# Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

## Содержание

# 1 Высшая математика — 10 мая 2023 г.

## 1.1 Восстановление функции

Вернемся к рассмотрению предыдущего примера, $u = x^3 - 3xy^2$
Мы восстановили исходную функцию: $w = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) + C$
Перепишем ее: $w(z) = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 + C = (x+iy)^3 + C = z^3 + C$

$f(z_0) = C_0$
$f(z) = 2u(\frac{z+\overline{z_0}}{2}; \frac{z-\overline{z_0}}{2i}) - \overline{c_0}$
$f(z) = 2iv(\frac{z+\overline{z_0}}{2}; \frac{z-\overline{z_0}}{2i}) - \overline{c_0}$

$v(x,y) = 3x + 2xy$
Начальные условия: $f(-i) = 2$
Проверим, что функция является гармонической: $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 0$
$z_0 = -i$, $c_0 = 2$, $\overline{z_0} = i$, $\overline{c_0} = 2$
$x \to \frac{z+i}{2}$; $y \to \frac{z-i}{2i}$
$f(z) = 2i(3 * \frac{z+i}{2} + 2 * \frac{z+i}{2} * \frac{z-i}{2i}) + 2 = 3i(z+i) + (z-i)(z+i) + 2 = z^2 + 3iz$

## 1.2 Нахождение области аналитичности и производной

$f(z) = \frac{z}{e^z} = ze^{-z} = z * e^{-(x+iy)} = z * e^{-x} * e^{-iy} = \frac{x+iy}{e^x}(\cos y - i\sin y) = \frac{x\cos y}{e^x} + \frac{iy\cos y}{e^x} - \frac{ix\sin y}{e^x} + \frac{y\sin y}{e^x}$
$u = \frac{x\cos y}{e^x} + \frac{y\sin y}{e^x}$, $v = \frac{y\cos y}{e^x} - \frac{x\sin y}{e^x}$
$\frac{\delta u}{\delta x} = \cos y(e^{-x} - xe^{-x}) - y\sin ye^{-x}$, $\frac{\delta v}{\delta y} = e^{-x}(\cos y - y\sin y) - xe^{-x}\cos y$
$\frac{\delta u}{\delta y} = xe^{-x}(-\sin y) + e^{-x}(\sin y + y\cos y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = -ye^x\cos y - \sin y(e^{-x} - xe^{-x})$
Условия Коши-Римана выполнены на всей комплексной области, **функция является аналитической**.
$f'(z) = e^{-z} - ze^{-z}$

## 1.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, то модуль от этой производной $k = |f'(z_0)|$ — коэффициент растяжения при отображении на $w$, $k > 1$ — растяжение, $k < 1$ — сжатие
$\phi = arg\ f'(z_0)$ равен углу, на который нужно развернуть касательную в точке $z_0$ к любой гладкой кривой, проходящей через $z_0$, чтобы получить касательную к образу этой кривой при данном отображении, $\phi > 0$ — поворот против часовой стрелки, $\phi < 0$ — поворот по часовой стрелке

## 1.4 Интегрирование функций комплексного переменного

$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \lim \sum f(\xi k)\Delta Z_k$, $max\ \Delta \to 0$

$f = u(x,y) + iv(x,y)$
$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_L u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int\limits_L v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$
Интеграл, вообще говоря, зависит от пути интегрирования $L$ (как криволинейный интеграл)

Свойства интегралов:

1. $\int\limits_L (c_1f_1(z) + c_2f_2(z))\,\mathrm{d}z = c_1\int f_1(z)\,\mathrm{d}z + c_2\int f_2(z)\,\mathrm{d}z$
2. $\int ABf(z)\,\mathrm{d}z = -\int -BAf(z)\,\mathrm{d}z$
3. $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CA}^{BA}$

В случае аналитической функции **интеграл не будет зависеть от пути интегрирования**, а только от конечного и начального значения.
$\int\limits_A^B f(z)\,\mathrm{d}z = \Phi(B) - \Phi(A)$
Интеграл по замкнутому контуру для аналитических функций равен нулю

**Пример №1** $f(z) = xe^x\cos y - y^2e^x\sin y + i(ye^x\cos y + xe^x\sin y)$, $u = xe^x\cos y - ye^x\sin y$, $v = ye^x\cos y + xe^x\sin y$
$\frac{\delta u}{\delta x} = (e^x + xe^x)\cos y - ye^x\sin y$, $\frac{\delta v}{\delta y} = e^x(\cos y - y\sin y) + xe^x\cos y$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -xe^x\sin y - e^x(\sin y + y\cos y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = e^x y\cos y + (e^x + xe^x)\sin y$
$\int\limits_{z=1}^{z=i} z * e^z\,\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} u = z & \mathrm{d}v = e^z\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}z & v = e^z \end{vmatrix} = z * e^z - \int e^z\,\mathrm{d}z = (ze^z - e^z)\Big|_{z=1}^{z=i} = ie^i - e^i - e^1 + e^1 = e^i(i-1)$

### 1.4.1 Теорема Коши

Пусть в односвязной области $G$ задана однозначная аналитическая функция $f(z)$
Тогда интеграл по любому замкнутому контуру, целиком лежащим в этой односвязной области, будет равен нулю:
$\int f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

**Определение 1** ***Положительным направлением обхода*** *мы называем направление, при котором область все время остается слева.*

### 1.4.2 Интегральная формула Коши

Если $f(z)$ является аналитической в области $D$, ограниченной кусочно-замкнутым контуром $C$, то справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

**Пример №1** $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}\,\mathrm{d}z}{z^2-z} = \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}\,\mathrm{d}z}{z(z-1)} = \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{1/z}}{z}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i * \frac{e}{1} = 2\pi ie$

**Пример №1** $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+3)(z-1)}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi i}{2}$