Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 03.10.2022

1.1 Предел функции

1. Любую константу мы можем вынести за предел
2. Предел от суммы двух функций $f(x) + g(x)$ дает в нам результате разложения сумму двух пределов
3. Предел от произведения двух функций разлагается на произведение двух пределов
4. Предел частного от двух функций $(g(x) \neq 0)$ равен частному двух пределов, если нет неопределенности

1.2 Виды неопределенностей

Неопределенности бывают следующие: $\frac{\inf}{\inf}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{-\inf}$, $\frac{0}{\inf}$, $1^{\inf}$, 0^0, $\inf^0$

1.2.1 Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Пусть $f(x)$ and $g(x)$ are многочлены, k_1, $k_2 \geq 1$.

$f(x) = (x-a)^{k_1} f_1(x)$

$g(x) = (x-a)^{k_2} f_1(x)$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim x \to a \frac{(x-a)^{k_1} f_1(x)}{(x-a)^{k_2} g_1(x)} = \lim x \to a (x-a)^{k_1 - k_2} * \lim x \to a \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Результат выражения выше равен 0 при $k_1 > k_2$, A при $k_1 = k_2$ и inf иначе.

1.2.2 Неопределенность вида $\frac{\inf}{\inf}$

В числителе и знаменателе многочлены, пределы которых стремятся к inf.

Если $a = \inf$, тогда предел будет $\lim\limits_{x \to \inf} \frac{a_x x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ равен нулю при $m < n$, $\frac{a^m}{b^n}$ при $m = n$, иначе inf

1.2.3 Неопределенность вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{\inf}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, т.к. при $x \to 0$ обе эти функции являюстя бесконечно малыми, отношение эквивалентных велчиин дает 1

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен нулю, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой величиной в окресности точки a

Две бесконечно малые величины $f(x), g(x)$ называются эквивалетнтными бесконечно-малыми величинами в окрестности точки a, если предел их отношения равен единице

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2*\sin\frac{10x}{2}*\sin\frac{-5x}{2}}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{1}{10}$$

1.2.4 Неопределенность вида $1^{\inf}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пример:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

2 Высшая математика - 12.10.2022

2.1 Непрерывность функции

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел этой функции при x, стремящемся к x_0, равный $f(x_0)$.

2.1.1 Свойства непрерывных функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные в точке x_0 функции, тогда:

1. Функция, полученная в результате сложения и вычитания двух непрерывных в данной точке функций также будет непрерывна в рассматриваемой точке x_0

2. Функция, которая стала результатом произведения двух непрерывных функций, тоже будет непрерывна в точке x_0

3. Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет непрерывна в точке x_0, если $g(x) \neq 0$

4. Для того, чтобы $g = f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$

5. Основные элементарные функции: $a^x, x^a, \log_a x, \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \arctan x, \arcsin x, ...$ непрерывны на всей области определения

6. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b находится хотя бы одна т. $x = c$, при которой $f(c) = 0$, $a < c < b$

2.1.2 Пример

$x^3 + x^2 + x - 1 = 0, x_0 = c, (a, b) = (\frac{1}{2}; 1)$

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}, f(1) = 2$, следовательно $\exists x_0 = c, f(c) = 0, \frac{1}{2} < c < 1$

2.2 Точки разрыва функции

Опр. 2. Точка $x_0 \in R$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самого x_0, если равенство $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

То есть, либо $x_0 \notin D_f$ и значение $f(x_0)$ не определено, либо $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не существует, либо обе части равенства определены, но не равны между собой.

2.2.1 Типы точек разрыва

1. x_0 - точка разрыва 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}$, то x_0 - устранимая точка разрыва первого рода

2. x_0 - точка разрыва второго рода, если выполнено хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\inf$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}=\pm\inf$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\inf$

2.2.2 Первый пример

$f(x)=\frac{x}{\sin x}$, так как результат частного двух простых функций, то она непрерывна при $\sin x\neq 0$, то есть точками разрыва являются нули функции $\sin x$: $x=\pi k, k\in Z$

При $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $f(0)$ не существует, следовательно функция сама по себе в этой точке не непрерывна.

