

Московский автомобильно-дорожный институт  
(Государственный технический университет)  
Кафедра высшей математики

Расчетно-графическая работа 2.2

по высшей математике

для студентов 1-го курса

(2-й семестр)

Определенные интегралы и  
функции многих переменных

Издание третье

Москва

2017

Составители:

Давыдов Е.Г., Изотова С.А., Коробов В.А., Чернов Д.Э.

## **Требования к выполнению и оформлению расчётно-графических работ**

При выполнении РГР необходимо придерживаться указанных ниже правил. Если будет установлено, что работы выполнены без соблюдения этих правил, то они не будут зачтены.

**1.** Каждая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 3–4 см для замечаний рецензента.

**2.** В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер РГР, номер варианта, название дисциплины, номер учебной группы. В конце работы следует проставить дату её выполнения и расписаться.

**3.** Решения задач должны быть представлены в том же порядке, как они указаны в брошюре РГР.

**4.** Расчётно-графические работы, содержащие задачи не своего варианта, возвращаются студентам для выполнения своих заданий.

**5.** Перед решением каждой задачи студент обязан указать номер задачи и полностью выписать её условия. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

**6.** Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и чётко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа.

**7.** В случае незачёта студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

**8.** После рецензирования студенты защищают расчётно-графические работы и представляют их на экзамене.

## Расчетно-графическая работа 2.2.

### Определенные интегралы и функции многих переменных

1. Найти среднее значение функции в указанном промежутке.

1.  $f(x) = \sin^4 x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
2.  $f(x) = x \sin 2x, x \in [-\pi; 0]$ .
3.  $f(x) = \cos^2 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
4.  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1; 4]$ .
5.  $f(x) = x^3 - x, x \in [0; 1]$ .
6.  $f(x) = 10 + 2 \sin x, x \in [0; 2\pi]$ .
7.  $f(x) = \ln 3x, x \in \left[1; \frac{e}{3}\right]$ .
8.  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .
9.  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}, x \in [0; 1]$ .
10.  $f(x) = x\sqrt{1 + x^2}, x \in [0; 1]$ .
11.  $f(x) = x^3 e^{-x^4/4}, x \in [0; 2]$ .
12.  $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{x^5}, x \in [2; 3]$ .
13.  $f(x) = \cos^3 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
14.  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
15.  $f(x) = x e^{-x^2/2}, x \in [2; 4]$ .
16.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}, x \in [1; 5]$ .
17.  $f(x) = \operatorname{tg} x, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ .
18.  $f(x) = \frac{1}{(1 + 5x)^3}, x \in [-2; -1]$ .
19.  $f(x) = \operatorname{ctg} x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ .
20.  $f(x) = x + \sqrt[4]{(x - 1)^3}, x \in [1; 2]$ .
21.  $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [0; 1]$ .
22.  $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in [1; 4]$ .
23.  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, x \in [e; e^3]$ .
24.  $f(x) = x^3 (x + 2)^2, x \in [0; 1]$ .
25.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in [0; 1]$ .
26.  $f(x) = \sin x \cos^2 x, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
27.  $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}, x \in \left[\frac{1}{\pi}; \frac{2}{\pi}\right]$ .
28.  $f(x) = \sin 2x \cos 3x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
29.  $f(x) = \cos^4 x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .
30.  $f(x) = \sin^2 x \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ .

2. Найти точки экстремума и точки перегиба функции.

1.  $\Phi(x) = \int_0^x (t - 1)(t + 1)^2 dt$ .
2.  $\Phi(x) = \int_{-1}^x t \sqrt{1 - t^2} dt$ .
3.  $\Phi(x) = \int_{-2}^x 2t(t^2 - 3) dt$ .
4.  $\Phi(x) = \int_0^x (t^3 - 3t^2) dt$ .
5.  $\Phi(x) = \int_0^x (t - 1)(t - 2)^2 dt$ .
6.  $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt$ .
7.  $\Phi(x) = \int_1^x \left(8t - \frac{1}{t^2}\right) dt$ .
8.  $\Phi(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{1 - \ln t}{t} dt$ .

$$\begin{array}{ll}
9. \Phi(x) = \int_0^x t e^{-t^2/2} dt. & 10. \Phi(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt. \\
11. \Phi(x) = \int_0^x (t-5)(t-4) dt. & 12. \Phi(x) = \int_0^x (t^3 + 6t^2 + 9t) dt. \\
13. \Phi(x) = \int_0^x (t+5)(t-2)^2 dt. & 14. \Phi(x) = \int_{0.5}^x \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt. \\
15. \Phi(x) = \int_1^x \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt. & 16. \Phi(x) = \int_0^x (t+1)(t+4)^2 dt. \\
17. \Phi(x) = \int_{-1}^x t^3(t+2) dt. & 18. \Phi(x) = \int_0^x \left( \frac{t^3}{3} + t^2 \right) dt. \\
19. \Phi(x) = \int_{e^{-1}}^x \frac{e \ln t}{t} dt. & 20. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t-1)^2 dt. \\
21. \Phi(x) = \int_0^x (4t - t^2) dt. & 22. \Phi(x) = \int_0^x (t^2 - 4t - 5) dt. \\
23. \Phi(x) = \int_0^x (t^2 - 2t - 3) dt. & 24. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t-3)^2 dt. \\
25. \Phi(x) = \int_0^x (t+1)(t-1)^2 dt. & 26. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)(t+1)^2 dt. \\
27. \Phi(x) = \int_0^x (t+2)(t-1)^2 dt. & 28. \Phi(x) = \int_0^x (t-3)(t+2) dt. \\
29. \Phi(x) = \int_0^x (t-2)^2(t+3) dt. & 30. \Phi(x) = \int_0^x (t-4)(t+3)^2 dt.
\end{array}$$

**3.** Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

$$\begin{array}{ll}
1. y = 4 - x^2, y = \frac{1}{2}x + 1. & 2. y^2 = x + 2, y = x. \\
3. xy = 4, y = 4, x = 2. & 4. y^2 = 2x + 4, y = x + 2. \\
5. y = x^2 + 1, x + y = 3. & 6. y = x^2, x + y = 2. \\
7. y^2 = 2x + 1, x - y = 1. & 8. y = x^2, y = 2 - x^2. \\
9. y = x^2 + x - 5, y = -2x^2 - 2x + 1. & 10. y = 2x - x^2, x + y = 0. \\
11. y = x^2 - 2x - 6, y = -3x^2 + 2x + 2. & 12. y = x^2 + 2x, y = x + 2. \\
13. y = -x^2 + 3x + 3, y = x. & 14. y = x^2 - 2x + 3, y = 3x - 1. \\
15. y = x^2 - 2x + 3, y = 6 - 4x. & 16. y = x^2 - 6, y = -x^2 + 5x - 6. \\
17. y = x^2 + 2x + 3, y = 2x + 4. & 18. y = x^2 + 8x - 12, y = 18x - x^2. \\
19. y = x^2 - 2x - 3, y = -x^2 - 2x + 5. & 20. y = x, y = 2 - x^2. \\
21. x = -2y^2, x = 1 - 3y^2. & 22. y = x^2 + 2x + 1, y = 4 - x. \\
23. y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6, y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1. & 24. y = 3 + 2x - x^2, y = 4x.
\end{array}$$

25.  $y = 6 + x - 3x^2, y = -2x$ .      26.  $y = 15 + 2x - 5x^2, y = -8x$ .  
 27.  $y = 12 + 2x - 3x^2, y = -7x$ .      28.  $y = 3 - x - x^2, y = -3x$ .  
 29.  $y = 15 + 2x - 3x^2, y = -10x$ .      30.  $y = -1 + x - 3x^2, y = 5x$ .

4. Нарисовать область, ограниченную линиями, и вычислить ее площадь.

1.  $r = 3 + \sin 2\varphi$ .      2.  $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ .      3.  $r = 2(1 - \cos \varphi)$ .  
 4.  $r = 2 \sin 3\varphi$ .      5.  $r = 3 \cos 2\varphi$ .      6.  $r = 2 \sin \varphi$ .  
 7.  $r = 3 \sin 2\varphi$ .      8.  $r = 2 - \cos 3\varphi$ .      9.  $r = \frac{2}{\varphi}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 2\pi$ .  
 10.  $r = 3(1 + \sin \varphi)$ .      11.  $r^2 = 4 \sin 2\varphi$ .      12.  $r = 2 \sin \varphi - 1$ .  
 13.  $r^2 = 4 \sin 4\varphi$ .      14.  $r = 2(2 + \cos \varphi)$ .      15.  $r = 2 - \cos \varphi, r = \cos \varphi$ .  
 16.  $r = 2 \sin 5\varphi$ .      17.  $r = 3 \cos 3\varphi$ .      18.  $r = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$ .  
 19.  $r = \cos^2 \varphi$ .      20.  $r = 2(1 - \sin \varphi)$ .      21.  $r = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .  
 22.  $r = 2 \cos 5\varphi$ .      23.  $r = 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ .      24.  $r = \cos \varphi, r = 2 \cos \varphi$ .  
 25.  $r = 2 \sin^2 \varphi$ .      26.  $r = 2 + \cos 4\varphi$ .      27.  $r = 1 + \cos \varphi$ .  
 28.  $r = 2 \cos \varphi$ .      29.  $r = 2(2 + \sin \varphi)$ .      30.  $r = 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ .

5. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями. В задачах 1 – 15 ось вращения  $Ox$ , в задачах 16 – 30 ось вращения  $Oy$ .

1.  $xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0$ .      2.  $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}, x = \pm 2, y = 0$ .  
 3.  $y = \cos x, x = 0, y = 0$ .      4.  $y = e^{-x} - 1, y = 1, x = 0$ .  
 5.  $y = \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, y = 0$ .      6.  $y = x^2 - 3x, y = 2x, y \geq 0$ .  
 7.  $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2, x = 0, y = 0$ .      8.  $y = -x^2 + 2x, y = 0$ .  
 9.  $y = -2x^2 + 8x, y = 0$ .      10.  $y = x^2 + 2x + 3, y = 0, -1 \leq x \leq 0$ .  
 11.  $y = x^2 + 4x + 5, y = 0, -2 \leq x \leq 0$ .      12.  $y = \sin^2 x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .  
 13.  $y = x^2 - 2x + 2, y = 0, x = 0, x = 2$ .      14.  $y = x^2 - x, y = 0$ .  
 15.  $y = (x - 1)^2, y = 1$ .      16.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1, y = \pm 2$ .  
 17.  $y^2 = (x + 4)^3, x = 0$ .      18.  $(y - 1)^2 = x, x = 0, y = 2$ .  
 19.  $y = x^2, 2x + y - 3 = 0, x \geq 0$ .      20.  $y = x^2, 8x = y^2$ .  
 21.  $y = x^2, y = 4, x \geq 0$ .      22.  $y = 2 \left( \frac{x}{3} \right)^{2/3}, y = 0, 0 \leq x \leq 3$ .  
 23.  $y = \frac{x}{4 - x}, x = 2, y = 0$ .      24.  $y^2 = 4 - x, x \geq 0, y \geq 0$ .  
 25.  $y = \arcsin x, y = 0, x = 1$ .      26.  $y = 2x^2, y = 2|x|$ .  
 27.  $2x = 3y - y^2, x = 0, y = 2x$ .      28.  $3x = 2y - y^2, x = 0, y = 3x$ .  
 29.  $y = \ln(2x + 3), y = 2 \ln x, y = 0, x = 0$ .      30.  $y = \ln(x + 2), y = 2 \ln x, y = 0, x = 0$ .

6. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1.  $y^2 = x^3, x \leq \frac{4}{3}$ .
2.  $y = x^{3/2}, 0 \leq x \leq 4$ .
3.  $y = \frac{x^2}{4} - 1, y \leq 0$ .
4.  $y = \ln x, 1 \leq x \leq \sqrt{3}$ .
5.  $y = \ln(2 \cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .
6.  $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \leq x \leq 2$ .
7.  $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 3$ .
8.  $y^2 = \frac{4}{9}(2 - x)^3, 0 \leq x \leq 2$ .
9.  $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$ .
10.  $9y^2 = x(x - 3)^2, x \leq 3$ .
11.  $y = \ln \frac{5}{2x}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ .
12.  $y^2 = 16x, 0 \leq x \leq 81$ .
13.  $y^3 = x^2, 0 \leq y \leq 4/3$ .
14.  $y = \frac{x^2 - 2}{3}, 0 \leq x \leq 2$ .
15.  $y = 4 - x^2, y \geq 0$ .
16.  $y = -\ln(\cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ .
17.  $y = \ln(3 \sin x), \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .
18.  $y = \ln(5 \cos x), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .
19.  $y = \ln \frac{1}{x}, \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{3}$ .
20.  $y = 2 - e^x, \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$ .
21.  $y = 4 \operatorname{ch} \frac{x}{4}, 0 \leq x \leq 1$ .
22.  $y = \ln(2 \sin x), \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ .
23.  $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ .
24.  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ .
25.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x, 0 \leq x \leq 3$ .
26.  $y = 2 \ln(4 - x^2), y \geq 0$ .
27.  $y^2 = 5(x - 1)^3, 1 \leq x \leq 2$ .
28.  $y^2 = \frac{5}{2}(x - 2)^3, 2 \leq x \leq 4$ .
29.  $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 1$ .
30.  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y, 1 \leq y \leq e$ .

7. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

1.  $x = t^2, y = t^3 + 1, 0 \leq t \leq 1$ .
2.  $x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ .
3.  $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, 0 \leq x \leq 2$ .
4.  $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1, y \leq 0$ .
5.  $x = \sqrt{3}t^2, y = t - t^3, -1 \leq t \leq 1$ .
6.  $x = \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{4} \cos 2t, y = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t, \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$ .
7.  $x = 1 - e^t, y = 1 + e^t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
8.  $x = \sin^3 t, y = \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .
9.  $x = t^6, y = 1 - t^4, 0 \leq t \leq 1$ .
10.  $x = \frac{t^3}{3}, y = 1 - \frac{t^2}{4}, y \geq 0$ .
11.  $x = \frac{t^2}{2} - 1, y = \frac{t^2}{2}, 0 \leq t \leq 1$ .
12.  $x = t^2, y = t^3 - 1, 0 \leq t \leq 1$ .

13.  $x = t, y = t^2 - 1, -1 \leq t \leq 1.$
14.  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi.$
15.  $x = e^{2t} \cos t, y = e^{2t} \sin t, 0 \leq t \leq 1.$
16.  $x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$
17.  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$
18.  $y = t^2 + 1, x = \frac{t^3}{3} - t, 0 \leq t \leq \sqrt{3}.$
19.  $x = t^4 - 4, y = 8 - t^6, 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$
20.  $x = t^2 + 1, y = 1 - t^3, 0 \leq t \leq 2.$
21.  $y = \frac{t^3}{3}, x = t^2, -1 \leq t \leq 1.$
22.  $x = e^t(\cos t + \sin t), y = e^t(\cos t - \sin t), \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$
23.  $x = t^2, y = \frac{t(t^2 - 3)}{3}.$
24.  $x = 2(3 \cos t - \cos 3t), y = 2(3 \sin t - \sin 3t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$
25.  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq 1.$
26.  $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, 0 \leq t \leq \pi.$
27.  $x = 2(t^2 + 1), y = 2 - \frac{2(t^3 - 3t)}{3}.$
28.  $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}, 0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}.$
29.  $x = \frac{\sin t}{\sqrt{8}}, y = \frac{\sin t \cos t}{8}, 0 \leq t \leq 2\pi.$
30.  $x = 2 - \frac{t^4}{4}, y = \frac{t^6}{6}, 0 \leq t \leq \sqrt[4]{8}.$

8. Нарисовать дугу кривой и вычислить ее длину.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $r = 1 + \cos \varphi.$                                      | 2. $r = 3(1 - \cos \varphi).$   |
| 3. $r = 2(1 - \sin \varphi).$                                   | 4. $r = 2 \sin^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right).$                       |
| 5. $r = \sin^3 \left( \frac{\varphi}{3} \right).$               | 6. $r = 2e^{4/3\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$ |
| 7. $r = 2(1 + \cos \varphi).$                                   | 8. $r = 3\varphi^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$                            |
| 9. $r = 5\varphi^2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$                  | 10. $r = \cos^5 \varphi.$   |
| 11. $r = \sqrt{2}e^\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$ | 12. $r = 2(1 + \sin \varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$                  |
| 13. $r = \sin \varphi - \cos \varphi.$                          | 14. $r = \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$             |
| 15. $r = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$ | 16. $r = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$           |
| 17. $\varphi = \sqrt{r}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$             | 18. $r = \cos^5 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$                       |
| 19. $r = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$            | 20. $r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi.$              |
| 21. $r = \sin \varphi + \cos \varphi.$                          | 22. $r = \cos^4 \frac{\varphi}{4}.$                                       |
| 23. $r = 2 \cos^4 \frac{\varphi}{4}.$                           | 24. $r = 3 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$           |



25.  $r = 2 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . 26.  $r = 2 + 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .  
 27.  $r = 2 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . 28.  $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}, a > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$ .  
 29.  $r = 8 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq \pi$ . 30.  $r = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3}, 0 \leq \varphi \leq \pi$ .

**9\*. Применение определенного интеграла.**

I. С помощью подъёмного крана извлекают железобетонную деталь со дна реки глубиной  $h$  м. Какая работа при этом совершается, если деталь имеет форму правильного тетраэдра с ребром  $a$  м? Плотность железобетона  $2500 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

1.  $h = 5 \text{ м}; a = 1 \text{ м}$ . 2.  $h = 6 \text{ м}; a = 2 \text{ м}$ . 3.  $h = 5 \text{ м}; a = 2 \text{ м}$ .  
 4.  $h = 7 \text{ м}; a = 1,5 \text{ м}$ . 5.  $h = 6 \text{ м}; a = 1,2 \text{ м}$ . 6.  $h = 7 \text{ м}; a = 1 \text{ м}$ .

II. Найти силу давления на пластинку, имеющую форму равнобокой трапеции, верхнее основание которой  $a$  м, нижнее  $b$  м, а высота  $h$  м, погружённую вертикально в воду на глубину  $c$  м. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

7.  $a = 0,1 \text{ м}; b = 0,2 \text{ м}; c = 0,3 \text{ м}; h = 0,5 \text{ м}$ .  
 8.  $a = 0,1 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,3 \text{ м}; h = 0,4 \text{ м}$ .  
 9.  $a = 0,2 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,1 \text{ м}; h = 0,5 \text{ м}$ .  
 10.  $a = 0,3 \text{ м}; b = 0,6 \text{ м}; c = 0,2 \text{ м}; h = 0,3 \text{ м}$ .  
 11.  $a = 0,2 \text{ м}; b = 0,5 \text{ м}; c = 0,1 \text{ м}; h = 0,2 \text{ м}$ .  
 12.  $a = 0,3 \text{ м}; b = 0,4 \text{ м}; c = 0,2 \text{ м}; h = 0,4 \text{ м}$ .

III. Найти работу, совершаемую при выкачивании воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого  $a$  м, радиус  $r$  м. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

13.  $a = 1 \text{ м}; r = 0,3 \text{ м}$ . 14.  $a = 1,2 \text{ м}; r = 0,4 \text{ м}$ . 15.  $a = 1,5 \text{ м}; r = 0,4 \text{ м}$ .  
 16.  $a = 1,1 \text{ м}; r = 0,3 \text{ м}$ . 17.  $a = 1,4 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}$ . 18.  $a = 1,3 \text{ м}; r = 0,5 \text{ м}$ .

IV. Труба имеет диаметр  $d$  см. Один конец её соединён с баком, в котором уровень воды на  $a$  м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

19.  $d = 6 \text{ см}; a = 1 \text{ м}$ . 20.  $d = 8 \text{ см}; a = 1,2 \text{ м}$ . 21.  $d = 10 \text{ см}; a = 1,4 \text{ м}$ .  
 22.  $d = 12 \text{ см}; a = 1,6 \text{ м}$ . 23.  $d = 14 \text{ см}; a = 1,8 \text{ м}$ . 24.  $d = 16 \text{ см}; a = 2 \text{ м}$ .

V. Какую силу давления испытывает прямоугольная пластинка длиной  $a$  см и шириной  $b$  см, если она наклонена к горизонтальной поверхности воды под углом  $\alpha$  и её большая сторона находится на глубине  $h$  см? Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

25.  $a = 10 \text{ см}; b = 8 \text{ см}; \alpha = 30^\circ; h = 30 \text{ см}$ .  
 26.  $a = 15 \text{ см}; b = 10 \text{ см}; \alpha = 30^\circ; h = 20 \text{ см}$ .  
 27.  $a = 16 \text{ см}; b = 12 \text{ см}; \alpha = 45^\circ; h = 10 \text{ см}$ .  
 28.  $a = 18 \text{ см}; b = 15 \text{ см}; \alpha = 45^\circ; h = 20 \text{ см}$ .  
 29.  $a = 20 \text{ см}; b = 18 \text{ см}; \alpha = 60^\circ; h = 30 \text{ см}$ .  
 30.  $a = 14 \text{ см}; b = 10 \text{ см}; \alpha = 60^\circ; h = 15 \text{ см}$ .

10. Вычислить несобственный интеграл.

