# Высшая математика

Лисид Лаконский

November 2022

## Содержание

# 1 Высшая математика - 01.11.2022

## 1.1 Правило Лопиталя

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0(\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0(\infty)$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой неопределенность вида $\{\frac{0}{0}\}$ или $\{\frac{\infty}{\infty}\}$.

$\lim x \to a \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

### 1.1.1 Примеры

**Пример 1.**
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{2x^2-x-1} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{6x+4}{4x-1} = \frac{10}{3}$

**Пример 2.**
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

**Пример 3.**
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \lim\limits_{x\to +\infty} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0$

**Пример 4.**
$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \{-\infty * \infty\} = -\infty$

**Пример 5.**
$\lim\limits_{x\to 0} x * \operatorname{ctg} x = \{0 * \infty\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \{\frac{0}{0}\} = \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x = 1$

**Пример 6.**
$\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^x = \{0^0\} = \lim\limits_{x\to 0} \ln y = \lim\limits_{x\to 0} x \ln \operatorname{tg} x = \{0 * \infty\} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} * \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2}{\sin x \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2}{0.5 \sin 2x} = 0$
$y = (\operatorname{tg} x)^x \iff \ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^x$

**Пример 7.**
$\lim\limits_{x\to 0} \ln y = \ln \lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\ln y = 0 \iff y = e^0 = 1$

**Пример 8.**
$\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^x} = \lim\limits_{x\to 0} e^{x \ln \operatorname{tg} x} = ... = 0$

# 2 Высшая математика - 09.11.2022

## 2.1 Разбор контрольной работы

Семь заданий в варианте, решается шесть заданий, потому что шестое задание - то, что не рассказывается на лекциях.

### 2.1.1 Первое задание

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+n+1}}{3n^2-2\sqrt{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\infty}{\infty}] = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{3-2\sqrt{\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}} = \frac{1}{3}$

### 2.1.2 Второе задание

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{n\sqrt{n}+\sqrt{n^4+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n\sqrt{n}+\sqrt{n^4+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}} = 1$

### 2.1.3 Третье задание

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to3}\frac{x+13-4(x+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+13})+2\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to3}\frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)*a}(a = \sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}) = \lim\limits_{x\to3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{16}$

### 2.1.4 Четвертое задание

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2^{3x}*\ln 2*3-3^{2x}*\ln 3*2}{1+3x^2} = 3\ln 2-2\ln 3$

### 2.1.5 Пятое задание

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1+4x}{-49x+9x} = \frac{x(\frac{1}{x}+4}{-40x} = -\frac{1}{10}$

### 2.1.6 Седьмое задание

Найти число и характер точек разрыва функции $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$
Точек разрыва ровно три штуки: $x=-1$, $x=0$, $x=1$

Рассмотрим точку разрыва $x=0$:
$\lim\limits_{x\to0}f(x) = \frac{\frac{1}{0}-\frac{1}{0+1}}{\frac{1}{0-1}-\frac{1}{x}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} * \frac{x(x-1)}{x-x+1} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{x+1} = -1$
Рассмотрим два односторонних предела:

1. $\lim\limits_{x\to0+0}f(x) = -1$
2. $\lim\limits_{x\to0-0}f(x) = -1$

Данные пределы равны между собой, следовательно, $x = 0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

По аналогии находится $x = 1$ - она тоже является устранимой точкой разрыва первого рода

Рассмотрим точку разрыва $x = -1$:

1. $f(-1)$ - не определена
2. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

Следовательно, $x = -1$ - точка разрыва второго рода.

# 3 Высшая математика - 11.11.2022

## 3.1 Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

### 3.1.1 Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках (a, b); $f(a) = f(b) = 0$, тогда внутри отрезка $[a;b]$ существует по крайней мере одна точка $c$, в которой производная обращается в ноль:
$\exists c : a < c < b$, такая что $f'(c) = 0$
Доказательство смотреть в Лакерник А. Р. "Краткий курс высшей математики Пискунов.

**Первое замечание** Эта теорема останется справедливой, если $f(a) = f(b) \neq 0$

**Примеры** Например, имеется функция: $f(x) = x^2$, рассмотрим ее на отрезке $[-2; 2]$. Для нее выполняются все условия, следовательно, существует такая точка, в которой производная обращается в ноль. Можно найти, что это точка $x = 0$

### 3.1.2 Теорема Лагранжа о конечных приращениях

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$; дифференцируема во внутренних точках $(a, b)$, тогда $\exists c : a < c < b$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

**Доказательство** $Q = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - число, введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$
Уравнение прямой, проходящей через $(a; f(a))$:
$y - f(a) = \operatorname{tg}\alpha(x - a) \iff y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$
$F(x) = f(x) - y$, то есть мы получили, что $F(x)$ для каждого значения $x$ является разностью ординаты кривой и хорды.

