Высшая математика

Лисид Лаконский

May 2023

Содержание

1 Высшая математика — 3 мая 2023 г.

1.1 Образы

Допустим, имеем $z_0 = 1 + i$, воздействуем на нее функцией $w = z^2 + i = (1 + i)^2 + i = 1 + 2i + i^2 + i = 3i$
Другой пример: $z_0 = \frac{1+i}{2}$, $w = (z - i)^2 = (\frac{1+i}{2} - i)^2 = \frac{(1+i)^2}{4} - (i + i^2) + i^2 = \frac{1+2i+i^2}{4} - i = -\frac{i}{2}$
Третий пример: $z_0 = 1 - \frac{i}{2}$, $w = \frac{Im\ z}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$

$z = x + 2i$
$z^2 + \overline{z}^2 = 1$
$(x + 2i)^2 + (x - 2i)^2 = 1 \Longleftrightarrow (x^2 + 4xi + 4i^2) + (x^2 - 4xi + 4i^2) = 1 \Longleftrightarrow 2x^2 + 8i^2 = 1$

$|z| - 3\ Im\ z = 6$
$\sqrt{x^2 + y^2} - 3y = 6 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = 36 + 36y + 9y^2 \Longleftrightarrow x^2 - 8(y + \frac{9}{4})^2 = 36 - \frac{81}{2}$

Найти образы линий для отображения, заданного $w = z^2$

1. $x = 4$
2. $|z| = 4$
3. $arg\ z = \frac{\pi}{4}$

$w = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$

$$\begin{cases} x = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ \frac{v^2}{64} = 16 - u \end{cases}$$

Рассмотрим следующий случай:

$$\begin{cases} |z| = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$u^2 + v^2 = 16^2$
$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 = 16^2$

И последний случай:

$$\begin{cases} arg\ z = \frac{\pi}{3} \\ u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$v = 2x\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2$, $x^2 = \frac{v}{2\sqrt{3}}$
$u = x^2 - y^2 = x^2 - 3x^2 = -2x^2$, $x^2 = -\frac{u}{2}$

1.2 Конформные отображения, свойства аналитических функций

Пусть C — комплексная плоскость (множество всех точек комплексной плоскости), C^* — расширенная комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой
Окрестность z_0 — любой круг радиуса r, окрестность бесконечно удаленной точки — $|z| > R$
D — множество на расширенной комплексной плоскости, f — функция комплексного переменного, определенного на множестве D
Отображение $w = f(z)$ **называется конформным** в точке $z_0 \in D$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через точку z_0 и обладает свойством постоянства растяжений в этой точке
Отображение конформно в бесконечно удаленной точке, если $w = \phi(z) = f(\frac{1}{z})$ конформно в $z = 0$
Свойство: **суперпозиция конформных отображений является конформным отображением**

$f(z)$ на F **однолистная**, если $z_1 \neq z_2 (bF)$ следует $f(z_1) \neq f(z_2)$
Отображение с помощью аналитической, однолистной функции в конечной области D **является конформным** в этой области D

Свойства аналитических функций:

1. Аналитическая функция является непрерывной
2. Сумма, разность, произведение и частное аналитических функций — тоже аналитическая функция
3. Суперпозиция аналитических функций тоже является аналитической
4. Если $f'(z_0) = 0$, ϕ — обратная функция, $\phi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$

