)-2) = \ln(3(x-2)+4) = \ln 4(1 + \frac{3(x-2)}{4}) = \ln 4 + \ln(1 + \frac{3}{4}(x-2)) = \ln 4 + \frac{3}{4}(x-2) - \frac{1}{2}(\frac{3}{4}(x-2))^2 + \frac{1}{3}(\frac{3}{4}(x-2))^3 - \dots$

3.5 Ряды Фурье

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$

3.5.1 Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

1. $f(-x) = f(x)$ четная $[-\pi; \pi]$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $b_n = 0$

2. $f(-x) = -f(x)$ нечетная $[-\pi; \pi]$

$a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$

Пример №1 $f(x) = x^2$, промежуток $[-\pi; \pi]$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} * \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nnx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \cos nx dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx - \frac{2}{n} \left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$\frac{4}{\pi n^2} (\pi \cos \pi n - 0) = \frac{4 \cos \pi n}{n^2} = \frac{4}{n^2} (-1)^n$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

Ряды Фурье с **произвольным периодом** (например, на $[-l; l]$) записываются следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left(a_n \frac{\cos \pi n x}{x} + b_n \frac{\sin \pi n x}{l} \right)$$

И тогда $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$

4 Высшая математика - 26 апреля 2023 г.

4.1 Функции комплексных переменных

Определение 3 Говорят что в области D определена функция $w = w(z)$, если каждой точке из области D поставлено в соответствие одно или несколько значений данной функции.

Функция осуществляет отображение точек из плоскости Oxy на плоскость Uov

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Пример №1 $w = 3z^2 - \bar{z} = 3(x + iy)^2 - (x - iy) = 3(x^2 + 2ixy - y^2) - (x - iy) = (3x^2 - 3y^2 - x) + i(6xy + y)$

Если на плоскости XOY задана какая-либо область, то мы можем каждую точку этой области превратить в ее образ на плоскости UOV

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 — \text{кривая, задающая границы области} \\ u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Из этих уравнений исключить x и y и записать выражение, связывающее u и v

Пример №2 На какую линию на плоскости UOV отобразится окружность $|z| = \frac{1}{2}$ при применении функции $w = \frac{1}{z}$

$$w = \frac{1}{(x+iy)} \frac{x-iy}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{(-y)}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$u^2 + v^2 = 4$$

4.1.1 Предел функции комплексного переменного

Определение 4 Окрестностью точки z_0 в плоскости комплексной переменной называют область, содержащую эту точку

$$A = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

$\forall \epsilon > 0 \delta = \delta(\epsilon) > 0$ что для всех $z \in \delta$ — окрестность выполняется условие $|f(z) - A| < \epsilon$

Существование $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию двух пределов:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \lim u(x, y)$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \lim v(x, y)$

Так что $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \lim u(x, y) + i \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} \lim v(x, y)$

Пример №1 $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z+i)(z+2i)}{z+i} = \lim_{z \rightarrow -i} (z + 2i) = i$

4.1.2 Дифференцирование функций комплексного переменного

Пусть $w(z)$ определена в некоторой области D , обозначим $\Delta Z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = w(z + \Delta z) - w(z)$

Функция $w(z)$ **называется дифференцируемой** в точке $z \in D$, если $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z \rightarrow 0$ произвольным образом

$$w'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Если $z = x + iy$, $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то в каждой точке дифференцируемости **выполнены условия Коши-Римана**:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}; \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

Пример №1 $w = 2z - 3$

$$w = 2(x + iy) - 3 = (2x - 3) + i2y$$

$\frac{\delta u}{\delta x} = 2$, $\frac{\delta u}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta v}{\delta y} = 2$, $\frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что в каждой точке выполняется условие **Коши-Римана**

Пример №2 $w = 2z - 3\bar{z}$

$$w = 2(x + iy) - 3(x - iy) = (2x - 3x) + i(2y + 3y) = -x + i5y$$

$\frac{\delta u}{\delta x} = -1$, $\frac{\delta u}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta v}{\delta y} = 5$, $\frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что **условия Коши-Римана не выполняются** — следовательно, в функции нет ни одной точки, где она дифференцируема

Пример №3 $w = z * \bar{z}$

$$w = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i0$$

$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x$, $\frac{\delta u}{\delta y} = 0$, $\frac{\delta v}{\delta y} = 2y$, $\frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что функция дифференцируема **лишь в одной точке**, $z = 0$

4.1.3 Основные элементарные функции комплексного переменного

1. **Дробно-линейная функция** $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$

2. **Показательная функция** $e^z = e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} * e^{z_2}$$

$$e^{z+2\pi k*i} = e^z \text{ — периодическая функция с периодом } 2\pi i$$

Формулы Эйлера:

$$1. e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

$$2. e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$3. \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$4. \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$5. \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Гиперболические ункции:

$$1. \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$2. \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$3. \sin z = -i \sinh(iz)$$

$$4. \sinh z = -i \sin(iz)$$

$$5. \cos z = \cosh(iz)$$

$$6. \cosh z = \cos(iz)$$

$$7. \operatorname{tg} z = -\tanh(iz)$$

$$8. \tanh = -i \operatorname{tg}(iz)$$

$$9. \coth z = i \operatorname{ctg}(iz)$$

$$10. \operatorname{ctg} z = i \coth(iz)$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + 2\pi ki, k = 0; \pm 1; \pm 2$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2\pi ki$$

$$\operatorname{Arcsin} z = i(\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}))$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i(\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}))$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$$

Пример №1 $w = z * e^z$

$$w = (x + iy)e^xe^{iy} = (x + iy)e^x(\cos y + i \sin y) = e^x(x + iy)(\cos y + i \sin y) = e^x(x \cos y + iy \cos y + ix \sin y + i^2 y \sin y) = e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$$

Получаем $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$, $v = e^x(y \cos y + x \sin y)$

$$1. \frac{\delta u}{\delta x} = e^x(x \cos y - y \sin y + \cos y)$$

$$2. \frac{\delta v}{\delta y} = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y)$$

$$3. \frac{\delta u}{\delta y} = e^x(-x \sin y - \sin y - y \cos y)$$

$$4. \frac{\delta v}{\delta x} = e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y)$$

Для данной функции условия Коши-Римана выполняются во всех точках комплексной плоскости.

Если в некоторой точке $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана, то функция $w = u + iv$ **является дифференцируемой** в точке $z = x + iy$

Если же точка является дифференцируемой в точке и некоторой ее окрестности, то в этой точке функция называется **аналитической**