Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Высшая математика - 26 апреля 2023 г.

1.1 Функции комплексных переменных

Определение 1 *Говорят что в области D определена функция $w = w(z)$, если каждой точке из области D поставлено в соответствие одно или несколько значений данной функции.*
Функция осуществляет отображение точек из плоскости Oxy на плоскость Uov

$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Пример №1 $w = 3z^2 - \overline{z} = 3(x + iy)^2 - (x - iy) = 3(x^2 + 2ixy - y^2) - (x - y) = (3x^2 - 3y^2 - x) + i(6xy + y)$

Если на плоскости XoY задана какая-либо область, то мы можем каждую точку этой области превратить в ее образ на плоскости UoV

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \text{ — кривая, задающая границы области} \\ u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

Из этих уравнений исключить x и y и записать выражение, связывающее u и v

Пример №2 На какую линию на плоскости UoV отобразится окружность $|z| = \frac{1}{2}$ при применении функции $w = \frac{1}{z}$
$w = \frac{1}{(x+iy)} \frac{x-iy}{(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{(-y)}{x^2+y^2}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$u^2 + v^2 = (\frac{x}{x^2+y^2})^2 + (-\frac{y}{x^2+y^2})^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$
$u^2 + v^2 = 4$

1.1.1 Предел функции комплексного переменного

Определение 2 *Окрестностью точки z_0 в плоскости комплексной переменной называют область, содержащую эту точу*

$A = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
$\forall \epsilon > 0$ $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ что для всех $z \in \delta$ — окрестность выполняется условие $|f(z) - A| < \epsilon$

Существование $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, где $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ равносильно существованию двух пределов:

1. $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} \lim u(x, y)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} \lim v(x, y)$

Так что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} \lim u(x, y) + i \lim\limits_{x \to x_0, y \to y_0} \lim v(x, y)$

Пример №1 $\lim\limits_{z \to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i} = \lim\limits_{z \to -i} \frac{(z+i)(z+2i)}{z+i} = \lim\limits_{z \to -i} (z + 2i) = i$

1.1.2 Дифференцирование функций комплексного переменного

Пусть $w(z)$ определена в некоторой области D, обозначим $\Delta Z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = w(z+\Delta z) - w(z)$
Функция $w(z)$ **называется дифференцируемой** в точке $z \in D$, если $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при $\Delta z \to 0$ произвольным образом
$w'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$

Если $z = x + iy$, $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости **выполнены условия Коши-Римана**:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}\,; \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

Пример №1 $w = 2z - 3$
$w = 2(x+iy) - 3 = (2x-3) + i2y$
$\frac{\delta u}{\delta x} = 2,\ \frac{\delta u}{\delta y} = 0,\ \frac{\delta v}{\delta y} = 2,\ \frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что в каждой точке выполняется условие **Коши-Римана**

Пример №2 $w = 2z - 3\overline{z}$
$w = 2(x+iy) - 3(x-iy) = (2x-3x) + i(2y+3y) = -x + i5y$
$\frac{\delta u}{\delta x} = -1,\ \frac{\delta u}{\delta y} = 0,\ \frac{\delta v}{\delta y} = 5,\ \frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что **условия Коши-Римана не выполняются** — следовательно, в функции нет ни одной точки, где она дифференцируема

Пример №3 $w = z * \overline{z}$
$w = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 + i0$
$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x,\ \frac{\delta u}{\delta y} = 0,\ \frac{\delta v}{\delta y} = 2y,\ \frac{\delta v}{\delta x} = 0$ — видим, что функция **дифференцируема лишь в одной точке**, $z = 0$

1.1.3 Основные элементарные функции комплексного переменного

1. **Дробно-линейная функция** $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots b_m}$
2. **Показательная функция** $e^z = e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
   $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} * e^{z_2}$
   $e^{z+2\pi k * i} = e^z$ — периодическая функция с периодом $2\pi i$

Формулы Эйлера:

1. $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2. $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$
3. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
4. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
5. $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$

Гиперболические ункции:

1. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
2. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
3. $\sin z = -i \sinh(iz)$
4. $\sinh z = -i \sin(iz)$
5. $\cos z = \cosh(iz)$
6. $\cosh z = \cos(iz)$
7. $\operatorname{tg} z = -\tanh(iz)$
8. $\tanh = -i \operatorname{tg}(iz)$
9. $\coth z = i \operatorname{ctg}(iz)$
10. $\operatorname{ctg} z = i \coth(iz)$

$Ln\ z = \ln|z| + i\ Arg\ z = \ln|z| + i\ arg\ z + 2\pi k i,\ k = 0; \pm 1; \pm 2$
$Lnz = \ln z + 2\pi k i$

$Arcsin\ z = i(Ln(iz + \sqrt{1 - 2^2}))$
$Arccos\ z = -i(Ln(z + \sqrt{z + \sqrt{2^2 - 1}}))$
$Arctg\ z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1+iz}{1-iz}$

Пример №1 $w = z * e^z$
$w = (x+iy)e^x e^{iy} = (x+iy)e^x(\cos y + i\sin y) = e^x(x+iy)(\cos y + i\sin y) = e^x(x\cos y + iy\cos y + ix\sin y + i^2 y\sin y) =$
$e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(y\cos y + x\sin y)$
Получаем $u = e^x(x\cos y - y\sin y)$, $v = e^x(y\cos y + x\sin y)$

1. $\frac{\delta u}{\delta x} = e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)$
2. $\frac{\delta v}{\delta y} = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y)$
3. $\frac{\delta u}{\delta y} = e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y)$
4. $\frac{\delta v}{\delta x} = e^x(y\cos y + x\ siny + \sin y)$

Для данной функции условия Коши-Римана выполняются во всех точках комплексной плоскости.

Если в некоторой точке $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана, то функция $w = u + iv$ **является дифференцируемой** в точке $z = x + iy$
Если же точка является дифференцируемой в точке и некоторой ее окрестности, то в этой точке функция называется **аналитической**