Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке

$\mu = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$, что значение $f(c) = \mu$
Если $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$ равна площади прямоугольника с основанием $[a,b]$ и высотой $f(c)$

1.1.1 Примеры

Пример №1 Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке $[1;2]$
$\mu = \frac{1}{2-1} \int\limits_1^2 (5x^4 - 2)\,\mathrm{d}x = (x^5 - 2x)\Big|_1^2 = (32 - 4) - (1 - 2) = 29$

1.2 Нахождение точек экстремума и точек перегиба

Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Если f непрерывна в точке x, то $\Phi'(x) = f(x) \implies \Phi''(x) = f'(x)$
$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$
$f'' > 0$ - вогнутая, $f'' < 0$ — выпуклая

1.2.1 Примеры

Пример №1 $\Phi(x) = \int\limits_1^x (t - t^3)\,\mathrm{d}t = (\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4})\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$
$x - x^3 = \Phi'(x) \iff x - x^3 = 0 \iff x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$
Изобразим знаки $\Phi'(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Найдем точки максимума и минимума; $x_{min} = 0$, $x_{max_1} = -1$, $x_{max_2} = 1$
$\Phi(0) = -\frac{1}{4}$ — min, $\Phi(\pm 1) = 0$ — max

$\Phi''(x) = f'(x) = 1 - 3x^2$
$1 - 3x^2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
Изобразим знаки $\Phi''(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Определим, на каких промежутках график функции вогнут, а на каких выпукл.
$\Phi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}$, $\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{9}$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба