

Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1	Высшая математика - 01.11.2022	2
1.1	Правило Лопиталя	2
1.1.1	Примеры	2
2	Высшая математика - 09.11.2022	3
2.1	Разбор контрольной работы	3
2.1.1	Первое задание	3
2.1.2	Второе задание	3
2.1.3	Третье задание	3
2.1.4	Четвертое задание	3
2.1.5	Пятое задание	3
2.1.6	Седьмое задание	3
3	Высшая математика - 11.11.2022	5
3.1	Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях	5
3.1.1	Теорема Ролля	5
3.1.2	Теорема Лагранжа о конечных приращениях	5
3.1.3	Теорема Коши об отношении приращений двух функций	5
3.1.4	Теорема Ферма	6
3.2	Геометрические приложения производной	6
3.2.1	Уравнение касательной к кривой	6
3.2.2	Уравнение нормали к кривой	6
3.3	Правило Лопиталя	6
3.3.1	Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$	6
3.3.2	Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$	6
3.4	Формула Тейлора	6

1 Высшая математика - 01.11.2022

1.1 Правило Лопиталья

Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0(\infty)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0(\infty)$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1.1.1 Примеры

Пример 1.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 - x - 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x + 4}{4x - 1} = \frac{10}{3}$$

Пример 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Пример 3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

Пример 4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-\infty * \infty\} = -\infty$$

Пример 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x * \operatorname{ctg} x = \{0 * \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$$

Пример 6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^x &= \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln \operatorname{tg} x = \{0 * \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} * \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{0.5 \sin 2x} = 0 \\ y &= (\operatorname{tg} x)^x \iff \ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^x \end{aligned}$$

Пример 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0, \ln y = 0 \iff y = e^0 = 1$$

Пример 8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \operatorname{tg} x} = \dots = 0$$

2 Высшая математика - 09.11.2022

2.1 Разбор контрольной работы

Семь заданий в варианте, решается шесть заданий, потому что шестое задание - то, что не рассказывается на лекциях.

2.1.1 Первое задание

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + n + 1}}{3n^2 - 2\sqrt{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{3 - 2\sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{3}$$

2.1.2 Второе задание

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{n\sqrt{n} + \sqrt{n^4 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 4}{n\sqrt{n} + \sqrt{n^4 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}}} = 1$$

2.1.3 Третье задание

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)*a} (a = \sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}$$

2.1.4 Четвертое задание

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} * \ln 2 * 3 - 3^{2x} * \ln 3 * 2}{1 + 3x^2} = 3 \ln 2 - 2 \ln 3$$

2.1.5 Пятое задание

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 4x}{-49x + 9x} = \frac{x(\frac{1}{x} + 4)}{-40x} = -\frac{1}{10}$$

2.1.6 Седьмое задание

Найти число и характер точек разрыва функции $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$

Точек разрыва ровно три штуки: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$

Рассмотрим точку разрыва $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\frac{0}{0} - \frac{1}{0+1}}{\frac{0}{0-1} - \frac{1}{0}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} * \frac{x(x-1)}{x-x+1} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$$

Рассмотрим два односторонних предела:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = -1$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$$

Данные пределы равны между собой, следовательно, $x = 0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

По аналогии находится $x = 1$ - она тоже является устранимой точкой разрыва первого рода

Рассмотрим точку разрыва $x = -1$:

1. $f(-1)$ - не определена

2. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

Следовательно, $x = -1$ - точка разрыва второго рода.

3 Высшая математика - 11.11.2022

3.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

3.1.1 Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b) ; $f(a) = f(b) = 0$, тогда внутри отрезка $[a; b]$ существует по крайней мере одна точка c , в которой производная обращается в ноль:

$\exists c : a < c < b$, такая что $f'(c) = 0$

Доказательство смотреть в Лакерник А. Р. "Краткий курс высшей математики Пискунов.

Первое замечание Эта теорема останется справедливой, если $f(a) = f(b) \neq 0$

Примеры Например, имеется функция: $f(x) = x^2$, рассмотрим ее на отрезке $[-2; 2]$. Для нее выполняются все условия, следовательно, существует такая точка, в которой производная обращается в ноль. Можно найти, что это точка $x = 0$

3.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b) , тогда $\exists c : a < c < b$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Доказательство $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - число, введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$

Уравнение прямой, проходящей через $(a; f(a))$:

$$y - f(a) = \operatorname{tg} \alpha (x - a) \iff y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$$

$F(x) = f(x) - y$, то есть мы получили, что $F(x)$ для каждого значения x является разностью ординаты кривой и хорды.

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, $F'(c) = 0, F'(x) = f'(x) - Q, F'(c) = f'(c) - Q = 0, Q = f'(c)$.

Геометрический смысл Геометрический смысл теоремы Лагранжа в том, что при выполнении требуемых условий на кривой найдется точка между a и b , что касательная в которой параллельна хорде ab .

3.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций

Пусть есть $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на $[a; b]$ и дифференцируемы во внутренних точках $(a; b)$, $g'(x) \neq 0$ внутри $(a; b)$, тогда $\exists c : a < c < b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

3.1.4 Теорема Ферма

Пусть $f(x)$ определена на $[a; b]$ и принимает во внутренней точке c наибольшее или наименьшее значение.
Тогда $f'(c) = 0$, если в этой точке существует конечная производная.

3.2 Геометрические приложения производной

3.2.1 Уравнение касательной к кривой

Касательной $y = y(x)$ в точке $A(x; y(x))$ называется прямая, к которой стремится секущая, проходящая через точку A и точку $B(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ при условии, что $\Delta x \rightarrow 0$

Уравнение касательной Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$:
 $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

3.2.2 Уравнение нормали к кривой

Уравнение нормали: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

3.3 Правило Лопиталя

3.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы Коши на интервале $[a; b]$ и выполняется условие $f(a) = g(a) = 0$
Тогда если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и они равны между собой.

Замечание Если $f'(a) = g'(a) = 0$, то можно рассматривать собственно производные в качестве функций и дальше применять правило Лопиталя.

3.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы на всех точках кроме, может, самой точки a , и $g'(x) \neq 0$, и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

3.4 Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет непр. произв. до $(n+1)$ пор.

$P_n(x)$ многочлен степени не выше n : $P_n(a) = f(a)$, $P'_n(a) = f'(a)$
 $P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$, $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, $a < \xi < x$

Формула Маклорена $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Примеры вывода формулы

$y = \sin x, y(0) = 0$	$y = \cos x, y(0) = 1$	$y = e^x, y(0) = 1$
$y'(0) = 1$	$y'(0) =$	$y'(0) = 1$
$y''(0) = 0$	$y''(0) =$	$y''(0) = 1$
$y'''(0) = -1$	$y'''(0) =$	$y'''(0) = 1$
$y^{(4)}(0) = 0$	$y^{(4)}(0) =$	$y^{(4)}(0) = 1$
$y^{(5)}(0) = 1$	$y^{(5)}(0) =$	$y^{(5)}(0) = 1$

Отсюда $\sin x = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$,

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Интересно рассмотреть натуральный логарифм: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

Также $(1+x)^m = 1 + mX + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$,

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1*3*x^3}{2^3*3!} - \frac{1*3*5*x^4}{2^4*4!}$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots$

Применение данных формул к вычислению пределов Допустим,

имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = \dots$

Распишем разложение в Тейлора: $\dots = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$