1.  $\int_0^{+\infty} e^{-4x} dx.$
2.  $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$
3.  $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$
4.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}.$
5.  $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$
6.  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$
7.  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}.$
8.  $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}.$
9.  $\int_0^1 \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[5]{x^3}} dx.$
10.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}.$
11.  $\int_0^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}.$
12.  $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} \cos \frac{\pi}{1-x} dx.$
13.  $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$
14.  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$
15.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}.$
16.  $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$
17.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + x^3}.$
18.  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$
19.  $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$
20.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}.$
21.  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$
22.  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$
23.  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$
24.  $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2 - 4}}.$
25.  $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x dx.$
26.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^2}.$
27.  $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$
28.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$
29.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(4x^2 + 1)^3}}.$
30.  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}.$

11. Найти и изобразить в плоскости  $xOy$  область определения функции.

1.  $z = \frac{xy}{\sqrt{x - \sqrt{y}}}.$
2.  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + 2 \ln(9 - x^2 - 9y^2).$
3.  $z = \frac{x}{y} - \ln((x+2)(1-y)).$
4.  $z = \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9}}.$
5.  $z = \frac{2x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}.$
6.  $z = \sqrt{(x-y)(y+2x-4)}.$
7.  $z = \frac{1}{x} + \ln(4x - y^2 + 8).$
8.  $z = \frac{2x - y}{\ln(1 - x^2 + y)}.$
9.  $z = \frac{1}{x-y} + \frac{\ln y}{\sqrt{2x+3y}}.$
10.  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} + \frac{x-1}{x^2 + y^2 - 4}.$
11.  $z = \frac{3 - \sqrt{xy}}{y - x^3}.$
12.  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} + \ln(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}).$
13.  $z = \frac{\ln x + \sqrt{y}}{y - x^2}.$
14.  $z = \sqrt{3y} + \frac{x}{\sqrt{1-x-y}}.$

15.  $z = 2 - \arccos(1 - x - y)$ .
16.  $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1} - \ln(9 - x^2 - y^2)$ .
17.  $z = \sqrt{y - x^2} + \frac{xy}{y - 2}$ .
18.  $z = \ln \frac{x}{y} + \frac{x + y}{y - x^3}$ .
19.  $z = \sqrt{(x + y)(y - 2)}$ .
20.  $z = 3x + \arcsin(2x - y)$ .
21.  $z = \sqrt{e^{xy}(x - y^2)}$ .
22.  $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ .
23.  $z = \frac{\ln((x - 1)(y + 2))}{\frac{x - y}{2} + \frac{1}{xy}}$ .
24.  $z = \sqrt{11 - 4x^2 + 16x - 9y^2 + 18y}$ .
25.  $z = \arcsin \frac{x - y}{2} + \frac{1}{xy}$ .
26.  $z = \sqrt{9 - 9x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ .
27.  $z = \sqrt{y - x} - 3 \ln \frac{x^2}{y}$ .
28.  $z = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 8y - 1)$ .
29.  $z = \frac{\sqrt{4y - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2 - 2y}$ .
30.  $z = \ln[(1 - x)(y - 2)] + \frac{1}{x + 1}$ .

**12.** Применяя полный дифференциал, приближенно вычислить (считать  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ ,  $1^0 = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$ ).

1.  $\sqrt[3]{(2,92)^2 - (1,03)^2}$ .
2.  $\sqrt{(1,02)^2 + (0,05)^2}$ .
3.  $\operatorname{arctg} \left( \frac{1,97}{1,02} - 1 \right)$ .
4.  $\sqrt{e^{0,03} + 5 \cdot (2,97)}$ .
5.  $\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$ .
6.  $\sqrt{(0,98)^3 + (2,02)^3}$ .
7.  $\sin 28^0 \cdot \operatorname{tg} 44^0$ .
8.  $\sqrt{(1,04)^4 + (1,98)^3}$ .
9.  $\sqrt{3e^{0,02} + 11 \cdot (1,97)}$ .
10.  $\ln((1,02)^3 - (0,03)^2)$ .
11.  $4 - 3 \cdot (0,89)^{2,02}$ .
12.  $3 - (0,98)^{1,05}$ .
13.  $\sqrt{\cos 1,55 + (3,98)^2}$ .
14.  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,96)^2}$ .
15.  $\sqrt{11,97 + (2,02)^2}$ .
16.  $\ln((0,97)^2 - (0,08)^2)$ .
17.  $\sqrt{(1,05)^3 + (1,97)^3}$ .
18.  $(6,03)^3 \cdot \sin 29^0$ .
19.  $\sqrt{\sin^2 1,55 + 8e^{0,02}}$ .
20.  $\sqrt[3]{(2,01)^3 + 117,1}$ .
21.  $\operatorname{arctg} \frac{1,04}{0,92}$ .
22.  $\cos 61^0 - 2 \cdot \operatorname{tg} 44^0$ .
23.  $(1,02)^3 \cdot (0,97)^2$ .
24.  $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$ .
25.  $\sqrt[3]{(1,09)^5 + 7,05}$ .
26.  $3 - (2,03)^2 \cdot (3,98)^3$ .
27.  $(3,03)^{2,02} - 4$ .
28.  $\cos 59^0 \cdot \operatorname{tg} 46^0$ .
29.  $(0,97)^{1,08} + (1,04)^{2,03}$ .
30.  $(0,96)^2 \cdot (1,02)^3$ .

**13.** Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке М.

1.  $xyz - z^3 + zy - x + 1 = 0$ ;  $M(1; 2; 2)$ .
2.  $z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y - 6 = 0$ ;  $M(5; 1; 2)$ .
3.  $z = (x - y)^2 + xy - \frac{3x}{y}$ ;  $M(2; 2; 1)$ .
4.  $z = 3 \left( \frac{1}{x} + y \right)^2 - 2 \frac{x^2}{y^2}$ ;  $M(1; 1; 10)$ .
5.  $5(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) - 9 = 0$ ;  $M(1; 1; 1)$ .
6.  $(x + y - z)^2 - 3y + 2x - z - 13 = 0$ ;  $M(1; 2; -1)$ .
7.  $(z + 2y)^2 - (x + 4y - 2z) = 0$ ;  $M(-1; 2; -1)$ .

8.  $z^3 + 3x^2y + xz + y^2z^2 + y - 2x - 20 = 0$ ;  $M(-1; 2; -2)$ .
9.  $x^2 - y^2 + z^3 - 2x + yz - 8 = 0$ ;  $M(3; -1; 2)$ .
10.  $z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 2$ ;  $M(-2; 3; 3)$ .
11.  $3x^2 - y^2 + \sqrt{x + z} + 3y - 5z + 2 = 0$ ;  $M(4; -4; 5)$ .
12.  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x - 3y - 30 = 0$ ;  $M(2; 2; -2)$ .
13.  $4 - x^2 - y^2 + z^2 - z + 3x - 5y - 16 = 0$ ;  $M(1; -1; 3)$ .
14.  $xz - yx + yz + 2x - 3y + 2z = 0$ ;  $M(1; -2; -10)$ .
15.  $xy - yz + 2x + z^2 - 3 = 0$ ;  $M(-1; -2; -3)$ .
16.  $xz^2 - x^2y + y^2z + 2x - y - 10 = 0$ ;  $M(1; 2; 2)$ .
17.  $z = x^2 - xy^2 - 2x + 3y$ ;  $M(2; -1; -5)$ .
18.  $z^3 + 3x^2y + 2xz + yz - 2x + y + 2 = 0$ ;  $M(1; -2; 2)$ .
19.  $z = x^2y - xy^3 + xy - 2x - y$ ;  $M(1; -1; -2)$ .
20.  $xyz - 2(x^2 + y^2 + z^2) + 5 = 0$ ;  $M(1; -1; -1)$ .
21.  $(x + 2y - z)^2 - xz = 0$ ;  $M(2; 1; 2)$ .
22.  $x \ln z - z \ln y + 2y \ln x + 2x - 2z = 0$ ;  $M(1; 1; 1)$ .
23.  $xyz = x + 2y - 3z^2 + 21$ ;  $M(-1; -2; 2)$ .
24.  $z^2 \ln x - x^2 \ln z + y^2xz - 4 = 0$ ;  $M(1; 2; 1)$ .
25.  $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 6xz - 6yz - 25 = 0$ ;  $M(1; -1; 1)$ .
26.  $(x - 1)^2 + (y + z)^2 - (1 - z)^2 + yx + yz = 0$ ;  $M(1; -1; -1)$ .
27.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2) + 4(z - 1)^2 - (y + 1)^2 - 1 = 0$ ;  $M(-1; -1; 1)$ .
28.  $xyz + \frac{x^2}{2} - 3y + 2z - \frac{y^2}{2} - 3 = 0$ ;  $M(1; 1; 2)$ .
29.  $x^2y - y^2z + z^2x - 2x + 3y - 5z + 10 = 0$ ;  $M(-1; 1; 2)$ .
30.  $(x + 2y - z)^2 - (y + 2z)^2 + 24 = 0$ ;  $M(1; 1; 2)$ .

**14.** Найти производную функции  $U$  в точке  $M$  в направлении вектора  $\vec{l}$ .

1.  $U = 4 - x^2 - y^2 + z^2 - z$ ;  $M(-1; 2; -1)$ ;  $\vec{l} = (8; 4; 1)$ .
2.  $U = 2xyz - x^2 + y^2$ ;  $M(2; 1; -1)$ ;  $\vec{l} = (12; 3; 4)$ .
3.  $U = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + z$ ;  $M(1; -1; 2)$ ;  $\vec{l} = (2; 3; 6)$ .
4.  $U = xy - yz + 2x + z^2$ ;  $M(-2; 1; 2)$ ;  $\vec{l} = (-4; 8; 1)$ .
5.  $U = z^2x - x^2y + y^2z + 2x - y$ ;  $M(1; -1; 3)$ ;  $\vec{l} = (-4; -3; 12)$ .
6.  $U = xyz - z^3 + zy - x + 2$ ;  $M(1; -1; -1)$ ;  $\vec{l} = (-2; 3; 6)$ .
7.  $U = 3(x^2 + y^2 + z^2) - xy$ ;  $M(1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-3; 12; 4)$ .
8.  $U = 3x^2 - 2y^2 + z^2 - xyz$ ;  $M(-1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (1; 2; 2)$ .
9.  $U = xyz^2 - \ln(2 + x^2)$ ;  $M(1; 2; -2)$ ;  $\vec{l} = (4; -1; 8)$ .
10.  $U = 3x^2z - xy + \sqrt{x + y}$ ;  $M(4; 5; 1)$ ;  $\vec{l} = (3; -12; 4)$ .
11.  $U = x^2 - y^2 + z^3 - 2x + yz - 1$ ;  $M(2; -1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-2; -3; 6)$ .
12.  $U = \sqrt{4 - xy} + xz - 2yz^2$ ;  $M(1; -5; 2)$ ;  $\vec{l} = (-4; -8; 1)$ .
13.  $U = z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} - 2$ ;  $M(2; 3; -1)$ ;  $\vec{l} = (3; -4; 12)$ .
14.  $U = (x + y - z)^2 - 3xyz$ ;  $M(1; 1; -1)$ ;  $\vec{l} = (2; -3; -6)$ .
15.  $U = \frac{x}{y} - (x + 2y + z)^2$ ;  $M(1; -1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-1; 2; -2)$ .

