Высшая математика

Лисид Лаконский

February 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Дифференциал функции

$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, где α — бесконечно малая
$\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\delta f \text{ дифференциал}} + \alpha(x)\Delta x$

Определение 1 ***Дифференциалом*** *функции называется главная часть приращения функции, линейная относительно* Δx
Дифференциал независимосй переменной: $\delta x = \Delta x$

1.1.1 Инвариантность формы дифференциала первого порядка

$\delta f = f'(x)\Delta x$
Если $f = f(u(x))$, то $\delta f = f'_u u'_x \delta x = f'(u)\delta u$

1.2 Первообразная и неопределенный интеграл

Определение 2 *Функция* $F(x)$ *называется* ***первообразной*** *от* $f(x)$ *на* $[a; b]$*, если на всех точках данного отрезка выполняется условие, что* $F'(x) = f(x)$

Теорема 1 *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *первообразные для* $f(x)$ *на некотором отрезке, то* $F_1(x) - F_2(x) = const$
Следовательно, $F(x) + C$ *— также первообразная для данной функции*

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ — **неопределенный интеграл**, где $f(x)$ называется **подинтегральной функцией**, а x называется **переменной интегрирования**

1.2.1 Свойства неопределенного интеграла

1. $(\int f(x)\,\mathrm{d}x)' = (F(x) + C)' = f(x)$
2. $\mathrm{d}(\int f(x)\,\mathrm{d}x) = f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$
5. $\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x$
6. Если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то
   7. $\int f(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(\alpha x) + C$
   8. $\int f(x + b)\,\mathrm{d}x = F(x + b) + C$
   9. $\int f(\alpha x + b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(\alpha x + b) + C$

1.2.2 Таблица неопределенных интегралов

1. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
7. $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$
8. $\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
9. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$
10. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$

1.2.3 Метод подведения под знак дифференциала

$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, $\int f(y)\,\mathrm{d}y = F(y) + C$
$\int f(y(x))\,\mathrm{d}(y(x)) = F(y(x)) + C$

$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$, $\int (x+5)^2\,\mathrm{d}(x+5) = \frac{(x+5)^3}{3} + C$, $\int (\sin t)^2\,\mathrm{d}(\sin t) = \frac{(\sin t)^3}{3} + C$
Но если нам нужно найти $\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}x$, то **преобразуем** следующим образом:
$\frac{1}{2}\int (2x+7)^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x+7)^2\,\mathrm{d}(2x+7) = \frac{1}{2}\frac{(2x+7)^3}{3} + C$, **так как** $\mathrm{d}(2x+7) = 2\,\mathrm{d}x$

Первый пример $\int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x+7}\,\mathrm{d}(x+7) = \frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}} + C$

Второй пример $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}(x^2+7) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\int x\sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+7}\,\mathrm{d}(x^2+7) = \dots$

Третий пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x+5} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(3x+5)}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$, так как $\mathrm{d}(3x+5) = 3\,\mathrm{d}x$

Четвертый пример $\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x^2+1| + C$, так как $\mathrm{d}(x^2+1) = 2x\,\mathrm{d}x$

Пятый пример $\int \frac{(2x+5)\,\mathrm{d}x}{x^2+5x+11} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+5x+11)}{(x^2+5x+11)} = \ln|x^2+5x+11| + C$

Шестой пример $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)+1} = \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{(x+2)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+2) + C$

Седьмой пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int e^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$
Можно пойти другим путем: $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \int d(e^{\sin x}) = e^{\sin x} + C$, $\mathrm{d}(e^{\sin x}) = e^{\sin x} * \cos\mathrm{d}x$

1.2.4 Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Пусть имеем $\int t(x)\,\mathrm{d}x$, можем выполнить замену: $\begin{vmatrix} x = \phi(t) \\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t \end{vmatrix} = \int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$
Замечание: иногда будет удобней сразу выполнить замену $t = \phi(x)$

Первый пример $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, выполним тригонометрическую подстановку $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, тогда
$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t} * \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dots$
Воспользуемся **формулами понижения степени**: $\dots = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \dots$
Выполним **обратную замену**: $\dots = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, так как $t = \arcsin x$, $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$,
$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

Второй пример $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+(x^2)^2} = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2 + C$
Данный пример можно было бы также решить методом подведения под знак дифференциала: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x^2 + C$,
так как $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$

Третий пример $\int e^{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \sin x = t \iff x = \arcsin t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2} \end{vmatrix} = \int e^t * \sqrt{1-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + C = e^{\sin x} + C$