Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке

$\mu = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, что значение $f(c) = \mu$
Если $f(x) > 0$ при $x \in [a; b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$ равна площади прямоугольника с основанием $[a, b]$ и высотой $f(c)$

1.1.1 Примеры

Пример №1 Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке $[1; 2]$
$\mu = \frac{1}{2-1} \int\limits_1^2 (5x^4 - 2)\,\mathrm{d}x = (x^5 - 2x)\Big|_1^2 = (32 - 4) - (1 - 2) = 29$

1.2 Нахождение точек экстремума и точек перегиба

Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Если f непрерывна в точке x, то $\Phi'(x) = f(x) \implies \Phi''(x) = f'(x)$
$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$
$f'' > 0$ - вогнутая, $f'' < 0$ — выпуклая

1.2.1 Примеры

Пример №1 $\Phi(x) = \int\limits_1^x (t - t^3)\,\mathrm{d}t = (\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4})\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$
$x - x^3 = \Phi'(x) \iff x - x^3 = 0 \iff x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$
Изобразим знаки $\Phi'(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Найдем точки максимума и минимума; $x_{min} = 0$, $x_{max_1} = -1$, $x_{max_2} = 1$
$\Phi(0) = -\frac{1}{4}$ — min, $\Phi(\pm 1) = 0$ — max

$\Phi''(x) = f'(x) = 1 - 3x^2$
$1 - 3x^2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
Изобразим знаки $\Phi''(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Определим, на каких промежутках график функции вогнут, а на каких выпукл.
$\Phi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}$, $\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{9}$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба

2 Высшая математика - 15.03.2023

2.1 Задание на дом

Кардиоида, астроида, локон Аньези, спираль Архимеда, циклода, леминската, двух-, трех-, четырех- лепестковые розы. **Записать уравнения** во всех возможных видах: в декартовых, полярных, параметрических координатах, **сделать картинки**.

2.2 Несобственные интегралы

2.2.1 Первого рода (с бесконечными пределами)

Пусть функция $f(x)$ определена при x от a до ∞. Если существует конечный предел $\lim\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ при $b \to +\infty$, то определен и сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что этот интеграл расходится.

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} + \int\limits_{a}^{+\infty} = \lim\limits_{b_1\to-\infty}\int\limits_{b_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b_2\to+\infty}\int\limits_{a}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ — если хоть один интеграл расходится, то весь интеграл тоже расходящийся

Теорема 1 *Если для всех* $x \geq a$ *выполняется* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ *— непрерывные функции, то из сходимости* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *следует сходимость* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
А из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *следует расходимость* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$

Допустим, $y = \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{b} - 1) = 1$ — сходящийся интеграл
И хотим проверить, является ли сходящимся $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|\,\mathrm{d}x}{x^2}$, уверенно заявляем, что $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, следовательно интеграл от этой функции тоже является сходящимся

Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, $a > 1$

1. $p > 1$ — сходящийся
2. $p \leq 1$ — расходящийся

Теорема 2 *Если сходится интеграл от* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится, при этом называется абсолютно сходящимся*

2.2.2 Второго рода (от бесконечных функций)

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\epsilon\to0}\int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, где a — «плохая точка», $\lim\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\epsilon\to0}\int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, если b — «плохая точка»
Если плохая точка находится между a и b, то интеграл необходимо разбить надвое:
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b = \lim\limits_{\epsilon_1\to0}\int\limits_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\epsilon_2\to0}\int\limits_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$
Если обе точки плохие, то $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0+\epsilon}^{a} + \int\limits_a^{+\infty}$ — первый интеграл — второго рода, второй — первого рода

$\int\limits_a^c \frac{\mathrm{d}x}{(c-x)^p}$, где c — плохая точка

1. $p < 1$ — сходящийся интеграл
2. $p \geq 1$ — расходящийся интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_\epsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}}$ — первый интеграл сходится, второй расходится — интеграл расходящийся