Функция $F(x)$ **удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля**, $F'(c) = 0, F'(x) = f'(x) - Q, F'(c) = f'(c) - Q = 0, Q = f'(c)$.

**Геометрический смысл** Геометрический смысл теоремы Лагранжа в том, что при выполнении требуемых условий на кривой найдется точка между $a$ и $b$, что касательная в которой параллельна хорде $ab$.

### 3.1.3 Теорема Коши об отношении приращений двух функций

Пусть есть $f(x)$ и $g(x)$, непрерывные на $[a;b]$ и дифференцируемы во внутренних точках $(a;b)$, $g'(x) \neq 0$ внутри $(a;b)$, **тогда** $\exists c : a < c < b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

### 3.1.4 Теорема Ферма

Пусть $f(x)$ определена на $[a;b]$ и принимает во внутренней точке $c$ наибольшее или наименьшее значение.
Тогда $f'(c) = 0$, если в этой точке существует конечная производная.

## 3.2 Геометрические приложения производной

### 3.2.1 Уравнение касательной к кривой

**Касательной** $y = y(x)$ в точке $A(x; y(x))$ **называется** прямая, к которой стремится секущая, проходящая через точку $A$ и точку
$B(x + \Delta x, y(x + \Delta x))$ при условии, что $\Delta x \to 0$

**Уравнение касательной** Уравнение касательной в точке $(x_0; y_0)$:
$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

### 3.2.2 Уравнение нормали к кривой

**Уравнение нормали:** $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$

## 3.3 Правило Лопиталя

### 3.3.1 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **удовлетворяют** условию теоремы Коши на интервале $[a;b]$ и **выполняется** условие $f(a) = g(a) = 0$
Тогда если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, и они равны между собой.

**Замечание** Если $f'(a) = g'(a) = 0$, то можно рассматривать собственно производные в качестве функций и дальше применять правило Лопиталя .

### 3.3.2 Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** и дифференцируемы на всех точках кроме, может, самой точки $a$, и $g'(x) \neq 0$, и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
Если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \implies \exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

## 3.4 Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет непр. произв. до $(n+1)$ пор.
$P_n(x)$ многочлен степени не выше $n$: $P_n(a) = f(a), P_n'(a) = f'(a)$
$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}, R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), a < \xi < x$

**Формула Маклорена** $P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

**Примеры вывода формулы**

| | | |
|---|---|---|
| $y = \sin x, y(0) = 0$ | $y = \cos x, y(0) = 1$ | $y = e^x, y(0) = 1$ |
| $y'(0) = 1$ | $y'(0) =$ | $y'(0) = 1$ |
| $y''(0) = 0$ | $y''(0) =$ | $y''(0) = 1$ |
| $y'''(0) = -1$ | $y'''(0) =$ | $y'''(0) = 1$ |
| $y''''(0) = 0$ | $y''''(0) =$ | $y''''(0) = 1$ |
| $y'''''(0) = 1$ | $y'''''(0) =$ | $y'''''(0) = 1$ |

Отсюда $\sin x = 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ... = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...,$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...,\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
Интересно рассмотреть натуральный логарифм: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$
Также $(1+x)^m = 1 + mX + \frac{m(m-1}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ...,$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1*3*x^3}{2^3*3!} - \frac{1*3*5*x^4}{2^4*4!}$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) = \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + ...$

**Применение данных формул к вычислению пределов** Допустим, имеем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = ...$

Распишем разложение в Тейлора: $... = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}$

# 4 Высшая математика - 25.11.2022

## 4.1 Исследование функций с помощью первой и второй производной

### 4.1.1 Наибольшее и наименьшее значение

Если $f(x)$ имеет производную и на $[a;b]$ возрастает, то $f'(x) > 0$, если убывает - $f'(x) < 0$
Если $x_1$ - точка максимума, то
$f(x_1) > f($в любой точке из $\epsilon$ - окрестности точки $x_1)$. Если $x_2$ - точка минимума, то $f(x_1) < f($в любой точке из $\epsilon$ - окрестности точки $x_2)$

**Теорема об необходимом условии существования экстремума**
Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке $x_1$ максимум или минимум, то её производная в этой точке равна нулю или не существует.
**Замечание.** Не при всяком $x$, при котором производная равна нулю, существует максимум или минимум.

