

Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1	Высшая математика - 01.02.2023	2
1.1	Дифференциал функции	2
1.1.1	Инвариантность формы дифференциала первого порядка	2
1.2	Первообразная и неопределенный интеграл	2
1.2.1	Свойства неопределенного интеграла	2
1.2.2	Таблица неопределенных интегралов	2
1.2.3	Метод подведения под знак дифференциала	3
1.2.4	Метод замены переменной в неопределенном интеграле	3
2	Высшая математика - 08.02.2023	4
2.1	Метод интегрирования по частям	4
2.2	Рекуррентные формулы	4
2.2.1	Рекуррентная формула №1	4
2.2.2	Рекуррентная формула №2	4
2.2.3	Рекуррентная формула №3	5
2.3	Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен	5
2.3.1	Пример №1	5
2.3.2	Пример №2	5
2.3.3	Пример №3	5
2.4	Интегрирование рациональных дробей	5
3	Высшая математика - 13.02.2023	6
3.1	Интегрирование по частям	6
3.2	Интегрирование многочленов	6
3.3	Задания	6
3.3.1	Задание №1	6
3.3.2	Задание №2	6
3.3.3	Задание №3	6
3.3.4	Задание №4	6
3.3.5	Задание №5	6
3.3.6	Задание №6	6
3.3.7	Задание №7	6
3.3.8	Задание №8	7
4	Высшая математика - 14.02.2023	8
4.1	Задание №6	8
4.2	Задание №9 — задание №11	8
5	Высшая математика - 14.02.2023	9
5.1	Интегрирование рациональных дробей	9
5.2	Интегрирование дробно-степенных функций	9
5.3	Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций	9
5.4	Интегрирование тригонометрических функций	10
5.4.1	Универсальная тригонометрическая подстановка	10

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Дифференциал функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \text{ где } \alpha \text{ — бесконечно малая}$$
$$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\delta f \text{ дифференциал}} + \alpha(x)\Delta x$$

Определение 1 *Дифференциалом* функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx

Дифференциал независимой переменной: $\delta x = \Delta x$

1.1.1 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

$$\delta f = f'(x)\Delta x$$

Если $f = f(u(x))$, то $\delta f = f'_u u'_x \delta x = f'(u)\delta u$

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 2 Функция $F(x)$ называется *первообразной* от $f(x)$ на $[a; b]$, если на всех точках данного отрезка выполняется условие, что $F'(x) = f(x)$

Теорема 1 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные для $f(x)$ на некотором отрезке, то $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$
Следовательно, $F(x) + C$ — также первообразная для данной функции

$\int f(x) dx = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$
3. $\int d(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$
5. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$
6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то
 7. $\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C$
 8. $\int f(x + b) dx = F(x + b) + C$
 9. $\int f(\alpha x + b) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C$
7. $\int \text{tg } x dx = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \text{ctg } x dx = \ln |\sin x| + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Метод подведения под знак дифференциала

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \int f(y) dy = F(y) + C$$
$$\int f(y(x)) d(y(x)) = F(y(x)) + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \int (x+5)^2 d(x+5) = \frac{(x+5)^3}{3} + C, \int (\sin t)^2 d(\sin t) = \frac{(\sin t)^3}{3} + C$$

Но если нам нужно найти $\int (2x+7)^2 dx$, то **преобразуем** следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int (2x+7)^2 2 dx = \frac{1}{2} \int (2x+7)^2 d(2x+7) = \frac{1}{2} \frac{(2x+7)^3}{3} + C, \text{ так как } d(2x+7) = 2 dx$$

Первый пример $\int \sqrt{x+7} dx = \int \sqrt{x+7} d(x+7) = \frac{2}{3} (x+7)^{\frac{3}{2}} + C$

Второй пример $\int x\sqrt{x^2+7} dx, d(x^2+7) = 2x dx, \int x\sqrt{x^2+7} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+7} d(x^2+7) = \dots$

Третий пример $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3} \ln|3x+5| + C, \text{ так как } d(3x+5) = 3 dx$

