Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Дифференциал функции

$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая
$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\delta f \text{ дифференциал}} + \alpha(x)\Delta x$

Определение 1 ***Дифференциалом*** *функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно* Δx
Дифференциал независимосй переменной: $\delta x = \Delta x$

1.1.1 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

$\delta f = f'(x)\Delta x$
Если $f = f(u(x))$, то $\delta f = f'_u u'_x \delta x = f'(u)\delta u$

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 2 *Функция* $F(x)$ *называется* ***первообразной*** *от* $f(x)$ *на* $[a; b]$, *если на всех точках данного отрезка выполняется условие, что* $F'(x) = f(x)$

Теорема 1 *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *первообразные для* $f(x)$ *на некотором отрезке, то* $F_1(x) - F_2(x) = const$
Следовательно, $F(x) + C$ *— также первообразная для данной функции*

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)\,\mathrm{d}x)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x$
6. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то
   7. $\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(\alpha x) + C$
   8. $\int f(x + b)\,\mathrm{d}x = F(x + b) + C$
   9. $\int f(\alpha x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
9. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
10. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Метод подведения под знак дифференциала

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y) + C$
$\int f(y(x))\,\mathrm{d}(y(x)) = F(y(x)) + C$

$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, $\int (x+5)^2\,\mathrm{d}(x+5) = \frac{(x+5)^3}{3} + C$, $\int (\sin t)^2\,\mathrm{d}(\sin t) = \frac{(\sin t)^3}{3} + C$
Но если нам нужно найти $\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}x$, то **преобразуем** следующим образом:
$\frac{1}{2}\int (2x+7)^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}(2x+7) = \frac{1}{2}\frac{(2x+7)^3}{3} + C$, **так как** $\mathrm{d}(2x+7) = 2\,\mathrm{d}x$

Первый пример $\int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}(x+7) = \frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}} + C$

Второй пример $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(x^2+7) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}(x^2+7) = \dots$

Третий пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$, так как $\mathrm{d}(3x+5) = 3\,\mathrm{d}x$

Четвертый пример $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$, так как $\mathrm{d}(x^2+1) = 2x\,\mathrm{d}x$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5)\,\mathrm{d}x)}{x^2+5x+11} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln|x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos\mathrm{d}x$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x)\,\mathrm{d}x$, можем выполнить замену: $\begin{vmatrix} x = \phi(t) \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$
Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, тогда
$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\dots = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \dots$
Выполним **обратную замену**: $\dots = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, так как $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$,
$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+(x^2)^2} = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$
Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$, так как $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$

Третий пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sin x = t \Longleftrightarrow x = \arcsin t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{vmatrix} = \int e^t * \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\sin x} + C$

2 Высшая математика - 08.02.2023

2.1 Метод интегрирования по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то
за u выбирают многочлен, $\mathrm{d}v$ — все, что осталось
Пример $\int(3x+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C$
$du = 3dx$, $v = \int \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x$
Другой пример $\int(3x^2+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x^2+1)}{5}\sin 5x + \frac{6}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то
за u выбирают функцию, а $\mathrm{d}v$ — все остальное
Пример $\int(3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \int(\frac{x^2}{3}+5x)\frac{\mathrm{d}x}{1} = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
$lnx = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v = (x^2+5)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = \int(x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то
не имеет значения, что выбрать за u, а что за $\mathrm{d}v$, но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно
Пример $\int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x = \sin 5x * e^x - 5\int\cos 5x * e^x\,\mathrm{d}x = \ldots$
Пусть $u = \sin 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 5\cos 5x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -5\sin 5x\,\mathrm{d}x$, $v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
$\cdots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5xe^x + 5\int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x)$
$y = (\sin 5x - 5\cos 5x)e^x - 25y \Longleftrightarrow 26y = (\ldots)e^x \Longleftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5\cos 5x)e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x$

Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам $\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$, пусть $u = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{1(-2x)\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = \mathrm{d}x \Longrightarrow v = x$
$\cdots = x\sqrt{1-x^2} - \int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, тогда
$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Longleftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}$

2.2 Рекуррентные формулы

2.2.1 Рекуррентная формула №1

$y_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \ldots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Longrightarrow \mathrm{d}u = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}x$, а $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Longrightarrow x = v$
$\cdots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $y_{n+1} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$,
$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2y_{n+1} \Longleftrightarrow 2na^2y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}y_n$ — **рекуррентная формула**

