

Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1	Высшая математика - 01.02.2023	3
1.1	Дифференциал функции	3
1.1.1	Инвариантность формы дифференциала первого порядка	3
1.2	Первообразная и неопределенный интеграл	3
1.2.1	Свойства неопределенного интеграла	3
1.2.2	Таблица неопределенных интегралов	3
1.2.3	Метод подведения под знак дифференциала	4
1.2.4	Метод замены переменной в неопределенном интеграле	4
2	Высшая математика - 08.02.2023	5
2.1	Метод интегрирования по частям	5
2.2	Рекуррентные формулы	5
2.2.1	Рекуррентная формула №1	5
2.2.2	Рекуррентная формула №2	5
2.2.3	Рекуррентная формула №3	6
2.3	Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен	6
2.3.1	Пример №1	6
2.3.2	Пример №2	6
2.3.3	Пример №3	6
2.4	Интегрирование рациональных дробей	6
3	Высшая математика - 13.02.2023	7
3.1	Интегрирование по частям	7
3.2	Интегрирование многочленов	7
3.3	Задания	7
3.3.1	Задание №1	7
3.3.2	Задание №2	7
3.3.3	Задание №3	7
3.3.4	Задание №4	7
3.3.5	Задание №5	7
3.3.6	Задание №6	7
3.3.7	Задание №7	7
3.3.8	Задание №8	8
4	Высшая математика - 14.02.2023	9
4.1	Задание №6	9
4.2	Задание №9 — задание №11	9
5	Высшая математика - 14.02.2023	10
5.1	Интегрирование рациональных дробей	10
5.2	Интегрирование дробно-степенных функций	10
5.3	Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций	10
5.4	Интегрирование тригонометрических функций	11
5.4.1	Универсальная тригонометрическая подстановка	11

6	Высшая математика - 17.02.2023	12
6.1	Подстановки Эйлера	12
6.2	Определенный интеграл	12
6.2.1	Определение и геометрическое значение	12
6.2.2	Основные свойства определенного интеграла	12
6.2.3	Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница	13
6.2.4	Замена переменной в определенном интеграле	13
6.2.5	Интегрирование по частям в неопределенном интеграле	13
6.2.6	Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральных функций	14
7	Высшая математика - 22.02.2023	15
7.1	Геометрические приложения определенных интегралов	15
7.1.1	Вычисление площадей в прямоугольных координатах	15
7.1.2	Вычисление площадей при параметрическом задании кривой	15
7.1.3	Площадь в полярных координатах	15
7.1.4	Длина дуги кривой	16
7.1.5	Вычисление объемов тел вращения	16
7.1.6	Площадь поверхности тела вращения	17

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Дифференциал функции

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x), \text{ где } \alpha \text{ — бесконечно малая}$$
$$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\delta f \text{ дифференциал}} + \alpha(x)\Delta x$$

Определение 1 *Дифференциалом функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx*

Дифференциал независимой переменной: $\delta x = \Delta x$

1.1.1 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

$$\delta f = f'(x)\Delta x$$

Если $f = f(u(x))$, то $\delta f = f'_u u'_x \delta x = f'(u)\delta u$

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 2 *Функция $F(x)$ называется первообразной от $f(x)$ на $[a; b]$, если на всех точках данного отрезка выполняется условие, что $F'(x) = f(x)$*

Теорема 1 *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные для $f(x)$ на некотором отрезке, то $F_1(x) - F_2(x) = \text{const}$. Следовательно, $F(x) + C$ — также первообразная для данной функции*

$\int f(x) dx = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x) dx)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$
3. $\int d(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$
5. $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$
6. Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то
 7. $\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + C$
 8. $\int f(x + b) dx = F(x + b) + C$
 9. $\int f(\alpha x + b) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C$
7. $\int \text{tg } x dx = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \text{ctg } x dx = \ln |\sin x| + C$
9. $\int e^x dx = e^x + C$
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Метод подведения под знак дифференциала

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \int f(y) dy = F(y) + C$$
$$\int f(y(x)) d(y(x)) = F(y(x)) + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \int (x+5)^2 d(x+5) = \frac{(x+5)^3}{3} + C, \int (\sin t)^2 d(\sin t) = \frac{(\sin t)^3}{3} + C$$