Четвертый пример $\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C, \text{ так как } d(x^2+1) = 2x dx$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5) dx}{x^2+5x+11} = \int \frac{d(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln|x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \arctg(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C, d(\sin x) = \cos x dx$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C, d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos dx$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x) dx$, можем выполнить замену: $\left| \begin{array}{l} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$

Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2} dx$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t, dx = \cos t dt$, тогда
 $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \dots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\dots = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C = \dots$
Выполним **обратную замену**: $\dots = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, так как $t = \arcsin x, x = \sin t, dx = \cos t dt$,
 $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \int \frac{x dx}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \arctg t + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C$

Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C$, так как $d(x^2) = 2x dx$

Третий пример $\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \iff x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = \int e^t * \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

2 Высшая математика - 08.02.2023

2.1 Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то

за u выбирают многочлен, dv — все, что осталось

Пример $\int (3x+1) \cos 5x dx = \frac{(3x+1)}{5} \sin 5x - \frac{3}{5} \int \sin 5x dx = \frac{(3x+1)}{5} \sin 5x + \frac{3}{25} \cos 5x + C$
 $du = 3dx, v = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x$

Другой пример $\int (3x^2+1) \cos 5x dx = \frac{(3x^2+1)}{5} \sin 5x + \frac{6}{5} \int x \sin 5x dx$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то

за u выбирают функцию, а dv — все остальное

Пример $\int (3x^2+5) \ln x dx = (\frac{x^3}{3}+5x) \ln x - \int (\frac{x^3}{3}+5x) \frac{dx}{x} = (\frac{x^3}{3}+5x) \ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
 $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du, dv = (x^2+5) dx \Rightarrow v = \int (x^2+5) dx = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то

не имеет значения, что выбрать за u , а что за dv , но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно

Пример $\int \sin 5x e^x dx = \sin 5x * e^x - 5 \int \cos 5x * e^x dx = \dots$

Пусть $u = \sin 5x \Rightarrow du = 5 \cos 5x dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Rightarrow du = -5 \sin 5x dx, v = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\dots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5x e^x + 5 \int \sin 5x e^x dx)$

$y = (\sin 5x - 5 \cos 5x) e^x - 25y \Leftrightarrow 26y = (\dots) e^x \Leftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5 \cos 5x) e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5x e^x dx$

Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам $\int \sqrt{1-x^2} dx = \dots$, пусть

$u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow du = \frac{1(-2x) dx}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = dx \Rightarrow v = x$

$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int \sqrt{1-x^2} dx$, тогда

$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Leftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}$

2.2 Рекуррентные формулы

2.2.1 Рекуррентная формула №1

$$y_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \dots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1} dx$, а $dv = dx \Rightarrow x = v$

$\dots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \Rightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, y_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$

$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2 y_{n+1} \Leftrightarrow 2na^2 y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} y_n -$
рекуррентная формула

Например, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$

2.2.2 Рекуррентная формула №2

$$y_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$$

$$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1) \cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} y_{n-2,-m}$$

2.2.3 Рекуррентная формула №3

$$y_n = \int (a^2 - x^2)^n dx$$
$$y_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} y_{n-1}$$

2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$$

2.3.1 Пример №1

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

2.3.2 Пример №2

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|, \text{ так как } (2x+3)dx = d(x^2+3x+5) + C$$

2.3.3 Пример №3

$$\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{dx+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C$$

2.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a+ib$, $a-ib$

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - x(a+ib) - x(a-ib) + (a^2 - (ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x^2 + px + q)$$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей

Виды элементарных дробей:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1. $\frac{1}{x-a}$ | 2. $\frac{1}{(x-a)^n}$ |
| 3. $\frac{1}{x^2+px+1}$ | 4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$ |

Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей:

- Если знаменатель имеет только действительные различные корни
То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (**метод неопределенных коэффициентов**)
Собираем коэффициенты при x : $A+B=2$, при свободных членах: $5A-4B=-3$, **решаем данную систему любым удобным нам способом**, получается $A=\frac{5}{9}$, а $B=2-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}$
 $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} dx = \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x-4} + \frac{13}{9} \int \frac{dx}{x+5} = \frac{5}{9} \ln|x-4| + \frac{13}{9} \ln|x+5|$
- Если знаменатель имеет действительные кратные корни
То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$
- Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
 $\int \frac{Ax+B}{x^2+1} dx = A \int \frac{x dx}{x^2+1} + B \int \frac{dx}{x^2+1} = \dots$
- Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$