**Теорема о достаточном условии существования экстремума**
Пусть $f(x)$ непрерывна на некотором интервале, содержащем точку $x_1$, в которой $f'(x_1) = 0$ или не существует, и $f(x)$ дифференцируема во всех точках интервала (кроме, может, самой $x_1$).
Если при переходе через эту точку знак производной меняется с плюса на минус, то она называется точкой максимума. Если меняется знак меняется с минуса на плюс, то она называется точкой минимума.

**Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.** Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или на концах $[a;b]$, или в одной из точек экстремума внутри отрезка.

**Примеры решения задач** Найдем наибольшее значение функции $f(x) = 2x^2 - 3x^2 - 12x + 1$, определенной на отрезке $[-2; \frac{5}{2}]$
$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$
Найдем экстремумы, приравняя производную к нулю: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
$f(-2) = -3$, $f(2) = -19$, $f(-1) = 8$ - **ответ**, $f(\frac{5}{2}) = -16\frac{1}{2}$

### 4.1.2 Исследование кривой на выпуклость и вогнутость, точки перегиба

**Выпуклость и вогнутость** Кривая обращена **выпуклостью вверх** (выпукла), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) < 0$
Кривая обращена **выпуклостью вниз** (вогнута), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. При этом $f''(x) > 0$

**Точка перегиба** Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от ее вогнутой части называется **точкой перегиба**.
Если $y = f(x)$ - непрерывна в точке $a$, $f''(a) = 0$ или не существует; при переходе через $a$ меняет знак, то $a$ - **точка перегиба**.

**Теорема о втором достаточном условии существования экстремума** Если $f'(x_1) = 0$ или не существует, $f''(x_1) > 0$, то в точке $x_1$ - минимум, иначе если $f''(x_1) < 0$, то в точке $x_1$ - максимум.
**Замечание** Если $f'(x_1) = f''(x_1) = ... = f^{(n-1)}$, $n$ - нечетное, то производной не существует. Если $n$ - четное, то $f^{(n)} > 0$ - минимум, $f^{(n)} < 0$ - максимум.

**Примеры решения задач** Пусть $y = \frac{x}{1+x^2}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость; найдем точки перегиба.
$y' = \frac{1+x^2-x*2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)*2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$
$\mathrm{sign}(-\infty; \sqrt{3}) = -1$, $\mathrm{sign}[-\sqrt{3}; 0] = 1$, $\mathrm{sign}(0; \sqrt{3}) = -1$ $\mathrm{sign}[\sqrt{3}; +\infty] = 1$

## 4.2 Асимптоты функций

Прямая называется **асимптотой** к кривой, если расстояние $\Delta$ от некоторой переменной точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении данной точки в бесконечность.
**Виды асимптот**:

1. Вертикальные: $\lim\limits_{x\to a+0} = \infty$ (хотя бы справа или слева), $x = a$ - асимптота
2. Горизонтальные: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, $y = b$
3. Наклонные: $y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$

## 4.3 Общий план исследования функции

Общий план исследования функции:

1. Находим область определения функции, нули функции, интервалы знакопостоянства
2. Проверяем четность-нечетность, периодичность функции, находим точки пересечения с осями
3. Исследуем функцию на непрерывность, точки разрыва, вертикальные асимптоты
4. Находим первую производную, точки экстремума, вычисляем значение функции в этих точках

5. Находим вторую производную, исследуем на выпуклость и вогнутость

6. Проверяем наклонные асимптоты, можно проверить отдельные точки

### 4.3.1 Примеры применения общего плана исследования функции

**Пример 1.** Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = 0$ при $x = 0$, при положительных $x$ график располагается выше оси $x$, при отрицательных - ниже.
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{1+x^2} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
Найдем первую производную: $y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y' = 0$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, вычислим значения функции в этих точках: $y(1) = \frac{1}{2}$, $y(-1) = -\frac{1}{2}$
Найдем вторую производную: $y'' = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.
Поищем наклонную асимптоту данной функции:
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - 0 * x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, $y = 0$ **- горизонтальная асимптота**.

**Пример 2.**
Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{x^2-1}$, $y = 0$ при $x = 0$, область определения данной функции: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$
Проверим на четность и нечетность: $f(-x) = \frac{-x}{x^2-1} = -y(x)$ - функция **является нечетной** - симметрична относительно нуля.
$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$
Найдем первую производную данной функции: $y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ - убывающая
Найдем вторую производную данной функции: $y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, исследуем ее на выпуклость и вогнутость.