Высшая математика

Лисид Лаконский

October 2022

Содержание

1 Высшая математика - 03.09.2022

1.1 Предел функции

1. Любую константу мы можем вынести за предел

2. Предел от суммы двух функций $f(x) + g(x)$ дает в нам результате разложения сумму двух пределов

3. Предел от произведения двух функций разлагается на произведение двух пределов

4. Предел частного от двух функций ($g(x) \neq 0$) равен частному двух пределов, если нет неопределенности

1.2 Виды неопределенностей

Неопределенности бывают следующие: $\frac{\inf}{\inf}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{-\inf}$, $\frac{0}{\inf}$, $1^{\inf}$, 0^0, $\inf^0$

1.2.1 Неопределенность типа $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Пусть $f(x)$ and $g(x)$ are многочлены, k_1, $k_2 \geq 1$.

$f(x) = (x-a)^{k_1} f_1(x)$

$g(x) = (x-a)^{k_2} f_1(x)$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim x \to a \frac{(x-a)^{k_1} f_1(x)}{(x-a)^{k_2} g_1(x)} = \lim x \to a(x-a)^{k_1 - k_2} * \lim x \to a \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Результат выражения выше равен 0 при $k_1 > k_2$, A при $k_1 = k_2$ и inf иначе.

1.2.2 Неопределенность вида $\frac{\inf}{\inf}$

В числителе и знаменателе многочлены, пределы которых стремятся к inf.

Если $a = \inf$, тогда предел будет $\lim\limits_{x \to \inf} \frac{a_x x^m + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ равен нулю при $m < n$, $\frac{a^m}{b^n}$ при $m = n$, иначе inf

1.2.3 Неопределенность вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\inf}{\inf}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, т.к. при $x \to 0$ обе эти функции являюстя бесконечно малыми, отношение эквивалентных велчиин дает 1

Если предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен нулю, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой величиной в окресности точки a

Две бесконечно малые величины $f(x), g(x)$ называются эквивалетнтными бесконечно-малыми величинами в окрестности точки a, если предел их отношения равен единице

Пример:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2*\sin\frac{10x}{2}*\sin\frac{-5x}{2}}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{sin^2x}{2*\sin 5x*\sin 2x}=\frac{1}{10}$$

1.2.4 Неопределенность вида $1^{\inf}$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

Пример:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

2 Высшая математика - 12.09.2022

2.1 Непрерывность функции

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует предел этой функции при x, стремящемся к x_0, равный $f(x_0)$.

2.1.1 Свойства непрерывных функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывные в точке x_0 функции, тогда:

1. Функция, полученная в результате сложения и вычитания двух непрерывных в данной точке функций также будет непрерывна в рассматриваемой точке x_0
2. Функция, которая стала результатом произведения двух непрерывных функций, тоже будет непрерывна в точке x_0
3. Функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ будет непрерывна в точке x_0, если $g(x) \neq 0$
4. Для того, чтобы $g = f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \Delta y = f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)$
5. Основные элементарные функции: $a^x, x^a, \log_a x, \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \arctan x, \arcsin x, ...$ непрерывны на всей области определения
6. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, тогда между точками a и b находится хотя бы одна т. $x = c$, при которой $f(c) = 0$, $a < c < b$

2.1.2 Пример

$x^3 + x^2 + x - 1 = 0, x_0 = c, (a, b) = (\frac{1}{2}; 1)$
$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}, f(1) = 2$, следовательно $\exists x_0 = c, f(c) = 0, \frac{1}{2} < c < 1$

2.2 Точки разрыва функции

Опр. 2. Точка $x_0 \in R$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, кроме, может быть, самого x_0, если равенство $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

То есть, либо $x_0 \notin D_f$ и значение $f(x_0)$ не определено, либо $\lim_{x \to x_0} f(x)$ не существует, либо обе части равенства определены, но не равны между собой.

2.2.1 Типы точек разрыва

1. x_0 - точка разрыва 1-го рода, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}$, то x_0 - устранимая точка разрыва первого рода

2. x_0 - точка разрыва второго рода, если выполнено хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\inf, \lim\limits_{x\to x_0+0}=\pm\inf, \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\pm\inf$

2.2.2 Первый пример

$f(x)=\frac{x}{\sin x}$, так как результат частного двух простых функций, то она непрерывна при $\sin x\neq 0$, то есть точками разрыва являются нули функции $\sin x$: $x=\pi k, k\in Z$

При $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $f(0)$ не существует, следовательно функция сама по себе в этой точке не непрерывна.

Рассмотрим два конечных односторонних предела, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x}=1, \lim\limits_{x\to 0-0}\frac{x}{\sin x}=1$

Односторонние разрывы равны между собой, следовательно, $x=0$ - устранимая точка разрыва первого рода.

При $x=\pi$: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x}{\sin x}=\frac{\pi}{0}=\inf$, $f(\pi)$ не существует

2.2.3 Второй пример

$$\begin{cases} x^2+1, x\leq 0 \\ x+1, 0<x\leq 1 \\ 2x-1, x>1 \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим первый случай, $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0}(x^2+1)=1, \lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)=1, y(0)=1$, таким образом точка $x=0$ - точка непрерывности нашей функции, разрыва нет.

Рассмотрим второй случай, $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1-0}(2x-1)=1, \lim\limits_{x\to 1+0}(x+1)=2$, таким образом точка $x=1$ - неустранимая точка разрыва первого рода.

2.2.4 Третий пример

Исследовать точки $x=3, x=1$ функции $y=4^{\frac{1}{x-1}}$

1) $x=3, \lim\limits_{x\to 3}4^{\frac{1}{x-1}}=2=y(3)$, следовательно данная точка - точка непрерывности данной функции

2) $x=1, \lim\limits_{x\to 1}4^{\frac{1}{x-1}}=\inf$, следовательно данная точка - точка разрыва второго рода.

$\lim\limits_{x\to 1-0}4^{\frac{1}{x-1}}=4^{-\inf}=\frac{1}{4^{\inf}}=0, \lim\limits_{x\to 1+0}4^{\frac{1}{x-1}}=+\inf$