2.3 Вычисление значения определенного интеграла

2.3.1 Первый способ, тривиальный

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$
$\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x_i$

2.3.2 Второй способ, если мы желаем чуть усложнить себе жизнь, но увеличить точность

$S = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2} * \frac{b-a}{n}$

2.4 Знакоположительные числовые ряды

Нам знакомы числовые последовательности a_1, a_2, a_3, ..., a_n
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ — есть числовой ряд. Сумма первых n членов S_n называется частичной суммой ряда
Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ — сумма ряда

$b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \ldots,\ \ S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$
$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ — формула n-ой частичной суммы
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = S$

Иногда нам нет необходимости находить сумму ряда, а нужно лишь определить, является ряд сходящимся или расходящимся.

Теорема 3 *Если сходится ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких его членов (то есть, конечного числа его членов), то будет сходиться и данный ряд*
Верное и обратное, что если данный ряд сходится, то будет сходиться и ряд, полученный отбрасыванием нескольких его членов

Теорема 4 *Если некий ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится и его сумма равняется S, то будет сходиться и ряд $ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots$, и его сумма будет равна kS*

Теорема 5 *Если есть два сходящихся ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S_1$ и $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = S_2$, то будут сходиться и ряды, полученные почленным сложением или вычитанием этих двух рядов:*

1. $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) = S_1 \pm S_2$

2.4.1 Необходимый признак сходимости

Если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд точно расходится

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \lim_{n\to\infty} S_n = S, \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Как следствие, если n—ый член не стремится к нулю, то ряд точно будет расходящимся. Но мы не должны делать вывод, если n—ый член стремится к нулю, что ряд будет точно сходящимся. Мы должны дальше исследовать его на сходимость

2.4.2 Достаточные признаки сходимости

Теорема 6 (Признак сравнения) *Пусть* $u_1 + u_2 + u + 3 + \ldots$, $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ *— знакоположительные числовые ряды, при этом* $u_i \leq v_i$
Тогда из сходимости более большого ряда следует сходимость более маленького ряда
А из расходимости более маленького ряда следует расходимость более большого ряда

Теорема 7 (Предельный признак сравнения) *Пусть* $u_1 + u_2 + u + 3 + \ldots$, $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ *— знакоположительные числовые ряды, при этом* $u_i \leq v_i$
Если $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = C \neq 0 \neq \pm\infty$
То данные ряды ведут себя одинаково: или сходятся, или расходятся одновременно

3 Высшая математика - 17.03.2023

3.1 Вычисление объема тела вращения

3.1.1 Примеры

Пример №1 Объем тела вращения $y = x^2 - x$, $y = 0$ вокруг оси OX
$V = \pi \int\limits_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (x^2 - x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,\mathrm{d}x = \pi(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \pi(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{\pi}{30}$

4 Высшая математика - 22.03.2023

4.1 Эталонные ряды

1. $\sum \frac{1}{n^p}$, $p > 1$ — ряд сходится, $p \leq 1$ — ряд расходится
2. $\sum \frac{1}{ne_n^p n}$ — аналогично

4.2 Исследование рядов на сходимость

Пример №1 $\sum \frac{\sin \frac{1}{n}}{n} \sim \sum \frac{1}{n^2}$, так как $\sin \alpha \sim \alpha$

Проверим: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin \frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \sin \frac{1}{n}}{1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0 \neq \pm\infty$

Пример №2 $\sum \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^1 2 + n} + \sqrt{n^3}} = \sum \frac{n^{1/2}}{n^{12/5}} = \sum \frac{1}{n^{19/10}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt[3]{n}}{\sqrt[5]{n^1 2 + n} + \sqrt{n^3}}}{\frac{1}{n^{19/10}}} = \ldots$

4.3 Очередные признаки сходимости

Теорема 8 (Признак Д'Аламбера) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = C$

