Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

Содержание

1 Высшая математика — справочный материал к экзамену **2**

1.1 Производные функции одной переменной, экстремумы, выпуклость-вогнутость, возрастание-убывание, касательные и оси . . . 2

1.1.1 Производные функции одной переменной . . . 2

1.1.2 Нахождение экстремумов функции одной переменной . . . 2

1.1.3 Нахождение интервалов выпуклости и интервалов вогнутости . . . 2

1.1.4 Возрастание и убывание функции на интервале . . . 3

1.1.5 Касательная к графику функции . . . 3

1.1.6 Преобразование графиков функций . . . 3

1.2 Неопределенные интегралы . . . 4

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла . . . 4

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов . . . 4

1.2.3 Подведение функции под знак дифференциала . . . 4

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле . . . 5

1.2.5 Метод интегрирования по частям . . . 5

1.3 Определенные интегралы . . . 6

1.4 Площадь и длина дуги кривой (декартовые, полярные, параметрические координаты) . . . 7

1.4.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах . . . 7

1.4.2 Вычисление площадей при параметрическом задании кривой . . . 7

1.4.3 Площадь в полярных координатах . . . 7

1.4.4 Длина дуги кривой . . . 7

1.5 Функции нескольких переменных . . . 8

1.6 Ряды . . . 9

1 Высшая математика — справочный материал к экзамену

1.1 Производные функции одной переменной, экстремумы, выпуклость-вогнутость, возрастание-убывание, касательные и оси

1.1.1 Производные функции одной переменной

Свойства производных функций

1. $(c)' = 0$
2. $(cu)' = c * u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u * v)' = u'v + uv'$
5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6. Если $y = f(u), u = \phi(x)$, то $(f(\phi(x)))' = f'(u) * u'$.
   Пример: $\cos 3x = -\sin 3x * 3 = -3 \sin x$
   Еще один пример: $\operatorname{tg}^{2x} e^x = 2 \operatorname{tg} e^x * \frac{1}{\cos^2 e^x} * e^x$

Таблица производных

1. $(u^a)' = a * u^{a-1} * u', a \in R$
   $(\frac{1}{u}) = (u^{-1})' = -1 * \frac{1}{u^2} * u'$
   $(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} * u'$
2. $(a^u) = a^u * \ln a * u'$
   $(e^u)' = e^u * u'$
3. $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \log_a e * u' = \frac{1}{u \ln a} * u'$
   $(\ln u)' = \frac{1}{u} * u', (\ln |u|)' = \frac{1}{u} * u'$
4. $(\sin u)' = \cos x$
5. $(\cos u)' = -\sin x$
6. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} * u'$
7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} * u'$
8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} * u'$
11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} * u'$
12. $(\sinh u)' = \cosh u * u'$
13. $(\cosh u)' = \sinh u * u'$
14. $(\tanh u)' = \frac{1}{\cosh^2 u} * u'$
15. $(\coth u)' = -\frac{1}{\sinh^2 u} * u'$
16. $(u(x)^{v(x)})' =$
    $v(x) * u(x)^{v(x)-1} * u'(x) + u(x)^{v(x)} * \ln u(x) * v'(x)$

1.1.2 Нахождение экстремумов функции одной переменной

1. Находим производную функции
2. Приравниваем эту производную к нулю
3. Находим значения переменной получившегося выражения
4. Разбиваем этими значениями координатную прямую на промежутки (при этом не нужно забывать о точках разрыва, которые также надо наносить на прямую)
5. Вычисляем, на каких из этих промежутков производная будет положительной, а на каких — отрицательной

1.1.3 Нахождение интервалов выпуклости и интервалов вогнутости

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на некотором интервале.
Тогда:

1. Если вторая производная $f''(x) < 0$ на интервале, то график функции $f(x)$ **является выпуклым** на данном интервале
2. Если вторая производная $f''(x) > 0$ на интервале, то график функции $f(x)$ **является вогнутым** на данном интервале

1.1.4 Возрастание и убывание функции на интервале

Определение возрастающей функции

1. если производная функции $y = f(x)$ положительна для любого x из интервала X, то функция возрастает на X
2. если производная функции $y = f(x)$ отрицательна для любого x из интервала X, то функция убывает на X

Таким образом, чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

1. найти область определения функции
2. найти производную функции
3. решить неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ на области определения
4. к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна

1.1.5 Касательная к графику функции

Определение

1. Пусть функция $f : U(x_0) \subset R \to R$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in R$, и дифференцируема в ней: $f \in D(x_0)$. Касательной прямой к графику функции f в точке x_0 называется график линейной функции, задаваемый уравнением