16.  $U = x \ln z - z \ln y + 2y \ln x$ ;  $M(1; 1; 2)$ ;  $\vec{l} = (8; 4; -1)$ .
17.  $U = \operatorname{arctg}(xy) + \operatorname{arctg}(yz)$ ;  $M(1; -1; -1)$ ;  $\vec{l} = (-12; 4; 3)$ .
18.  $U = z^2 \ln x - x^2 \ln y + y^2 \ln z$ ;  $M(1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (3; -2; -6)$ .
19.  $U = 3xyz - x^2 - y^2 - z^2$ ;  $M(1; -1; 2)$ ;  $\vec{l} = (8; -1; 4)$ .
20.  $U = xyz - 2(x^2 + y^2 + z^2)$ ;  $M(1; -1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-12; -4; 3)$ .
21.  $U = (x + 2y - z)^2 - xz$ ;  $M(-1; 2; 1)$ ;  $\vec{l} = (3; -6; 2)$ .
22.  $U = \sqrt{(1+x)(12-y)} + z^2 - zx$ ;  $M(3; 3; -1)$ ;  $\vec{l} = (1; -8; 4)$ .
23.  $U = \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{2}{z} + 5$ ;  $M(1; 1; -1)$ ;  $\vec{l} = (2; -1; 2)$ .
24.  $U = (1 + 2x)^3 - xy + z^2 - zy$ ;  $M(-1; 2; -1)$ ;  $\vec{l} = (4; -12; 3)$ .
25.  $U = x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 6xz - 6yz$ ;  $M(1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (6; -2; 3)$ .
26.  $U = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - (1 - z)^2 + zy$ ;  $M(1; -1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-1; 8; -4)$ .
27.  $U = -2(x + 2) + 4(z - 1)^2 - (y + 1)^2$ ;  $M(1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-4; 12; -3)$ .
28.  $U = (x + y - 2)^2 + (x - z + 1)^2$ ;  $M(1; -1; -1)$ ;  $\vec{l} = (-2; -1; 2)$ .
29.  $U = z^2 - 2x^2 + y^2 - 3(z + y)$ ;  $M(-1; 1; -1)$ ;  $\vec{l} = (6; -2; -3)$ .
30.  $U = (x + 2y - z)^2 - 2(y + 2z)$ ;  $M(1; 1; 1)$ ;  $\vec{l} = (-8; -4; 1)$ .

**15. Задачи на градиент и производную по направлению.**

I. Найти угол между градиентами функции  $z$  в точках  $A$  и  $B$ .

1.  $z = \ln \frac{y}{x}$ ;  $A(1/2; 1/4)$ ;  $B(1; 1)$ .
2.  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ;  $A(5; 3)$ ;  $B(4; 2)$ .
3.  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ;  $A(2; 1)$ ;  $B(0; 3)$ .
4.  $z = \frac{y^2}{x}$ ;  $A(3; 1)$ ;  $B(-2; -1)$ .
5.  $z = \operatorname{arctg} xy$ ;  $A(1; 1)$ ;  $B(-1; -1)$ .
6.  $z = \ln(x^2 + y^2)$ ;  $A(1; -1)$ ;  $B(2; 2)$ .
7.  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $A(0; 1)$ ;  $B(-1; 1)$ .
8.  $z = \frac{x^3 + y^3}{x - y}$ ;  $A(2; -1)$ ;  $B(3; 4)$ .
9.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ;  $A(2; 1)$ ;  $B(5; 3)$ .
10.  $z = y\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{y}}$ ;  $A(1; 4)$ ;  $B(9; 1)$ .

II. Найти угол между градиентами функций  $z_1$  и  $z_2$  в точке  $M$ .

11.  $z_1 = \frac{2x + 3y}{x - y}$ ;  $z_2 = -2xy^{-1}$ ;  $M(3; 4)$ .
12.  $z_1 = y\sqrt[3]{x}$ ;  $z_2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ ;  $M(1; 8)$ .
13.  $z_1 = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ ;  $z_2 = \sqrt{x + 2y}$ ;  $M(1; 1)$ .
14.  $z_1 = \frac{4}{x^2 + y^2}$ ;  $z_2 = 4 - x^2 - y^2$ ;  $M(-1; 2)$ .
15.  $z_1 = \frac{xy}{x - y}$ ;  $z_2 = \frac{y}{2x}$ ;  $M(-1; 2)$ .

$$16. z_1 = xe^{-yx}; z_2 = x^3 + 3x^2y - y^3; M(-1; 0).$$

$$17. z_1 = \arcsin \frac{y}{x}; z_2 = \frac{x}{3y - 2x}; M(2; 1).$$

$$18. z_1 = x^y; z_2 = \frac{x+y}{x^2-y}; M(1; 2).$$

$$19. z_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; z_2 = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}; M(2; 1).$$

$$20. z_1 = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}; z_2 = \ln \frac{x}{y}; M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

III. Найти максимально возможное значение производной по направлению функции  $z$  в точке  $M$ .

$$21. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y; M(4; 3). \quad 22. z = -2xy^{-1}; M(1; 4).$$

$$23. z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}; M(1; 1). \quad 24. z = \frac{x^3}{x-y}; M(3; 2).$$

$$25. z = e^{\frac{x}{y}}; M(0; 2). \quad 26. z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); M(1; 4).$$

$$27. z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}; M(1; 3). \quad 28. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}); M(1; 1).$$

$$29. z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}; M(4; 16). \quad 30. z = 2y\sqrt[3]{x}; M(1; -1).$$

16. Найти функцию  $z(x, y)$  по ее полному дифференциалу.

$$1. (x + y \ln x)dy + \left(\frac{y^2}{2x} + y + 1\right)dx.$$

$$2. (3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3 - 1)dy.$$

$$3. \frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy.$$

$$4. (3x^2y + y^3 - 1)dx + (x^3 + 3xy^2 - 2)dy.$$

$$5. \left(2x + \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2\right)dy.$$

$$6. (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy.$$

$$7. (y^3 + yx^2)dy - (x^3 - xy^2 + 1)dx.$$

$$8. (2xy + e^x + y)dx + (x + x^2 + y^2)dy.$$

$$9. (4x + 3y + 5)dx + (3x - 6y^2 - 3)dy.$$

$$10. \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \frac{2y}{x^3}dy.$$

$$11. (3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y + 2)dy.$$

$$12. (e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy.$$

$$13. x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy.$$

$$14. \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy.$$

$$15. (x^2 - 3xy^2 + 1)dx + (y^3 - 3yx^2 + 2)dy.$$

$$16. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy.$$

$$17. \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx - \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2} + 2y\right)dy.$$

18.  $(3y - 6x^2 - 3)dx + (3x + 4y + 5)dy$ .
19.  $x(y^2 + 2x^2 - 3x)dx + y(2y^2 - y + x^2)dy$ .
20.  $(y + x \ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy$ .
21.  $\left(x - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{\sin 2y}{x} + y\right)dy$ .
22.  $(e^x + y + y \cos x)dx + (e^{2y} + x + \sin x - 1)dy$ .
23.  $(6y^2x + 4x^3 - 2)dx + (3y^2 + 6yx^2 - 1)dy$ .
24.  $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2 + 3)dy$ .
25.  $(x^2 + y^2 + 2x)dx + (2xy - e^{-y})dy$ .
26.  $(2x - y + e^x - 5)dx + (2y - x + y^2 + 1)dy$ .
27.  $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2 + 2)dy$ .
28.  $(2x^2 + xy^2 - 1)dx + (yx^2 + 2y^2 - e^{-y})dy$ .
29.  $(y^3 - \cos x + 1)dx + (3xy^2 + \sin y + 2)dy$ .
30.  $(2x - y + 3x^2 - 1)dx + (3y^2 - 2y - x + 2)dy$ .

**17. Найти экстремумы функции.**

- |   |  |
|---|--|
| 1. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$ .                    | 2. $z = 7 - x^2 - xy - y^2 + 3x - 6y$ .                  |
| 3. $z = 2 - 6x + 2y - x^2 - y^2$ .                    | 4. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 - 4x + 18y + 10$ .             |
| 5. $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ . | 6. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - 3y^2 - 8xy$ .                |
| 7. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ .                       | 8. $z = xy - x^2 - y^2 - 3x + 2y - 1$ .                  |
| 9. $z = 15 - 4x + 6y + x^2 + y^2$ .                   | 10. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 5$ .                 |
| 11. $z = 1 - y + x + x^2 + xy + y^2$ .                | 12. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$ .               |
| 13. $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$ .                  | 14. $z = 2xy(6 - x - y); x > 0, y > 0$ .                 |
| 15. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ .                  | 16. $z = x^3y^3(3 - x - y); x > 0, y > 0$ .              |
| 17. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$ .                  | 18. $z = x^3 + xy^2 + 2xy - 11x$ .                       |
| 19. $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$ .                      | 20. $z = x^3 + y^3 + 6xy - \frac{8}{27}; x < 0, y < 0$ . |
| 21. $z = 3x^2 + 2y^2 - 2xy - 10$ .                    | 22. $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$ .         |
| 23. $z = x^2 + y^2 - 4y + 4$ .                        | 24. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$ .               |
| 25. $z = x^2y(4 - x - y); x > 0, y > 0$ .             | 26. $z = x^3 + y^3 - 15xy + 1; x > 0, y > 0$ .           |
| 27. $z = xy^2(1 - x - y); x > 0, y > 0$ .             | 28. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 16; x > 0, y > 0$ .           |
| 29. $z = x^2 - 2xy + y^3 - y^5$ .                     | 30. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x + 6y - 7$ .                 |

**18\*. Найти оптимум.**

1. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
2. Найти кратчайшее расстояние между параболой  $y = x^2$  и прямой  $x - y - 2 = 0$ .
3. Даны три точки  $A(4; 0; 4), B(4; 4; 4)$  и  $C(4; 4; 0)$ . Найти на поверхности шара  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  такую точку  $S$ , чтобы объем пирамиды  $SABC$  был наибольшим.