Если $C > 1$ — ряд расходится, $C < 1$ — ряд сходится, если $C = 1$ — признак неприменим

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}$, $a_n = \frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+2)3^{2n+1}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2(n+2)3^{2n+1}}}{\frac{n}{2(n+1)3^{2n-1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{2n-1}2(n+1)}{2(n+2)3^{2n+1}n} = \lim n \to \infty \frac{3^{2n-1}}{3^{2n-1} * 3^2} = \frac{1}{9} \leq 1$ — ряд является сходящимся

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-5}$, $a_n = \frac{n}{3n^2-5}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3(n+1)^2-5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3(n+1)^2-5}}{\frac{n}{3n^2-5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(3n^2-5)}{(3n^2+6n-2)n} - 1$ — данный признак неприменим, применяем признак сравнения

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-5} \sim \sum \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{3n^2-5}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$ — данные ряды ведут себя одинаково, так как один расходящийся — другой тоже расходящийся.

Теорема 9 (Признак Коши (радикальный)) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$

Если $C > 1$ — ряд расходится, $C < 1$ — ряд сходится, если $C = 1$ — признак неприменим

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$

$\lim n \to \infty \sqrt[n]{\frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{3} = \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \frac{e}{3} \leq 1$ — ряд сходится

Теорема 10 (Интегральный признак Коши) *Пусть для знакоположительного ряда выполняется условие* $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$

Можно ввести такую $f(x)$, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, ...

Тогда, если существует $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ и он сходится, то будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to \int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_1^{\beta} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} (-\frac{1}{x})\Big|_1^{\beta} = -\lim\limits_{\beta\to\infty} (\frac{1}{\beta} - 1) = 1$

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_{1}^{\beta} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim\limits_{\beta\to\infty} \ln|x| \Big|_{1}^{\beta} = \lim\limits_{\beta\to\infty} (\ln\beta - \ln 1)$ — расходится, ряд является расходящимся

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to \int\limits_{1}^{\infty} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} \int\limits_{1}^{\beta} x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\beta\to\infty} 2\sqrt{x} \Big|_{1}^{\beta} = \lim\limits_{\beta\to\infty} (2\sqrt{\beta} - 2)$ — расходится

4.3.1 Замечания о применении признаков сходимости

1. При исследовании рядов, общий член которых представляет собой логарифмическую функцию, мы можем пользоваться следующим знанием:

   Если $p \in R$, $q > 0$, то $\exists n_0 \in N$, $n \geq n_0 \implies \ln^p n < n^q$

2. $n!$

   $n \geq 4$, $2^n < n! < n^n$, $n \ln 2 < \ln(n!) < n \ln n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4. **Формула Стирлинга**

   $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}$

   $\sum \frac{n! e^n}{n^{n+p}} = \sum\limits_{n}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi} n^{1/2}}{n^p} = \sum \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-1/2}}$, $p - \frac{1}{2} > 1$, $p > \frac{3}{2}$

5. Если α $(\alpha \to 0)$ — малый угол, то $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\arcsin\alpha$, $\arccos\alpha \to \alpha$

4.4 Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \ldots$ — **знакочередующийся ряд**, сами $u_1, u_2, u_3 \dots > 0$

Теорема 11 (Теорема Лейбница) *Если в знакочередующемся ряде выполнены условия $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то знакочередующийся ряд является сходящимся, его сумма положительна и не превосходит u_1*
Доказательство: найдем частичную сумму четного числа элементов, $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$, $S_{2m} > 0$
$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - u_{2m}$, $0 < S_{2m} < u_1$
$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$, $\lim S_{2m+1} = \lim S_{2m} + 0$, S_{2m+1} *также удовлетворяет всем условиям*
Так что $0 < S < u_1$

Замечание. *Теорема работает, даже если данные неравенства выполнены не с первого, а с некоторого члена.*