3 Высшая математика - 13.02.2023

3.1 Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Допустим, имеем $\int x e^{-3x} dx$, представим за u ту функцию, от которой проще взять производную; $u = x$, $dv = e^{-3x} dx$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-3x} dx \\ 1 * du = 1 * dx & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{array} \right| = -\frac{x e^{-3x}}{3} = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{1}{3} * \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + C = -\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{9} + C$$

3.2 Интегрирование многочленов

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{4x^2-6x+10} dx &= \int \frac{\frac{5}{8}(8x-6)+\frac{43}{4}}{4x^2-6x+10} dx = \frac{5}{8} \int \frac{8x-6}{4x^2-6x+10} dx + \frac{43}{4} \int \frac{dx}{4x^2-6x+10} \\ (4x^2-6x+10) &= 4(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}) = \frac{43}{16} \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \dots \text{ (табличное значение,} \\ &\text{тривиально посчитать дальше)} \end{aligned}$$

3.3 Задания

3.3.1 Задание №1

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x * \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

3.3.2 Задание №2

$$\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}$$

3.3.3 Задание №3

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x-3)-2}{(x-3)+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$$

3.3.4 Задание №4

$$\begin{aligned} \text{Один вариант} \quad \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ \frac{3}{2} \ln |\sqrt{t}| + C_1 + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C_2 &= \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2-x+1}| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-3x^2}} dx =$$

$$\text{Еще другой вариант} \quad \int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \int \frac{2x+6}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}} dx =$$

3.3.5 Задание №5

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{\frac{x}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2x dx = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4 \int e^{\frac{x}{2}} * x dx = \left| \begin{array}{l} x = u \\ e^{\frac{1}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = dx \\ v = 2e^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = \\ x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4(2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} dx) &= x^2 2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 15e^{\frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

3.3.6 Задание №6

$$\text{Один вариант} \quad \int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int e^{-2x} \sin x dx$$

3.3.7 Задание №7

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1-x) & du = -\frac{1}{1-x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = \ln(1-x) * x + \int x * \left(-\frac{1}{1-x}\right) dx = x \ln(1-x) - \int \frac{-x}{1-x} dx = \\ x \ln(1-x) - \int \frac{1-x+1}{1-x} dx &= x \ln(1-x) - \int \frac{1-x}{1-x} * x + \int \frac{dx}{-1+x} = x \ln(1-x) - x + \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

3.3.8 Задание №8

$$\int x \sin^2 4x \, dx$$

4 Высшая математика - 14.02.2023

4.1 Задание №6

$$\int e^{\frac{x}{2}} \cos 5x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{x}{2}} \quad dv = \cos 5x \, dx \\ du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \quad v = \frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| = e^{\frac{x}{2}} \frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{x}{2}} \quad dv = \cos 5x \, dx \\ du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \quad v = \frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| =$$
$$\frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx \right) = \frac{\cos 5x}{5} - \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{50} + \frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx$$

Дальше все решается тривиально: переносим $\frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx$ в левую сторону, что-то вроде того

4.2 Задание №9 — задание №11

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2} \, dx = \int \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = (*)$$

Сделаем из данной дроби правильную дробь, выполнив деление числителя на знаменатель:

$$(*) = \int (x^3 + 2x^2 + 6x + 10) \, dx + \int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = (*)$$

$$\int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \iff \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, dx = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \iff 17x^2 - 10x + 1 =$$
$$Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$$
$$\begin{cases} 17 = A + B \\ -10 = -2A - B + C \\ A = 1 \quad B = 16 \quad C = 8 \end{cases}$$

$(*) = \int x^3 \, dx + 2 \int x^2 \, dx + 6 \int x \, dx + 10 \int dx + \int \frac{dx}{x} + 16 \int \frac{dx}{x-1} + 8 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \dots$ (все интегралы табличные, дальнейшее решение тривиально и предоставляется читателю)