4. При каких размерах прямоугольного открытого ящика с заданным объемом  $V = 32\text{ м}^3$  его поверхность будет наименьшей?
5. В шар радиуса  $r$  вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
6. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данной полной поверхности шатра определить его измерения так, чтобы объем был наибольшим.
7. Определить размеры конуса наименьшей боковой поверхности при условии, что его объем равен  $V$ .
8. Определить наружные размеры котла цилиндрической формы с заданной толщиной стенок  $d$  и емкостью  $V$  так, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала.
9. Нужно построить конический шатер наибольшего объема из данного количества материала  $S$ . Каковы должны быть его размеры?
10. На плоскости  $3x - 2z = 0$  найти точку, сумма квадратов расстояний которой от точек  $A(1; 1; 1)$  и  $B(2; 3; 4)$  наименьшая.
11. Даны три точки  $A(4; 0; 4)$ ,  $B(4; 4; 4)$  и  $C(4; 4; 0)$ . Найти на поверхности шара  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  такую точку  $S$ , чтобы объем пирамиды  $SABC$  был наименьшим.
12. Шатер имеет форму цилиндра, завершенного сверху прямым круговым конусом. При данном объеме шатра определить его измерения так, чтобы его полная поверхность была наименьшей.
13. Из всех эллипсов, у которых сумма осей постоянна и равна 24, найти наибольший по площади.
14. Найти треугольник данного периметра  $2p$ , который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.
15. Положительное число  $a$  разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.
16. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости  $V$  имеет наименьшую поверхность?
17. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, площадь поверхности которой равна  $3\pi\text{ м}^2$ , имеет наибольшую вместимость?
18. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности  $S$ , имеющих наибольший объем.
19. На плоскости  $xOy$  найти точку  $M(x, y)$ , сумма квадратов расстояний которой от трех прямых  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x - y + 1 = 0$  была бы наименьшей.
20. Через точку  $M(a, b, c)$  провести плоскость, образующую с координатными плоскостями тетраэдр наименьшего объема.
21. В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.
22. В какой точке эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?
23. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.



24. Найти кратчайшее расстояние от точки  $M(1; 2; 3)$  до прямой, заданной уравнениями  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$ .
25. Найти длины полуосей эллипса  $36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180$ .
26. Найти кратчайшее расстояние от точки  $A(1; 0)$  до эллипса, заданного уравнением  $4x^2 + 9y^2 = 36$ .
27. Среди всех треугольников данного периметра  $2p$  найти треугольник наибольшей площади.
28. Среди всех треугольников, вписанных в круг радиуса  $R$ , найти треугольник наибольшей площади.
29. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти наибольший по площади.
30. На эллипсоиде  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$  найти точку, наиболее удаленную от точки  $(0; 0; 3)$ .

**19.** В двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  изобразить область  $D$  на чертеже, перейти к повторному, расставить пределы интегрирования в различных порядках, если область интегрирования ограничена линиями:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $y = -\sqrt{1-x^2}, y = 1-x, x = 0$ .     | 2. $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}, x \leq 2$ .     |
| 3. $y = 0.5x + 1, y = 7-x, x = 0$ .          | 4. $y = x^2, y = x+2, x \geq 0$ .                     |
| 5. $y = -x^2, y = x^2, x = 1$ .              | 6. $y = 0, x = 0.5y + 1, x = 7-y$ .                   |
| 7. $x = 0, x \leq 2y + 1, x = 4 - y^2$ .     | 8. $y = \frac{4}{x}, x = 1, y = 0, x = 2$ .           |
| 9. $y = 0, y = 2, x = y^2, x = y^2 + 2$ .    | 10. $x = 0, x \leq 1.5y, x = \sqrt{25-y^2}$ .         |
| 11. $x = 0.25y^2, x = 2\sqrt{y}, y \leq 2$ . | 12. $y = 0, y = (x-2)^2, y = x$ .                     |
| 13. $y = e^{-x^2}, x = 0, x = 1, y = 0$ .    | 14. $y \geq 0, y \leq x, x^2 + y^2 = 1$ .             |
| 15. $y = \sqrt{x}, x + y = 0, y = 1$ .       | 16. $x = \cos y, x = 0, y = 0$ .                      |
| 17. $y = \sqrt{2-x^2}, y = x^2$ .            | 18. $y = x + \frac{1}{x}, y = 1, x = 1, x = 2$ .      |
| 19. $y = 2x - x^2, y = x - 2$ .              | 20. $y = e^{1/x}, y = 0, x = 1, x = 2$ .              |
| 21. $y = x, y = 2x, x + y = 6$ .             | 22. $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}$ .       |
| 23. $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ .         | 24. $y = \frac{2x}{x+1}, x = -0.5, y = 0, y = 1$ .    |
| 25. $x^2 - y^2 = 1, x = 2, x = 3$ .          | 26. $x = 0, x = 4, y = 2 - 0.5x^2, y = 3 + 0.5x^2$ .  |
| 27. $y = \ln x, x = 3, y = 0$ .              | 28. $y = 0, y = 4, x = 2 - 0.5y^2, x = 3 + 0.5y^2$ .  |
| 29. $x^2 + y^2 = 1$ .                        | 30. $y^2 + x^2 = 4x, y^2 + x^2 = 8x, y = 2x, y = x$ . |

**20.** Вычислить объем тела, образованного данными поверхностями.

- $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 4, z = 0$ .
- $x = 0, y = 0, 6x + 3y + 2z = 6, z = 0$ .

3.  $x + y + z = 2, 3x + y = 2, y = 0, z = 0, 3x + 2y = 4.$
4.  $z = 0, y + z = 2, 2y = x^2.$
5.  $z = 4x^2 + 2y^2 + 1, x + y = 3, z = 0, x = 0, y = 0.$
6.  $z = x^2 + y^2, x = y^2, x = 2, z = 0.$
7.  $z = 4 - x^2, y = 5, y = 0, z = 0.$
8.  $z = 1 - x^2, x + y = 1, y = 0, y = 2x, z = 0.$
9.  $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$
10.  $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$
11.  $z = 1 + x^2 + y^2, y = 0.5x, y = x, y = 1, z = 0.$
12.  $2 - x - y - 2z = 0, z = 0, y = x^2, y = x.$
13.  $z = x^2 + y^2 + 1, x = 0, x = 4, y = 0, y = 4, z = 0.$
14.  $z = \frac{y^2}{2}, 2x + 3y - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$
15.  $z = 0, x = y, x + y = 3, 2x + y = 6, x + y + z = 1.$
16.  $z = 2 - x, z = 0, y = 2\sqrt{x}, y = 0.25x^2.$
17.  $z = x^2, z = 0, 2x - y = 0, x + y = 9.$
18.  $z = 0.25y^2, z = 0, 2x - y = 0, x + y = 9.$
19.  $z = x^2 + y^2, z = 0, y = x^2, y = 1.$
20.  $z = a - x, z = 0, y^2 = ax, a > 0.$
21.  $z = 4 - y^2, y = \frac{x^2}{2}, z = 0.$
22.  $z = x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$
23.  $z = y, z = 0, x = 0, x = 4, y = \sqrt{25 - x^2}.$
24.  $z = x^2 + y^2, z = 0, x = 0, y = 0, x + y = 1.$
25.  $z = 4 - x - y, y = 2 - x, y = 2, x = 2, z = 0.$
26.  $z + x = 1, x = y^2, z = 0.$
27.  $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$
28.  $z = x^2 + y^2, y = -x^2, y = -1, z = 0.$
29.  $z = y^2, z = 0, x = 0, x + y = 2.$
30.  $z = 0, z = 2 - y, y = x^2.$

**21\*.** Для плоской фигуры (пластинки), ограниченной линией  $L$ , найти координаты центра тяжести и моменты инерции относительно осей  $Ox, Oy$  и точки  $O(0;0)$ . Если в условии задачи не дана плотность  $\rho(x, y)$ , то пластинка считается однородной ( $a > 0, b > 0, b < a$ ).

1.  $L : y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4.$
2.  $L : \text{круговой сектор радиуса } a \text{ с углом при вершине } 2\alpha.$
3.  $L : y = 2x, x = 1, y = 0; \rho(x, y) = x + y.$
4.  $L : y = \sin x, y = \frac{2}{\pi}x, x \geq 0.$
5.  $L : x + y = 2, x = 2, y = 2.$
6.  $L : r = a(1 + \cos \varphi).$
7.  $L : r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

8.  $L : x/a + y/b = 1, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = 2y + 1.$
9.  $L : x + y = 2, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = x + 2y.$
10.  $L : y^2 = 4x, x = 2, y \geq 0; \rho(x, y) = 2x + y.$
11.  $L : y^2 = ax, x = a, y = 0, y \geq 0.$
12.  $L : r^2 = a^2 \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$
13.  $L : y = b, y = 0, x = 0, x = a.$
14.  $L : \text{треугольник } ABC : A(1; 1), B(2; 1), C(3; 3).$
15.  $L : y = 4 - x^2, y = 0.$
16.  $L : y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi.$
17.  $L : y = \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}.$
18.  $L : y^2 = ax, y = x.$
19.  $L : \text{треугольник } ABC : A(0; 2a), B(a; 0), C(a; a).$
20.  $L : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1.$
21.  $L : y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$
22.  $L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0.$
23.  $L : y = -\sqrt{R^2 - x^2}, y = 0.$
24.  $L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0.$
25.  $L : y^2 = ax, x = a, y \leq 0.$
26.  $L : \text{сектор кругового кольца с центральным углом } \alpha \text{ и радиусами } r \text{ и } R.$
27.  $L : y = 2 - x^2, y = 0.$
28.  $L : \rho = a(1 - \cos \varphi).$
29.  $L : y^2 = 2x, x = 2.$
30.  $L : y = \sqrt{R^2 - x^2}, y = 0.$

**22\*.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями ( $a > 0, b > 0$ ).

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| 1. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 y^4.$                | 2. $(x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4.$         |
| 3. $(x^2 + y^2)^2 = 4ay^3.$                  | 4. $x^4 = a^2(x^2 - y^2).$            |
| 5. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^3.$                | 6. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$ |
| 7. $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2 x^3.$               | 8. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2.$    |
| 9. $y^3 = 2(y^2 - x^2).$                     | 10. $y = (x - 4)^2, y = 16 - x^2.$    |
| 11. $x^2 + 4y^2 = 8.$                        | 12. $x^2 + y^2 = -2y, y = -1, y = x.$ |
| 13. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(y^2 - x^2).$       | 14. $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3.$          |
| 15. $x^2 = 2ay, y^2 = 2ax.$                  | 16. $(x^2 + y^2)^2 = 4y^3.$           |
| 17. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ | 18. $\rho = 2 + \cos \varphi.$        |
| 19. $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4.$             | 20. $(x^2 + y^2)^2 - 4xy = 0.$        |
| 21. $y = 1 - x^2, y = -2.$                   | 22. $x = 4y - y^2, x + y = 6.$        |

23.  $y = \frac{(x-a)^2}{a}, x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0$ .
24.  $x^2 + y^2 = a^2, x + y = a, y = 0.5a, x \geq 0, y \geq 0.5a$ .
25.  $xy = a^2, x^2 = ay, y = 2a, x = 0$ .
26.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, y = x, y = 0, x \geq 0, y \geq 0$ .
27. Окружностью  $x^2 + y^2 = 5$ , касательной к ней  $x + 2y - 5 = 0, y = 0$ .
28.  $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x = 0.5, x = 0, y = 0$ .
29.  $y = 4 - x^2, 3x - 2y - 6 = 0$ .
30.  $y = -2, y = x + 2, y = 2, y^2 = x$ .