Пример №1 $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots \frac{(-1)^n}{n^2} \ldots$, $1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16}$
$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1-n)(n+1+n)}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$
Следовательно, первое условие теоремы выполняется. Второе условие тоже выполняется: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
Следовательно, ряд сходится

Пример №2 $\sum \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
Такой ряд тоже сходится

Пример №3 $\sum \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{n}$, $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, $f'(x) = \frac{2\ln x * \frac{1}{x} * x - \ln^2 x * 1}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$
Исследуем поведение данной производной, $\ln x > 2$, $x > e^2$
Будем рассматривать $u_8 > u_9 > u_{10} \ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{n} = \lim \frac{2\ln n * \frac{1}{n}}{1} = 2 \lim \frac{(\ln n)'}{(n)'} = 2 \lim \frac{1}{n} = 0$
Все условия признака выполнены, следовательно ряд является сходящимся

4.4.1 Куча признаков и определений

Определение 1 *Знакопеременный ряд называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд из модулей*

Теорема 12 *Абсолютно сходящийся ряд является сходящимся*

Теорема 13 *Если ряды* $\sum a_n$ *и* $\sum b_n$ *являются абсолютно сходящимися, то для любых чисел* α *и* β *ряд* $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ *тоже является абсолютно сходящимся*

Определение 2 *Если ряд сходится абсолютно, он останется сходящимся при любой перестановке его членов, и сумма ряда не зависит от порядка этих самых членов*
Замечание. *Для сходимости по Лейбницу это может и не выполняться*

Теорема 14 (Признак Дирихле) *Пусть для* $\sum a_m * b_n$ *последовательность* $a_n \geq a_{n+1}$ *монотонно стремится к нулю и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*, а последовательность частичных сумм для* b_n *ограничена, то есть* $\exists M > 0 \forall n \in N$
$|B_n| = |\sum\limits_{i=1}^{n} b_i| \leq M$

Теорема 15 (Признак Абеля) $\sum a_m * b_n$

1. *Последовательность* a_m *— монотонна и ограничена*
2. $\sum b_n$ *— сходящийся*

Тогда $\sum a_n b_n$ *— сходящийся*

Если знакопеременный ряд сходится, но абсолютной сходимости нет, то говорят об **условной сходимости**

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$
Проверим на абсолютную сходимость, исследуем $\sum \frac{n^3}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится абсолютно

Пример №2 $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ — нет надежды на абсолютную сходимость, так как $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ — расходящийся
Сходимость будет, но лишь условная. Абсолютной сходимости нет

5 Высшая математика - 27.03.2023

5.1 Разбор заданий по определенным интегралам

5.1.1 Задание №3 — задание №4

В декартовой системе координат Смотри прикрепленное изображение №1
$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x$, $y = f_2(x)$, $y = f_1(x)$

В полярной системе координат Смотри прикрепленное изображение №2
$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (r_2^2(\phi) - r_1^2(\phi))\,\mathrm{d}\phi$, $r = r_2(\phi)$, $r = r_1(\phi)$

Смотри прикрепленное изображение №3
$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\phi)\,\mathrm{d}\phi$

Примеры **Пример №1**
Пусть $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$. Найти площадь, ограниченную ими.
$x^2 = \frac{x^2}{2} + 1 \iff x = \pm\sqrt{2}$
$S = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (\frac{x^2}{2} + 1 - x^2)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x = (x - \frac{x^3}{6})\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{6}) - (-\sqrt{2} - \frac{-2\sqrt{2}}{6}) = 2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

Пример №2
Пусть $r = a\sqrt{\sin 4\phi}$, $\sin 4\phi \geq 0$, $r \geq 0$, $a > 0$, $0 \leq 4\phi \leq \pi \iff 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$
$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} (a\sqrt{\sin 4\phi})^2\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \sin 4\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{a^2}{2}(-\frac{\cos 4\phi}{4})\Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}(-\frac{(-1)}{4} - (-\frac{1}{4})) = \frac{a^2}{4}$