Но если нам нужно найти $\int (2x+7)^2 dx$, то **преобразуем** следующим образом:

$$\frac{1}{2} \int (2x+7)^2 2 dx = \frac{1}{2} \int (2x+7)^2 d(2x+7) = \frac{1}{2} \frac{(2x+7)^3}{3} + C, \text{ так как } d(2x+7) = 2 dx$$

Первый пример $\int \sqrt{x+7} dx = \int \sqrt{x+7} d(x+7) = \frac{2}{3} (x+7)^{\frac{3}{2}} + C$

Второй пример $\int x\sqrt{x^2+7} dx, d(x^2+7) = 2x dx, \int x\sqrt{x^2+7} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+7} d(x^2+7) = \dots$

Третий пример $\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x+5} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3} \ln |3x+5| + C, \text{ так как } d(3x+5) = 3 dx$

Четвертый пример $\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln |x^2+1| + C, \text{ так как } d(x^2+1) = 2x dx$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5) dx}{x^2+5x+11} = \int \frac{d(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln |x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C, d(\sin x) = \cos x dx$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x} \cos x dx = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C, d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos dx$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x) dx$, можем выполнить замену: $\left| \begin{array}{l} x = \phi(t) \\ dx = \phi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$

Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2} dx$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t, dx = \cos t dt$, тогда $\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \dots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\dots = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) + C = \dots$
Выполним **обратную замену**: $\dots = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C, \text{ так как } t = \arcsin x, x = \sin t, dx = \cos t dt, \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \int \frac{x dx}{1+(x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$

Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C, \text{ так как } d(x^2) = 2x dx$

Третий пример $\int e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \iff x = \arcsin t \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right| = \int e^t * \sqrt{1-t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C$

2 Высшая математика - 08.02.2023

2.1 Метод интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. **многочлен * тригонометрическую или показательную функцию**, то

за u выбирают многочлен, dv — все, что осталось

Пример $\int (3x+1) \cos 5x dx = \frac{(3x+1)}{5} \sin 5x - \frac{3}{5} \int \sin 5x dx = \frac{(3x+1)}{5} \sin 5x + \frac{3}{25} \cos 5x + C$
 $du = 3dx, v = \int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x$

Другой пример $\int (3x^2+1) \cos 5x dx = \frac{(3x^2+1)}{5} \sin 5x + \frac{6}{5} \int x \sin 5x dx$, дальше следует применить метод интегрирования по частям заново

2. **многочлен * логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию**, то

за u выбирают функцию, а dv — все остальное

Пример $\int (3x^2+5) \ln x dx = (\frac{x^3}{3}+5x) \ln x - \int (\frac{x^3}{3}+5x) \frac{dx}{x} = (\frac{x^3}{3}+5x) \ln x - \frac{x^3}{9} - 5x + C$
 $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du, dv = (x^2+5) dx \Rightarrow v = \int (x^2+5) dx = \frac{x^3}{3} + 5x$

3. **тригонометрическая функция * показательную функцию**, то

не имеет значения, что выбрать за u , а что за dv , но формулу интегрирования по частям в этом случае **придется применить два раза подряд** единообразно

Пример $\int \sin 5x e^x dx = \sin 5x * e^x - 5 \int \cos 5x * e^x dx = \dots$

Пусть $u = \sin 5x \Rightarrow du = 5 \cos 5x dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Применим метод интегрирования по частям во второй раз, теперь $u = \cos 5x \Rightarrow du = -5 \sin 5x dx$,
 $v = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

$\dots = \sin 5x * e^x - 5(\cos 5x e^x + 5 \int \sin 5x e^x dx)$

$y = (\sin 5x - 5 \cos 5x) e^x - 25y \Leftrightarrow 26y = (\dots) e^x \Leftrightarrow y = \frac{(\sin 5x - 5 \cos 5x) e^x}{26}$, где $y = \int \sin 5x e^x dx$

