1 Высшая математика - 26.10.2022

1.1 Производная функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), y'_x = \frac{(y_t)'}{(x_t)'}, y''_{xx} = \frac{(y_t)''}{(x_t)'} \end{cases} \tag{1}$$

Вторую производную функции, заданной параметрически, также можно найти следующим образом:
$y''_{x^2} = \frac{y''_{t^2} * x'_t - y'_t * x''_{t^2}}{(x'_t)^3}$

1.1.1 Примеры

Пример 1.

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = t^2 + 2 \end{cases} \tag{2}$$

$y = f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'_x = \frac{2t}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t + 2t^3$
$y''_{xx} = \frac{2+6t^2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2(1+3t^2)(1+t^2)$

Решим ее другим способом: $y'_t = 2t$, $y''_{t^2} = 2$, $x'_t = \frac{1}{1+t^2} = (1+t^2)^{-1}$,
$x''_{t^2} = -\frac{1*2t}{(1+t^2)^2}$
$y''_{x^2} = \frac{2*\frac{1}{1+t^2} - 2t*(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}}{(\frac{1}{1+t^2})^3} = ... = 2(1+3t^2)(1+t^2)$

1.2 Производная обратной функции

$y = f(x)$ и $x = \phi(y)$ - обратные, то $x'_y = \frac{1}{y'_x}$

1.3 Производная функции, заданной неявно

$F(x, y) = 0$ - функция, заданная неявно
Для нахождения y' дифференцируем $F(x, y) = 0$, считая x независимой переменной, а y - функцией

1.4 Уравнение касательной и нормали к графику

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 выглядит следующим образом:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Уравнение нормали к графику:

$$\begin{cases} y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} * (x - x_0) \\ x = x_0 \text{ при } \mathrm{f'(x_0)} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

1.4.1 Примеры

Пример 1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3$, т. x_0 $(x_0;y)=(1;4)$

$y=f(x), \sqrt{x}+\sqrt{f(x)}=3, (\sqrt{x}+\sqrt{f(x)})'=(3)'$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1*f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=0$

$f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{f(x_0)}}{\sqrt{x}}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-2$, $y=0.5x+3.5$ - уравнение нормали.

$y=4+(-2)(x-1)=-2x+6$ - уравнение касательной