Рассмотрим два конечных односторонних предела, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{\sin x}=1$

Односторонние разрывы равны между собой, следовательно, $x=0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

При $x=\pi$: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0}=\inf$, $f(\pi)$ не существует

2.2.3 Второй пример

$$\begin{cases} x^2+1, x\leq 0 \\ x+1, 0<x\leq 1 \\ 2x-1, x>1 \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим первый случай, $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(x^2+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)=1, y(0)=1$, таким образом точка $x=0$ - точка непрерывности нашей функции, разрыва нет.

Рассмотрим второй случай, $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}(2x-1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$, таким образом точка $x=1$ - неустранимая точка разрыва первого рода.

2.2.4 Третий пример

Исследовать точки $x=3, x=1$ функции $y=4^{\frac{1}{x-1}}$

1) $x=3, \lim\limits_{x\to 3}4^{\frac{1}{x-1}}=2=y(3)$, следовательно данная точка - точка непрерывности данной функции

2) $x=1, \lim\limits_{x\to 1}4^{\frac{1}{x-1}}=\inf$, следовательно данная точка - точка разрыва второго рода.

$\lim\limits_{x\to 1-0}4^{\frac{1}{x-1}}=4^{-\inf}=\frac{1}{4^{\inf}}=0$, $\lim\limits_{x\to 1+0}4^{\frac{1}{x-1}}=+\inf$

3 Высшая математика - 14.10.2022

3.1 Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Функция называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Функция называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \inf$.

Теорема 1. $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ - бесконечно малые, если α, β - бесконечно малые

Теорема 2. Произведение бесконечно малой на ограниченую функцию является бесконечно малой

Определение. Если $\alpha(x), \beta(x)$ бесконечно малы при $x \to x_0$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \text{const} \neq 0 \neq \pm\inf$, то α и β - бесконечно малые одного порядка

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то α, β - эквивалентные бесконечно малые

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то α - бесконечно малое более высокого порядка малости по сравнению с β.

Если, наоборот, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \inf$, то говорят, что β более высокого порядка малости, чем α.

Например, $\alpha = x^3 + 2x^2, \beta = 2x + 3x^2, \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+2x^2}{3x^2+2x} = \lim\limits_{x\ to0} \frac{x^2(x+2)}{x(3x+2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+2}{3x+2}$

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha^k(x)} = C \neq 0 \neq \pm\inf$, то β, α^k - бесконечно малые одного порядка.

Например, $\alpha = sin^3 x, \beta = x, \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim(\frac{\sin x}{x})^3 = 1 \neq 0 \neq \pm\inf$, $\sin^3 x$ величина такого же порядка малости, как x^3.

3.1.1 Применение бесконечно малых к вычислению пределов

Если при $x \to x_0$ $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x)$, то $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \implies \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Например, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3(4x)}{x^2+3x} = ...$

Допустим, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x} = \lim(x+3) = 3$.

Допустим, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \inf$.

Посчитали без толку, теперь продолжим, $... = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(4x)^3}{x(x+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{64x^2}{x+3} = 0$.

3.1.2 Таблица эквивалентных бесконечно малых

$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x\ 1 - \frac{x^2}{2}$

Это все подходит к умножению или делению, но никак не к сложению или вычитанию.

3.1.3 Некоторые соображения и примеры

При $x \to \inf$ $f(x) = x^3 + 2x + 1$ больший вклад вносит x^3, при $x \to 0$ $f(x) = x^3 + x^2$ больший вклад вносит x^2

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{\ln(1+2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{4x}{3}}{2x} = \frac{2}{3}$ - применение таблицы эквивалентных бесконечно малых.

$O(x)$ - бесконечно малая более высокая порядка малости.

3.2 Производные и дифференциалы функции

Тут есть рисунок, который мне тяжело воспроизвести. Поэтому его тут нет. Но на нем показаны Δx (приращение аргумента), Δf (приращение функции), касательная к функции.
$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ - дифференциал функции, $\Delta f = \mathrm{d}f + O(\Delta x)$

Производной функции называется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.
Производная равна пределу приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Пример. Пусть у нас $y = x^3 + 2x - 1$. Попробуем вычислить производную.
$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x) - 1 =$
$x^3 + 3x^2 * \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2x + 2\Delta x - 1$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x^3+3x^2*\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+2x+2\Delta x-1-x^2-3x+1}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2 + 2) = 3x^2 + 2$
Поздравляю, вы написали такую простыню. Вы великолепны.

