Высшая математика

Лисид Лаконский

December 2022

Содержание

1 Высшая математика - 09.12.2022

1.1 Функции нескольких переменных

Для функций нескольких переменных существуют лишь частные производные; пусть $z = z(x; y)$, то $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{z(x+\Delta x, y) - z(x,y)}{\Delta x}$;
$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y+\Delta y) - z(x,y)}{\Delta y}$

Пусть $z = 2xy + xy^3$. тогда $\frac{\delta z}{\delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)y + (x+\Delta x)y^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x to 0} \frac{2xy + 2\Delta xy + xy^3 + \Delta xy^3 - 2xy - xy^3}{\Delta x} = 2y + y^3$;
$\frac{\delta z}{\delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{2x(y+\Delta y) + x(y+\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} =$
$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{2xy + 2x\Delta y + xy^3 + 3xy^2\Delta y + 3xy(\Delta y)^2 + x(\Delta y)^3 - 2xy - xy^3}{\Delta y} =$
$\lim\limits_{\Delta y \to 0} 2x + 3xy^2 + 3xy\Delta y + x(\Delta y)^2 = 2x + 3xy^2$

1.1.1 Полный дифференциал

$du = \frac{\delta u}{\delta x}\delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\delta y$ — **полный дифференциал** функции от двух переменных

Применение полного дифференциала к вычислению приближенных значений

$f(x + \Delta x) = f(x) + \delta f \approx f(x_0) + df$
Например, нам нужно вычислить $1.04^{2.02}$, тогда составим функцию
$z = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\delta x = dx = 0.04$, $\delta y = dy = 0.02$
$z(1.04; 2.02) \approx z(1; 2) + dz = 1 + \frac{\delta z}{\delta x}dx + \frac{\delta z}{\delta y}dy = 1 + yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy =$
$1 + 2 * 1 * 0.04 + 1^2 \ln 1 * 0.02 = 1.08$

1.1.2 Частные производные

Частные производные $\frac{\delta z}{\delta x}$ и $\frac{\delta z}{\delta y}$ тоже являются функциями, и поэтому от них можно брать частные производные.

Теорема 1 *Если функция и ее частные производные определены и непрерывны в точке M и некоторой ее окрестности, то в этой точке выполняется условие:* $\frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta z}{\delta y}) = \frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta z}{\delta x})$

Порядок взятия частных производных не имеет значения:

$$\frac{\delta^n z}{\delta x^k \delta y^{n-k}} = \frac{\delta^n z}{\delta y^{n-k} \delta x^k}$$

1.1.3 Производная функции, заданной неявно

Теорема 2 *Пусть непрерывная функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, причем сама эта функция и ее первые производные — непрерывные функции в некоторой области, $F'_y \neq 0$ в интересующей нас точке, тогда* $y'_x = \frac{-F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

Например, у нас есть функция $x^2 + x \sin y = 0$ ($F(x, y) = x^2 + x \sin y$), тогда возьмем производные по x и y: $F'_x = 2xy + \sin y$, $F'_y = x^2 + x \cos y$, $y'_x = -\frac{2xy+\sin y}{x^2+x\cos y}$

1.1.4 Производная сложной функции и понятие полной производной

Пусть $z = z(u; v)$, $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, и существуют непрерывные частные производные z по $u; v$, u, v по $x; y$, тогда мы можем рассматривать z как функцию от x и y: $z = z(u(x, y), v(x, y))$, но не всегда так делать целесообразно и поступать лучше следующим образом:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta z}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta z}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta z}{\delta u}\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta z}{\delta v}\frac{\delta v}{\delta y}$$

Но функция может быть и от большего количества переменных:
$z = z(x; y; t)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, по аналогии $z = z(x(t), y(t), t)$ — есть зависимость лишь от t, можно говорить о полной производной:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\delta z}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\delta z}{\delta t}$$

Например, $z = u\sqrt{v} + vu^2$, $u = \sin(x + y)$, $v = \sqrt{x^2 + y}$, $\frac{\delta z}{\delta u} = \sqrt{v} = 2vu$,
$\frac{\delta z}{\delta v} = \frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2$, $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \cos(x + y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}}$, $\frac{\delta v}{\delta y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$
$\frac{\delta z}{\delta x} = (\sqrt{v} + 2vu)\cos(x + y) + (\frac{u}{2\sqrt{v}} + u^2) * \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}$