Применения метода интегрирования по частям к произвольным интегралам $\int \sqrt{1-x^2} dx = \dots$, пусть

$u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow du = \frac{1(-2x) dx}{2\sqrt{1-x^2}}$, а $v = dx \Rightarrow v = x$

$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, пусть $y = \int \sqrt{1-x^2} dx$, тогда

$y = x\sqrt{1-x^2} - y + \arcsin x \Leftrightarrow y = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}$

2.2 Рекуррентные формулы

2.2.1 Рекуррентная формула №1

$$y_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \dots$, пусть $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1} dx$, а $dv = dx \Rightarrow x = v$

$\dots = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \Rightarrow \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$

$y_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, y_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}},$

$y_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2ny_n - 2na^2 y_{n+1} \Leftrightarrow 2na^2 y_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + y_n(2n-1) \Leftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} y_n -$
рекуррентная формула

Например, $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} * \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}$

2.2.2 Рекуррентная формула №2

$$y_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx$$

$$y_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1) \cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} y_{n-2,-m}$$

2.2.3 Рекуррентная формула №3

$$y_n = \int (a^2 - x^2)^n dx$$
$$y_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} y_{n-1}$$

2.3 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+C} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})+(C-(\frac{b}{2a})^2)}$$

2.3.1 Пример №1

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$$

2.3.2 Пример №2

$$\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} = \ln|x^2+3x+5|, \text{ так как } (2x+3)dx = d(x^2+3x+5) + C$$

2.3.3 Пример №3

$$\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+3x+5} = \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x+5} + \int \frac{dx}{x^2+2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5} = \int \frac{dx+\frac{3}{2}}{(x+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{11}}{2}} + C$$

2.4 Интегрирование рациональных дробей

Комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами **являются попарно-сопряженными**: $a+ib$, $a-ib$

$$(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = x^2 - x(a+ib) - x(a-ib) + (a^2 - (ib)^2) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = (x^2 + px + q)$$

Интегрирование рациональных дробей будет сводиться к интегрированию элементарных дробей: каждую рациональную дробь мы можем свести к линейной комбинации из элементарных дробей

Виды элементарных дробей:

- | | |
|-------------------------|-----------------------------|
| 1. $\frac{1}{x-a}$ | 2. $\frac{1}{(x-a)^n}$ |
| 3. $\frac{1}{x^2+px+1}$ | 4. $\frac{i}{(x^2+px+q)^m}$ |

Правила сведения рациональной дроби к линейной комбинации из элементарных дробей:

- Если знаменатель имеет только действительные различные корни
То, например, $\frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-4)}{(x-4)(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx-4B}{(x-4)(x+5)}$ (метод неопределенных коэффициентов)
Собираем коэффициенты при x : $A+B=2$, при свободных членах: $5A-4B=-3$, **решаем данную систему любым удобным нам способом**, получается $A=\frac{5}{9}$, а $B=2-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}$
$$\int \frac{2x-3}{(x-4)(x+5)} dx = \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x-4} + \frac{13}{9} \int \frac{dx}{x+5} = \frac{5}{9} \ln|x-4| + \frac{13}{9} \ln|x+5|$$
- Если знаменатель имеет действительные кратные корни
То, например, $\frac{7x-8}{(x-4)^2(x+5)^3} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{x+5} + \frac{D}{(x+5)^2} + \frac{E}{(x+5)^3}$
- Если знаменатель имеет комплексные корни (различные)
То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)(x^2+2x+10)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+10}$
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+1} dx = A \int \frac{x dx}{x^2+1} + B \int \frac{dx}{x^2+1} = \dots$$
- Если знаменатель имеет комплексные кратные корни
То, например, $\frac{2x-3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+10)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+2x+10} + \frac{Px+Q}{(x^2+2x+10)^2}$

3 Высшая математика - 13.02.2023

3.1 Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Допустим, имеем $\int x e^{-3x} dx$, представим за u ту функцию, от которой проще взять производную; $u = x$, $dv = e^{-3x} dx$

