Высшая математика

Лисид Лаконский

April 2023

Содержание

1 Высшая математика - 5 апреля 2023 г.

1.1 Степенные ряды как частный случай функциональных рядов

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$
$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \ldots$

Теорема 1 *Если степенной ряд сходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет абсолютно сходиться $\forall |x| < |x'|$*
Если степенной ряд расходится при некотором значении $x' \neq 0$, то он будет расходиться $\forall |x| > |x'|$

Определение 1 ***Интервалом сходимости*** *степенного ряда называется интервал $(-R; R)$, что для всякого x, находящегося внутри этого интервала, ряд абсолютно сходится, а для находящегося снаружи — расходится*

$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}| = |x| \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$
$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ — **радиус сходимости**
$|x| < R$, $-R < x < R$

$\sum \frac{x^{2n-1}}{9^n} = \frac{x^1}{9} + \frac{x^3}{81} + \frac{x^5}{729} + \ldots$
$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x^{2n+1} * 9^n}{9^n * 9 * x^{2n-1}}| = \frac{|x|^2}{9} < 1$, $|x^2| < 9$, $-3 < x < 3$ — **интервал сходимости**
Проверим, что происходит при $x = \pm 3$:
$\sum\limits^{x=3} \frac{3^{2n-1}}{9^n} = \sum \frac{1}{3}$
$\sum\limits^{x=-3} \frac{(-3)^{2n-1}}{9^n}$ — ряд не является сходящимся

Степенной ряд является **мажорируемым** на любом отрезке, целиком лежащем внутри его области сходимости.

Если **пределы интегрирования** тоже лежат внутри интервала сходимости, то **интеграл от суммы ряда будет равняться сумме отдельных интегралов от элементов данного ряда**.

Если степенной ряд имеет интервал сходимости $(-R; R)$, то ряд, полученный **почленным дифференцированием** этого ряда, **имеет тот же интервал сходимости**, и сумма этого ряда будет равна производной суммы исходного ряда, если $x \in (-R; R)$

1.2 Формулы приближенных вычислений

1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \ldots$
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
4. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$
5. $\sinh h = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$
6. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
7. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
8. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$

Например,
$\frac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-3/5} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2}(\frac{9}{25}) - \frac{1}{6}(\frac{27}{125}) + \cdots = 1 - 0.6 + 0.18 - 0.036 = 0.544$, с точностью 0.0054 — первый отбрасываемый член

Другой пример,
$\sqrt[5]{36} = (32+4)^{1/5} = 32^{1/5}(1+\frac{1}{8})^{1/5} = 2(1+\frac{1}{8})^{1/5}$
$(1+x)^{1/5} = 1 + \frac{1}{5}x + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})x^2}{2!} + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})x^3}{3!}$, $(1+\frac{1}{8})^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} * \frac{1}{8} - \frac{4}{25*2} * (\frac{1}{8})^2 + \frac{36}{125*6} * (\frac{1}{3})^3$
Дальнейшее решение тривиально и оставляется в качестве упражнения читателю

Третий пример,
$\int\limits_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{x}(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x^{1/2} - x^{3/2} + \frac{1}{2!}x^{5/2} - \frac{1}{3!}x^{7/2} + \ldots)\,\mathrm{d}x =$
$(\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{1}{2!} * \frac{2x^{7/2}}{7} - \frac{1}{3!} * \frac{2x^{9/2}}{9} + \ldots)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{54} + \ldots$

1.3 Ряды Фурье

Функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется **тригонометрическим рядом**, где a_0, a_n, b_n — **коэффициенты тригонометрического ряда**

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что она **представляется тригонометрическим рядом, сходящимся к данной функции** на интервале $[-\pi;\pi]$, то есть **является суммой данного ряда**, тогда
$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x$

Попробуем с помощью этих формул составить тригонометрический ряд Фурье для функции

$$f(x)=\begin{cases}-1; -\pi<x<0\\ 1; 0\le x\le\pi\end{cases}$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(\int\limits_{-\pi}^{0}(-1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}(1)\,\mathrm{d}x)=(-x)\Big|_{-\pi}^{0}+x\Big|_{0}^{\pi}=0-\pi+\pi-0=0$
$a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(-\int\limits_{-\pi}^{0}\cos kx\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{\pi}(-\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{0}^{\pi})=0$
$b_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}(-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin kx\,\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x)=\frac{1}{\pi k}(\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}-\cos kx\Big|_{0}^{\pi})=\frac{1}{\pi k}(\cos 0-\cos k\pi-\cos k\pi+\cos 0)=$
$\frac{1}{\pi k}(1-\cos k\pi-\cos k\pi+1)=\begin{cases}0, k \text{ — четное}\\ \frac{4}{\pi k}, k \text{ — нечетное}\end{cases}$
$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}\frac{\sin nx}{n}=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5})$. где n — нечетное

Определение 2 *Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной** на $[a;b]$, если этот отрезок можно разбить конечным числом точек на интервалы, так что на каждом из этих интервалов эта функция либо не возрастает, либо не убывает.*
Таким образом, функция может иметь разрывы, но эти разрывы могут быть только первого рода.

Теорема 2 *Если $f(x)$ — периодическая функция ($T=2\pi$), являющаяся кусочно-монотонной и ограниченной на отрезке $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье ($\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$), построенный для этой функции, сходится во всех точках.*
Сумма полученного ряда равняется значению $f(x)$ в точках непрерывности функции. А в точках, где функция имеет разрыв, сумма равна среднему арифметическому между пределом справа и пределом слева для функции $f(x)$