Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Высшая математика - 10 апреля 2023 г.

1.1 Уравнения касательной плоскости и нормали в заданной точке

$F(x, y, z) = 0$
Исходная точка $M(x_0; y_0; z_0) \in F$, если $F(x_0; y_0; z_0) = 0$

Уравнение касательной $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
Уравнение нормали: $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$

$A = \frac{\delta F}{\delta x}\bigg|_M$, $B = \frac{\delta F}{\delta y}\bigg|_M$, $C = \frac{\delta F}{\delta z}\bigg|_M$
Если $A, B, C = 0$ или $A, B, C = 1$, то мы оставляем такую дробь в уравнении нормали

Пример №1 Написать уравнение касательной и нормали к плоскости $x + y^2 + z^2 = 5$, $M(1; 0; 2)$
$F(x, y, z): \ x + y^2 + z^2 - 5 = 0$
$A = \frac{\delta F}{\delta x}\bigg|_M = 1$, $B = \frac{\delta F}{\delta y}\bigg|_M = 0$, $C = \frac{\delta F}{\delta z}\bigg|_M = -4$
Уравнение нормали: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+2}{4}$
Уравнение касательной: $1(x - 1) + 0(y - 0) - 4(z + 2) = 0 \Longleftrightarrow x - 4z - 9 = 0$

1.2 Производные по направлению

$u = f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = \{m, n, p\}$ в точке $M(x_0; y_0; z_0)$

1. $\vec{grad}\ u = \frac{\delta u}{\delta x} * \vec{i} + \frac{\delta u}{\delta y} * \vec{j} + \frac{\delta u}{\delta z} * \vec{k} = \{\frac{\delta u}{\delta x}; \frac{\delta u}{\delta y}; \frac{\delta u}{\delta z}\}$

2. $\vec{e_l} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \{\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}; \frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$

3. $\frac{\delta u}{\delta l} = \frac{\delta u}{\delta x}\bigg|_M * \cos\alpha + \frac{\delta u}{\delta y}\bigg|_M * \cos\beta + \frac{\delta u}{\delta z}\bigg|_M * \cos\gamma$

Модуль градиента функции в какой-либо точке это максимально возможное значение производной этой функции в этой точке.

Пример №1 Пусть $u = xyz$, $M = (-1; 0; 1)$, $\vec{l} = \{-1; 1; -2\}$

1. $\vec{\mathrm{grad}} u = \{yz; xz; xy\} = \{0; -1; 0\}$

2. $\vec{e_l} = \{\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}\}$

3. **Ответ**: $\frac{\delta u}{\delta l} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

1.3 Угол между градиентами функции

Допустим, имеем $\vec{a} = \{a_x; a_y\}$, $\vec{b} = \{b_x; b_y\}$
$\cos\phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$

Пример №1 $z = x^2 y$ с градиентом в точках $A(1; 1)$, $B(2; 0)$
$\vec{grad}\ z = \{2xy; x^2\}$, $\vec{grad}\ z\bigg|_A = \{2; 1\}$, $\vec{grad}\ z\bigg|_B = \{0; 4\}$
Ответ: $\cos\phi = \frac{4}{\sqrt{5} * \sqrt{16}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1.4 Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу

Полный дифференциал — сумма частных производных функции
Допустим, имеем $z(x, y)$, $\mathrm{d}z = \frac{\delta z}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta z}{\delta y}\,\mathrm{d}y$
Для того, чтобы найти исходную функцию, нам необходимо:

1. $P(x, y) = \frac{\delta z}{\delta x}$, $Q(x, y) = \frac{\delta z}{\delta y}$
2. Проверить равенство $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$. Если равенство соблюдается — у дифференциала есть исходная функция, если не соблюдается — дальнейшего решения нет
3. $z = \int P(x, y)\,\mathrm{d}x + C_1(y) = \Phi_1(x, y) + C_1(y)$, **либо**
   $z = \int Q(x, y)\,\mathrm{d}y + C_2(x) = \Phi_2(x, y) + C_2(x)$, где C_1, C_2 — функции, которые не рассматривались в рамках интегрирования
4. $C_1(y) = \int(Q(x, y) - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y})\,\mathrm{d}y$, **либо**
   $C_2(x) = \int(P(x, y) - \frac{\delta \Phi_2}{\delta x})\,\mathrm{d}x$

Пример №1 $\mathrm{d}z = (y^2 - 1)\,\mathrm{d}x + (2xy + 3y)\,\mathrm{d}y$

1. $P = y^2 - 1$, $Q = 2xy + 3y$
2. $\frac{\delta P}{\delta y} = 2y$, $\frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$, $2y = 2y$ — равенство соблюдается, следовательно, исходная функция существует
3. $z = \int(y^2 - 1)\,\mathrm{d}x + C_1(y) = y^2x - x + C_1(y) = \dots$,
   $C_1(y) = \int(2xy + 3y - 2yx)\,\mathrm{d}y = \frac{3y^2}{2} + C$, $\dots = y^2x - x + \frac{3y^2}{2} + C$

$Q(x, y) = \frac{\delta \Phi_1}{\delta y} + \frac{\mathrm{d}(C_1(y))}{\delta y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}(C_1(y))}{\mathrm{d}y} = Q - \frac{\delta \Phi_1}{\delta y}$

1.5 Экстремумы функции двух переменных

1. $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ или не существует} \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \text{ или не существует} \end{cases}$
2. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{vmatrix} M_0$
   (a) если $\Delta > 0$ и $\left.\frac{\delta f}{\delta x}\right|_{M_0} < 0$,то M — точка максимума
   (b) если $\Delta > 0$ и $\left.\frac{\delta^2 f}{\delta x}\right|_{M_0} < 0$,то M — точка минимума
   (c) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума
   (d) если $\Delta = 0$, то неизвестно

Пример №1 $z = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^2}{2} - x - y + 14$

1. $\begin{cases} x^2 + y - 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$, решая, находим $x = 0$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 0$
2. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 2x\Big|_{x=0,y=1} = 0$, $2x\Big|_{x=1,y=0} = 2$
   $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 1$, $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 1$
   $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$
   Следовательно, в точке $M_1(0; 1)$ **нет экстремума** , $M_2(1; 0)$ — **точка минимума**