Другой пример. Попробуем доказать, что производная $y'(\sin x) = \cos x$
$y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$
$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} =$ вспоминайте формулы = ... =
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\cos x}{2} = \cos x$

3.2.1 Свойства производных

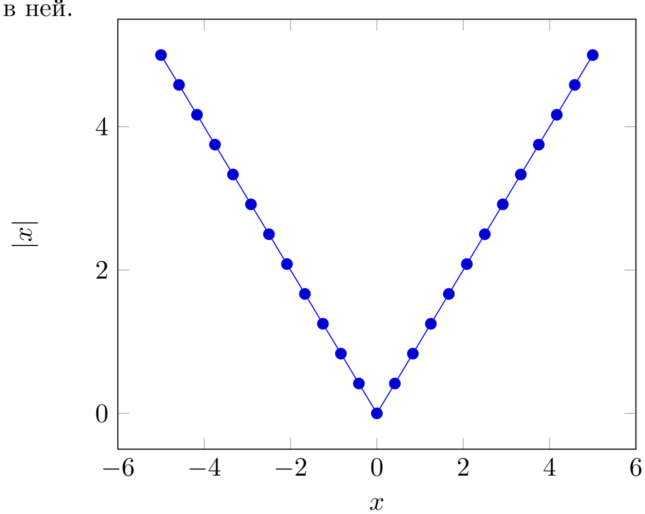
1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u * v)' = u'v + vu'$, $(u * v * w)' = u'vw + u * v'w + u * v * w'$
3. $(cu)' = cu'$
4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

3.2.2 Дифференцируемость функций

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то есть
$\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, то функция дифференцируема в точке x_0.

Теорема. Если функций $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.
Замечание. Обратное высказывание может быть и неверным.

Пример функции непрерывной в какой-то точке, но не дифференцируемой в ней.



3.2.3 Геометрический смысл производной

Производная - это тангенс угла наклона касательной...
$\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

3.2.4 Уравнение касательной и нормали к графику функции

Пусть у нас есть $y = kx + b$, дана какая-то точка $M_0(x_0; y_0)$

Уравнение касательной. $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали. $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

3.2.5 Производная сложной функции

Пусть функция $u = u(x)$ имеет в некоторой точке производную $u'_x(x)$, а функция $y = y(u)$ имеет при соответствующем значении u производную y'_u. Тогда сложная функция $y(x) = y(u(x))$ имеет проивзодную $y'_x = y'_u * u'_x$

Пример 0. Например, у нас есть $y(x) = y(g(f(x)))$, то $y'_x = y'_g * g'_f * f'_x$

Пример 1. $y = 2x^2 + 3x, y' = 4x + 3$

Пример 2. $y = \cos(2x^2 + 3x), y' = sin(2x^2 + 3x) * (4x + 3)$

Пример 3. $y = \sqrt{\cos{(2x^2 + 3x}}, y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x^2 + 3x}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

Пример 4. $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos(2x^2 + 3x)}, y' =$
$\frac{1}{\cos^2(\sqrt{\cos(2x^2+3x)}} * \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x^2+3x)}} * (-\sin(2x^2 + 3x)) * (4x + 3)$

3.2.6 Обратная функция и ее производная

Пусть у нас есть функция $y = f(x)$, $x = a, x = b$, а $y(a) = c, y(b) = d$, где $[a; b]$ - область определения, $[c; d]$ - область изменения функции.

Теорема. Если для $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \phi(y)$, у которой $\phi'(y) \neq 0$ в некоторой точке y_0, то $f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}$

Пример 1. $y = \arcsin x$, функция обратная к ней $x = \sin y, x' = cosy$.
Таким образом, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4 Высшая математика - 18.10.2022

4.1 Асимптоты функции

Асимптоты функции могут быть:

- Вертикальные
- Наклонные (в том числе горизонтальные)

4.1.1 Вертикальные асимптоты

Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва, в которой хотя бы один односторонний предел бесконечен, то вертикальная прямая, параллельная оси ординат, проходящая через эту точку, называется **вертикальной асимптотой**.

Вертикальных асимптот у функции может быть бесконечное множество.

Например, $f(x) = \operatorname{tg} x, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

4.1.2 Наклонные асимптоты

Если следующие пределы: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$ существуют и конечны, то прямая, заданная уравнением $y = kx + b$ является наклонной асимптотой функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Если $k = 0$, то асимптота называется горизонтальной.