5 Высшая математика - 14.02.2023

5.1 Интегрирование рациональных дробей

$$\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$$

$$\frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+4} =$$
$$\frac{Ax^4+4Ax^3+2Ax^2+8Ax+Ax^2+4A+Bx^4+Bx^3+4Bx^2+4Bx+Cx^3+4Cx^2+2Dx^3+Dx^2+Fx^3+2Fx^2+Fx}{x(x+1)^2(x^2+4)} = (*)$$

При x^4 : $A + B + D = 0$

x^3 : $2A + B + C + 2D + F = 0$

x^2 : $5A + 4B + D + 2F = 0$

x : $8A + 4B + 4C + F = 2$

Свободные члены: $4A = -3$

Решение данной системы уравнений оставляется в качестве упражнения читателю, мы же его опустим. Лишь заметим, что ее можно решать как угодно

$$A = -\frac{3}{4}, B = 1, C = 1, D = -\frac{1}{4}$$

$$(*) = \int \frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{d(x+1)}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+4} = -\frac{3}{4} \ln|x| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{8} \ln|x^2+4| + C$$

Данные преобразования могут выполняться лишь с правильными дробями

5.2 Интегрирование дробно-степенных функций

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x в дробных степенях, то мы находим общий знаменатель этих степеней и x в соответствующей степени обозначаем за t

$$1. \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{3}+1}} = \left| \begin{array}{lll} x^{\frac{1}{6}} = t & x = t^6 & dx = 6t^5 dt \\ x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = t^3 & x^{\frac{1}{3}} = t^2 & \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = 6 \int \frac{(t^8-1)+1}{t^2+1} dt = 6 \left(\int \frac{(t^4+1)(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1} + \right.$$
$$\left. \frac{1}{t^2+1} \right) dt = 6 \left(\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}) dt \right) = 6 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctg t \right) + C \Rightarrow 6 \left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \arctg(x^{\frac{1}{6}}) \right) + C$$

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x и дробно-линейной функции в какой-то дробной степени, то $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$, где v — общий знаменатель этих степеней, мы обозначим за t

$$\int R(x, \frac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}), t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$$

$$1. \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} & t^3 = \frac{2-x}{2+x} \\ x = \frac{2-2t^3}{t^3+1} & dx = \frac{-6t^2(t^3+1)-3t^2(2-2t^3)}{(t^3+1)^2} dt = \frac{-12t^2 dt}{(t^3+1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{2t(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}) dt}{(2-\frac{2-2t^3}{t^3+1})^2} = -\frac{24}{16} \int \frac{\frac{t^3 dt}{(t^3+1)^2}}{\frac{t^6}{(t^3+1)^2}} = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3} =$$
$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} + C$$

5.3 Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций

1. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2 + n^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \operatorname{tg} t$

2. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2 - n^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \frac{1}{\cos t}$

3. Если имеем $\int R(x, \sqrt{n^2 - m^2x^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \sin t$

$$\text{Например, } \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| x = 2 \sin t \quad dx = 2 \cos t dt \right| = \int \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3}} = \int \frac{2 \cos t dt}{8 \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t = \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\cos t} =$$

$$\frac{1}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$$

5.4 Интегрирование тригонометрических функций

Если под знаком интеграла стоит произведение тригонометрических функций, то его желательно преобразовать в сумму или разность. Помним из школьного курса тригонометрии:

1. $\sin \alpha * \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
2. $\sin \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
3. $\cos \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

Также бывают полезны формулы понижения степени:

1. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Если имеем $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где n, m — четные степени, то мы понижаем степени до того, как не сможем воспользоваться табличными интегралами

Если m и (или) n нечетно, то мы «откусываем» от нечетной степени и убираем под знак дифференциала

Например,

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x * \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

5.4.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\text{Например, } \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} (2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2*2t}{1+t^2})} = \int \frac{(t^2+1) dt}{t(t^2-4t+3)} = (*)$$

$$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3}$$

Посчитаем так, как считали. Найдем что $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -1$

$$(*) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t-3} = \frac{1}{3} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \frac{5}{3} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1| - \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3| + C$$

Если косинус и синус в дроби входят в виде $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$, то мы можем делать замену не универсальную, а

обозначать $\operatorname{tg} x = z$, $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$