Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Высшая математика - 01.11.2022 **3**
1.1 Правило Лопиталя . . . 3
1.1.1 Примеры . . . 3

2 Высшая математика - 09.11.2022 **4**
2.1 Разбор контрольной работы . . . 4
2.1.1 Первое задание . . . 4
2.1.2 Второе задание . . . 4
2.1.3 Третье задание . . . 4
2.1.4 Четвертое задание . . . 4
2.1.5 Пятое задание . . . 4
2.1.6 Седьмое задание . . . 4

3 Высшая математика - 11.11.2022 **6**
3.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях . . . 6
3.1.1 Теорема Ролля . . . 6
3.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях . . . 6
3.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций 6
3.1.4 Теорема Ферма . . . 7
3.2 Геометрические приложения производной . . . 7
3.2.1 Уравнение касательной к кривой . . . 7
3.2.2 Уравнение нормали к кривой . . . 7
3.3 Правило Лопиталя . . . 7
3.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ . . . 7
3.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$ . . . 7
3.4 Формула Тейлора . . . 7

4 Высшая математика - 25.11.2022 **9**
4.1 Исследование функций с помощью первой и второй производной . . . 9
4.1.1 Наибольшее и наименьшее значение . . . 9
4.1.2 Исследование кривой на выпуклость и вогнутость, точки перегиба . . . 9

4.2 Асимптоты функций 10
4.3 Общий план исследования функции 10
4.3.1 Примеры применения общего плана исследования функции 11

5 Высшая математика - 29.11.2022 12
5.1 Примеры исследования функций 12
5.1.1 Задание 1 12

1 Высшая математика - 01.11.2022

1.1 Правило Лопиталя

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0(\infty)$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\{\frac{0}{0}\}$ или $\{\frac{\infty}{\infty}\}$.

$\lim x \to a \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

1.1.1 Примеры

Пример 1.
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2-x-1} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{6x+4}{4x-1} = \frac{10}{3}$

Пример 2.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Пример 3.
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim\limits_{x\to +\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$

Пример 4.
$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \{-\infty * \infty\} = -\infty$

Пример 5.
$\lim\limits_{x\to 0} x * \operatorname{ctg} x = \{0 * \infty\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x = 1$

Пример 6.
$\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^x = \{0^0\} = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} x \ln \operatorname{tg} x = \{0 * \infty\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} * \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2}{\sin x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2}{0.5 \sin 2x} = 0$
$y = (\operatorname{tg} x)^x \iff \ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^x$

Пример 7.
$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\ln y = 0 \iff y = e^0 = 1$

Пример 8.
$\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x \ln \operatorname{tg} x} = ... = 0$

2 Высшая математика - 09.11.2022

2.1 Разбор контрольной работы

Семь заданий в варианте, решается шесть заданий, потому что шестое задание - то, что не рассказывается на лекциях.

2.1.1 Первое задание

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^4+n+1}}{3n^2-2\sqrt{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} [\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{3-2\sqrt{\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{3}$

2.1.2 Второе задание

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^2}{n\sqrt{n}+\sqrt{n^4+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{n\sqrt{n}+\sqrt{n^4+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}} = 1$

2.1.3 Третье задание

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13})+2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)*a} (a = \sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{16}$

2.1.4 Четвертое задание

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^{3x}*\ln 2*3-3^{2x}*\ln 3*2}{1+3x^2} = 3\ln 2 - 2\ln 3$

2.1.5 Пятое задание

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+4x}{-49x+9x} = \frac{x(\frac{1}{x}+4}{-40x} = -\frac{1}{10}$

2.1.6 Седьмое задание

Найти число и характер точек разрыва функции $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$
Точек разрыва ровно три штуки: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

Рассмотрим точку разрыва $x = 0$:
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{\frac{1}{0}-\frac{1}{0+1}}{\frac{1}{0-1}-\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} * \frac{x(x-1)}{x-x+1} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$
Рассмотрим два односторонних предела:

1. $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = -1$
2. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1$

Данные пределы равны между собой, следовательно, $x = 0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

По аналогии находится $x = 1$ - она тоже является устранимой точкой разрыва первого рода

Рассмотрим точку разрыва $x = -1$:

1. $f(-1)$ - не определена
2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

Следовательно, $x = -1$ - точка разрыва второго рода.

3 Высшая математика - 11.11.2022

3.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

3.1.1 Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b); $f(a) = f(b) = 0$, тогда внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайней мере одна точка c, в которой производная обращается в ноль:
$\exists c : a < c < b$, такая что $f'(c) = 0$
Доказательство смотреть в Лакерник А. Р. "Краткий курс высшей математики Пискунов.