1.3 Разные весёлые примеры

1. $f(z) = \frac{z+i}{i-\overline{z}} = \frac{x+iy+i}{i-x+iy} = -\frac{(x+i(y+1))(x+i(y+1))}{(x-i(y+1))(x+i(y+1))} = -\frac{x^2+2ix(y+1)+i^2(y+1)^2}{x^2+(y+1)^2} = \frac{(y+1)^2+x^2}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-2x(y+1)}{x^2+(y+1)^2}$
2. $f(z) = 2i - z + iz^2 = 2i - x - iy + i(x^2 - y^2 + 2ixy) = 2i - x - iy + ix^2 - iy^2 - 2xy = (-x - 2xy) + i(x^2 - y - y^2 + 2)$
   $\frac{\delta u}{\delta x} = -1 - 2y \quad \frac{\delta v}{\delta y} = -1 - 2y$
   $\frac{\delta u}{\delta y} = -2x \qquad \frac{\delta v}{\delta x} = 2x$
   $f' = \frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x} = (-1 - 2y) + i\ 2x = -1 - 2y + 2ix$
   $f = 2i - z + iz^2$, $f' = -1 + i * 2z = -1 + i(2x + 2iy) = -1 + 2ix - 2y = -1 - 2y + 2ix$
3. $f(z) = Re\ (z^2 + i) + i\ Im\ (z^2 - i) = Re\ (x^2 - y^2 + 2ixy + i) + i\ Im(x^2 - y^2 + 2ixy - i) = (x^2 - y^2) + i(2xy - 1)$
   $\frac{\delta u}{\delta x} = -2x \quad \frac{\delta v}{\delta y} = 2x$
   $\frac{\delta u}{\delta y} = -2y \quad \frac{\delta v}{\delta x} = 2y$

1.4 Восстановление функции по ее действительной или мнимой части

Теорема 1 *Заданием действительной или мнимой части аналитическая в D функция **определяется с точностью до константы**.*

Определение 1 *Функция называется гармонической, если выполняется условие Лапласа* $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} = 0$
Восстановление возможно, если функция является гармонической.

Пример №1 Проверить что $u = x^3 - 3xy^2$ является гармонической функцией и, считая ее действительной частью, восстановить аналитическую функцию.

$\frac{\delta u}{\delta x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 6x$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -6xy$, $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = -6x$
Видим, что функция действительно **является гармонической**.

Мы знаем, что функция должна удовлетворять условию Коши-Римана
$3x^2 - 3y^2 = \frac{\delta v}{\delta y}$, $v = \int (3x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 3x^2 y - \frac{3y^3}{3} + C(x)$
$\frac{\delta v}{\delta x} = 6xy$, $6xy = 6xy + \frac{\delta C}{\delta x}$, $x = const$

$f = u + iv = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 y - y^3 + c)$ — мы восстановили аналитическую функцию по ее действительной части.

2 Высшая математика — 10 мая 2023 г.

2.1 Восстановление функции

Вернемся к рассмотрению предыдущего примера, $u = x^3 - 3xy^2$
Мы восстановили исходную функцию: $w = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) + C$
Перепишем ее: $w(z) = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 + C = (x + iy)^3 + C = z^3 + C$

$f(z_0) = C_0$
$f(z) = 2u(\frac{z+\overline{z_0}}{2}; \frac{z-\overline{z_0}}{2i}) - \overline{c_0}$
$f(z) = 2iv(\frac{z+\overline{z_0}}{2}; \frac{z-\overline{z_0}}{2i}) - \overline{c_0}$

$v(x, y) = 3x + 2xy$
Начальные условия: $f(-i) = 2$
Проверим, что функция является гармонической: $\frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 0$
$z_0 = -i$, $c_0 = 2$, $\overline{z_0} = i$, $\overline{c_0} = 2$
$x \to \frac{z+i}{2}$; $y \to \frac{z-i}{2i}$
$f(z) = 2i(3 * \frac{z+i}{2} + 2 * \frac{z+i}{2} * \frac{z-i}{2i}) + 2 = 3i(z + i) + (z - i)(z + i) + 2 = z^2 + 3iz$