Наклонных асимптот у функции может быть только две.

4.1.3 Примеры

Пример 1. Найти асимптоты функции $f(x) = \frac{x}{1+e^{-x}}$.

Найдем вертикальные асимптоты данной функции. Для начала найдем точки разрыва.
Данная функция **непрерывна**, так как знаменатель не может быть равен нулю.
Следовательно, вертикальных асимптот нет.

Найдем наклонные асимптоты: посчитаем пределы.
$k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 1, k_- = \lim\limits_{k \to -\inf} \frac{x}{x(1+e^{-x})} = 0$
$b_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x}{1+e^{-x}} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x - x - xe^{-x}}{1+e^{-x}} = 0, b_- = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x}{1+e^{x}}) = 0$

При $x \to +\infty, y = x$ - наклонная асимптота.
При $x \to -\infty, y = 0$ - горизонтальная асимптота.

4.2 Производные функции

Определение. Если для $f(x)$ существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x, и обозначается $y' = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}; f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4.2.1 Свойства производных функции

Принятые обозначения: c - константа, u, v - функции.

1. $(c)' = 0$
2. $(cu)' = c * u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(u * v)' = u'v + uv'$
5. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
6. Если $y = f(u), u = \phi(x)$, то $(f(\phi(x)))' = f'(u) * u'$.
   Пример: $\cos 3x = -\sin 3x * 3 = -3 \sin x$
   Еще один пример: $\operatorname{tg}^{2x} e^x = 2 \operatorname{tg} e^x * \frac{1}{\cos^2 e^x} * e^x$

4.2.2 Таблица производных

1. $(u^a)' = a * u^{a-1} * u', a \in R$
   $(\frac{1}{u}) = (u^{-1})' = -1 * \frac{1}{u^2} * u'$
   $(\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} * u'$
2. $(a^u) = a^u * \ln a * u'$
   $(e^u)' = e^u * u'$
3. $(\log_a u)' = \frac{1}{u} \log_a e * u' = \frac{1}{u \ln a} * u'$
   $(\ln u)' = \frac{1}{u} * u', (\ln |u|)' = \frac{1}{u} * u'$
4. $(\sin u)' = \cos x$
5. $(\cos u)' = -\sin x$
6. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} * u'$
7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} * u'$
8. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
9. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} * u'$
10. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} * u'$
11. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} * u'$
12. $(\sinh u)' = \cosh u * u'$
13. $(\cosh u)' = \sinh u * u'$
14. $(\tanh u)' = \frac{1}{\cosh^2 u} * u'$
15. $(\coth u)' = -\frac{1}{\sinh^2 u} * u'$
16. $(u(x)^{v(x)})' = v(x) * u(x)^{v(x)-1} * u'(x) + u(x)^{v(x)} * \ln u(x) * v'(x)$

4.2.3 Гиперболические функции

1. $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
2. $\sinh u = \frac{e^u - u^{-u}}{2}$
3. $\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}$
4. $\coth u = \frac{\cosh u}{\sinh u}$

4.2.4 Уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a \coth t \\ y = b \cosh t \end{cases} \tag{2}$$

4.2.5 Показательно-степенная функция

Производную показательно-степенной функции можно найти следующим образом:
$(u^v)' = v * u^{v-1} * u' + u^v \ln u * v'$

4.2.6 Примеры

Пример 1. $y = \operatorname{tg} 3x + 5x^2$, $y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + 10x$

Пример 2. $y = \cos(3x^2 + x)$, $y' = -\sin(3x^2 + x) * (6x + 1)$

Пример 3. $y = x^3 * \cos x$, $y' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$

Пример 4. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $y' = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

Пример 5. $y = \ln(2x^2 + x - 1)$, $y' = \frac{1}{2x^2+x-1} * (4x + 1)$

Пример 6. $y = \operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2})$, $y' = 2 \operatorname{tg}^3(x + e^{-x^2}) * \frac{1}{\cos^2(x+e^{-x^2}} * (1 + e^{-x^2})$

Пример 7. $y = (\cos x)^{x^2}$,
$y' = x^2 (\cos x)^{x^2-1} * (-\sin x) + (\cos x)^{x^2} * \ln(\cos x) * 2x$