Первое замечение Эта теорема останется справедливой, если $f(a) = f(b) \neq 0$

Примеры Например, имеется функция: $f(x) = x^2$, рассмотрим ее на отрезке $[-2;2]$. Для нее выполняются все условия, следовательно, существует такая точка, в которой производная обращается в ноль. Можно найти, что это точка $x = 0$

3.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b), тогда $\exists c : a < c < b$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - число, введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$
Уравнение прямой, проходящей через $(a; f(a))$:
$y - f(a) = \operatorname{tg}\alpha(x - a) \Longleftrightarrow y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
$F(x) = f(x) - y$, то есть мы получили, что $F(x)$ для каждого значения x является разностью ординаты кривой и хорды.

Функция $F(x)$ **удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля**, $F'(c) = 0, F'(x) = f'(x) - Q, F'(c) = f'(c) - Q = 0, Q = f'(c)$.

Геометрический смысл Геометрический смысл теоремы Лагранжа в том, что при выполнении требуемых условий на кривой найдется точка между a и b, что касательная в которой параллельна хорде ab.

3.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций

Пусть есть $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на $[a;b]$ и дифференцируемы во внутренних точках $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ внутри $(a;b)$, **тогда** $\exists c : a < c < b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

3.1.4 Теорема Ферма

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$ и принимает во внутренней точке c наибольшее или наименьшее значение.
Тогда $f'(c) = 0$, если в этой точке существует конечная производная.

3.2 Геометрические приложения производной

3.2.1 Уравнение касательной к кривой

Касательной $y = y(x)$ в точке $A(x; y(x))$ **называется** прямая, к которой стремится секущая, проходящая через точку A и точку
$B(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ при условии, что $\Delta x \to 0$

Уравнение касательной Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$:
$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

3.2.2 Уравнение нормали к кривой

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

3.3 Правило Лопиталя

3.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **удовлетворяют** условию теоремы Коши на интервале $[a;b]$ и **выполняется** условие $f(a) = g(a) = 0$
Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и они равны между собой.

Замечание Если $f'(a) = g'(a) = 0$, то можно рассматривать собственно производные в качестве функций и дальше применять правило Лопиталя .

3.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** и дифференцируемы на всех точках кроме, может, самой точки a, и $g'(x) \neq 0$, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
Если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

3.4 Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет непр. произв. до $(n+1)$ пор.
$P_n(x)$ многочлен степени не выше n: $P_n(a) = f(a), P'_n(a) = f'(a)$
$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}, R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), a < \xi < x$

Формула Маклорена $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Примеры вывода формулы

$y = \sin x, y(0) = 0$	$y = \cos x, y(0) = 1$	$y = e^x, y(0) = 1$
$y'(0) = 1$	$y'(0) =$	$y'(0) = 1$
$y''(0) = 0$	$y''(0) =$	$y''(0) = 1$
$y'''(0) = -1$	$y'''(0) =$	$y'''(0) = 1$
$y''''(0) = 0$	$y''''(0) =$	$y''''(0) = 1$
$y'''''(0) = 1$	$y'''''(0) =$	$y'''''(0) = 1$

Отсюда $\sin x = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...,$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...,\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
Интересно рассмотреть натуральный логарифм: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
Также $(1+x)^m = 1 + mX + \frac{m(m-1}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...,$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1*3*x^3}{2^3*3!} - \frac{1*3*5*x^4}{2^4*4!}$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + ...$

Применение данных формул к вычислению пределов Допустим, имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = ...$

Распишем разложение в Тейлора: $... = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$

4 Высшая математика - 25.11.2022

4.1 Исследование функций с помощью первой и второй производной

4.1.1 Наибольшее и наименьшее значение

Если $f(x)$ имеет производную и на $[a;b]$ возрастает, то $f'(x) > 0$, если убывает - $f'(x) < 0$
Если x_1 - точка максимума, то
$f(x_1) > f($в любой точке из ϵ - окрестности точки $x_1)$. Если x_2 - точка минимума, то $f(x_1) < f($в любой точке из ϵ - окрестности точки $x_2)$

Теорема об необходимом условии существования экстремума
Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум или минимум, то её производная в этой точке равна нулю или не существует.
Замечание. Не при всяком x, при котором производная равна нулю, существует максимум или минимум.

Теорема о достаточном условии существования экстремума
Пусть $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, содержащем точку x_1, в которой $f'(x_1) = 0$ или не существует, и $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (кроме, может, самой x_1).
Если при переходе через эту точку знак производной меняется с плюса на минус, то она называется точкой максимума. Если меняется знак меняется с минуса на плюс, то она называется точкой минимума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или на концах $[a;b]$, или в одной из точек экстремума внутри отрезка.

Примеры решения задач Найдем наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 1$, определенной на отрезке $[-2; \frac{5}{2}]$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Найдем экстремумы, приравняя производную к нулю: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
$f(-2) = -3$, $f(2) = -19$, $f(-1) = 8$ - **ответ**, $f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2}$

4.1.2 Исследование кривой на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

Выпуклость и вогнутость Кривая обращена **выпуклостью вверх** (выпукла), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) < 0$
Кривая обращена **выпуклостью вниз** (вогнута), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) > 0$

Точка перегиба Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от ее вогнутой части называется **точкой перегиба**.
Если $y = f(x)$ - непрерывна в точке a, $f''(a) = 0$ или не существует; при переходе через a меняет знак, то a - **точка перегиба**.