2.2 Нахождение области аналитичности и производной

$f(z) = \frac{z}{e^z} = ze^{-z} = z * e^{-(x+iy)} = z * e^{-x} * e^{-iy} = \frac{x+iy}{e^x}(\cos y - i \sin y) = \frac{x \cos y}{e^x} + \frac{iy \cos y}{e^x} - \frac{ix \sin y}{e^x} + \frac{y \sin y}{e^x}$
$u = \frac{x \cos y}{e^x} + \frac{y \sin y}{e^x}$, $v = \frac{y \cos y}{e^x} - \frac{x \sin y}{e^x}$
$\frac{\delta u}{\delta x} = \cos y(e^{-x} - xe^{-x}) - y \sin y e^{-x}$, $\frac{\delta v}{\delta y} = e^{-x}(\cos y - y \sin y) - xe^{-x} \cos y$
$\frac{\delta u}{\delta y} = xe^{-x}(-\sin y) + e^{-x}(\sin y + y \cos y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = -ye^x \cos y - \sin y(e^{-x} - xe^{-x})$
Условия Коши-Римана выполнены на всей комплексной области, **функция является аналитической**.
$f'(z) = e^{-z} - ze^{-z}$

2.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Если $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$, то модуль от этой производной $k = |f'(z_0)|$ — коэффициент растяжения при отображении на w, $k > 1$ — растяжение, $k < 1$ — сжатие
$\phi = arg\ f'(z_0)$ равен углу, на который нужно развернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой, проходящей через z_0, чтобы получить касательную к образу этой кривой при данном отображении, $\phi > 0$ — поворот против часовой стрелки, $\phi < 0$ — поворот по часовой стрелке

2.4 Интегрирование функций комплексного переменного

$\int f(z)\,\mathrm{d}z = \lim \sum f(\xi k) \Delta Z_k$, $max\ \Delta \to 0$

$f = u(x, y) + iv(x, y)$
$\int\limits_L f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_L u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i \int\limits_L v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$
Интеграл, вообще говоря, зависит от пути интегрирования L (как криволинейный интеграл)

Свойства интегралов:

1. $\int\limits_L (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z))\,\mathrm{d}z = c_1 \int f_1(z)\,\mathrm{d}z + c_2 \int f_2(z)\,\mathrm{d}z$
2. $\int ABf(z)\,\mathrm{d}z = -\int -BAf(z)\,\mathrm{d}z$
3. $\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CA}^{BA}$

В случае аналитической функции **интеграл не будет зависеть от пути интегрирования**, а только от конечного и начального значения.
$\int\limits_A^B f(z)\,\mathrm{d}z = \Phi(B) - \Phi(A)$
Интеграл по замкнутому контуру для аналитических функций равен нулю

Пример №1 $f(z) = xe^x \cos y - y^2 e^x \sin y + i(ye^x \cos y + xe^x \sin y)$, $u = xe^x \cos y - ye^x \sin y$, $v = ye^x \cos y + xe^x \sin y$
$\frac{\delta u}{\delta x} = (e^x + xe^x)\cos y - ye^x \sin y$, $\frac{\delta v}{\delta y} = e^x(\cos y - y \sin y) + xe^x \cos y$
$\frac{\delta u}{\delta y} = -xe^x \sin y - e^x(\sin y + y \cos y)$, $\frac{\delta v}{\delta x} = e^x y \cos y + (e^x + xe^x)\sin y$
$\int\limits_{z=1}^{z=i} z * e^z \,\mathrm{d}z = \begin{vmatrix} u = z & \mathrm{d}v = e^z \,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}z & v = e^z \end{vmatrix} = z * e^z - \int e^z \,\mathrm{d}z = (ze^z - e^z)\Big|_{z=1}^{z=i} = ie^i - e^i - e^1 + e^1 = e^i(i-1)$

2.4.1 Теорема Коши

Пусть в односвязной области G задана однозначная аналитическая функция $f(z)$
Тогда интеграл по любому замкнутому контуру, целиком лежащим в этой односвязной области, будет равен нулю:
$\int f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Определение 2 ***Положительным направлением обхода*** *мы называем направление, при котором область все время остается слева.*

2.4.2 Интегральная формула Коши

Если $f(z)$ является аналитической в области D, ограниченной кусочно-замкнутым контуром C, то справедлива интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

Пример №1 $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}\,\mathrm{d}z}{z^2 - z} = \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{1/z}\,\mathrm{d}z}{z(z-1)} = \oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{e^{1/z}}{z}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i * \frac{e}{1} = 2\pi ie$

Пример №1 $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z+3)(z-1)}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi i}{2}$