Высшая математика

Лисид Лаконский

March 2023

Содержание

1 Высшая математика - 01.02.2023

1.1 Нахождение среднего значения функции в указанном промежутке

$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$, что значение $f(c) = \mu$
Если $f(x) > 0$ при $x \in [a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$ равна площади прямоугольника с основанием $[a,b]$ и высотой $f(c)$

1.1.1 Примеры

Пример №1 Найти среднее значение функции $y = 5x^4 - 2$ на промежутке $[1;2]$
$\mu = \frac{1}{2-1}\int\limits_1^2 (5x^4 - 2)\,\mathrm{d}x = (x^5 - 2x)\Big|_1^2 = (32 - 4) - (1 - 2) = 29$

1.2 Нахождение точек экстремума и точек перегиба

Точки экстремума и точки перегиба функции $\Phi(x)$, заданной интегралом с переменным верхним пределом.

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Если f непрерывна в точке x, то $\Phi'(x) = f(x) \implies \Phi''(x) = f'(x)$
$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$
$f'' > 0$ - вогнутая, $f'' < 0$ — выпуклая

1.2.1 Примеры

Пример №1 $\Phi(x) = \int\limits_1^x (t - t^3)\,\mathrm{d}t = (\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{4})\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$
$x - x^3 = \Phi'(x) \iff x - x^3 = 0 \iff x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$
Изобразим знаки $\Phi'(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Найдем точки максимума и минимума; $x_{min} = 0$, $x_{max_1} = -1$, $x_{max_2} = 1$
$\Phi(0) = -\frac{1}{4}$ — min, $\Phi(\pm 1) = 0$ — max

$\Phi''(x) = f'(x) = 1 - 3x^2$
$1 - 3x^2 = 0 \iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$
Изобразим знаки $\Phi''(x)$ и $\Phi(x)$ на координатной прямой с отмеченными точками $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Определим, на каких промежутках график функции вогнут, а на каких выпукл.
$\Phi(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{9}$, $\Phi(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{9}$
$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба

2 Высшая математика - 15.03.2023

2.1 Задание на дом

Кардиоида, астроида, локон Аньези, спираль Архимеда, циклода, леминската, двух-, трех-, четырех- лепестковые розы. **Записать уравнения** во всех возможных видах: в декартовых, полярных, параметрических координатах, **сделать картинки**.

2.2 Несобственные интегралы

2.2.1 Первого рода (с бесконечными пределами)

Пусть функция $f(x)$ определена при x от a до ∞. Если существует конечный предел $\lim \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ при $b \to +\infty$, то определен и сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Если же предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что этот интеграл расходится.

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to -\infty} \int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{a} + \int\limits_a^{+\infty} = \lim\limits_{b_1 \to -\infty} \int\limits_{b_1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{b_2 \to +\infty} \int\limits_a^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ — если хоть один интеграл расходится, то весь интеграл тоже расходящийся

Теорема 1 *Если для всех* $x \geq a$ *выполняется* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $f(x)$, $g(x)$ *— непрерывные функции, то из сходимости* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *следует сходимость* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
А из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *следует расходимость* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$

Допустим, $y = \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\lim\limits_{b \to +\infty} (\frac{1}{b} - 1) = 1$ — сходящийся интеграл
И хотим проверить, является ли сходящимся $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|\,\mathrm{d}x}{x^2}$, уверенно заявляем, что $\frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, следовательно интеграл от этой функции тоже является сходящимся

Рассмотрим $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, $a > 1$

1. $p > 1$ — сходящийся
2. $p \leq 1$ — расходящийся

Теорема 2 *Если сходится интеграл от* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, *то* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *тоже сходится, при этом называется абсолютно сходящимся*

2.2.2 Второго рода (от бесконечных функций)

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$, где a — «плохая точка», $\lim\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$, если b — «плохая точка»
Если плохая точка находится между a и b, то интеграл необходимо разбить надвое:
$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b = \lim\limits_{\epsilon_1 \to 0} \int\limits_a^{c-\epsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{\epsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$
Если обе точки плохие, то $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0+\epsilon}^{a} + \int\limits_a^{+\infty}$ — первый интеграл — второго рода, второй — первого рода

$\int\limits_a^c \frac{\mathrm{d}x}{(c-x)^p}$, где c — плохая точка

1. $p < 1$ — сходящийся интеграл
2. $p \geq 1$ — расходящийся интеграл

$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_\epsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}} + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{4}{3}}}$ — первый интеграл сходится, второй расходится — интеграл расходящийся

2.3 Вычисление значения определенного интеграла

2.3.1 Первый способ, тривиальный

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$
$\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) * \Delta x_i$

2.3.2 Второй способ, если мы желаем чуть усложнить себе жизнь, но увеличить точность

$S = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x_i$
$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{f(x_i-1)+f(x_i)}{2} * \frac{b-a}{n}$

2.4 Знакоположительные числовые ряды

Нам знакомы числовые последовательности a_1, a_2, a_3, ..., a_n
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$ — есть числовой ряд. Сумма первых n членов S_n называется частичной суммой ряда
Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ — сумма ряда

$b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3}$
$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \ldots,\ \ S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$
$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ — формула n-ой частичной суммы
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 = S$

Иногда нам нет необходимости находить сумму ряда, а нужно лишь определить, является ряд сходящимся или расходящимся.

Теорема 3 *Если сходится ряд, получившийся из данного отбрасыванием нескольких его членов (то есть, конечного числа его членов), то будет сходиться и данный ряд*
Верное и обратное, что если данный ряд сходится, то будет сходиться и ряд, полученный отбрасыванием нескольких его членов

Теорема 4 *Если некий ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ сходится и его сумма равняется S, то будет сходиться и ряд $ka_1 + ka_2 + ka_3 + \ldots$, и его сумма будет равна kS*

Теорема 5 *Если есть два сходящихся ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S_1$ и $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = S_2$, то будут сходиться и ряды, полученные почленным сложением или вычитанием этих двух рядов:*

1. $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + (a_3 \pm b_3) = S_1 \pm S_2$

2.4.1 Необходимый признак сходимости

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд точно расходится

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Как следствие, если n—ый член не стремится к нулю, то ряд точно будет расходящимся. Но мы не должны делать вывод, если n—ый член стремится к нулю, что ряд будет точно сходящимся. Мы должны дальше исследовать его на сходимость

2.4.2 Достаточные признаки сходимости

Теорема 6 (Признак сравнения) *Пусть $u_1 + u_2 + u + 3 + \ldots,\ v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ — знакоположительные числовые ряды, при этом $u_i \leq v_i$*
Тогда из сходимости более большого ряда следует сходимость более маленького ряда
А из расходимости более маленького ряда следует расходимость более большого ряда

Теорема 7 (Предельный признак сравнения) *Пусть $u_1 + u_2 + u + 3 + \ldots,\ v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$ — знакоположительные числовые ряды, при этом $u_i \leq v_i$*
Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = C \neq 0 \neq \pm\infty$
То данные ряды ведут себя одинаково: или сходятся, или расходятся одновременно