Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 14.10.2022

1.1 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.
Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \inf$.
Теорема 1. $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ - бесконечно малые, если α, β - бесконечно малые
Теорема 2. Произведение бесконечно малой на ограниченую функцию является бесконечно малой
Определение. Если $\alpha(x), \beta(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$, то
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0 \neq \pm \inf$, то α и β - бесконечно малые одного порядка
Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α, β - эквивалентные бесконечно малые

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то α - бесконечно малое более высокого порядка малости по сравнению с β.
Если, наоборот, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \inf$, то говорят, что β более высокого порядка малости, чем α.
Например, $\alpha = x^3 + 2x^2, \beta = 2x + 3x^2, \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\ to 0} \frac{x^2(x+2)}{x(3x+2)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x+2}{3x+2}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C \neq 0 \neq \pm \inf$, то β, α^k - бесконечно малые одного порядка.
Например, $\alpha = sin^3 x, \beta = x, \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim(\frac{\sin x}{x})^3 = 1 \neq 0 \neq \pm \inf$, $\sin^3 x$ величина такого же порядка малости, как x^3.

1.1.1 Применение бесконечно малых к вычислению пределов

Если при $x \to x_0$ $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$, то
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \implies \exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^3(4x)}{x^2+3x} = ...$
Допустим, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim(x+3) = 3$.
Допустим, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \inf$.
Посчитали без толку, теперь продолжим, $... = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(4x)^3}{x(x+3)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{64x^2}{x+3} = 0$.

1.1.2 Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x\ 1 - \frac{x^2}{2}$
Это все подходит к умножению или делению, но никак не к сложению или вычитанию.

1.1.3 Некоторые соображения и примеры

При $x \to \inf$ $f(x) = x^3 + 2x + 1$ больший вклад вносит x^3, при $x \to 0$ $f(x) = x^3 + x^2$ больший вклад вносит x^2

Пример. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{4x}{3}}{2x} = \frac{2}{3}$ - применение таблицы эквивалентных бесконечно малых.

$O(x)$ - бесконечно малая более высокая порядка малости.

1.2 Производные и дифференциалы функции

Тут есть рисунок, который мне тяжело воспроизвести. Поэтому его тут нет. Но на нем показаны Δx (приращение аргумента), Δf (приращение функции), касательная к функции.
$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ - дифференциал функции, $\Delta f = \mathrm{d}f + O(\Delta x)$

Производной функции называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
Производная равна пределу приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Пример. Пусть у нас $y = x^3 + 2x - 1$. Попробуем вычислить производную.
$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - 1 =$
$x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 1$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{x^3+3x^2*\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+2x+2\Delta x-1-x^2-3x+1}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2) = 3x^2 + 2$
Поздравляю, вы написали такую простыню. Вы великолепны.

Другой пример. Попробуем доказать, что производная $y'(\sin x) = \cos x$
$y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$ вспоминайте формулы = ... =
$\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x}{2} = \cos x$

1.2.1 Свойства производных

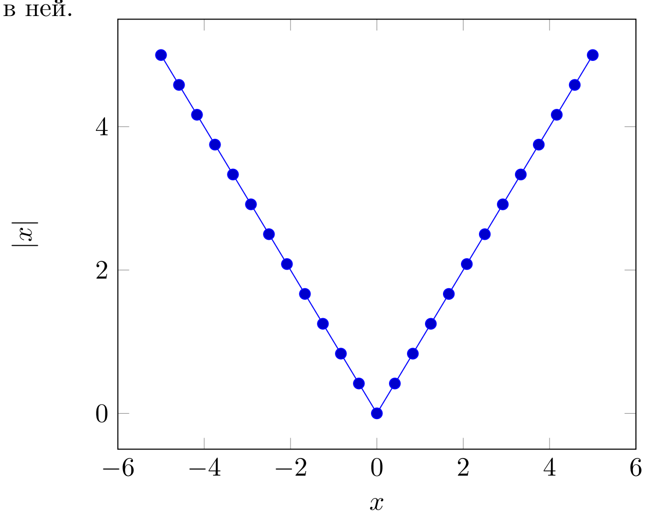
1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u * v)' = u'v + vu'$, $(u * v * w)' = u'vw + u * v'w + u * v * w'$
3. $(cu)' = cu'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

1.2.2 Дифференцируемость функций

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то есть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то функция дифференцируема в точке x_0.

Теорема. Если функций $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.
Замечание. Обратное высказывание может быть и неверным.

Пример функции непрерывной в какой-то точке, но не дифференцируемой в ней.



1.2.3 Геометрический смысл производной

Производная - это тангенс угла наклона касательной...
$\operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

1.2.4 Уравнение касательной и нормали к графику функции

Пусть у нас есть $y = kx + b$, дана какая-то точка $M_0(x_0; y_0)$

Уравнение касательной. $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали. $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

1.2.5 Производная сложной функции

Пусть функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке производную $u'_x(x)$, а функция $y = y(u)$ имеет при соответствующем значении u производную y'_u. Тогда сложная функция $y(x) = y(u(x))$ имеет проивзодную $y'_x = y'_u * u'_x$

Пример 0. Например, у нас есть $y(x) = y(g(f(x)))$, то $y'_x = y'_g * g'_f * f'_x$

Пример 1. $y = 2x^2 + 3x, y' = 4x + 3$

Пример 2. $y = \cos(2x^2 + 3x), y' = sin(2x^2 + 3x) * (4x + 3)$

Пример 3. $y = \sqrt{\cos{(2x^2 + 3x}}, y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x^2+3x}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

Пример 4. $y = \operatorname{tg}\sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}, y' =$
$\frac{1}{\cos^2(\sqrt{\cos(2x^2+3x)}} * \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x^2+3x)}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

1.2.6 Обратная функция и ее производная

Пусть у нас есть функция $y = f(x)$, $x = a, x = b$, а $y(a) = c, y(b) = d$, где $[a; b]$ - область определения, $[c; d]$ - область изменения функции.

Теорема. Если для $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \phi(y)$, у которой $\phi'(y) \neq 0$ в некоторой точке y_0, то $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$

Пример 1. $y = \arcsin x$, функция обратная к ней $x = \sin y, x' = cosy$.
Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$