Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 31.03.2023

1.1 Несобственные интегралы

1.1.1 Первый род

$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

Пример №1 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+8} = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+8} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+8}$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+8} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}$
$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2}\Big|_a^0 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}\frac{a-2}{2}) = \frac{1}{2}(-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a-2}{2}$
$\lim\limits_{a\to-\infty}(-\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\infty)) + \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\infty) - \frac{\pi}{8}) = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi$

Пример №2 $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+(\frac{1}{2})^2)-\frac{9}{4}} = \frac{1}{3}\ln|\frac{x-\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}}|$
$\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{3}\ln|\frac{b-\frac{3}{2}}{b+\frac{3}{2}}| - \frac{1}{3}\ln|\frac{2-\frac{3}{2}}{2+\frac{3}{2}}|) = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{3}\ln|\frac{b-\frac{3}{2}}{b+\frac{3}{2}}| - \frac{1}{3}\ln\frac{1}{7}) = -\frac{1}{3}\ln\frac{1}{7}$

Пример №3 $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x+x^3} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x+x^3} = \ldots$
$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)} = \int(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1})\,\mathrm{d}x = \ldots$
$A(x^2+1) + Bx^2 + Cx = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \\ C=0 \end{cases} \tag{1}$$

$\cdots = \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1})\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \ln|x| - \operatorname{arctg} x$
$\cdots = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x| - \operatorname{arctg}(x))\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|b| - \operatorname{arctg}(b) + \frac{\pi}{4}) = \infty$ — расходящийся интеграл

1.1.2 Второй род

Пусть $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;b)$, в окрестности точки b имеет разрыв второго рода и интегрируема на $[a;b-\epsilon]$ при $\forall\ \epsilon > 0$. Тогда интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ не существует в обычном виде. Поэтому решаем через $\lim\limits_{\to 0+0}\int\limits_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\epsilon\to 0+0}\int\limits_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x,\ x=a$
$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\delta\to 0+0}\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ x=b$
$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{c}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,\ x=c,\ a<c<b$

Пример №1 $\int\limits_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-2}} = \int\limits_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x+2}} + \int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0+0} \int\limits_0^{2-\epsilon} \frac{\mathrm{d}(x-2)}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{2+\delta}^{3} \frac{d(x-2)}{\sqrt[3]{x-2}} = \dots$

$\int (x-2)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3(x-2)^{\frac{2}{3}}}{2} = \lim\limits_{e\to 0+0}(\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^{2-\epsilon}) + \lim\limits_{\delta\to 0+0}(\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}}\Big|_{2+\delta}^{3}) = \lim\limits_{\epsilon\to 0+0}(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\epsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}) + \lim\limits_{\delta\to 0+0}(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\delta^2}) = \frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{4})$

Пример №2 $\int\limits_2^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^2-4}} = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}(x^2-4)}{\sqrt[4]{x^2-4}} = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 (x^2-4)^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}(x^2-4) = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to 2+0}(\frac{4(x^2-4)^{\frac{3}{4}}}{3})\Big|_a^3 = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to 2+0}(\frac{4*(5)^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{4(a^2-4)^{\frac{3}{4}}}{3}) = \frac{2*\sqrt[4]{5^3}}{3}$

1.2 Приближенные вычисления

$z = z(x_0;y_0) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0;y=y_0} * \Delta x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\Big|_{x=x_0;y=y_0} * \Delta y$

Пример №1 $\sqrt{0.99^2 + 1.99^3}$
$z = \sqrt{x^2+y^3}$, $(x_0;y_0) = (1,2)$, $\Delta x = 0.99 - 1 = -0.01$, $\Delta y = 1.99 - 2 = 0.01$
$z(x_0,y_0) = z(1,2) = 3$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1;y=2} = \frac{1*(2x)}{2\sqrt{x^2+y^3}}\Big|_{x=1;y=2} = \frac{1}{3}$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\Big|_{x=1;y=2} = \frac{1*(3y^2)}{2\sqrt{x^2+y^3}}\Big|_{x=1;y=2} = 2$
$z = z(x_0;y_0) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0;y=y_0} * \Delta x + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\Big|_{x=x_0;y=y_0} * \Delta y = 3 + \frac{1}{3} * (-0.01) + 2 * (-0.01) = 3 - 0.0033(3) - 0.02 = 2.976(6)$