Пример 8. $y = 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2}$, $y' = 2 * \frac{1}{3} * x^{\frac{1}{3}-1} * x^{-1} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3}$

Пример 9. $y = (x^2 + 5x + 7)^8$, $y' = 8(x^2 + 5x + 7)^7 * (2x + 5)$

5 Высшая математика - 26.10.2022

5.1 Производная функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), y'_x = \frac{(y_t)'}{(x_t)'}, y''_{xx} = \frac{(y_t)''}{(x_t)'} \end{cases} \tag{3}$$

Вторую производную функции, заданной параметрически, также можно найти следующим образом:
$y''_{x^2} = \frac{y''_{t^2} * x'_t - y'_t * x''_{t^2}}{(x'_t)^3}$

5.1.1 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = t^2 + 2 \end{cases} \tag{4}$$

$y = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'_x = \frac{2t}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t + 2t^3$
$y''_{xx} = \frac{2+6t^2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+3t^2)(1+t^2)$

Решим ее другим способом: $y'_t = 2t$, $y''_{t^2} = 2$, $x'_t = \frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1}$,
$x''_{t^2} = -\frac{1*2t}{(1+t^2)^2}$
$y''_{x^2} = \frac{2*\frac{1}{1+t^2} - 2t*(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{(\frac{1}{1+t^2})^3} = ... = 2(1+3t^2)(1+t^2)$

5.2 Производная обратной функции

$y = f(x)$ и $x = \phi(y)$ - обратные, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

5.3 Производная функции, заданной неявно

$F(x, y) = 0$ - функция, заданная неявно
Для нахождения y' дифференцируем $F(x, y) = 0$, считая x независимой переменной, а y - функцией

5.4 Уравнение касательной и нормали к графику

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 выглядит следующим образом:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Уравнение нормали к графику:

$$\begin{cases} y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} * (x - x_0) \\ x = x_0 \text{ при f'(x}_0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

5.4.1 Примеры

Пример 1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$, т. x_0 $(x_0;y)=(1;4)$

$y=f(x), \sqrt{x}+\sqrt{f(x)}=3, (\sqrt{x}+\sqrt{f(x)})'=(3)'$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1*f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=0$
$f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{f(x_0)}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-2$, $y=0.5x+3.5$ - уравнение нормали.

$y=4+(-2)(x-1)=-2x+6$ - уравнение касательной

6 Высшая математика - 28.10.2022

6.1 Производная неявно заданной функции

Неявно заданная функция - это функция, заданная неявно (очень полезное определение).
Например, $y = y(x)$ - явный вид; $y^2 + xy - \sin x = 0$, $F(x, y)$ - неявный вид.

Берем производную всего выражения, при этом помним, что y является функцией от x.

6.1.1 Примеры

Пример 1.
$y^2 + xy - \sin x = 0$
$2y * y'_x + 1 * y + x * y'_x - \cos x = 0$
$2y * y' + xy' = \cos x - y$
$y'(2y + x) = \cos x - y$
$y' = \frac{\cos x - y}{2y + x}$

Пример 2.
$2y * y'_x + 1 * y + x * y'_x - \cos x = 0$
$2y' * y' + 2y * y'' + y' * y' + xy'' + \sin x = 0$
$y''(2y + x) = -(\sin x + 3y')$
$y'' = -\frac{(\sin x + 3y')}{2y + x}$

Пример 3.
$y * \operatorname{tg} x + x^3 y^2 - x^2 = 0$
$y' * \operatorname{tg} x + y * \frac{1}{\cos^2 x} + 3x^2 * y^2 + x^3 * 2y * y' - 2x = 0$
$y'(\operatorname{tg} x + 2x^3 y) = 2x - 3x^2 y^2 - \frac{y}{\cos^2 x}$
$y' = \frac{2x - 3x^2 y^2 - \frac{y}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + 2x^3 y}$

6.2 Производная параметрически заданной функции

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{6}$$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ - производная функции, заданной параметрически
$y''_{xx} = (y'_x)' = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} * x'_t - y'_t * x''_{tt}}{(x'_t)^3}$ - вторая производная функции, заданной параметрически

6.2.1 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases} \tag{7}$$

Editor note: добавить табличку с значениями t и график

Эту же функцию можно задать неявно: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Пример 2.

