Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Дифференциал функции

$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая
$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\delta f \text{ дифференциал}} + \alpha(x)\Delta x$

Определение 1 ***Дифференциалом*** *функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно* Δx
Дифференциал независимосй переменной: $\delta x = \Delta x$

1.1.1 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

$\delta f = f'(x)\Delta x$
Если $f = f(u(x))$, то $\delta f = f'_u u'_x \delta x = f'(u)\delta u$

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 2 *Функция* $F(x)$ *называется* ***первообразной*** *от* $f(x)$ *на* $[a;b]$, *если на всех точках данного отрезка выполняется условие, что* $F'(x) = f(x)$

Теорема 1 *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *первообразные для* $f(x)$ *на некотором отрезке, то* $F_1(x) - F_2(x) = const$
Следовательно, $F(x) + C$ *— также первообразная для данной функции*

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)\,\mathrm{d}x)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x$
6. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то
   7. $\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(\alpha x) + C$
   8. $\int f(x + b)\,\mathrm{d}x = F(x + b) + C$
   9. $\int f(\alpha x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
9. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
10. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Метод подведения под знак дифференциала

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y) + C$
$\int f(y(x))\,\mathrm{d}(y(x)) = F(y(x)) + C$

$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, $\int (x+5)^2\,\mathrm{d}(x+5) = \frac{(x+5)^3}{3} + C$, $\int (\sin t)^2\,\mathrm{d}(\sin t) = \frac{(\sin t)^3}{3} + C$
Но если нам нужно найти $\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}x$, то **преобразуем** следующим образом:
$\frac{1}{2}\int (2x+7)^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}(2x+7) = \frac{1}{2}\frac{(2x+7)^3}{3} + C$, **так как** $\mathrm{d}(2x+7) = 2\,\mathrm{d}x$

Первый пример $\int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}(x+7) = \frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}} + C$

Второй пример $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(x^2+7) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}(x^2+7) = \ldots$

Третий пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$, так как $\mathrm{d}(3x+5) = 3\,\mathrm{d}x$

Четвертый пример $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$, так как $\mathrm{d}(x^2+1) = 2x\,\mathrm{d}x$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5)\,\mathrm{d}x)}{x^2+5x+11} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln|x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos\mathrm{d}x$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x)\,\mathrm{d}x$, можем выполнить замену: $\begin{vmatrix} x = \phi(t) \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$
Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, тогда
$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \ldots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\cdots = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \ldots$
Выполним **обратную замену**: $\cdots = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, так как $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$,
$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+(x^2)^2} = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$
Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 + C$,
так как $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$

Третий пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sin x = t \Longleftrightarrow x = \arcsin t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{vmatrix} = \int e^t * \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\sin x} + C$

2 Высшая математика - 08.02.2023

2.1 Метод интегрирования по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то
за u выбирают многочлен, $\mathrm{d}v$ — все, что осталось
Пример $\int (3x+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x - \frac{3}{5}\int \sin 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)}{5}\sin 5x + \frac{3}{25}\cos 5x + C$
$du = 3dx$, $v = \int \cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sin 5x$
Другой пример $\int (3x^2+1)\cos 5x\,\mathrm{d}x = \frac{(3x^2+1)}{5}\sin 5x + \frac{6}{5}\int x\sin 5x\,\mathrm{d}x$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то
за u выбирают функцию, а $\mathrm{d}v$ — все остальное
Пример $\int (3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \int (\frac{x^2}{3}+5x)\frac{\mathrm{d}x}{1} = (\frac{x^3}{3}+5x)\ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
$lnx = u \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v = (x^2+5)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = \int (x^2+5)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то
не имеет значения, что выбрать за u, а что за $\mathrm{d}v$, но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно
Пример $\int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x = \sin 5x * e^x - 5\int \cos 5x * e^x\,\mathrm{d}x = \dots$
Пусть $u = \sin 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = 5\cos 5x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Longrightarrow \mathrm{d}u = -5\sin 5x\,\mathrm{d}x$,
$v = e^x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow v = e^x$
$\dots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5xe^x + 5\int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x)$
$y = (\sin 5x - 5\cos 5x)e^x - 25y \Longleftrightarrow 26y = (\dots)e^x \Longleftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5\cos 5x)e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5xe^x\,\mathrm{d}x$

Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \dots$, пусть
$u = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow \mathrm{d}u = \frac{1(-2x)\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = \mathrm{d}x \Longrightarrow v = x$
$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, тогда
$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Longleftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x}{2}$

2.2 Рекуррентные формулы

2.2.1 Рекуррентная формула №1

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \dots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Longrightarrow \mathrm{d}u = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}\,\mathrm{d}x$, а $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x \Longrightarrow x = v$
$\dots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $y_{n+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$,
$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2y_{n+1} \Longleftrightarrow 2na^2y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}y_n$ — **рекуррентная формула**

Например, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$

2.2.2 Рекуррентная формула №2

$y_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\mathrm{d}x$
$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}y_{n-2,2-m}$

2.2.3 Рекуррентная формула №3

$y_n = \int (a^2 - x^2)^n \,\mathrm{d}x$
$y_n = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} y_{n-1}$

2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$

2.3.1 Пример №1

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$

2.3.2 Пример №2

$\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|$, так как $(2x+3)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(x^2+3x+5) + C$

2.3.3 Пример №3

$\int \frac{(2x+4)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{x^2+3x+5} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\frac{3x}{2}+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{\mathrm{d}x+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C$