Например, $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

2.2.2 Рекуррентная формула №2

$y_{n,-m} = \int\frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\mathrm{d}x$
$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}y_{n-2,2-m}$

2.2.3 Рекуррентная формула №3

$y_n = \int (a^2 - x^2)^n \,\mathrm{d}x$
$y_n = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} y_{n-1}$

2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$

2.3.1 Пример №1

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$

2.3.2 Пример №2

$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|$, так как $(2x+3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2+3x+5) + C$

2.3.3 Пример №3

$\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{\mathrm{d}x+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C$

2.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a+ib$, $a-ib$
$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - x(a+ib) - x(a-ib) + (a^2-(ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = (x^2+px+q)$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей
Виды элементарных дробей:

1. $\frac{1}{x-a}$
2. $\frac{1}{(x-a)^n}$
3. $\frac{1}{x^2+px+1}$
4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$

Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей:

1. Если знаменатель имеет только действительные различные корни
   То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (**метод неопределенных коэффициентов**)
   Собираем коэффициенты при x: А + В = 2, при свободных членах: $5A-4B=-3$, **решаем данную систему любым угодным нам способом**, получается $A=\frac{5}{9}$, а $B = 2-\frac{5}{9} = \frac{13}{9}$
   $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-4} + \frac{13}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \frac{5}{9}\ln|x-4| + \frac{13}{9}\ln|x+5|$
2. Если знаменатель имеет действительные кратные корни
   То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$
3. Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
   То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
   $\int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = A\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + B\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \dots$
4. Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
   То. например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$

3 Высшая математика - 13.02.2023

3.1 Интегрирование по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$
Допустим, имеем $\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$, представим за u ту функцию, от которой проще взять производную; $u = x$, $\mathrm{d}v = e^{-3x}\,\mathrm{d}x$
$\begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ 1 * \mathrm{d}u = 1 * \mathrm{d}x & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{-3x}}{3} = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{1}{3} * (-\frac{e^{-3x}}{3}) + C = -\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{9} + C$

3.2 Интегрирование многочленов

$\int \frac{5x+7}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{5}{8}(8x-6)+\frac{43}{4}}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\int \frac{8x-6}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x + \frac{43}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-6x+10}$
$(4x^2 - 6x + 10 = 4(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}) = 4((x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}) = 4((x - \frac{3}{4})^2 + \frac{31}{16})) = \frac{43}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{x}{4})^2+\frac{31}{16}} = \ldots$ (табличное значение, тривиально посчитать дальше)

3.3 Задания

3.3.1 Задание №1

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x * \sin^2 x}{\cos^2 x}$

3.3.2 Задание №2

$\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{2+e^{2x}}$

3.3.3 Задание №3

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4}\ln|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}| + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-5}{x-1}| + C$

3.3.4 Задание №4

Один вариант $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} =$
$\frac{3}{2}\ln|\sqrt{t}| + C_1 + \frac{2}{3}\operatorname{arcctg}\frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C_2 = \frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{2}{3}\operatorname{arcctg}\frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C$

Другой вариант $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-3x^2}}\,\mathrm{d}x =$

Еще другой вариант $\int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+6}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}}\,\mathrm{d}x =$

3.3.5 Задание №5

$\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x^2 = u \\ e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = x^2 * 2e^{\frac{1}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2x\,\mathrm{d}x = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4\int e^{\frac{x}{2}} * x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = u \\ e^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = 2e^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} =$
$x^2 * 2e^{\frac{1}{2}} - 4(2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x) = x^2 2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 15e^{\frac{x}{2}} + C$

3.3.6 Задание №6

Один вариант $\int e^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Другой вариант $\int e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

3.3.7 Задание №7

$\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln(1-x) & \mathrm{d}u = -\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{vmatrix} = \ln(1-x) * x + \int x * (\frac{1}{1-x})\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x) - \int \frac{-x}{1-x}\,\mathrm{d}x =$
$x\ln(1-x) - \int \frac{1-x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x) - \int \frac{1-x}{1-x} * x + \int \frac{\mathrm{d}x}{-1+x} = x\ln(1-x) - x + \ln|x-1| + C$