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - t^2 \end{cases} \tag{8}$$

Выразим из уравнения t, получим: $y = 2x - \frac{x^2}{9}$ - уравнение параболы.

$x'_t = 3$, $y'_t = 6 - 2t$, $y'_x = \frac{6-2t}{3} = 2 - \frac{2t}{3} = 2 - \frac{2x}{9}$

Пример 3.

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{9}$$

$y = \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\frac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}$

6.3 Метод логарифмического дифференцирования

6.3.1 Примеры

Пример 1.
Имеем функцию $y(x) = \frac{\sqrt{x+1} * \sqrt[3]{2x+5}}{(x^2+6)^5 (x-4)^6}$.
Пользуясь свойствами логарифмов, максимально упростим данную запись:

$\ln y = \ln \frac{\sqrt{} \sqrt[3]{}}{()^5 ()^6}$
$\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(2x+5) - 5\ln(x^2+6) - 6\ln(x-4)$

Берем производную от обеих частей этого равенства, помня о том, что $\ln y$ является сложной функцией:

$\frac{1}{y} * y'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{2}{2x+5} - 5\frac{2x}{x^2+6} - 6\frac{1}{x-4}$
$y'(x) = y(...) = \frac{\sqrt{x+1}\sqrt[3]{2x+5}}{(x^2+6)^5(x-4)^6}(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{3(2x+5)} - \frac{10x}{x^2+6} - \frac{6}{x-4})$

Пример 2.
Имеем функцию $y = x^{\operatorname{tg} x}$

$\ln y(x) = \ln x^{\operatorname{tg} x}$
$\ln y(x) = \operatorname{tg} x * \ln x$
$\frac{1}{y} * y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ln x + \operatorname{tg} x * \frac{1}{x}$
$y'(x) = y(...) = x^{\operatorname{tg} x}(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x})$

6.4 Производные и дифференциалы высших порядков

Имеем функцию $y = f(x)$, определенную на интервале $[a; b]$.
Предполагаем, что ее производная не имеет никаких необычных свойств на данном отрезке: не имеет острых углов, разрывов и так далее.
В этом случае мы эту производную $y' = f'(x)$, если она дифференцируема на отрезке $[a; b]$, можем дифференцировать.

$y = e^x$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sin x$
$y' = e^x$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y' = \cos x$
$y'' = e^x$	$y'' = \frac{2}{x^3}$	$y'' = -\sin x$
$y''' = e^x$	$y''' = -\frac{2*3}{x^4}$	$y''' = -\cos x$
$y'''' = e^x$	$y'''' = \frac{2*3*4}{x^5}$	$y'''' = \sin x$
$y''''' = e^x$	$y''''' = -\frac{2*3*4*5}{x^6}$	$y''''' = \cos x$
$y^{(n)} = e^x$	$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$	$y^{(n)} = \sin(x + \frac{\pi n}{2})$

Работая с производными и дифференциалами высших порядков, следует пользоваться следующими свойствами:

1. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$
2. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$
3. $(uv)^n = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + ... + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} = C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$, где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - формула Лейбница

6.4.1 Примеры

Пример 1.
Найти производную 10-го порядка функции $f(x) = (3x^2 + 2x + 1)\sin x$

$u = \sin x$ $u' = \cos x$	$v = 3x^2 + 2x + 1$ $v' = 6x + 2$ $v'' = 6$

$f'(x) = (\sin x)^{(10)}(3x + 2x + 1) + 10(\sin x)^{(9)}(6x + 2) + \frac{10*9}{2}(\sin x)^{(8)} * 6$

$u^{(8)} = \sin x$, $u^{(9)} = \cos x$, $u^{10} = (-\sin x)$

$f'(x) = (-\sin x)(3x + 2x + 1) + 10(\cos x)(6x + 2) + \frac{10*9}{2}(\sin x) * 6$

6.5 Дифференциалы высших порядков

$\mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) = (f'(x)\,\mathrm{d}x)'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}^2 f = f''(x)\,\mathrm{d}x^2$ - дифференциал второго порядка
$\mathrm{d}^n f = f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^{(n)}$

Если для дифференциала первого порядка можно говорить об инвариантности формы, то для дифференциалов высших порядков инвариантности формы нет, и вышеизложенные равенства верны только если x - независимая переменная.