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{-3x} dx \\ 1 * du = 1 * dx & v = -\frac{e^{-3x}}{3} \end{array} \right| = -\frac{x e^{-3x}}{3} = -\frac{1}{3} \int e^{-3x} dx = -\frac{x e^{-3x}}{3} - \frac{1}{3} * \left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) + C = -\frac{x e^{-3x}}{3} + \frac{e^{-3x}}{9} + C$$

3.2 Интегрирование многочленов

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+7}{4x^2-6x+10} dx &= \int \frac{\frac{5}{8}(8x-6)+\frac{43}{4}}{4x^2-6x+10} dx = \frac{5}{8} \int \frac{8x-6}{4x^2-6x+10} dx + \frac{43}{4} \int \frac{dx}{4x^2-6x+10} \\ (4x^2-6x+10) &= 4(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}) = 4((x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}) = \frac{43}{16} \int \frac{dx}{(x-\frac{3}{4})^2+\frac{31}{16}} = \dots \text{ (табличное значение,} \\ &\text{тривиально посчитать дальше)} \end{aligned}$$

3.3 Задания

3.3.1 Задание №1

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x * \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

3.3.2 Задание №2

$$\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}$$

3.3.3 Задание №3

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{dx}{(x-3)^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{(x-3)-2}{(x-3)+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$$

3.3.4 Задание №4

$$\begin{aligned} \text{Один вариант} \quad \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \\ \frac{3}{2} \ln |\sqrt{t}| + C_1 + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C_2 &= \frac{3}{2} \ln |\sqrt{x^2-x+1}| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4(x-\frac{1}{2})}{3} + C \end{aligned}$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int \frac{4x+3}{\sqrt{1-x-3x^2}} dx =$$

$$\text{Еще другой вариант} \quad \int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \int \frac{2x+6}{\sqrt{-(x^2+6x-7)}} dx =$$

3.3.5 Задание №5

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{\frac{x}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = 2e^{\frac{x}{2}} \end{array} \right| = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} * 2x dx = x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4 \int e^{\frac{x}{2}} * x dx = \left| \begin{array}{l} x = u \\ e^{\frac{1}{2}} dx = dv \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} du = dx \\ v = 2e^{\frac{1}{2}} \end{array} \right| = \\ x^2 * 2e^{\frac{x}{2}} - 4(2xe^{\frac{x}{2}} - \int 2e^{\frac{x}{2}} dx) &= x^2 2e^{\frac{x}{2}} - 8xe^{\frac{x}{2}} + 15e^{\frac{x}{2}} + C \end{aligned}$$

3.3.6 Задание №6

$$\text{Один вариант} \quad \int e^{-x} \sin 2x dx$$

$$\text{Другой вариант} \quad \int e^{-2x} \sin x dx$$

3.3.7 Задание №7

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x) dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1-x) & du = -\frac{1}{1-x} dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = \ln(1-x) * x + \int x * \left(-\frac{1}{1-x}\right) dx = x \ln(1-x) - \int \frac{-x}{1-x} dx = \\ x \ln(1-x) - \int \frac{1-x+1}{1-x} dx &= x \ln(1-x) - \int \frac{1-x}{1-x} * x + \int \frac{dx}{-1+x} = x \ln(1-x) - x + \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

3.3.8 Задание №8

$$\int x \sin^2 4x \, dx$$

4 Высшая математика - 14.02.2023

4.1 Задание №6

$$\int e^{\frac{x}{2}} \cos 5x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{x}{2}} \quad dv = \cos 5x \, dx \\ du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \quad v = \frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| = e^{\frac{x}{2}} \frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{\frac{x}{2}} \quad dv = \cos 5x \, dx \\ du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} \quad v = \frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| =$$
$$\frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{5} - \frac{1}{10} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx \right) = \frac{\cos 5x}{5} - \frac{e^{\frac{x}{2}} \cos 5x}{50} + \frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx$$

Дальше все решается тривиально: переносим $\frac{1}{100} \int \cos 5x e^{\frac{x}{2}} \, dx$ в левую сторону, что-то вроде того

4.2 Задание №9 — задание №11

$$\int \frac{(x^2+1)^3}{x(x-1)^2} \, dx = \int \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = (*)$$