2.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a+ib$, $a-ib$
$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - x(a+ib) - x(a-ib) + (a^2-(ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2+b^2) = (x^2+px+q)$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей
Виды элементарных дробей:

1. $\frac{1}{x-a}$
2. $\frac{1}{(x-a)^n}$
3. $\frac{1}{x^2+px+1}$
4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$

Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей:

1. Если знаменатель имеет только действительные различные корни
   То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (**метод неопределенных коэффициентов**)
   Собираем коэффициенты при x: A + B = 2, при свободных членах: $5A - 4B = -3$, **решаем данную систему любым угодным нам способом**, получается $A = \frac{5}{9}$, а $B = 2 - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$
   $\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-4} + \frac{13}{9}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+5} = \frac{5}{9}\ln|x-4| + \frac{13}{9}\ln|x+5|$
2. Если знаменатель имеет действительные кратные корни
   То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$
3. Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
   То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
   $\int \frac{Ax+B}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + B\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \dots$
4. Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
   То. например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$

3 Высшая математика - 13.02.2023

3.1 Интегрирование по частям

$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$
Допустим, имеем $\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x$, представим за u ту функцию, от которой проще взять производную; $u = x$, $\mathrm{d}v = e^{-3x}\,\mathrm{d}x$
$\begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-3x}\,\mathrm{d}x \\ 1 * \mathrm{d}u = 1 * \mathrm{d}x & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{vmatrix} = -\frac{xe^{-3x}}{3} = -\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,\mathrm{d}x = -\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{1}{3} * (-\frac{e^{-3x}}{3}) + C = -\frac{xe^{-3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{9} + C$

3.2 Интегрирование многочленов

$\int \frac{5x+7}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{5}{8}(8x-6)+\frac{43}{4}}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{8}\int \frac{8x-6}{4x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x + \frac{43}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-6x+10}$
$(4x^2 - 6x + 10 = 4(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2 + \frac{31}{16})) = \frac{43}{16}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{x}{4})^2+\frac{31}{16}} = \dots$ (табличное значение, тривиально посчитать дальше)

3.3 Задания

3.3.1 Задание №1

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x * \sin^2 x}{\cos^2 x}$

3.3.2 Задание №2

$\int \frac{e^{2x}\,\mathrm{d}x}{2+e^{2x}}$

3.3.3 Задание №3

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-6x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4}\ln|\frac{(x-3)-2}{(x-3)+2}| + C = \frac{1}{4}\ln|\frac{x-5}{x-1}| + C$

3.3.4 Задание №4

Один вариант $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} =$
$\frac{3}{2}\ln|\sqrt{t}| + C_1 + \frac{2}{3}\operatorname{arcctg}\frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C_2 = \frac{3}{2}\ln|\sqrt{x^2+x+1}| + \frac{2}{3}\operatorname{arcctg}\frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C$

Другой вариант $\int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-3x^2}}\,\mathrm{d}x =$

Еще другой вариант $\int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+6}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}}\,\mathrm{d}x =$

3.3.5 Задание №5

$\int x^2 e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x^2 = u \\ e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{vmatrix} = x^2 * 2e^{\frac{1}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2x\,\mathrm{d}x = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4\int e^{\frac{x}{2}} * x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} x = u \\ e^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = 2e^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} =$
$x^2 * 2e^{\frac{1}{2}} - 4(2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x) = x^2 2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 15e^{\frac{x}{2}} + C$

3.3.6 Задание №6

Один вариант $\int e^{-x}\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Другой вариант $\int e^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

3.3.7 Задание №7

$\int \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln(1-x) & \mathrm{d}u = -\frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & v = x \end{vmatrix} = \ln(1-x) * x + \int x * (\frac{1}{1-x})\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x) - \int \frac{-x}{1-x}\,\mathrm{d}x =$
$x\ln(1-x) - \int \frac{1-x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x) - \int \frac{1-x}{1-x} * x + \int \frac{\mathrm{d}x}{-1+x} = x\ln(1-x) - x + \ln|x-1| + C$

3.3.8 Задание №8

$\int x \sin^2 4x \, \mathrm{d}x$

4 Высшая математика - 14.02.2023

4.1 Задание №6

$\int e^{\frac{x}{2}} \cos 5x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{x}{2}} & dv = \cos 5x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} & v = \frac{\cos 5x}{5} \end{vmatrix} = e^{\frac{x}{2}} \frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = e^{\frac{x}{2}} & dv = \cos 5x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} & v = \frac{\cos 5x}{5} \end{vmatrix} =$
$\frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10}(\frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x) = \frac{\cos 5x}{5} - \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{50} + \frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x$

Дальше все решается тривиально: переносим $\frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{d}x$ в левую сторону, что-то вроде того

4.2 Задание №9 — задание №11

$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} \,\mathrm{d}x = (*)$

Сделаем из данной дроби правильную дробь, выполнив деление числителя на знаменатель:
$(*) = \int (x^3 + 2x^2 + 6x + 10) \,\mathrm{d}x + \int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \,\mathrm{d}x = (*)$

$\int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \iff \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \iff 17x^2 - 10x + 1 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$

$$\begin{cases} 17 = A + B \\ -10 = -2A - B + C \\ A = 1 \; B = 16 \; C = 8 \end{cases}$$

$(*) = \int x^3 \,\mathrm{d}x + 2 \int x^2 \,\mathrm{d}x + 6 \int x \,\mathrm{d}x + 10 \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + 16 \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 8 \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \ldots$ (все интегралы табличные, дальнейшее решение тривиально и предоставляется читателю)