Теорема о втором достаточном условии существования экстремума Если $f'(x_1) = 0$ или не существует, $f''(x_1) > 0$, то в точке x_1 - минимум, иначе если $f''(x_1) < 0$, то в точке x_1 - максимум.
Замечание Если $f'(x_1) = f''(x_1) = ... = f^{(n-1)}$, n - нечетное, то производной не существует. Если n - четное, то $f^{(n)} > 0$ - минимум, $f^{(n)} < 0$ - максимум.

Примеры решения задач Пусть $y = \frac{x}{1+x^2}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость; найдем точки перегиба.
$y' = \frac{1+x^2-x*2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)*2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$
$\mathrm{sign}(-\infty; \sqrt{3}) = -1$, $\mathrm{sign}[-\sqrt{3}; 0] = 1$, $\mathrm{sign}(0; \sqrt{3}) = -1$ $\mathrm{sign}[\sqrt{3}; +\infty] = 1$

4.2 Асимптоты функций

Прямая называется **асимптотой** к кривой, если расстояние Δ от некоторой переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении данной точки в бесконечность.
Виды асимптот:

1. Вертикальные: $\lim\limits_{x \to a+0} = \infty$ (хотя бы справа или слева), $x = a$ - асимптота
2. Горизонтальные: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $y = b$
3. Наклонные: $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

4.3 Общий план исследования функции

Общий план исследования функции:

1. Находим область определения функции, нули функции, интервалы знакопостоянства
2. Проверяем четность-нечетность, периодичность функции, находим точки пересечения с осями
3. Исследуем функцию на непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты
4. Находим первую производную, точки экстремума, вычисляем значение функции в этих точках

5. Находим вторую производную, исследуем на выпуклость и вогнутость

6. Проверяем наклонные асимптоты, можно проверить отдельные точки

4.3.1 Примеры применения общего плана исследования функции

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = 0$ при $x = 0$, при положительных x график располагается выше оси x, при отрицательных - ниже.
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
Найдем первую производную: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y' = 0$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, вычислим значения функции в этих точках: $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(-1) = -\frac{1}{2}$
Найдем вторую производную: $y'' = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.
Поищем наклонную асимптоту данной функции:
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - 0 * x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, $y = 0$ **- горизонтальная асимптота**.

Пример 2.
Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = 0$ при $x = 0$, область определения данной функции: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$
Найдем первую производную данной функции: $y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ - убывающая
Найдем вторую производную данной функции: $y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.

5 Высшая математика - 29.11.2022

5.1 Примеры исследования функций

5.1.1 Задание 1

1) Пусть $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-2}$, $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\inf)$, $E(f) = R$
2) Посчитаем разные всякие, в том числе односторонние, пределы:
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \frac{-4}{0} = -\infty$,
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \frac{-4}{-0} = +\infty$
3) Найдем точки разрыва: $x = 2$ - точка разрыва второго рода.
4) Найдем асимптоты функции: $x = 2$ (горизонтальная асимптота),
$k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = 1$,
$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x^2-x-6}{x-2} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1$,
$y_1 = x_1 + 1$ (наклонная асимптота), $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = -1$,
$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x^2-x-6}{x-2} - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x-6}{x-2}) = 1$, $y_2 = -x + 1$. Итого, у нас есть **одна горизонтальная асимптота и одна наклонная асимптота**.
5) Исследуем вид функции: четная она, нечетная, периодическая, или же общего вида: $f(-x) = \frac{x^2+x-6}{-x-2}$ - ни четная, ни нечетная, ни периодичная - функция общего вида.
6) Найдем точки пересечения с осями координат: $f(0) = \frac{-6}{-2} = 3$,
$\frac{x^2-x-6}{x-2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Итого, точки пересечения: $A(0; 3)$, $B(3; 0)$, $C(-2; 0)$
7) Наметить примерный ход графика
8) Найдем экстремумы и критические точки:
$f'(x) = (\frac{x^2-x-6}{x-2})' = \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)^2} - \frac{-x^2-x-6}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$, $x^2 - 4x + 8 = 0$,
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$, $x_1 = 2 + 2i$, $x_2 = 2 - 2i$. Функция возрастает на всей области определения, экстремумов и критических точек не имеет.
9) $f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+4)-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4} =$
$\frac{2x^3-4x^2-8x^2+16x+8x-16-2x^3+4x^2+8x^2-16x-16x+32}{(x-2)^4} = \frac{-8x+16}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}$. Выходит так, что функция выпулка вверх на промежутке $(2; +\infty)$, а вогнута вниз на промежутке $(-\infty; 2)$
10) Начертим график функции. Оставлю это в качестве упражнения внимательному читателю.