5.1.2 Задание №5

См. прикрепленное изображение №4
$V_x = \pi\int\limits_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))\,\mathrm{d}x$, $V_y = \pi\int\limits_c^d (\phi_2^2(y) - \phi_1^2(y))\,\mathrm{d}y$

Примеры **Пример №1**
Пусть $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x = 0$
$V_x = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} ((\frac{x^2}{2}+1)^2 - (x^2)^2)\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} (\frac{x^4}{4}+x^2+1-x^4)\,\mathrm{d}x = \pi(\frac{x^3}{3}+x-\frac{3x^5}{20})\Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi(\frac{2\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{5}) = \pi(\frac{10\sqrt{2}+15\sqrt{2}-9\sqrt{2}}{15}) = \frac{16\sqrt{2}}{15}\pi$
$x = \sqrt{y}$, $x = \sqrt{2y-2}$
$V_y = \pi\int\limits_0^1 ((\sqrt{y})^2 - (\sqrt{2y-2})^2) + \pi\int\limits_1^2 ((\sqrt{y})^2 - (\sqrt{2y-2})^2) = \pi(\frac{y^2}{2})\Big|_0^1 + \pi(2y - \frac{y^2}{2})\Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} + \pi(4 - 2 - (2 - \frac{1}{2})) = \pi$

5.1.3 Задание №11

Примеры **Пример №1**
$Z = \sqrt{y - x^2} - \ln(x - y + 1) + \frac{x}{y}$. Изобразить область определения данной функции.

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ x - y + 1 > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y \geq x^2 \\ y < x + 1 \\ y \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Нарисовать эту фигню, что выше в виде системы представлена, после чего подумать и заштриховать то, что надо.

5.2 Длина дуги кривой

5.2.1 В декартовой системе координат

$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Пример №1 $y = a\cosh\frac{x}{a}$, $x \in [-a; a]$

$y' = \sinh\frac{x}{a}$, $l = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + (\sinh\frac{x}{a})^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 + \sinh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-a}^{a} \cosh\frac{x}{a}\,\mathrm{d}x = a\sinh\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} =$
$(a\sinh 1) - (a\sinh(-1)) = 2a\sinh 1$

5.2.2 В полярной системе координат

$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\phi) + (r'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi$

Пример №1 $r = a(1 - \cos\phi)$, $a > 0$

$r' = a\sin\phi$

$l = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{(a(1-\cos\phi))^2 + (a\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{(a - a\cos\phi)^2 + (a\sin\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi = 2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2 - 2a^2\cos^2\phi + a^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi =$
$2\int\limits_0^\pi \sqrt{a^2(1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi + \sin^2\phi)}\,\mathrm{d}\phi = 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi = 2a\int\limits_0^\pi \sqrt{4(\frac{1-\cos\phi}{2})}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int\limits_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{\phi}{2}}\,\mathrm{d}\phi = 4a\int\limits_0^\pi \sin\frac{\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi =$
$4a(-2\cos\frac{\phi}{2})\Big|_0^\pi = 4a(-(-2)) = 8agith$

5.2.3 В параметрической системе координат

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} , t \in [t_1, t_2] \tag{2}$$

$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

Пример №1 Найти длину четверти окружности радиуса a

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} , t \in [0; \frac{\pi}{2}] \tag{3}$$

$(x') = -a\sin t$, $(y') = a\cos t$

$l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = a\int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = a(t\Big|_0^{\pi/2}) = \frac{a\pi}{2}$

6 Высшая математика - 29.03.2023

6.1 Примеры применения признаков сходимости для исследования рядов

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+n)2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)+1}{((n+1)^2+(n+1))2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{(n^2+n)2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n^2+n)2^n}{(n^2+3n+2)2^n*2(2n+1)} = \frac{1}{2} < 1$ — ряд сходится

Пример №2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)3^n}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n-1)3^n}{(4n+3)3^n*3} = \frac{1}{3} < 1$ — сходится абсолютно

