Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

Содержание

1 Высшая математика - 29.11.2022

1.1 Примеры исследования функций

1.1.1 Задание 1

1) Пусть $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x-2}$, $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\inf)$, $E(f) = R$
2) Посчитаем разные всякие, в том числе односторонние, пределы:
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \frac{-4}{0} = -\infty$,
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-x-6}{x-2} = \frac{-4}{-0} = +\infty$
3) Найдем точки разрыва: $x = 2$ - точка разрыва второго рода.
4) Найдем асимптоты функции: $x = 2$ (горизонтальная асимптота),
$k_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = 1$,
$b_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x^2-x-6}{x-2} - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{x^2-x-6-x^2+2x}{x-2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-6}{x-2} = 1$,
$y_1 = x_1 + 1$ (наклонная асимптота), $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-x-6}{x^2-2x} = -1$,
$b_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x^2-x-6}{x-2} - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\frac{x-6}{x-2}) = 1$, $y_2 = -x + 1$. Итого, у нас есть **одна горизонтальная асимптота и одна наклонная асимптота**.
5) Исследуем вид функции: четная она, нечетная, периодическая, или же общего вида: $f(-x) = \frac{x^2+x-6}{-x-2}$ - ни четная, ни нечетная, ни периодичная - функция общего вида.
6) Найдем точки пересечения с осями координат: $f(0) = \frac{-6}{-2} = 3$,
$\frac{x^2-x-6}{x-2} = 0 \iff x^2 - x - 6 = 0$, $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Итого, точки пересечения: $A(0; 3)$, $B(3; 0)$, $C(-2; 0)$
7) Наметить примерный ход графика
8) Найдем экстремумы и критические точки:
$f'(x) = (\frac{x^2-x-6}{x-2})' = \frac{(2x-1)(x-2)}{(x-2)^2} - \frac{-x^2-x-6}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+8}{(x-2)^2}$, $x^2 - 4x + 8 = 0$,
$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$, $x_1 = 2 + 2i$, $x_2 = 2 - 2i$. Функция возрастает на всей области определения, экстремумов и критических точек не имеет.
9) $f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2-4x+4)-2(x-2)(x^2-4x+8)}{(x-2)^4} =$
$\frac{2x^3-4x^2-8x^2+16x+8x-16-2x^3+4x^2+8x^2-16x-16x+32}{(x-2)^4} = \frac{-8x+16}{(x-2)^4} = \frac{-8}{(x-2)^3}$. Выходит так, что функция выпулка вверх на промежутке $(2; +\infty)$, а вогнута вниз на промежутке $(-\infty; 2)$
10) Начертим график функции. Оставлю это в качестве упражнения внимательному читателю.