3.3.8 Задание №8

$\int x \sin^2 4x \, \mathrm{d}x$

4 Высшая математика - 14.02.2023

4.1 Задание №6

$\int e^{\frac{x}{2}} \cos 5x \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{x}{2}} & dv = \cos 5x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} & v = \frac{\cos 5x}{5} \end{vmatrix} = e^{\frac{x}{2}} \frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{x}{2}} & dv = \cos 5x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} & v = \frac{\cos 5x}{5} \end{vmatrix} =$
$\frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10}(\frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x) = \frac{\cos 5x}{5} - \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{50} + \frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$

Дальше все решается тривиально: переносим $\frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x$ в левую сторону, что-то вроде того

4.2 Задание №9 — задание №11

$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} \, \mathrm{d}x = (*)$

Сделаем из данной дроби правильную дробь, выполнив деление числителя на знаменатель:
$(*) = \int (x^3 + 2x^2 + 6x + 10) \, \mathrm{d}x + \int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, \mathrm{d}x = (*)$

$\int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, \mathrm{d}x = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \Longleftrightarrow 17x^2 - 10x + 1 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$

$$\begin{cases} 17 = A + B \\ -10 = -2A - B + C \\ A = 1 \ B = 16 \ C = 8 \end{cases}$$

$(*) = \int x^3 \, \mathrm{d}x + 2 \int x^2 \, \mathrm{d}x + 6 \int x \, \mathrm{d}x + 10 \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 16 \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 8 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \ldots$ (все интегралы табличные, дальнейшее решение тривиально и предоставляется читателю)

5 Высшая математика - 14.02.2023

5.1 Интегрирование рациональных дробей

$\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$

$\frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+4} =$
$\frac{Ax^4+4Ax^2+2Ax^3+8Ax+Ax^2+4A+Bx^4+Bx^3+4Bx^2+4Bx+Cx^3+4CxDx^4+2Dx^3+Dx^2+Fx^3+2Fx^2+Fx}{x(x+1)^2(x^2+4)} = (*)$
При x^4: $A+B+D=0$
x^3: $2A+B+C+2D+F=0$
x^2: $5A+4B+D+2F=0$
x: $8A+4B+4C+F=2$
Свободные члены: $4A=-3$

Решение данной системы уравнений оставляется в качестве упражнения читателю, мы же его опустим. Лишь заметим, что ее можно решать как угодно
$A=-\frac{3}{4}$, $B=1$, $C=1$, $D=-\frac{1}{4}$

$(*) = \int \frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+4} = -\frac{3}{4}\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{8}\ln|x^2+4| + C$
Данные преобразования могут выполняться лишь с правильными дробями

5.2 Интегрирование дробно-степенных функций

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x в дробных степенях, то мы находим общий знаменатель этих степеней и x в соответствующей степени обозначаем за t

1. $\frac{x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{3}}+1} = \left|\begin{matrix} x^{\frac{1}{6}}=t & x=t^6 & \mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t \\ x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}=t^3 & x^{\frac{1}{3}}=t^2 & \end{matrix}\right| = \int\frac{t^3 6t^5\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 6\int\frac{t^8}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{(t^8-1)+1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 6(\int(\frac{(t^4+1)(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1})\,\mathrm{d}t = 6[\int(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1})\,\mathrm{d}t] = 6(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\mathrm{arctg}\,t)+C \Longrightarrow 6(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{3}-x^{\frac{1}{6}}+\mathrm{arctg}(x^{\frac{1}{6}}))+C$

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x и дробно-линейной функции в какой-то дробной степени, то $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$, где v — общий знаменатель этих степеней, мы обозначим за t
$\int R(x, \frac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m}{n}}, \dots (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}))$, $t=(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$

1. $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} & t^3=\frac{2-x}{2+x} \\ x=\frac{2-2t^3}{t^3+1} & \mathrm{d}x=\frac{-6t^2(t^3+1)-3t^2(2-2t^3)}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{-12t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}\end{matrix}\right| = \int\frac{2t(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2})\,\mathrm{d}t}{(2-\frac{2-2t^3}{t^3+1})^2} = -\frac{24}{16}\int\frac{\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}}{\frac{t^5}{(t^3+1)^2}} = -\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{2-x}{2+x})^2}+C$

