Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 14.02.2023

1.1 Интегрирование рациональных дробей

$\frac{2x-3}{(x+1)^2(x+2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{F}{(x+2)^3}$

$\frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+4} =$
$\frac{Ax^4+4Ax^2+2Ax^3+8Ax+Ax^2+4A+Bx^4+Bx^3+4Bx^2+4Bx+Cx^3+4CxDx^4+2Dx^3+Dx^2+Fx^3+2Fx^2+Fx}{x(x+1)^2(x^2+4)} = (*)$

При x^4: $A+B+D=0$
x^3: $2A+B+C+2D+F=0$
x^2: $5A+4B+D+2F=0$
x: $8A+4B+4C+F=2$
Свободные члены: $4A=-3$

Решение данной системы уравнений оставляется в качестве упражнения читателю, мы же его опустим. Лишь заметим, что ее можно решать как угодно
$A=-\frac{3}{4}$, $B=1$, $C=1$, $D=-\frac{1}{4}$

$(*) = \int \frac{2x-3}{x(x+1)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} + \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+4} = -\frac{3}{4}\ln|x| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{8}\ln|x^2+4| + C$
Данные преобразования могут выполняться лишь с правильными дробями

1.2 Интегрирование дробно-степенных функций

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x в дробных степенях, то мы находим общий знаменатель этих степеней и x в соответствующей степени обозначаем за t

1. $\frac{x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{3}}+1} = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{6}} = t & x = t^6 & \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \\ x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = t^3 & x^{\frac{1}{3}} = t^2 & \end{vmatrix} = \int\frac{t^3 6t^5\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = 6\int\frac{t^8}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 6\int\frac{(t^8-1)+1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t = 6(\int(\frac{(t^4+1)(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+1})\,\mathrm{d}t = 6[\int(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1})\,\mathrm{d}t] = 6(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t) + C \Longrightarrow 6(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}} + \operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{6}})) + C$

Если стоящая под знаком интеграла функция зависит от x и дробно-линейной функции в какой-то дробной степени, то $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$, где v — общий знаменатель этих степеней, мы обозначим за t
$\int R(x, \frac{ax+b}{cx+d}^{\frac{m}{n}}, \ldots (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}))$, $t = (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{1}{v}}$

1. $\int\frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} t = \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} & t^3 = \frac{2-x}{2+x} \\ x = \frac{2-2t^3}{t^3+1} & \mathrm{d}x = \frac{-6t^2(t^3+1)-3t^2(2-2t^3)}{(t^3+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-12t^2\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2} \end{vmatrix} = \int\frac{2t(\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2})\,\mathrm{d}t}{(2-\frac{2-2t^3}{t^3+1})^2} = -\frac{24}{16}\int\frac{\frac{t^3\,\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}}{\frac{t^5}{(t^3+1)^2}} = -\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(\frac{2-x}{2+x})^2} + C$

1.3 Применение тригонометрических подстановок к интегрированию иррациональных функций

1. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2+n^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m}\operatorname{tg} t$
2. Если имеем $\int R(x, \sqrt{m^2x^2-n^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m}\frac{1}{\cos t}$
3. Если имеем $\int R(x, \sqrt{n^2-m^2x^2})\,\mathrm{d}x$, то выполняем замену $x = \frac{n}{m}\sin t$

Например, $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \begin{vmatrix} x = 2\sin t & \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}} = \int\frac{2\cos t\,\mathrm{d}t}{8\cos^3 t\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} t = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$

1.4 Интегрирование тригонометрических функций

Если под знаком интеграла стоит произведение тригонометрических функций, то его желательно преобразовать в сумму или разность. Помним из школьного курса тригонометрии:

1. $\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
2. $\sin\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$
3. $\cos\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

Также бывают полезны формулы понижения степени:

1. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2a}{2}$

Если имеем $\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x$, где n, m — четные степени, то мы понижаем степени до того, как не сможем воспользоваться табличными интегралами

Если m и (или) n нечетно, то мы «откусываем» от нечетной степени и убираем под знак дифференциала
Например,
$\int \sin^4 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x = \int sin^4 x \cos^2 x * \cos x \, \mathrm{d}x = \int sin^4 x(1-\sin^2 x) \, \mathrm{d}(\sin x) = \int (t^4 - t^6) \, \mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$

1.4.1 Универсальная тригонометрическая подстановка

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$
$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$

Например, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)} = \int \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}(2+\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2*2t}{1+t^2})} = \int \frac{(t^2+1)\,\mathrm{d}t}{t(t^2-4t+3)} = (*)$
$\frac{t^2+1}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-3}$
Посчитаем так, как считали. Найдем что $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{5}{3}$, $C = -1$
$(*) = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{5}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int\frac{\mathrm{d}t}{t-3} = \frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + \frac{5}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1| - \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3| + C$

Если косинус и синус в дроби входят в виде $\cos^2 x$ и $\sin^2 x$, то мы можем делать замену не универсальную, а **обозначать** $\operatorname{tg} x = z$, $x = \operatorname{arctg} z$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$
$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$