Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 03.10.2022

1.1 Предел функции

1. Любую константу мы можем вынести за предел
2. Предел от суммы двух функций $f(x) + g(x)$ дает в нам результате разложения сумму двух пределов
3. Предел от произведения двух функций разлагается на произведение двух пределов
4. Предел частного от двух функций ($g(x) \neq 0$) равен частному двух пределов, если нет неопределенности

1.2 Виды неопределенностей

Основные виды неопределенностей: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $(0 * \infty)$, $(\infty - \infty)$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0
Раскрывать неопределенности позволяет:

1. Упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножения на сопряженные выражения с последующим сокращением и тому подобное)
2. Использование замечательных пределов
3. Применение правила Лопиталя
4. Использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентным

1.2.1 Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Пробуем преобразовать и упростить выражение. Если есть выражение вида $\frac{\sin(kx)}{kx}$ или $\frac{kx}{\sin(kx)}$, то применяем первый замечательный предел. Если не помогает, то используем правило Лопиталя или таблицу эквивалентных бесконечно малых.
Правила раскрытия неопределенности:

1. Для того, чтобы определить предел дробно-рациональной функции ($\lim x \to af(x)$), надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x - a$ и перейти к пределу. Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю, то надо произвести повторное деление на $x - a$
2. Для того, чтобы определить предел, в котором числитель или знаменатель иррациональны, следует избавиться от иррациональности, умножив и числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

В случае, когда под знаком предела стоят тригонометрические функции, используется первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Его различные формы: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}=1$

1.2.2 Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Правила раскрытия неопределенности:

1. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ заданную отношением двух многочленов, надо и числитель и знаменатель почленно разделить на переменную величину в наибольшей степени.

2. Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением иррациональных функций, надо и числитель и знаменатель почленно разделить на переменную величину в наибольшей степени с учетом степеней корней.

Если не помогает, то используем правило Лопиталя.

$$\lim x\to\infty\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b^{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0, n<m\\ \frac{a_n}{b_m}, n=m\infty, n>m\end{cases}$$

Пример №1 Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+14}{x^2-4}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+14}{x^2-4}=\{\frac{\infty}{\infty}\}=\infty$, так как $n=3$, $m=2$, $n>m$

1.2.3 Неопределенность вида $(0*\infty)$ или $(\infty-\infty)$

Преобразуем неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, затем разбираемся с новой неопределенностью.

Пусть $\lim x\to af(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, тогда

$$\lim x\to af(x)g(x)=\{0*\infty\}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\{\frac{0}{0}\}\\ \textbf{или}\\ \lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\{\frac{\infty}{\infty}\}\end{cases}$$

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$, получающаяся в результате алгебраической суммы двух дробей, устраняется или сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем приведения дроби к общему знаменателю.
Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, тогда

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}*\frac{1}{g(x)}}=\{\frac{0}{0}\}$$

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$, получающаяся в результате алгебраической суммы иррациональных выражений, устраняется или сводится к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ путем домножения и деления на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. В случае квадратных корней разность домножается на сопряженное выражение и применяются формулы сокращенного умножения.

1.2.4 Неопределенность вида 1^∞

Применяем второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
Его различные формы: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \{\frac{0}{0}\} = 1$,
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \{\frac{0}{0}\} = \ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \{\frac{0}{0}\} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = \{\frac{0}{0}\} = p$

1.2.5 Неопределенность вида 0^0 или ∞^0

Логарифмируем выражение и используем равенство
$\lim\limits_{x\to x_0} ln(f(x)) = \ln(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$