Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 17.02.2023 **2**
1.1 Подстановки Эйлера 2
1.2 Определенный интеграл 2
1.2.1 Определение и геометрическое значение 2
1.2.2 Основные свойства определенного интеграла 2
1.2.3 Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница 3
1.2.4 Замена переменной в определенном интеграле 3
1.2.5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле 3
1.2.6 Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральных функций 4

1 Высшая математика - 17.02.2023

1.1 Подстановки Эйлера

$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$

1. Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
2. Если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$
3. $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, a — действительный корень, то можно выполнить замену $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$, аналогичную замену можно провести, если β — действительный корень

Пример. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3} = (*)$

Решим квадратное уравнение: $x^2 - 7x - 10 = 0 \iff (x-2)(x-5) = 0$
$\sqrt{-(x-2)(x-5)} = (x-2)t \iff (x-2)(5-x) = (x-2)^2t^2 \iff (5-x) = xt^2 - 2t^2$
Отсюда выразим $x = \frac{2t^2+5}{t^2+1}$, $\mathrm{d}x = \frac{4t(t^2+1)-(2t^2+5)2t}{(t^2+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{-6t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = (\frac{2t^2+t}{t^2+1} - 2)t = \frac{2t^2+5-2t^2-2}{t^2+1} = \frac{3t}{t^2+1}$

$(*) = \int \frac{\frac{2t^2+5}{t^2+1}\frac{(-6t)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}}{(\frac{3t}{t^2+1})^3} = \int \frac{(2t^2+5)\,\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{2}{9}\int(2+\frac{5}{t^2})\,\mathrm{d}t = -\frac{2}{9}(2t - \frac{5}{t}) + C,\ \ t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$

1.2 Определенный интеграл

1.2.1 Определение и геометрическое значение

Определение 1 *Если при любых разбиениях отрезка* $[a;b]$ *таких, что наибольшее значение* $\Delta X_i \to 0$ *и любом выборе точек* ξ_i *существует* $\lim\limits_{max\ \Delta X_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, *то он называется определенным интегралом* $S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(a < b)$
Если этот предел существует, то функция считается интегрируемой на отрезке $[a;b]$
Если $b < a$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Определённый интеграл от неотрицательной функции $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **численно равен площади фигуры**, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x)$

1.2.2 Основные свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int\limits_a^b (f_1 \pm f_2)\,\mathrm{d}x = \int f_1\,\mathrm{d}x \pm \int f_2\,\mathrm{d}x$
3. Если $f(x) \le g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
4. Если m и M — наименьшее и наибольшее $f(x)$ на $[a;b]$ $(a \le b)$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$
5. **Теорема о среднем**. Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ $\exists\, C \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c)$
6. При любом расположении a, b и c справедливо $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

1.2.3 Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1 *Если* $f(x)$ — *непрерывная функция,* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$*, то имеет место* $\Phi'(x) = f(x)$

Теорема 2 (Формула Ньютона-Лейбница) *Если* $F(x)$ — *какая-либо первообразная для* $f(x)$*, то справедливо* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)b$

Пример 1. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = (*)$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$

$(*) = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Пример 2. $\int\limits_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x = (x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 + (\frac{x^2}{2} - x)\Big|_1^2 = 1$

1.2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 3 *Пусть дан интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, где* $f(x)$ — *непрерывная на* $[a;b]$ *функция*
Вводим t*, исходя из формулы* $x = \phi(t)$*. Если*

1. $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$
2. ϕ, ϕ' *непрерывна на* $[a;b]$
3. $f(\phi(t))$ *определена и непрерывна на* $[\alpha;\beta]$

то $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$

Пример 1. $\int\limits_2^4 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+4x}} = (*)$, выполним замену $t = \sqrt{2+4x} \implies x = \frac{t^2-2}{4}$, $\mathrm{d}x = \frac{t\,\mathrm{d}t}{2}$

$(*) = \int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} (t^2-2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}(\frac{t^3}{3} - 2t)\Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} = \frac{1}{8}(\frac{18\sqrt{18}}{3} - 2\sqrt{18} - \frac{6\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Пример 2. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = (*)$, выполним замену $t = \frac{1}{x} \implies x = \frac{1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

$(*) = \int\limits_{4/3}^{3/4} \frac{-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = \int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{t}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}} = \ln|t + \sqrt{1+t^2}|\Big|_{3/4}^{4/3} = \ln|\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}} - \ln|\frac{3}{4} + \sqrt{1+\frac{9}{16}}| = \int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int\limits_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} (t^2-2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}(\frac{t^3}{3} - 2t)\Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{18}} = \ln\frac{3}{2}$

1.2.5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

$\int\limits_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b u'v\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b uv'\,\mathrm{d}x$

$\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$

Пример 1. $\int\limits_0^{\pi/4} x\cos 2x\,\mathrm{d}x = (*)$, пусть $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

$(*) = [x * \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x]\Big|_0^{\pi/4} = [\frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x]\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} * 1 - 0 + 0 - \frac{1}{4} * 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

1.2.6 Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральных функций

1. Если функция $f(x)$ является четной на симметричном интервале $[-a; a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. Если $f(x)$ является нечетной на $[-a; a]$, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
3. Если $f(x)$ является периодической функцией (то есть, $f(x) = f(x+T)$), то $\int\limits_{a}^{b} = \int\limits_{a+nT}^{b+nT} f(x)\,\mathrm{d}x$