5.3 Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций

1. Если имеем $\int R(x,\sqrt{m^2x^2+n^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x=\frac{n}{m}\,\mathrm{tg}\,t$
2. Если имеем $\int R(x,\sqrt{m^2x^2-n^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x=\frac{n}{m}\frac{1}{\cos t}$
3. Если имеем $\int R(x,\sqrt{n^2-m^2x^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x=\frac{n}{m}\sin t$

Например, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left|x=2\sin t \quad \mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t\right| = \int\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}} = \int\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{8\cos^3 t\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}\,t = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}}+C$

5.4 Интегрирование тригонометрических функций

Если под знаком интеграла стоит произведение тригонометрических функций, то его желательно преобразовать в сумму или разность. Помним из школьного курса тригонометрии:

1. $\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
2. $\sin\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$
3. $\cos\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

Также бывают полезны формулы понижения степени:

1. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2a}{2}$

Если имеем $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$, где n, m — четные степени, то мы понижаем степени до того, как не сможем воспользоваться табличными интегралами

Если m и (или) n нечетно, то мы «откусываем» от нечетной степени и убираем под знак дифференциала
Например,
$\int \sin^4 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x = \int sin^4 x \cos^2 x * \cos x \, \mathrm{d}x = \int sin^4 x(1-\sin^2 x) \, \mathrm{d}(\sin x) = \int (t^4 - t^6) \, \mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$

5.4.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$
$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$

Например, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2*2t}{1+t^2})} = \int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{t(t^2-4t+3)} = (*)$
$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3}$
Посчитаем так, как считали. Найдем что $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -1$
$(*) = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{5}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int\frac{\mathrm{d}t}{t-3} = \frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + \frac{5}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1| - \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3| + C$

Если косинус и синус в дроби входят в виде $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$, то мы можем делать замену не универсальную, а **обозначать** $\operatorname{tg} x = z$, $x = \operatorname{arctg} z$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$
$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

6 Высшая математика - 17.02.2023

6.1 Подстановки Эйлера

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

1. Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
2. Если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
3. $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, a — действительный корень, то можно выполнить замену $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, аналогичную замену можно провести, если β — действительный корень

Пример. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3} = (*)$

Решим квадратное уравнение: $x^2 - 7x - 10 = 0 \iff (x-2)(x-5) = 0$
$\sqrt{-(x-2)(x-5)} = (x-2)t \iff (x-2)(5-x) = (x-2)^2t^2 \iff (5-x) = xt^2 - 2t^2$
Отсюда выразим $x = \frac{2t^2+5}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{4t(t^2+1)-(2t^2+5)2t}{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{-6t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = (\frac{2t^2+t}{t^2+1} - 2)t = \frac{2t^2+5-2t^2-2}{t^2+1} = \frac{3t}{t^2+1}$

$(*) = \int \frac{\frac{2t^2+5}{t^2+1}\frac{(-6t)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{(\frac{3t}{t^2+1})^3} = \int \frac{(2t^2+5)\,\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{2}{9}\int(2+\frac{5}{t^2})\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}(2t - \frac{5}{t}) + C,\ \ t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$

6.2 Определенный интеграл

6.2.1 Определение и геометрическое значение

Определение 3 *Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ таких, что наибольшее значение $\Delta X_i \to 0$ и любом выборе точек ξ_i существует $\lim\limits_{max\ \Delta X_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, то он называется определенным интегралом $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(a < b)$*
Если этот предел существует, то функция считается интегрируемой на отрезке $[a;b]$
Если $b < a$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Определённый интеграл от неотрицательной функции $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **численно равен площади фигуры**, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x)$

6.2.2 Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int\limits_a^b (f_1 \pm f_2)\,\mathrm{d}x = \int f_1\,\mathrm{d}x \pm \int f_2\,\mathrm{d}x$
3. Если $f(x) \leq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
4. Если m и M — наименьшее и наибольшее $f(x)$ на $[a;b]$ $(a \leq b)$, то $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$
5. **Теорема о среднем**. Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ $\exists\ C \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$
6. При любом расположении a, b и c справедливо $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

6.2.3 Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2 *Если $f(x)$ — непрерывная функция, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, то имеет место $\Phi'(x) = f(x)$*