**23\*.** Вычислить тройной интеграл.

1.  $\iiint_V x^2 y z dx dy dz$ ,  $V$  — область, ограниченная плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .
2.  $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$ ,  $V$  — куб, ограниченный плоскостями  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$ .
3.  $\iiint_V (1 - y) x z dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .
4.  $\iiint_V x^2 y^2 z dx dy dz$ ,  $V$  — параллелепипед, ограниченный плоскостями  $x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 2, z = 5$ .
5.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .
6.  $\iiint_V y^2 (e^{xy} - e^{-xy}) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = -2, y = 4x, z = 0, z = 2$ .
7.  $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, z = x + y$ .
8.  $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, y = 1, y = x, z = 0, z = 1$ .
9.  $\iiint_V x dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 1, y = 0, y = 10x, z = 0$  и параболоидом  $z = xy$ .
10.  $\iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $x = 0, x = 2, y = 0, y = \pi, z = 0, z = 1$ .
11.  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостью  $z = 2$  и параболоидом  $2z = x^2 + y^2$ .

12.  $\iiint_V ((x+y)^2 - z) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $z = 0, (z-1)^2 = x^2 + y^2$ .
13.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} z dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = z, z = 1$ .
14.  $\iiint_V z(x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = z, (x^2 + y^2)^2 = z^3$ .
15.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$ .
16.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z)^2 dx dy dz$ ,  $V$  — цилиндр, ограниченный поверхностью  $x^2 + y^2 = 1$  и плоскостями  $z = 2, z = 3$ .
17.  $\iiint_V dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4z, x^2 + y^2 \leq z^2$ .
18.  $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $V$  — цилиндр, ограниченный поверхностью  $x^2 + y^2 = 16$  и плоскостями  $z = -3, z = 3$ .
19.  $\iiint_V dx dy dz$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 22$  и поверхностью параболоида  $9z = x^2 + y^2$ .
20.  $\iiint_V z dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 = z^2, z = 1$ .
21.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ ,  $V$  — шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .
22.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .
23.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0$  и расположена в первом октанте.
24.  $\iiint_V xyz dx dy dz$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0$  и расположена в первом октанте.
25.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
26.  $\iiint_V z dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0 (z \geq 0)$ .
27.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
28.  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ .

29.  $\iiint_V xyz^2 dx dy dz$ ,  $V$  ограничена сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и расположена в первом октанте.
30.  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  ограничена поверхностями  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 0$ .

**24.** Вычислить криволинейный интеграл вдоль линии  $L$ . При вычислении интеграла по замкнутому контуру обходить контур против часовой стрелки ( $a > 0, b > 0, R > 0$ ).

1.  $\int_{AB} (xy - y^2) dx + x dy$ ;  $L$ :  $y = 2x^2$ ;  $A(0; 0), B(1; 2)$ .
2.  $\int_{AB} (x - y) dx + \frac{1}{2} x^2 dy$ ;  $L$ :  $y = 2\sqrt{x}$ ;  $A(0; 0), B(1; 2)$ .
3.  $\int_{AB} (x^2 - 2x) dx + (y^2 - 2xy) dy$ ;  $L$ :  $y = x^2$ ;  $A(-1; 1), B(1; 1)$ .
4.  $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$ ;  $L$ :  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ .
5.  $\oint_L (x^2 y - 3x) dx + (y^2 x + 2y) dy$ ;  $L$ :  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ .
6.  $\oint_L x dy - y dx$ ;  $L$ :  $x = 2 \cos^3 t, y = 2 \sin^3 t$ .
7.  $\int_L \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ ;  $L$ : отрезок  $AB$ :  $A(1; 2), B(3; 6)$ .
8.  $\int_L (x^2 - y^2) dx - (x - y^2) dy$ ;  $L$ : ломаная  $ACB$ :  $A(1; 2), C(3; 2), B(3; 5)$ .
9.  $\int_L (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$ ;  $L$ : ломаная  $ACB$ :  $A(2; 1), C(5; 1), B(5; 3)$ .
10.  $\oint_L x dy - y dx$ ;  $L$ : ломаная  $ABCA$ :  $A(-1; 0), B(1; 0), C(0; 1)$ .
11.  $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y) dy$ ;  $L$ :  $y = |x|$ ;  $A(-1; 1), B(2; 2)$ .
12.  $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$ ;  $L$ : отрезок  $AB$ :  $A(0; \pi), B(\pi; 0)$ .
13.  $\int_{AB} \frac{y}{x} dx + x dy$ ;  $L$ :  $y = \ln x$ ;  $A(1; 0), B(e; 1)$ .
14.  $\int_{AB} x dy - y dx$ ;  $L$ :  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ;  $A(2\pi a; 0), O(0; 0)$ .
15.  $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$ ;  $L$ :  $x^2 + y^2 = 4$ .

16.  $\oint_L y^2 dx - y^2 dy; L : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ .
17.  $\int_{OM} xy dx + (x+y) dy; L : y = x^2; O(0;0), M(1;1)$ .
18.  $\int_{AB} 2xy dx + x^2 dy; L : \text{любая линия}; A(1;0), B(0;3)$ .
19.  $\oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}; L : \text{ломаная } ABCA: A(1;1), B(2;1), C(2;2)$ .
20.  $\oint_L y dx + a dy; L : \text{граница области } D, D = \{x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ .
21.  $\oint_L y dx + (x+y) dy; L : y = x^2, y = 4$ .
22.  $\int_{AB} (\cos 2y) dx - (2x \sin 2y) dy; L : \text{любая линия}; A(1; \frac{\pi}{6}), B(2; \frac{\pi}{4})$ .
23.  $\int_L \operatorname{tg} y dx + \frac{1}{\cos^2 y} dy; L : \text{отрезок } AB: A(1; \frac{\pi}{6}), B(2; \frac{\pi}{4})$ .
24.  $\oint_L (x^2 + y^2)(x dx + y dy); L : \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$ .
25.  $\oint_L \frac{y}{x} dx + 2 \ln x dy; L : \text{ломаная } ABCA: A(1;0), B(2;0), C(1;2)$ .
26.  $\int_L (6xy + 4y^2 + 5y) dx + (3x^2 + 8xy + 5x) dy; L : \text{отрезок } AB : A(2;1), B(1;2)$ .
27.  $\oint_L (6xy + 5y) dx + (3x^2 + 5y) dy; L : y = 0, x = 3, y = \sqrt{x}$ .
28.  $\int_{AB} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}; AB: \text{дуга астрои́ды } x = R \cos^3 t, y = R \sin^3 t; A(R;0), B(0;R)$ .
29.  $\oint_L y^2 dx + (y+x)^2 dy; L : \text{ломаная } ABCA: A(a;0), B(a;a), C(0;a)$ .
30.  $\oint_L (-x^2 y) dx + xy^2 dy; L : x^2 + y^2 = R^2$ .

**25\*.** Вычислить поверхностный интеграл второго рода.

1.  $\iint_S z dx dy + y dx dz + x dy dz, S$  — верхняя сторона плоскости  $x + y + z = 1$ , ограниченной координатными плоскостями.
2.  $\iint_S -x dy dz + z dz dx + 5 dx dy, S$  — верхняя сторона части плоскости  $2x - 3y + z = 6$ , лежащей в четвёртом октанте.
3.  $\iint_S yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy, S$  — внешняя сторона тетраэдра, ограниченного

плоскостями  $x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$ .

4.  $\iint_S xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz, S$  — внешняя сторона пирамиды, ограниченной

плоскостями  $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

5.  $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy, S$  — положительная сторона куба, ограниченного

плоскостями  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ .

6.  $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy, S$  — внешняя сторона поверхности верхней полу-

сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

7.  $\iint_S (x - y) dx dy + (z - x) dx dz + (y - z) dy dz, S$  — внешняя сторона конической

поверхности  $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$ .

8.  $\iint_S yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz, S$  — внешняя сторона поверхности, расположенной

в первом октанте и составленной из цилиндра  $x^2 + y^2 = 1$  и плоскостей  $x = 0, y = 0, z = 0, z = 2$ .

9.  $\iint_S z^3 dx dy, S$  — внешняя поверхность плоскости  $x + y + z = 10$ , расположенная в первом октанте.

10.  $\iint_S z dy dz - x dx dz + y dx dy, S$  — верхняя сторона плоскости  $3x + 6y - 2z - 6 = 0$ ,

ограниченной координатными плоскостями.

11.  $\iint_S 2x dy dz + 3y dx dz, S$  — верхняя сторона плоскости  $x + y + z = 1$ , ограниченной

координатными плоскостями.

12.  $\iint_S y dx dz, S$  — верхняя сторона части плоскости  $1 - x + y - z = 0$ , лежащей в четвёртом октанте.

13.  $\iint_S dy dz + dz dx + z dx dy, S$  — внешняя сторона поверхности параболоида

$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ .

14.  $\iint_S -y dy dz + x dx dz + z dx dy, S$  — внешняя сторона поверхности цилиндра

$x^2 + y^2 = 1$ , заключённая между плоскостями  $z = 0$  и  $z = 1$ .

15.  $\iint_S x dy dz + y dx dz, S$  — верхняя сторона плоскости  $y + z = 1$ , расположенная в первом октанте между плоскостями  $x = 0$  и  $x = 1$ .

16.  $\iint_S x dy dz + y dx dz + z dx dy, S$  — внешняя сторона поверхности верхней полусферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

17.  $\iint_S xy dy dz + yz dx dz + xz dx dy, S$  — внешняя сторона поверхности части сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , расположенной в первом октанте.

18.  $\iint_S dy dz + 2 dx dz + 3 dx dy, S$  — внешняя сторона боковой поверхности конуса,



осью которого служит ось  $Oz$ , вершина находится в точке  $M(0;0;1)$ , а основание — круг радиуса 2, лежащий в плоскости  $xOy$ .

19.  $\iint_S (x-1)dydz + (y+3)dx dz + z dx dy$ ,  $S$  — внешняя сторона конической поверхности  $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$ .

20.  $\iint_S z dy dz + (1-z) dx dz + xy dx dy$ ,  $S$  — часть плоскости  $x + y = 1$ , ограниченная плоскостями  $z = 0, z = 1, x = 0, y = 0$ ,  $\vec{n}$  — нормаль, образующая острый угол с осью  $Ox$ .

21.  $\iint_S x dy dz + 9y dx dz + 18z dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона плоскости  $x + 2y + 3z = 1$ , ограниченной координатными плоскостями.