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in R$$

2. Если функция f имеет в точке x_0 бесконечную производную $f'(x_0) = \pm\infty$, то касательной прямой в этой точке называется вертикальная прямая, задаваемая уравнением

$$x = x_0$$

Замечание Прямо из определения следует, что график касательной прямой проходит через точку $(x_0, f(x_0))$. Угол α между касательной к кривой и осью Ox удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = k$$

где tg обозначает тангенс, а k — коэффициент наклона касательной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

1.1.6 Преобразование графиков функций

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Параллельный перенос вдоль оси OY на A единиц вверх, если > 0, и на $\lvert A\rvert$ единиц вниз, если < 0
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос вдоль оси OX на a единиц вправо, если $a > 0$, на $\lvert a\rvert$ единиц влево, если $a < 0$
$y = kf(x)$	Растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в k раз, если $k > 1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$y = f(kx)$	Сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$
$y = -f(x)$	Симметричное отражение относительно оси OX
$y = \lvert f(x)\rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения.
$y = f(-x)$	Симметричное отражение относительно оси OY
$y = f(\lvert x\rvert)$	Часть графика, расположенная правее оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения

1.2 Неопределенные интегралы

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)\,\mathrm{d}x)' = (F(x)+C)' = f(x)$
2. $\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x$
6. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то
   7. $\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(\alpha x) + C$
   8. $\int f(x+b)\,\mathrm{d}x = F(x+b) + C$
   9. $\int f(\alpha x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
9. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
10. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Подведение функции под знак дифференциала

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.
$\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x$

Смотрим на таблицу интегралов и находим похожую формулу: $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$. Но проблема заключается в том, что у нас под синусом не просто буковка «икс», а сложное выражение. Что делать?

Подводим функцию $(3x+1)$ под знак дифференциала:
$\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}(3x+1)$

Раскрывая дифференциал, легко проверить, что:
$\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1) * (3x+1)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1) * (3+0)\,\mathrm{d}x = \int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x$

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$:
$\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}(3x+1) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$, где $C = const$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Найти неопределенный интеграл.
$\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x$

Идея метода замены состоит в том, чтобы **сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой**
В данном случае напрашивается: $t = 3x + 1$

Действие следующее. После того, как мы подобрали замену, в данном примере, $t = 3x + 1$, нам нужно найти дифференциал $\mathrm{d}t$.
Так как $t = 3x + 1$, то $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(3x+1) = (3x+1)'\,\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}x$
$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$

Таким образом:
$\int \sin(3x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t + C$
Вернемся к переменной x:
$\frac{1}{3}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$

1.2.5 Метод интегрирования по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то
   за u выбирают многочлен, $\mathrm{d}v$ — все, что осталось
   Пример $\int (3x+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C$
   $du = 3dx$, $v = \int \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x$
   Другой пример $\int (3x^2+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x^2+1)}{5}\sin 5x + \frac{6}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то
   за u выбирают функцию, а $\mathrm{d}v$ — все остальное
   Пример $\int (3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \int (\frac{x^2}{3} + 5x)\frac{\mathrm{d}x}{1} = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
   $lnx = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v = (x^2+5)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = \int (x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то
   не имеет значения, что выбрать за u, а что за $\mathrm{d}v$, но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно
   Пример $\int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x = \sin 5x * e^x - 5\int \cos 5x * e^x\,\mathrm{d}x = \dots$
   Пусть $u = \sin 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 5\cos 5x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
   Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -5\sin 5x\,\mathrm{d}x$, $v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
   $\dots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5x e^x + 5\int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x)$
   $y = (\sin 5x - 5\cos 5x)e^x - 25y \Longleftrightarrow 26y = (\dots)e^x \Longleftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5\cos 5x)e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5x e^x\,\mathrm{d}x$

1.3 Определенные интегралы

1.4 Площадь и длина дуги кривой (декартовые, полярные, параметрические координаты)

1.4.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_{\text{криволинейной трапеции}}$
Если график несколько раз пересекает ось OX, надо разбить его на несколько отрезков

1.4.2 Вычисление площадей при параметрическом задании кривой

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) = \psi(y(x)) \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha \le t \le b$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
$S = \int\limits_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

1.4.3 Площадь в полярных координатах

Пусть имеем $\rho = f(\theta)$, различные углы $\alpha = \theta_0$, $\beta = \theta_n$, разбивающие график на секторы.

$S_i = \frac{1}{2}\Delta\Theta\rho^2$
$S = \sum\limits_{i=1}^{n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(f(\theta_i))^2\Delta\theta_i$
$S = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(f(\theta_i))^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$

1.4.4 Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой в декартовых координатах ($y = f(x)$, $[a; b]$), то $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

2. Если
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

   То $l = \int\limits_a^b \sqrt{(\phi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\,\mathrm{d}t$

3. Если имеем полярные координаты ($\rho = f(\theta)$), то $l = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta^2$

1.5 Функции нескольких переменных

1.6 Ряды