Теорема 3 (Формула Ньютона-Лейбница) *Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то справедливо* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)b$

Пример 1. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = (*)$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

$(*) = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Пример 2. $\int\limits_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = (x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_1^2 = 1$

6.2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 4 *Пусть дан интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, где $f(x)$ — непрерывная на $[a;b]$ функция*
Вводим t, исходя из формулы $x = \phi(t)$. Если

1. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
2. ϕ, ϕ' *непрерывна на* $[a;b]$
3. $f(\phi(t))$ *определена и непрерывна на* $[\alpha;\beta]$

то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

Пример 1. $\int\limits_2^4 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+4x}} = (*)$, выполним замену $t = \sqrt{2+4x} \implies x = \frac{t^2-2}{4}$, $\mathrm{d}x = \frac{t\,\mathrm{d}t}{2}$

$(*) = \int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} (t^2-2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}(\frac{t^3}{3} - 2t)\Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} = \frac{1}{8}(\frac{18\sqrt{18}}{3} - 2\sqrt{18} - \frac{6\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Пример 2. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = (*)$, выполним замену $t = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

$(*) = \int\limits_{4/3}^{3/4} \frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = \int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}|\Big|_{3/4}^{4/3} = \ln|\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}} - \ln|\frac{3}{4} + \sqrt{1+\frac{9}{16}}| = \int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} (t^2-2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}(\frac{t^3}{3} - 2t)\Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} = \ln\frac{3}{2}$

6.2.5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

$\int\limits_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b u'v\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b uv'\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$

Пример 1. $\int\limits_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x = (*)$, пусть $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$(*) = [x * \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x]\Big|_0^{\pi/4} = [\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x]\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} * 1 - 0 + 0 - \frac{1}{4} * 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

6.2.6 Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральных функций

1. Если функция $f(x)$ является четной на симметричном интервале $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Если $f(x)$ является нечетной на $[-a;a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

3. Если $f(x)$ является периодической функцией (то есть, $f(x) = f(x+T)$), то $\int\limits_{a}^{b} = \int\limits_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,\mathrm{d}x$

7 Высшая математика - 22.02.2023

7.1 Геометрические приложения определенных интегралов

7.1.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S_{\text{криволинейной трапеции}}$
Если график несколько раз пересекает ось OX, надо разбить его на несколько отрезков

Пример №1 Пусть $y = x^3$; $x = -2$; $x = 1$, ось OX
$S_1 = \int\limits_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$, $S_2 = \int\limits_{-2} 0|x^3|\,\mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^0 = 4$, $S = 4\frac{1}{4}$

7.1.2 Вычисление площадей при параметрическом задании кривой

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) = \psi(y(x)) \end{cases} \tag{1}$$

$\alpha \le t \le b$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
$S = \int\limits_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

Пример №1

$$\begin{cases} x = 4\cos t,\ \ x \in [0;4] \\ y = 3\sin t \end{cases} \tag{2}$$

Согласно системе, $t \in [\frac{\pi}{2};0]$, поэтому
$S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 3\sin t * (4\cos t)'\,\mathrm{d}t = -12\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = 6(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - 0 + 0) = 3\pi$

7.1.3 Площадь в полярных координатах

Пусть имеем $\rho = f(\theta)$, различные углы $\alpha = \theta_0$, $\beta = \theta_n$, разбивающие график на секторы.

$S_i = \frac{1}{2}\Delta\Theta\rho^2$
$S = \sum\limits_{i=1}^n = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n (f(\theta_i))^2\Delta\theta_i$
$S = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n (f(\theta_i))^2\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta$

Пример №1 Имеем $x^3 + y^3 = 3xy$, найдем площадь петли листа, перейдем между обычными x и y к полярным координатам.
$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases} \iff \rho^3\cos^3\phi + \rho^3\sin^3\phi = 3\rho^2\sin\theta\cos\theta$
Получаем: $\rho = \frac{3\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$

