

Высшая математика

Лисид Лаконский

December 2022

Содержание

1	Высшая математика - 23.12.2022	2
1.1	Условный экстремум	2
1.1.1	Функция Лагранжа	2
1.2	Наибольшее и наименьшее значение в области	2
1.3	Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности .	3
1.3.1	Уравнение касательной плоскости к поверхности	3
1.3.2	Уравнение нормали к поверхности	3

1 Высшая математика - 23.12.2022

1.1 Условный экстремум

$z = z(x, y)$, $\phi(x, y) = 0$ — условие связи

1.1.1 Функция Лагранжа

$$L(x, y; \lambda) = z(x, y) + \lambda \phi(x, y)$$

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\delta^2 L$ — дифференциал второго порядка, исследуем его значение и выясняем, есть ли экстремум или его нет.

1.2 Наибольшее и наименьшее значение в области

Наибольшее и наименьшее значение в замкнутой области будет достигаться **либо в точках экстремума** в этой замкнутой области, **либо на границе** этой области.

Пример Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$

$$\begin{cases} \frac{\delta z}{\delta x} = 2x + 2y - 4 = 0 \\ \frac{\delta z}{\delta y} = 2x + 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases} \quad (2)$$

Пусть точка $C(0; 2)$, $B(1; 2)$, $A(1; 0)$, $O(0; 0)$

OA : $y = 0$, $z = x^2 - 4x$, $z(0; 0) = 0$, $z(1; 0) = -3$ — **наименьшее значение**

AB : $z = 10y - 3$, $z(1; 2) = 17$ — **наибольшее значение**

BC : $y = 2$, $z = x^2 + 16$, $z(0; 2) = 16$

CO : $x = 0$, $z = 8y$

Более сложный пример Найти наибольшее и наименьшее значение функции $x^2 + y^2 = 4$

$$L = x^2 + 2xy - 4x + 8y + \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta x} = 2x + 2y - 4 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} = 2x + 8 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1.3 Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

1.3.1 Уравнение касательной плоскости к поверхности

При задании поверхности неявно Имеем поверхность, заданную в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, чтобы найти касательную плоскость к поверхности в данной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, запишем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Где $A = \frac{\delta F}{\delta x}$ в заданной точке, $B = \frac{\delta F}{\delta y}$ в заданной точке, $C = \frac{\delta F}{\delta z}$ в заданной точке

При задании поверхности явно Имеет поверхность, заданную $z = f(x, y)$, $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$

1.3.2 Уравнение нормали к поверхности

$$\frac{x - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\delta F}{\delta z}} \iff \frac{x - x_0}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$