Сделаем из данной дроби правильную дробь, выполнив деление числителя на знаменатель:

$$(*) = \int (x^3 + 2x^2 + 6x + 10) \, dx + \int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = (*)$$

$$\int \frac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x} \, dx = \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \iff \int \frac{17x^2-10x+1}{x(x-1)^2} \, dx = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \iff 17x^2 - 10x + 1 =$$
$$Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx$$
$$\begin{cases} 17 = A + B \\ -10 = -2A - B + C \\ A = 1 \quad B = 16 \quad C = 8 \end{cases}$$

$(*) = \int x^3 \, dx + 2 \int x^2 \, dx + 6 \int x \, dx + 10 \int dx + \int \frac{dx}{x} + 16 \int \frac{dx}{x-1} + 8 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \dots$ (все интегралы табличные, дальнейшее решение тривиально и предоставляется читателю)

5 Высшая математика - 14.02.2023

5.1 Интегрирование рациональных дробей

$$\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$$

$$\frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+4} =$$

$$\frac{Ax^4+4Ax^3+2Ax^2+8Ax+Ax^2+4A+Bx^4+Bx^3+4Bx^2+4Bx+Cx^3+4Cx^2+2Dx^3+Dx^2+Fx^3+2Fx^2+Fx}{x(x+1)^2(x^2+4)} = (*)$$

При x^4 : $A + B + D = 0$

x^3 : $2A + B + C + 2D + F = 0$

x^2 : $5A + 4B + D + 2F = 0$

x : $8A + 4B + 4C + F = 2$

Свободные члены: $4A = -3$

Решение данной системы уравнений оставляется в качестве упражнения читателю, мы же его опустим. Лишь заметим, что ее можно решать как угодно

$$A = -\frac{3}{4}, B = 1, C = 1, D = -\frac{1}{4}$$

$$(*) = \int \frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{dx}{x} + \frac{d(x+1)}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+4} = -\frac{3}{4} \ln|x| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{8} \ln|x^2+4| + C$$

Данные преобразования могут выполняться лишь с правильными дробями

5.2 Интегрирование дробно-степенных функций

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x в дробных степенях, то мы находим общий знаменатель этих степеней и x в соответствующей степени обозначаем за t

$$1. \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{x^{\frac{1}{3}+1}} = \left| \begin{array}{ll} x^{\frac{1}{6}} = t & x = t^6 \\ x^{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} = t^3 & dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 6t^5 dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = 6 \int \frac{(t^8-1)+1}{t^2+1} dt = 6 \left(\int \frac{(t^4+1)(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1} dt + \right.$$

$$\left. \int \frac{1}{t^2+1} dt \right) = 6 \left(\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}) dt \right) = 6 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctg t \right) + C \Rightarrow 6 \left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \arctg(x^{\frac{1}{6}}) \right) + C$$

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x и дробно-линейной функции в какой-то дробной степени, то $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$, где v — общий знаменатель этих степеней, мы обозначим за t

$$\int R(x, \frac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}), t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$$

$$1. \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx = \left| \begin{array}{ll} t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} & t^3 = \frac{2-x}{2+x} \\ x = \frac{2-2t^3}{t^3+1} & dx = \frac{-6t^2(t^3+1)-3t^2(2-2t^3)}{(t^3+1)^2} dt = \frac{-12t^2 dt}{(t^3+1)^2} \end{array} \right| = \int \frac{2t(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}) dt}{(2-\frac{2-2t^3}{t^3+1})^2} = -\frac{24}{16} \int \frac{\frac{t^3 dt}{(t^3+1)^2}}{\frac{t^6}{(t^3+1)^2}} = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^3} =$$

$$\frac{3}{4} \sqrt[3]{(\frac{2-x}{2+x})^2} + C$$

5.3 Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций

1. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2 + n^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \operatorname{tg} t$

2. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2 - n^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \frac{1}{\cos t}$

