Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 29.03.2023 **2**

1.1 Примеры применения признаков сходимости для исследования рядов 2

1.2 Функциональные ряды 2

1.2.1 Сходимость функциональных рядов 2

1.2.2 Почленное интегрирование и дифференцирование рядов 3

1 Высшая математика - 29.03.2023

1.1 Примеры применения признаков сходимости для исследования рядов

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)+1}{((n+1)^2+(n+1))2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{(n^2+n)2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n^2+n)2^n}{(n^2+3n+2)2^n*2(2n+1)} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)3^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n-1)3^n}{(4n+3)3^n*3} = \frac{1}{3} < 1$ — сходится абсолютно

Пример №3 $\sum \frac{(-1)^n}{4n-1}$, $\sum \frac{1}{4n-1} \sim \sum \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \neq 0 \neq \pm\infty$ — нет абсолютной сходимости, есть сходимость по Лейбницу

1.2 Функциональные ряды

$\sum u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x)$, $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Определение 1 ***Областью сходимости функционального ряда*** *называется множество тех значений x, при которых ряд будет сходящимся.*
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Пример №1 $\sum \frac{(x-2)^{2n+1}}{3^n*(n+5)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim |\frac{(x-2)^{2(n+1)+1}*3^n*(n+5)}{3^{n+1}(n+1+5)(x-2)^{2n+1}}| = \frac{1}{3}|x-2|^2 < 1$
$|x-2|^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x-2 < \sqrt{3} \iff 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ — ряд сходится при этих условиях
Отдельно нужно проверить граничные значения:
$x = 2+\sqrt{3}$, $\sum \frac{(2+\sqrt{3}-2)^{2n+1}}{3^n(n+5)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+5} \sim \frac{1}{n}$ — расходящийся
$x = 2-\sqrt{3}$, $\sum \frac{(2-\sqrt{3}-2)^{2n+1}}{3^n(n+5)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+5} \sim \frac{1}{n}$ — тоже расходящийся

1.2.1 Сходимость функциональных рядов

Определение 2 *Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на некотором множестве D, если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_0$, не зависящее от ϵ, что при $n > N_0$, и всех $x \in D$, выполняется следующее неравенство:*

$$|S(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

Если ряд является равномерно сходящимся, то он является и сходящимся

Определение 3 *Функциональный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum |u_n(x)|$

Теорема 1 (Мажорантный признак Вейерштрасса) *Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве D, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами, и при том сходящийся, такой что*

$$|u_i(x)| \leq a_i$$

Для всех $x \in D$

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $|\frac{\cos nx}{3^n}| \leq \frac{1}{3^n}$
$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ — является сходящейся, так что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ является абсолютно и равномерно сходящимся, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ мажорирует данный ряд

Для мажорируемых рядов **справедливы следующие теоремы**:

Теорема 2 *Сумма ряда из непрерывных функций, мажорируемого на $[a;b]$ есть функция, непрерывная на этом отрезке*

1.2.2 Почленное интегрирование и дифференцирование рядов

Теорема 3 (О почленном интегрировании) *Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\dots$ — непрерывные функции и ряд из $u_n(x)$ является мажорируемым на интервале $[a;b]$, $S(x)$ — сумма этого ряда, тогда*

$$\int\limits_a^x s(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^x u_1(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^x u_2(x)\,\mathrm{d}x + \dots + \int\limits_a^x u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Если ряд не является мажорируемым, то почленное интегрирование не всегда возможно.

Теорема 4 (О почленном дифференцировании) $\sum u_n(x)$, *$u_1(x), u_2(x), \dots$ — имеют непрерывные производные на* $[a;b]$
$\sum u_n(x) = S(x)$ *— сумма ряда*
Пусть ряд из производных является мажорируемым на $[a;b]$, тогда сумма ряда из производных будет являться производной от суммы исходного ряда:

$$\sum u_n'(x) = S'(x)$$

Пример №1 $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots = S$
$S\prime(x) = 1 + x^4 + x^8 + \dots + x^{4n-4} + \dots$, $|x| < 1$, геометрическая прогрессия $b_1 = 1$, $q = x^4$
$S\prime(x) = \frac{1}{1-x^4}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^4} = \int \frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)} = \int \frac{1/2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|$ — **искомая сумма ряда**