22.  $\iint_S z dx dy$ ,  $S$  — часть конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ , заключённая между плоскостями  $z = 0, z = 1$ ,  $\vec{n}$  — нормаль, образующая тупой угол с осью  $Oz$ .

23.  $\iint_S (1-yz) dy dz + (1+xz) dx dz + 2(x+y) dx dy$ ,  $S$  — внешняя сторона поверхности параболоида  $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$ .

24.  $\iint_S dy dz + x dx dz - y dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона плоскости  $2x + y - 2z - 2 = 0$ , ограниченной координатными плоскостями.

25.  $\iint_S x dy dz - x dx dz + 3z dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона части плоскости  $2x - y + z - 2 = 0$ , лежащей в четвёртом октанте.

26.  $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона нижней половины сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

27.  $\iint_S yz dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона части плоскости  $2x + 3y + 4z = 12$ , лежащей в первом октанте.

28.  $\iint_S z^4 dx dy$ ,  $S$  — внутренняя сторона поверхности полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

29.  $\iint_S y dy dz - x dx dz + z dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона части плоскости  $x - y + 2z - 2 = 0$ , лежащей в четвёртом октанте.

30.  $\iint_S x dy dz - y dx dz + 6z dx dy$ ,  $S$  — верхняя сторона части плоскости  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$ , лежащей в первом октанте.

**26\*.** Вычислить дивергенцию векторного поля  $\vec{F}$ .

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $\vec{F} = xy^2\vec{i} - yz\vec{j} + z^2\vec{k}$ .                            | 2. $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . | 3. $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ .  |
| 4. $\vec{F} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$ .                         | 5. $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ . | 6. $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ .  |
| 7. $\vec{F} = \frac{zy}{x}\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + \frac{xy}{z}\vec{k}$ . | 8. $\vec{F} = yz^2\vec{j} + x\vec{k}$ .         | 9. $\vec{F} = x\vec{i} + y^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ . |

$$\begin{aligned}
10. \vec{F} &= z^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}. & 11. \vec{F} &= \frac{y}{x^2} \vec{j} - \frac{1}{x} \vec{k}. & 12. \vec{F} &= \frac{y}{x} \vec{i} + \frac{z}{y} \vec{j} + \frac{x}{z} \vec{k}. \\
13. \vec{F} &= \frac{y}{x^2} \vec{i} - \frac{1}{x} \vec{j}. & 14. \vec{F} &= -\frac{1}{x} \vec{i} + \frac{y}{x^2} \vec{k}. & 15. \vec{F} &= x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}. \\
16. \vec{F} &= y z^2 \vec{i} + x \vec{j}. & 17. \vec{F} &= x \vec{i} + y z^2 \vec{k}. & 18. \vec{F} &= \frac{y}{z} \vec{i} + \frac{z}{x} \vec{j} + \frac{x}{y} \vec{k}. \\
19. \vec{F} &= (x - z^2) \vec{i} + y z \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}. & 20. \vec{F} &= (x + y z) \vec{i} + (y + x z) \vec{j} + (z + x y) \vec{k}. \\
21. \vec{F} &= y^2 z^3 \vec{i} + 2 x y z^2 \vec{j} + 3 x y^2 z^2 \vec{k}. & 22. \vec{F} &= y z \vec{i} + z(x + 2y) \vec{j} + y(x + y) \vec{k}. \\
23. \vec{F} &= (x^3 + y^2 + z) \vec{i} + (y^3 + z^2 + x) \vec{j} + (z^3 + x^2 + y) \vec{k}. \\
24. \vec{F} &= (x - y)(y - z) \vec{i} + (y - z)(z - x) \vec{j} + (z - x)(x - y) \vec{k}. \\
25. \vec{F} &= (y^2 + z^2)(x + y) \vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z) \vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x) \vec{k}. \\
26. \vec{F} &= (x^2 + y^2)(y - z) \vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x) \vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y) \vec{k}. \\
27. \vec{F} &= x(y^2 - z^2) \vec{i} + y(x^2 - z^2) \vec{j} + z(x^2 - y^2) \vec{k}. \\
28. \vec{F} &= \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2) \vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \vec{k}. \\
29. \vec{F} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k}. \\
30. \vec{F} &= x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}.
\end{aligned}$$

**27\*.** Вычислить ротор векторного поля  $\vec{F}$ .

$$\begin{aligned}
1. \vec{F} &= x y^2 \vec{i} - y z \vec{j} + z^2 \vec{k}. & 2. \vec{F} &= x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. & 3. \vec{F} &= y z \vec{i} + x z \vec{j} + x y \vec{k}. \\
4. \vec{F} &= x^2 y \vec{i} + y^2 z \vec{j} + z^2 x \vec{k}. & 5. \vec{F} &= y \vec{i} + z \vec{j} + x \vec{k}. & 6. \vec{F} &= x y \vec{i} + y z \vec{j} + z x \vec{k}. \\
7. \vec{F} &= \frac{z y}{x} \vec{i} + \frac{x z}{y} \vec{j} + \frac{x y}{z} \vec{k}. & 8. \vec{F} &= y z^2 \vec{j} + x \vec{k}. & 9. \vec{F} &= x \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^3 \vec{k}. \\
10. \vec{F} &= z^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} + y^2 \vec{k}. & 11. \vec{F} &= \frac{y}{x^2} \vec{j} - \frac{1}{x} \vec{k}. & 12. \vec{F} &= \frac{y}{x} \vec{i} + \frac{z}{y} \vec{j} + \frac{x}{z} \vec{k}. \\
13. \vec{F} &= \frac{y}{x^2} \vec{i} - \frac{1}{x} \vec{j}. & 14. \vec{F} &= -\frac{1}{x} \vec{i} + \frac{y}{x^2} \vec{k}. & 15. \vec{F} &= x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}. \\
16. \vec{F} &= y z^2 \vec{i} + x \vec{j}. & 17. \vec{F} &= x \vec{i} + y z^2 \vec{k}. & 18. \vec{F} &= \frac{y}{z} \vec{i} + \frac{z}{x} \vec{j} + \frac{x}{y} \vec{k}. \\
19. \vec{F} &= (x - z^2) \vec{i} + y z \vec{j} + (x^2 + y^2) \vec{k}. & 20. \vec{F} &= (x + y z) \vec{i} + (y + x z) \vec{j} + (z + x y) \vec{k}. \\
21. \vec{F} &= y^2 z^3 \vec{i} + 2 x y z^2 \vec{j} + 3 x y^2 z^2 \vec{k}. & 22. \vec{F} &= y z \vec{i} + z(x + 2y) \vec{j} + y(x + y) \vec{k}. \\
23. \vec{F} &= (x^3 + y^2 + z) \vec{i} + (y^3 + z^2 + x) \vec{j} + (z^3 + x^2 + y) \vec{k}. \\
24. \vec{F} &= (x - y)(y - z) \vec{i} + (y - z)(z - x) \vec{j} + (z - x)(x - y) \vec{k}. \\
25. \vec{F} &= (y^2 + z^2)(x + y) \vec{i} + (z^2 + x^2)(y + z) \vec{j} + (x^2 + y^2)(z + x) \vec{k}. \\
26. \vec{F} &= (x^2 + y^2)(y - z) \vec{i} + (y^2 + z^2)(z - x) \vec{j} + (z^2 + x^2)(x - y) \vec{k}. \\
27. \vec{F} &= x(y^2 - z^2) \vec{i} + y(x^2 - z^2) \vec{j} + z(x^2 - y^2) \vec{k}. \\
28. \vec{F} &= \frac{1}{2}(y^2 + z^2) \vec{i} + \frac{1}{2}(z^2 + x^2) \vec{j} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \vec{k}. \\
29. \vec{F} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \vec{k}. \\
30. \vec{F} &= x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{i} + y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{j} + z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \vec{k}.
\end{aligned}$$