3. Если имеем $\int R(x, \sqrt{n^2 - m^2x^2}) dx$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m} \sin t$

$$\text{Например, } \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| x = 2 \sin t \quad dx = 2 \cos t dt \right| = \int \frac{2 \cos t dt}{\sqrt{(4-4 \sin^2 t)^3}} = \int \frac{2 \cos t dt}{8 \cos^3 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t = \frac{1}{4} \frac{\sin t}{\cos t} =$$

$$\frac{1}{4} \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4} \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$$

5.4 Интегрирование тригонометрических функций

Если под знаком интеграла стоит произведение тригонометрических функций, то его желательно преобразовать в сумму или разность. Помним из школьного курса тригонометрии:

1. $\sin \alpha * \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
2. $\sin \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
3. $\cos \alpha * \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

Также бывают полезны формулы понижения степени:

1. $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Если имеем $\int \sin^n x \cos^m x dx$, где n, m — четные степени, то мы понижаем степени до того, как не сможем воспользоваться табличными интегралами

Если m и (или) n нечетно, то мы «откусываем» от нечетной степени и убираем под знак дифференциала

Например,

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x * \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int (t^4 - t^6) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

5.4.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\text{Например, } \int \frac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2 \sin x)} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} (2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2*2t}{1+t^2})} = \int \frac{(t^2+1) dt}{t(t^2-4t+3)} = (*)$$

$$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3}$$

Посчитаем так, как считали. Найдем что $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -1$

$$(*) = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t-3} = \frac{1}{3} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \frac{5}{3} \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1| - \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3| + C$$

Если косинус и синус в дроби входят в виде $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$, то мы можем делать замену не универсальную, а

обозначать $\operatorname{tg} x = z$, $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

6 Высшая математика - 17.02.2023

6.1 Подстановки Эйлера

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

1. Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$
2. Если $c > 0$, то $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$
3. $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$, a — действительный корень, то можно выполнить замену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$, аналогичную замену можно провести, если β — действительный корень

Пример. $\int \frac{x dx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3} = (*)$

Решим квадратное уравнение: $x^2 - 7x - 10 = 0 \iff (x - 2)(x - 5) = 0$

$$\sqrt{-(x-2)(x-5)} = (x-2)t \iff (x-2)(5-x) = (x-2)^2 t^2 \iff (5-x) = xt^2 - 2t^2$$

$$\text{Отсюда выразим } x = \frac{2t^2+5}{t^2+1}, dx = \frac{4t(t^2+1)-(2t^2+5)2t}{(t^2+1)^2} dt = \frac{-6t dt}{(t^2+1)^2} = \left(\frac{2t^2+t}{t^2+1} - 2\right)t = \frac{2t^2+5-2t^2-2}{t^2+1} = \frac{3t}{t^2+1}$$

$$(*) = \int \frac{\frac{2t^2+5}{t^2+1} \cdot \frac{3t dt}{(t^2+1)^2}}{\left(\frac{3t}{t^2+1}\right)^3} = \int \frac{(2t^2+5) dt}{t^2} = -\frac{2}{9} \int \left(2 + \frac{5}{t^2}\right) dt = -\frac{2}{9} \left(2t - \frac{5}{t}\right) + C, \quad t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}$$

6.2 Определенный интеграл

6.2.1 Определение и геометрическое значение

Определение 3 Если при любых разбиениях отрезка $[a; b]$ таких, что наибольшее значение $\Delta X_i \rightarrow 0$ и любом выборе точек ξ_i существует $\lim_{\max \Delta X_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, то он называется определенным интегралом $S = \int_a^b f(x) dx$ ($a < b$)

Если этот предел существует, то функция считается интегрируемой на отрезке $[a; b]$

$$\text{Если } b < a, \text{ то } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Определённый интеграл от неотрицательной функции $\int_a^b f(x) dx$ **численно равен площади фигуры**, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x)$

6.2.2 Основные свойства определенного интеграла

$$1. \int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx \qquad 2. \int_a^b (f_1 \pm f_2) dx = \int_a^b f_1 dx \pm \int_a^b f_2 dx$$

$$3. \text{ Если } f(x) \leq g(x), \text{ то } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$4. \text{ Если } m \text{ и } M \text{ — наименьшее и наибольшее } f(x) \text{ на } [a; b] \text{ } (a \leq b), \text{ то } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$5. \text{ Теорема о среднем. Если } f(x) \text{ непрерывна на } [a; b] \exists C \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(C)$$

$$6. \text{ При любом расположении } a, b \text{ и } c \text{ справедливо } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

