Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Высшая математика - 25.11.2022

1.1 Исследование функций с помощью первой и второй производной

1.1.1 Наибольшее и наименьшее значение

Если $f(x)$ имеет производную и на $[a; b]$ возрастает, то $f'(x) > 0$, если убывает - $f'(x) < 0$
Если x_1 - точка максимума, то
$f(x_1) > f($в любой точке из ϵ - окрестности точки $x_1)$. Если x_2 - точка минимума, то $f(x_1) < f($в любой точке из ϵ - окрестности точки $x_2)$

Теорема об необходимом условии существования экстремума
Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_1 максимум или минимум, то её производная в этой точке равна нулю или не существует.
Замечание. Не при всяком x, при котором производная равна нулю, существует максимум или минимум.

Теорема о достаточном условии существования экстремума
Пусть $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, содержащем точку x_1, в которой $f'(x_1) = 0$ или не существует, и $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (кроме, может, самой x_1).
Если при переходе через эту точку знак производной меняется с плюса на минус, то она называется точкой максимума. Если меняется знак меняется с минуса на плюс, то она называется точкой минимума.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, тогда функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или на концах $[a; b]$, или в одной из точек экстремума внутри отрезка.

Примеры решения задач Найдем наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 1$, определенной на отрезке $[-2; \frac{5}{2}]$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Найдем экстремумы, приравняя производную к нулю: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
$f(-2) = -3$, $f(2) = -19$, $f(-1) = 8$ - **ответ**, $f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2}$

1.1.2 Исследование кривой на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

Выпуклость и вогнутость Кривая обращена **выпуклостью вверх** (выпукла), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) < 0$
Кривая обращена **выпуклостью вниз** (вогнута), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) > 0$

Точка перегиба Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от ее вогнутой части называется **точкой перегиба**.
Если $y = f(x)$ - непрерывна в точке a, $f''(a) = 0$ или не существует; при переходе через a меняет знак, то a - **точка перегиба**.

Теорема о втором достаточном условии существования экстремума Если $f'(x_1) = 0$ или не существует, $f''(x_1) > 0$, то в точке x_1 - минимум, иначе если $f''(x_1) < 0$, то в точке x_1 - максимум.
Замечание Если $f'(x_1) = f''(x_1) = ... = f^{(n-1)}$, n - нечетное, то производной не существует. Если n - четное, то $f^{(n)} > 0$ - минимум, $f^{(n)} < 0$ - максимум.

Примеры решения задач Пусть $y = \frac{x}{1+x^2}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость; найдем точки перегиба.
$y' = \frac{1+x^2-x*2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)*2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$
$\text{sign}(-\infty; \sqrt{3}) = -1$, $\text{sign}[-\sqrt{3}; 0] = 1$, $\text{sign}(0; \sqrt{3}) = -1$ $\text{sign}[\sqrt{3}; +\infty] = 1$

1.2 Асимптоты функций

Прямая называется **асимптотой** к кривой, если расстояние Δ от некоторой переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении данной точки в бесконечность.
Виды асимптот:

1. Вертикальные: $\lim\limits_{x \to a+0} = \infty$ (хотя бы справа или слева), $x = a$ - асимптота
2. Горизонтальные: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, $y = b$
3. Наклонные: $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

1.3 Общий план исследования функции

Общий план исследования функции:

1. Находим область определения функции, нули функции, интервалы знакопостоянства
2. Проверяем четность-нечетность, периодичность функции, находим точки пересечения с осями
3. Исследуем функцию на непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты
4. Находим первую производную, точки экстремума, вычисляем значение функции в этих точках

5. Находим вторую производную, исследуем на выпуклость и вогнутость

6. Проверяем наклонные асимптоты, можно проверить отдельные точки

1.3.1 Примеры применения общего плана исследования функции

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = 0$ при $x = 0$, при положительных x график располагается выше оси x, при отрицательных - ниже.
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
Найдем первую производную: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y' = 0$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, вычислим значения функции в этих точках: $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(-1) = -\frac{1}{2}$
Найдем вторую производную: $y'' = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.
Поищем наклонную асимптоту данной функции:
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - 0 * x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, $y = 0$ **- горизонтальная асимптота**.

Пример 2.
Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = 0$ при $x = 0$, область определения данной функции: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$
Найдем первую производную данной функции: $y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ - убывающая
Найдем вторую производную данной функции: $y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.