# Таблица вариантов

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	6	9	17	26	9	7	24	15
2	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	14	10	4	9	24	15	6	17
3	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	25	14	5	21	23	18	6	28
4	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	6	9	17	26	9	26	10	18
5	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	14	10	4	9	24	15	6	10
6	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	18	3	14	5	18	5	21	2
7	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	19	13	14	28	18	14	5	22
8	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	30	12	24	7	20	14	15	11
9	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	25	14	5	21	23	15	6	6
10	9	9	27	8	29	28	17	20	17	5	14	10	19	8	21	28	1	12	29	9	9	27	8	29	14	20	4
11	10	1	12	26	21	7	17	23	21	21	19	23	3	8	5	7	29	24	22	1	12	26	21	7	14	16	16
12	14	1	12	16	6	11	23	14	29	9	4	30	15	26	29	19	13	3	17	18	3	14	5	18	15	6	12
13	28	23	16	5	18	27	14	25	5	13	27	4	10	22	5	23	24	4	14	30	12	24	7	20	14	21	23
14	27	21	22	22	14	13	26	27	20	9	2	7	9	9	26	10	23	2	28	9	9	27	8	29	18	6	2
15	12	12	22	24	4	14	9	16	3	3	21	24	14	7	3	27	17	13	12	19	13	14	28	18	26	10	18
16	6	9	27	7	13	26	21	25	15	17	30	12	14	28	16	21	5	4	23	1	12	26	21	7	5	21	11
17	8	3	6	12	10	5	30	3	4	22	21	27	28	30	29	9	9	19	27	9	9	27	8	29	15	6	8
18	9	19	2	3	28	16	20	29	3	19	23	10	13	30	18	19	15	23	19	3	28	16	20	29	14	13	12
19	8	1	20	16	19	21	16	18	11	20	24	21	12	12	5	13	25	8	15	12	9	19	2	3	13	5	7
20	3	5	4	2	21	13	21	28	17	11	29	3	8	14	17	27	29	28	29	30	12	24	7	20	11	15	14
21	14	1	7	23	17	19	21	7	14	30	27	11	26	20	11	24	26	8	27	1	12	26	21	7	14	21	26
22	3	28	16	20	29	29	18	29	2	11	14	21	8	22	3	9	15	21	14	22	3	28	16	20	14	24	8
23	22	28	6	8	22	1	1	18	6	15	25	29	7	24	14	25	18	27	11	3	28	16	20	29	15	6	5
24	23	22	19	27	27	4	20	14	23	29	17	2	27	11	29	9	1	13	4	14	19	13	14	28	18	4	15
25	22	29	15	23	5	3	9	13	11	10	13	12	2	18	25	29	25	19	29	3	28	16	20	29	18	6	22
26	28	23	19	23	21	14	30	26	26	23	28	12	23	9	7	20	13	25	25	22	29	15	23	3	26	10	20
27	12	9	15	13	11	19	18	29	4	15	30	4	7	25	12	8	15	2	8	28	23	19	23	21	5	21	16
28	26	19	25	27	15	8	21	10	19	20	15	22	18	2	30	25	12	25	17	3	28	16	20	29	1	25	20
29	8	15	23	30	9	30	24	6	2	30	12	11	14	6	21	24	25	3	30	3	28	16	20	29	14	12	20
30	10	11	15	17	23	1	22	19	23	8	10	24	2	3	29	25	14	20	28	22	29	15	23	5	12	15	13
31	5	5	13	16	9	7	21	26	21	9	24	23	19	10	1	3	20	4	21	28	23	19	23	21	17	23	29
32	30	14	23	16	6	25	30	4	11	24	19	23	13	6	28	9	14	24	3	25	4	13	13	14	15	21	5
33	17	27	19	28	16	14	30	13	30	5	27	11	2	4	18	5	17	3	11	22	29	15	23	12	15	6	19
34	22	7	21	6	1	2	17	4	21	1	4	20	3	24	30	21	5	23	5	28	23	19	23	21	14	17	21
35	8	23	15	2	25	4	13	13	14	5	14	4	28	16	25	19	18	5	6	29	13	18	9	17	14	5	12
36	29	13	18	9	17	14	6	24	2	10	5	4	27	9	4	19	21	25	12	10	13	11	11	26	18	6	8
37	11	26	20	5	4	28	25	18	6	1	21	6	19	28	10	4	5	27	7	21	25	12	10	13	5	21	15
38	21	10	14	2	1	24	28	12	5	9	26	13	23	14	30	2	9	17	18	25	4	13	13	14	13	25	13
39	2	2	8	20	23	10	22	19	29	15	26	6	11	24	3	18	18	25	26	29	13	18	9	17	14	17	7
40	15	10	13	11	11	26	28	25	30	12	30	26	10	5	17	14	21	3	2	10	13	11	11	26	8	29	28
41	21	30	17	2	14	9	26	16	26	24	2	15	10	5	7	11	20	24	10	21	25	12	10	13	14	12	2
42	11	1	8	13	1	15	20	8	18	16	5	30	7	18	7	10	15	7	29	13	18	9	17	1	15	23	
43	29	10	7	29	17	20	28	21	15	16	4	14	1	23	8	30	4	29	17	10	13	11	11	26	16	21	8
44	25	15	16	30	6	21	20	1	21	20	17	13	14	4	15	25	25	2	20	25	4	13	13	14	15	6	16
45	30	2	20	9	30	18	1	5	11	7	12	1	22	6	14	17	17	7	22	21	25	12	10	13	7	13	9
46	21	24	8	20	2	20	22	20	21	14	13	26	30	8	12	3	20	19	2	8	20	2	20	22	12	9	20
47	13	21	9	6	12	15	25	21	8	20	21	20	23	15	6	16	1	29	3	23	19	16	8	20	26	10	2
48	22	10	26	1	26	20	6	22	25	20	15	15	30	5	3	19	19	20	2	15	15	18	27	21	5	21	20
49	29	9	28	24	14	5	26	1	10	9	28	19	3	8	17	21	3	2	29	23	11	1	8	13	11	23	20
50	14	24	13	7	9	17	2	24	10	18	2	13	21	18	6	8	13	13	4	23	19	16	8	20	4	12	26
51	26	6	30	8	29	21	13	1	15	26	20	10	29	2	22	28	24	6	26	15	15	18	27	21	8	29	14
52	12	29	8	29	6	27	19	20	13	22	19	14	14	10	26	14	17	23	11	8	20	2	20	22	11	2	16
53	21	16	10	11	29	18	23	23	24	12	20	29	15	6	24	15	15	18	27	21	25	12	10	13	18	9	24
54																											

B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
60	27	20	21	16	17	1	30	13	14	27	28	25	10	2	15	12	23	19	16	8	20	2	20	22	18	12	9
61	3	24	22	29	23	28	29	23	21	25	27	13	2	13	6	25	17	14	8	14	26	6	30	8	26	10	30
62	13	23	19	11	6	20	9	15	5	27	27	19	17	21	7	27	8	17	4	29	22	20	6	9	15	6	2
63	22	14	19	23	22	5	14	6	21	7	13	23	22	19	18	5	26	28	29	23	11	1	8	13	18	6	10
64	12	14	6	15	17	26	22	25	21	27	27	20	29	20	23	27	20	23	26	15	2	16	15	16	5	21	7
65	21	28	4	1	8	22	30	2	4	27	22	19	1	17	4	23	21	22	7	30	11	23	11	1	17	3	3
66	9	10	3	21	12	24	13	25	20	26	21	29	17	21	26	28	24	10	13	20	8	1	27	13	4	15	23
67	23	17	8	8	2	24	30	17	18	11	28	12	4	2	6	7	10	20	23	23	14	6	10	19	16	9	23
68	20	16	9	14	1	29	27	1	25	5	15	11	21	14	5	9	22	26	10	4	21	21	13	19	11	15	6
69	11	14	26	11	18	18	5	18	25	23	23	21	22	1	24	26	18	9	3	1	2	4	12	11	18	7	21
70	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	19	17	11	24	21	17	15	13
71	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	10	19	30	4	13	16	9	27
72	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	4	28	6	18	23	26	10	25
73	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	8	5	30	1	15	18	6	22
74	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	3	9	8	20	15	5	21	8
75	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	9	14	3	14	3	1	9	13
76	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	27	9	11	15	14	13	15	24
77	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	3	9	8	20	15	19	8	6
78	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	9	14	3	14	3	13	15	17
79	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	4	21	21	13	19	12	7	22
80	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	3	9	8	20	15	1	15	10
81	6	9	17	26	9	21	18	6	27	2	13	9	13	4	8	8	23	16	16	27	9	11	15	14	9	7	15
82	15	14	10	4	9	24	8	27	28	16	9	3	14	4	12	12	2	23	2	4	28	6	18	23	26	10	17
83	23	2	22	25	14	5	21	23	25	29	20	20	15	4	28	7	26	10	17	29	22	20	6	9	15	6	28
84	3	24	6	28	23	3	27	2	12	9	24	4	23	29	3	29	29	22	20	9	14	3	14	3	18	6	18
85	17	21	24	8	25	19	30	14	26	30	23	12	22	22	24	15	27	21	15	15	2	16	15	16	8	29	10
86	21	18	3	14	5	18	9	3	1	7	16	28	18	30	16	30	26	10	11	30	11	23	11	1	14	7	2
87	24	17	19	13	14	28	18	21	16	23	22	21	12	19	2	22	7	7	12	20	8	1	27	13	14	9	22
88	8	13	30	12	24	7	20	19	10	15	18	15	4	23	4	24	4	29	25	23	14	6	10	19	14	3	11
89	11	22	7	19	7	26	20	22	18	25	5	12	10	13	5	2	23	2	6	3	9	8	20	15	12	15	6
90	16	4	5	19	9	20	28	22	11	14	8	11	23	9	23	9	21	12	10	1	2	4	12	11	14	21	27
91	9	14	3	14	3	16	29	20	8	17	5	29	28	27	22	1	15	14	10	19	17	11	24	21	12	3	3
92	22	16	11	9	17	21	23	18	28	13	29	23	4	17	9	17	3	11	6	10	19	30	4	13	4	5	3
93	8	24	5	5	8	9	10	19	9	4	8	28	19	14	18	23	2	4	20	27	9	11	15	14	26	10	28
94	15	12	27	27	5	14	11	12	15	5	19	20	11	20	22	12	21	8	11	8	5	30	1	15	5	21	2
95	1	5	12	14	29	20	7	18	22	29	18	3	8	6	2	24	5	26	1	23	11	1	8	13	15	2	10
96	27	27	9	11	15	14	23	6	20	5	17	1	18	21	21	13	26	1	3	4	13	27	17	1	4	15	19
97	25	26	16	22	12	9	11	16	13	22	24	2	28	23	8	17	7	12	10	27	9	11	15	14	9	7	18
98	1	16	26	9	14	17	9	12	7	11	16	20	23	7	10	11	7	18	26	27	5	14	11	12	17	9	17
99	1	6	2	25	19	15	2	18	4	5	18	12	18	5	22	24	16	8	20	18	3	13	1	22	12	14	7
100	3	18	5	23	16	19	3	18	7	13	25	1	18	26	20	5	3	14	19	9	10	19	9	4	12	9	18
101	13	16	7	4	5	15	3	29	10	10	15	15	22	26	20	2	11	15	26	18	3	13	1	22	18	15	5
102	13	23	26	2	17	2	3	24	8	8	2	16	10	16	21	6	18	9	12	4	13	27	17	1	11	8	16
103	25	21	13	12	16	24	22	1	13	15	4	5	21	10	11	27	20	16	21	4	28	6	18	23	8	29	9
104	23	14	6	10	19	28	16	23	9	29	5	4	15	16	5	2	19	1	29	27	5	14	11	12	15	6	29
105	25	24	2	7	16	28	12	15	10	18	13	20	3	5	24	17	13	1	10	18	3	13	1	22	18	6	24
106	16	18	3	13	1	22	6	20	20	20	18	8	25	28	8	13	23	5	25	4	13	27	17	1	5	21	6
107	4	21	21	13	19	23	8	23	16	18	7	22	12	24	4	13	12	15	14	30	11	23	11	1	8	29	29
108	13	26	13	20	8	1	27	13	5	24	10	29	2	28	14	16	17	9	8	20	8	1	27	13	14	5	7
109	16	20	23	25	17	21	3	13	16	11	6	19	10	25	13	3	24	3	23	23	14	6	10	19	8	29	18
110	30	19	17	11	24	21	8	3	27	26	4	26	22	19	2	6	9	5	21	4	21	21	13	19	12	4	13
111	2	6	27	15	18	30	19	28	29	18	25	4	1	18	4	9	26	28	27	1	2	4	12	11	14	12	27
112	20	27	6	23	4	4	4	26	11	23	1	5	7	13	5	8	25	7	17	19	17	11	24	21	1	13	25
113	27	18	8	5	30	1	15	4	8	16	5	1	23	27	3	25	19	5	22	10	19	30	4	13	7	15	22
114	17	1	18	15	16	19	30	11	9	20	27	20	18	8	9	16	20	19	28	4	28	6	18	23	15	19	8
115	29	3	4	7	29	26	20	6	27	1	28	16	13	9	23	11	17	27	12	29	22	20	6	9	26	10	13
116	10	27	8	3	9	8	20	15	12	26	6	21	2	30	11	10	1	30	11	23	11	1	8	13	18	6	24
117	10	1	2	4	12	11	30	13	8	22	22	23	25	13	22	15	1	14	6	15	2	16	15	16	5	21	6
118	10	4	28	6	18	23	29	4	2	28	16	6	24	9	5	27	29	30	12	4	21	21	13	19	5	1	17
119	26	17	7	28	10	19	11	20	8	4	25	11	29	3	1	22	7	15	21	8	5	30	1	15	26	10	22
120	19	30	4	13	27	17	1	10	27	13	15	9	26	29	21	30	16	23	12	19	17	11	24	21	15	6	10