6.2.3 Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 2 Если $f(x)$ — непрерывная функция, $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, то имеет место $\Phi'(x) = f(x)$

Теорема 3 (Формула Ньютона-Лейбница) Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то справедливо

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Пример 1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = (*)$, $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x$
 $(*) = \arctg x \Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

Пример 2. $\int_0^2 |1-x| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2 = 1$

6.2.4 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 4 Пусть дан интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция
 Вводим t , исходя из формулы $x = \phi(t)$. Если

1. $\phi(\alpha) = a, \phi(\beta) = b$
2. ϕ, ϕ' непрерывны на $[a; b]$
3. $f(\phi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha; \beta]$

$$\text{то } \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Пример 1. $\int_2^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}} = (*)$, выполним замену $t = \sqrt{2+4x} \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{4}, dx = \frac{t dt}{2}$
 $(*) = \int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2} dt = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} (t^2-2) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) \Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} = \frac{1}{8} \left(\frac{18\sqrt{12}}{3} - 2\sqrt{12} - \frac{6\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{6}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Пример 2. $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = (*)$, выполним замену $t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt$
 $(*) = \int_{4/3}^{3/4} \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = \int_{3/4}^{4/3} \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{1+t^2}} = \ln |t + \sqrt{1+t^2}| \Big|_{3/4}^{4/3} = \ln \left|\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}}\right| - \ln \left|\frac{3}{4} + \sqrt{1+\frac{9}{16}}\right| = \int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} \frac{t^2-2}{4t} * \frac{1}{2} dt = \frac{1}{8} \int_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} (t^2-2) dt = \frac{1}{8} \left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) \Big|_{\sqrt{6}}^{\sqrt{12}} = \ln \frac{3}{2}$

6.2.5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)' dx &= \int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx \\ \int_a^b u dv &= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \end{aligned}$$

Пример 1. $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx = (*)$, пусть $u = x, dv = \cos 2x dx, du = dx, v = \frac{1}{2} \sin 2x$
 $(*) = \left[x * \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx\right]_0^{\pi/4} = \left[\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} * 1 - 0 + 0 - \frac{1}{4} * 1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

6.2.6 Упрощение интегралов, основанное на свойстве симметрии подынтегральных функций

1. Если функция $f(x)$ является четной на симметричном интервале $[-a; a]$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
2. Если $f(x)$ является нечетной на $[-a; a]$, то $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$
3. Если $f(x)$ является периодической функцией (то есть, $f(x) = f(x + T)$), то $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x) dx$

7 Высшая математика - 22.02.2023

7.1 Геометрические приложения определенных интегралов

7.1.1 Вычисление площадей в прямоугольных координатах

$$\int_a^b f(x) dx = S_{\text{криволинейной трапеции}}$$

Если график несколько раз пересекает ось OX , надо разбить его на несколько отрезков

Пример №1 Пусть $y = x^3$; $x = -2$; $x = 1$, ось OX

$$S_1 = \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}, S_2 = \int_{-2}^0 0|x^3| dx = -\left. \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^0 = 4, S = 4\frac{1}{4}$$

7.1.2 Вычисление площадей при параметрическом задании кривой

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) = \psi(\phi(t)) \end{cases} \quad (1)$$

$$\alpha \leq t \leq b, \phi(\alpha) = a, \phi(b) = b$$

$$S = \int_a^b \phi(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \phi'(t) dt$$

Пример №1

$$\begin{cases} x = 4 \cos t, x \in [0; 4] \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Согласно системе, $t \in [\frac{\pi}{2}; 0]$, поэтому

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 3 \sin t * (4 \cos t)' dt = -12 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 6(t - \frac{1}{2} \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - 0 + 0) = 3\pi$$

7.1.3 Площадь в полярных координатах

Пусть имеем $\rho = f(\theta)$, различные углы $\alpha = \theta_0$, $\beta = \theta_n$, разбивающие график на секторы.