Другой не менее славный пример: $z = te^{x-2y} + xt^2$, $x = \sin t$, $y = t^3$, мы желаем посчитать $\frac{\delta z}{\delta t}$, для этого посчитаем много различной фигни:
$\frac{\delta z}{\delta x} = te^{x-2y} + t^2$, $\frac{\delta z}{\delta y} = te^{x-2y}(-2)$, $\frac{\delta z}{\delta t} = e^{x-2y} + 2xt$,
$\frac{\delta z}{\delta t} = (te^{x-2y} + t^2)\cos t - 2te^{x-2y} * 3t^2 + e^{x-2y} + 2xt$

1.1.5 Производная по направлению

Пусть D — некоторое пространство, определяющееся функцией $u = u(x; y; z)$, и т. $M(x; y; z)$, т. $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ лежат в данном пространстве, от нее отложен некоторый $\vec{S} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, при этом
$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$
$\Delta u = \frac{\delta u}{\delta x}\Delta x + \frac{\delta u}{\delta y}\Delta y + \frac{\delta u}{\delta z}\Delta z + E_1\Delta x + E_2\Delta y + E_3\Delta z$
$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\Delta y}{\Delta S} + \frac{\delta u}{\delta z}\frac{\Delta z}{\Delta S} + \ldots$
$\frac{\delta u}{\delta s} = \lim\limits_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\delta u}{\delta x}\cos\alpha + \frac{\delta u}{\delta y}\cos\beta + \frac{\delta u}{\delta z}\cos\gamma$

Пример $M\vec{M_1} = \{3;4\} = \{\frac{3}{5};\frac{4}{5}\}$, $\mu = \frac{1}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5}$
Пусть $u(x;y) = x^2 + 3\sqrt{y}$, т. $M(1;1)$, т. $M_1(4;5)$; $M \to M_1$ в точке M, в этой точке $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x = 2$, $\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{3}{2\sqrt{y}} = \frac{3}{2}$

1.1.6 Градиент функции

В каждой точке области D, в которой задана функция $u = u(x, y, z)$, определим вектор, координатами которого являются значения частных производных, и назовем его **градиентом функции**:

$$gradu = \frac{\delta u}{\delta x}\overrightarrow{c} + \frac{\delta u}{\delta y}\overrightarrow{j} + \frac{\delta u}{\delta z}\overrightarrow{k}$$

$\frac{\delta u}{\delta s} = \text{Пр}_{\overrightarrow{s}}(gradu)$ — производная по направлению в данной точке имеет наибольшее значение, если направление $\overrightarrow{s}$ совпадает с направлением градиента функции, равное модулю этого градиента.

1.1.7 Локальный экстремум функции двух переменных

Функция $z = z(x;y)$ **имеет локальный максимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $z(x_0,y_0) > z(x,y)$ в окрестности точки $M(x,y) \neq M_0(x_0,y_0)$, но достаточно близких к ней.
Функция $z = z(x;y)$ **имеет локальный минимум** в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $z(x_0,y_0) < z(x,y)$ в окрестности точки $M(x,y) \neq M_0(x_0,y_0)$, но достаточно близких к ней.

Теорема 3 (необходимое условие локального экстремума) *Если функция $z(= zx;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0,y_0)$, то каждая частная производная или обращается в ноль в этой точке, или не существует: $\frac{\delta z}{\delta x} = 0$, $\frac{\delta z}{\delta y} = 0$ (*), и такие точки называются стационарными (точками возможного экстремума)*

Теорема 4 (достаточное условие локального экстремума) *Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, выполнены условия (*), и функция $z = z(x;y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно: $A = \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $B = \frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $C = \frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$,*
$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, то если $\Delta > 0$ — экстремум есть ($A(C) < 0$ — максимум, $A(C) > 0$ — минмум), $\Delta < 0$ — экстремума не существует, $\Delta = 0$ — спорный случай, который стоит рассматривать отдельно