# Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

## Содержание

# 1 Высшая математика - 08.02.2023

## 1.1 Метод интегрирования по частям

$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то
   за $u$ выбирают многочлен, $\mathrm{d}v$ — все, что осталось
   **Пример** $\int (3x+1)\cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x \, \mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C$
   $du = 3dx$, $v = \int \cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x$
   **Другой пример** $\int (3x^2+1)\cos 5x \, \mathrm{d}x = \frac{(3x^2+1)}{5}\sin 5x + \frac{6}{5}\int x \sin 5x \, \mathrm{d}x$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то
   за $u$ выбирают функцию, а $\mathrm{d}v$ — все остальное
   **Пример** $\int (3x^2+5)\ln x \, \mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \int (\frac{x^2}{3} + 5x)\frac{\mathrm{d}x}{1} = (\frac{x^3}{3} + 5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
   $lnx = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v = (x^2+5)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = \int (x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то
   не имеет значения, что выбрать за $u$, а что за $\mathrm{d}v$, но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно
   **Пример** $\int \sin 5x e^x \, \mathrm{d}x = \sin 5x * e^x - 5\int \cos 5x * e^x \, \mathrm{d}x = \ldots$
   Пусть $u = \sin 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 5\cos 5x \, \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
   **Применим метод интегрирования по частям во второй раз**, теперь $u = \cos 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -5\sin 5x \, \mathrm{d}x$,
   $v = e^x \, \mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
   $\cdots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5x e^x + 5\int \sin 5x e^x \, \mathrm{d}x)$
   $y = (\sin 5x - 5\cos 5x)e^x - 25y \Longleftrightarrow 26y = (\ldots)e^x \Longleftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5\cos 5x)e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5x e^x \, \mathrm{d}x$

**Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам** $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$, пусть
$u = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{1(-2x)\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = \mathrm{d}x \Longrightarrow v = x$
$\cdots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, тогда
$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Longleftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}$

## 1.2 Рекуррентные формулы

### 1.2.1 Рекуррентная формула №1

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \ldots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Longrightarrow \mathrm{d}u = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}x$, а $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Longrightarrow x = v$
$\cdots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $y_{n+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$,
$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2y_{n+1} \Longleftrightarrow 2na^2y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}y_n$ — **рекуррентная формула**

Например, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

### 1.2.2 Рекуррентная формула №2

$y_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\mathrm{d}x$
$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}y_{n-2,2-m}$

### 1.2.3 Рекуррентная формула №3

$y_n = \int (a^2-x^2)^n\,\mathrm{d}x$
$y_n = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}y_{n-1}$

## 1.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$

### 1.3.1 Пример №1

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1)+C$

### 1.3.2 Пример №2

$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|$, так как $(2x+3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2+3x+5)+C$

### 1.3.3 Пример №3

$\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{\mathrm{d}x+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}}+C$

### 1.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a + ib$, $a - ib$
$(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - x(a + ib) - x(a - ib) + (a^2 - (ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x^2 + px + q)$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей
**Виды элементарных дробей**:

1. $\frac{1}{x-a}$
2. $\frac{1}{(x-a)^n}$
3. $\frac{1}{x^2+px+1}$
4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$

**Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей**:

1. Если знаменатель имеет только действительные различные корни
   То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (**метод неопределенных коэффициентов**)
   **Собираем коэффициенты** при $x$: A + B = 2, при свободных членах: $5A - 4B = -3$, **решаем данную систему любым угодным нам способом**, получается $A = \frac{5}{9}$, а $B = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$
   $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-4} + \frac{13}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \frac{5}{9}\ln|x-4| + \frac{13}{9}\ln|x+5|$

2. Если знаменатель имеет действительные кратные корни
   То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$

3. Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
   То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
   $\int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \ldots$

4. Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
   То. например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$