$$S_i = \frac{1}{2} \Delta \theta \rho^2$$

$$S = \sum_{i=1}^n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f(\theta_i))^2 \Delta \theta_i$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (f(\theta_i))^2 \Delta \theta_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta$$

Пример №1 Имеем $x^3 + y^3 = 3xy$, найдем площадь петли листа, перейдем между обычными x и y к полярным координатам.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \end{cases} \iff \rho^3 \cos^3 \phi + \rho^3 \sin^3 \phi = 3\rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Получаем: } \rho = \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^6 \theta + 2 \sin^3 \theta \cos^3 \theta + \cos^6 \theta} d\theta = \left| \begin{array}{l} z = \operatorname{tg} \phi \\ d\phi = \frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right. \begin{array}{l} \phi = \operatorname{arctg} z \\ \cos^2 z = \frac{1}{1+z^2} \end{array} \sin^2 z = \frac{z^2}{1+z^2} \Big| =$$

$$\int_0^1 \frac{9 * \frac{z^2}{1+z^2} * \frac{1}{1+z^2} * \frac{dz}{1+z^2}}{(\frac{z^2}{1+z^2})^3 + \frac{1}{4}(\frac{2z}{1+z^2})^3 + (\frac{1}{1+z^2})^3} = 3 \int_0^1 \frac{z^2 dz}{z^6 + 2z^3 + 1} = 3 \int_0^1 \frac{d(z^3 + 1)}{(z^3 + 1)^2} = -\frac{3}{z^3 + 1} \Big|_0^1 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

7.1.4 Длина дуги кривой

1. Длина дуги кривой в декартовых координатах ($y = f(x)$, $[a; b]$), то $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

2. Если

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta \end{cases}$$

$$\text{То } l = \int_a^b \sqrt{(\phi'_t)^2 + (\psi'_t)^2} dt$$

3. Если имеем полярные координаты ($\rho = f(\theta)$), то $l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} d\theta$

Пример №1 Допустим, имеем астроида $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases}$, найдем

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2 * 3 \cos^2 t (-\sin t) + 2)^2 * (3 \sin^2 t * \cos t)^2} dt = (*)$$

Упростим: $36 \cos^4 t \sin^2 t + 36 \sin^4 t \cos^2 t = 36 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)$

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 * 4 \cos^2 t \sin^2 t} dt = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}(-1 - 1) = 3$$

7.1.5 Вычисление объемов тел вращения

Вычисление объемов тел вращения с помощью метода поперечных сечений

Если разрезать тело на тонкие слои, и в каждом промежутке $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выбрать произвольную точку ξ_i , то можем записать: $V_i = Q(\xi_i) \Delta x_i$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i) \Delta x_i = \int_{x_0}^{x_n} Q(x) dx$$

Пример №1. Допустим, имеем $y^2 + z^2 = x$

$$R = \sqrt{x}, Q = \pi r^2 = \pi x, n = 4$$

$$V = \int_0^4 \pi x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

Вычисление объемов тел, полученных вращением кривой вокруг соответствующей оси

Вращение криволинейной трапеции $y = f(x)$, ось OX , $x = a$, $x = b$ вокруг оси OX

$$Q = \pi f^2(x), V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Пример — вращение параболы $y = \sqrt{x}$ вокруг оси OX

$$V = \pi \int_0^4 4\sqrt{x}^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = \dots$$

Если же мы производим вращение вокруг оси OY , то $V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx$

У нас еще много всякой фигни может вращаться. Например, такая фигня, что $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx$. Погуглите — узнаете больше

Пример №2 Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX астроида $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 t (3 \cos^2 t - (-\sin t)) dt = -3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cos^2 t d \cos t = -3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - 3 \cos^4 t + 3 \cos^6 t - \cos^8 t) d \cos t =$$

$$-\frac{\cos^9 t}{9} - \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{3 \cos^5 t}{5} + \frac{3 \cos^7 t}{7} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

7.1.6 Площадь поверхности тела вращения

Если $y = f(x)$ вокруг оси OX , то

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$