$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^6\theta + 2\sin^3\theta*\cos^3\theta + \cos^6\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{vmatrix} z = \operatorname{tg}\phi & \phi = \operatorname{arctg} z & \\ \mathrm{d}\phi = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} & \cos^2 z = \frac{1}{1+z^2} & \sin^2 z = \frac{z^2}{1+z^2} \end{vmatrix} =$
$\int\limits_0^1 \frac{9*\frac{z^2}{1+z^2}*\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}}{(\frac{z^2}{1+z^2})^3 + \frac{1}{4}(\frac{2z}{1+z^2})^3 + (\frac{1}{1+z^2})^3} = 3\int\limits_0^1 \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z^6+2z^3+1} = 3\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}(z^3+1)}{(z^3+1)^2} = -\frac{3}{z^3+1}\Big|_0^1 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$

7.1.4 Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой в декартовых координатах ($y = f(x)$, $[a;b]$), то $l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

2. Если
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

   То $l = \int\limits_a^b \sqrt{(\phi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\,\mathrm{d}t$

3. Если имеем полярные координаты ($\rho = f(\theta)$), то $l = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta^2$

Пример №1 Допустим, имеем астроиду $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, найдем
$l = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2 * 3\cos^2 t(-\sin t) + 2)^2 * (3\sin^2 t * \cos t)^2}\,\mathrm{d}t = (*)$
Упростим: $36\cos^4 t\sin^2 t + 36\sin^4 t\cos^2 t = 36\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)$
$(*) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 * 4\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}(-1-1) = 3$

7.1.5 Вычисление объемов тел вращения

Вычисление объемов тел вращения с помощью метода поперечных сечений

Если разрезать тело на тонкие слои, и в каждом промежутке $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выбрать произвольную точку ξ_i, то можем записать: $V_i = Q(\xi_i)\Delta x_i$
$V = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_{x_0}^{x_n} Q(x)\,\mathrm{d}x$
Пример №1. Допустим, имеем $y^2 + z^2 = x$
$R = \sqrt{x}$, $Q = \pi r^2 = \pi x$, $n = 4$
$V = \int\limits_0^4 \pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi$

Вычисление объемов тел, полученных вращением кривой вокруг соответствующей оси

Вращение криволинейной трапеции $y = f(x)$, ось OX, $x = a$, $x = b$ вокруг оси OX
$Q = \pi f^2(x)$, $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Пример — вращение параболы $y = \sqrt{x}$ вокруг оси OX
$V = \pi\int\limits_0 4\sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0 4 = \dots$

Если же мы производим вращение вокруг оси OY, то $V = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,\mathrm{d}x$

У нас еще много всякой фигни может вращаться. Например, такая фигня, что $V = \pi\int\limits_\alpha^\beta (f_1^2(x) - f_2^2(x))\,\mathrm{d}x$. Погуглите — узнаете больше

Пример №2 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

$V = \pi \int\limits_0^1 y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t (3\cos^2 t - (-\sin t)) \,\mathrm{d}t = -3\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cos^2 t \,\mathrm{d}\cos t = -3\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - \cos^8 t) \,\mathrm{d}\cos t =$
$-\frac{\cos^9 t}{9} - \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3\cos^5 t}{5} + \frac{3\cos^7 t}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ldots$

7.1.6 Площадь поверхности тела вращения

Если $y = f(x)$ вокруг оси OX, то

$$P = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

8 Высшая математика - 27.02.2023

8.1 Всякие разные удобные замены

1. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$
2. $\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$
3. $\sin\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

1. $\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$
   $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ — понижение степени
   (a) Если либо m, либо n — нечетное положительное целое число
   (b) m и n — четные неотрицательные числа
2. $\int \operatorname{tg}^m x\,\mathrm{d}x$, $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$
   $\int \operatorname{ctg}^m x\,\mathrm{d}x$, $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$
3. $\int R(\operatorname{tg} x)\,\mathrm{d}x$, $t = \operatorname{tg} x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
   $\int R(\operatorname{ctg} x)\,\mathrm{d}x$, $t = \operatorname{ctg} x$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,\mathrm{d}x$, $x = a\operatorname{tg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{a}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
   $x = a\operatorname{ctg} t$, $\mathrm{d}x = -\frac{a}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$
3. $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$, $x = a\cos t$, $\mathrm{d}x = -a\sin t\,\mathrm{d}t$
   $x = a\sin t$, $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$
4. $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$, $x = \frac{a}{\sin t}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = -\frac{a\cos t}{\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$
   $x = \frac{a}{\cos t}$, $\mathrm{d}x = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$