

Высшая математика

Лисид Лаконский

January 2023

Содержание

1	Высшая математика - 31.01.2023	2
1.1	Интегралы	2
1.1.1	Таблица интегралов	2
1.1.2	Свойства интегралов	2
1.1.3	Примеры решения	2

1 Высшая математика - 31.01.2023

1.1 Интегралы

$$\int f(x) dx, (F(x))' = f(x)$$

Пример: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \int_1^2 x^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

1.1.1 Таблица интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

9. $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

10. $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

11. $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$

12. $\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$

14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

16. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

1.1.2 Свойства интегралов

1. $[\int f(x) dx]' = f(x)$

2. $d \int f(x) dx = \int f(x) dx$

3. $d \int f(x) dx = [\int f(x) dx]' dx = \int f(x) dx = F(x) + C$

4. $\int F'(x) dx = F(x) + C$
 $\int dF(x) = F(x) + C$

5. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

6. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$

1.1.3 Примеры решения

Первый пример $\int \frac{x^2 \sqrt{x-3x+2\sqrt{x-5}}}{x} dx =$
 $\int x^{\frac{3}{2}} dx - \int 3 dx + \int 2x^{-\frac{3}{2}} dx - \int \frac{5}{x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 3x + 4\sqrt{x-5} - 5 \ln |x| + C$

Второй пример

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

Третий пример $\int x \ln x \, dx = \int \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \, dx = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x} = 2x^{-\frac{1}{2}}$

Четвертый пример $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 2x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{2 \cos x \sin x} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx =$
 $\left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |\sin x| + C$

Пятый пример
 $\int \frac{e^{2x} \, dx}{e^{2x} + 2} = \left| \begin{array}{l} e^{2x} + 2 = t \\ e^{2x} \, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = 2 \ln t + C = 2 \ln(e^{2x} + 2) + C$

Шестой пример
 $\int (x^{-\frac{3}{4}} + (4x^2 - 8)^{-\frac{1}{2}}) \, dx = \int (x^{-\frac{3}{4}}) \, dx + \int (4x^2 - 8)^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C_1 + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}} =$
 $4x^{\frac{1}{4}} + C_1 + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + C_2 = 4\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 2}| + C$

Седьмой пример $\int (2 \sin^2 2x - 1) \, dx = \int (2 \sin^2 2x) \, dx - \int (1) \, dx =$
 \dots (решение оставляется читателю)