Пример №3 $\sum \frac{(-1)^n}{4n-1}, \sum \frac{1}{4n-1} \sim \sum \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} \neq 0 \neq \pm\infty$ — нет абсолютной сходимости, есть сходимость по Лейбницу

6.2 Функциональные ряды

$\sum u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)$, $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x)$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Определение 3 ***Областью сходимости функционального ряда*** *называется множество тех значений x, при которых ряд будет сходящимся.*
Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$

Пример №1 $\sum \frac{(x-2)^{2n+1}}{3^n*(n+5)}$

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim |\frac{(x-2)^{2(n+1)+1}*3^n*(n+5)}{3^{n+1}(n+1+5)(x-2)^{2n+1}}| = \frac{1}{3}|x-2|^2 < 1$
$|x-2|^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < x-2 < \sqrt{3} \iff 2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$ — ряд сходится при этих условиях
Отдельно нужно проверить граничные значения:
$x = 2+\sqrt{3}$, $\sum \frac{(2+\sqrt{3}-2)^{2n+1}}{3^n(n+5)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+5} \sim \frac{1}{n}$ — расходящийся
$x = 2-\sqrt{3}$, $\sum \frac{(2-\sqrt{3}-2)^{2n+1}}{3^n(n+5)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{n+5} \sim \frac{1}{n}$ — тоже расходящийся

6.2.1 Сходимость функциональных рядов

Определение 4 *Функциональный ряд называется равномерно сходящимся на некотором множестве D, если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_0$, не зависящее от ϵ, что при $n > N_0$, и всех $x \in D$, выполняется следующее неравенство:*

$$|S(x) - S_n(x)| < \epsilon$$

Если ряд является равномерно сходящимся, то он является и сходящимся

Определение 5 *Функциональный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum |u_n(x)|$*

Теорема 16 (Мажорантный признак Вейерштрасса) *Функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве D, если существует сходящийся числовой ряд с положительными членами, и при том сходящийся, такой что*

$$|u_i(x)| \leq a_i$$

Для всех $x \in D$

Пример №1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $|\frac{\cos nx}{3^n}| \leq \frac{1}{3^n}$
$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ — является сходящейся, так что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n}$ является абсолютно и равномерно сходящимся, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ мажорирует данный ряд

Для мажорируемых рядов **справедливы следующие теоремы**:

Теорема 17 *Сумма ряда из непрерывных функций, мажорируемого на $[a;b]$ есть функция, непрерывная на этом отрезке*

6.2.2 Почленное интегрирование и дифференцирование рядов

Теорема 18 (О почленном интегрировании) *Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, $\ldots$ — непрерывные функции и ряд из $u_n(x)$ является мажорируемым на интервале $[a;b]$, $S(x)$ — сумма этого ряда, тогда*

$$\int\limits_a^x s(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^x u_1(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^x u_2(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int\limits_a^x u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Если ряд не является мажорируемым, то почленное интегрирование не всегда возможно.

Теорема 19 (О почленном дифференцировании) $\sum u_n(x)$, $u_1(x), u_2(x), \ldots$ *— имеют непрерывные производные на* $[a;b]$
$\sum u_n(x) = S(x)$ *— сумма ряда*
Пусть ряд из производных является мажорируемым на $[a;b]$, тогда сумма ряда из производных будет являться производной от суммы исходного ряда:

$$\sum u_n'(x) = S'(x)$$

Пример №1 $x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \cdots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \cdots = S$
$S\prime(x) = 1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n-4} + \ldots$, $|x| < 1$, геометрическая прогрессия $b_1 = 1$, $q = x^4$
$S\prime(x) = \frac{1}{1-x^4}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^4} = \int \frac{1}{(1-x^2)(1+x^2)} = \int \frac{1/2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1/2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\ln|\frac{1+x}{1-x}|$ — **искомая сумма ряда**