Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 05.10.2023

1.1 Двойные и тройные интегралы

1.1.1 №3618

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$
Конус $z^2 = 4(x^2 + y^2)$
$x^2 + y^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = 4R^2 - 3R^2$
$x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2$
$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi + z^2 = 4Rz - 3R^2$
$\rho^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = R^2$
$\rho^2 + (z - 2R)^2 = R^2$
$z = 2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2}$
$V_1 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \rho \,\mathrm{d}\rho \int\limits_{2\rho}^{2R+\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z$
$\int\limits_0^R (2R + \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho)\rho \,\mathrm{d}\rho = (\frac{2R\rho^2}{2})\Big|0^R - \frac{2\rho^3}{3}\Big|_0^R - \frac{1(R^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^R = \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}R^3 = \frac{2}{3}R^3$
$V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}$
$V_2 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\frac{3}{5}R} \rho \,\mathrm{d}\rho \int\limits_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z$

1. $\int\limits_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z = (z)\Big|_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} = (2R - \sqrt{R^2 - \rho^2}) - (2\rho) = 2R - \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho$
2. ...
3. ...

Далее вычисляем, вычитаем что надо из чего надо, и все должно быть в порядке.

1.2 Криволинейные интегралы

$\int\limits_A^B P(x, y) \,\mathrm{d}x + Q(x, y) \,\mathrm{d}y = \int\limits_{t_A}^{t_B} (P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t) \,\mathrm{d}t$

$$\begin{cases} x = x(t) \;\; \mathrm{d}x = x'_t \,\mathrm{d}t \\ y = y(t) \;\; \mathrm{d}y = y'_t \,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

Если же имеем декартовы координаты, например:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \;\; \mathrm{d}y = y'_x \,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{2}$$

Тогда:
$\int\limits_A^B P(x, y) \,\mathrm{d}x + Q(x, y) \,\mathrm{d}y = \int\limits_{x_A}^{x^B} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x) \,\mathrm{d}x$

1.2.1 №3811

$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy \,\mathrm{d}x + (y - x) \,\mathrm{d}y$
По следующим кривым:

1. $y = x$
   $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy \,\mathrm{d}x + (y - x) \,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (x^2 + (x - x)2x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

2. $y = x^2$

$$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (x * x^2 + (x^2 - x)2x)\,\mathrm{d}x = (\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

1.2.2 №3815

Вычислить $\int \frac{y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ по L:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \ x' = -2\sin t \\ y = 2\sin t \ y' = 2\cos t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \tag{3}$$

$\int \frac{y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\limits_0^\pi \frac{(4\sin^2 t(-2\sin t)) - (4\cos^2 t(2\cos t))}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2\int\limits_0^\pi (1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}(\cos t) - (1 - \sin^2 t)\,\mathrm{d}(\sin t) =$
$2((\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}) - (\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}))\Big|_0^\pi = 2(-1 + \frac{1}{3} - 0 + 0 - (1 - \frac{1}{3} - 0 + 0)) = 2(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = 2(-\frac{4}{3}) = -\frac{8}{3}$

1.2.3 №3812

Вычислить $\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ по L:

1. $\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \end{cases}$

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^2 + x^2)\,\mathrm{d}x = (\frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y' = 2x \end{cases}$

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^3 + 2x^3)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (4x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{4x^4}{4}\Big|_0^1 = 1$$

3. $\begin{cases} y = x^3 \\ y' = 3x^2 \end{cases}$

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^4 + x^2 * (3x^2))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^4 + 3x^4) = (\frac{2x^5}{5} + \frac{3x^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

1.3 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, $P = \frac{\delta u}{\delta x}$, $Q = \frac{\delta u}{\delta y}$
$P = \frac{\delta u}{\delta x}$, $u = \int P\,\mathrm{d}x = F(x,y) + C(y)$
$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta y} = Q$, $C = C(y)$

Пример №1 $\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}x$
$x^2 = \frac{\delta u}{\delta x}$, $y^2 = \frac{\delta u}{\delta y}$
$u = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C(y)$
$\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta x} = y^2$
$C(y) = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + K$
$u = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + K$

1.3.1 №3846

$\mathrm{d}u = (4x^3 - 4y^2x)\,\mathrm{d}x - (4x^2y - 4y^3)\,\mathrm{d}y$
$u = \int(4x^3 - 4y^2x)\,\mathrm{d}x = \frac{4x^4}{4} - \frac{4y^2x^2}{2} = x^4 - 2y^2x^2 + C(y)$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -4yx^2 + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = -4x^2y + 4y^3$
$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 4y^3$
$C(y) = 4y^3\,\mathrm{d}y = \frac{4y^4}{4} = y^4 + K$
Ответ: $u = x^3 - 2y^2x^2 + y^4 + K$

1.3.2 №3847

$\mathrm{d}u = \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y$
Ненужный шаг, мы зря начали это считать: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{2(x+y)^2 - 2(x+2y)(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y-x-2y)}{(x+y)^3} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, проверим другую частную производную: $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{-2y(x+y)}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$. Они совпадают, значит мы можем решать.
$u = \int \frac{x+y+y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+y}{(x+y)^2} + \int \frac{y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} + y\int \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C(y)$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x+y} - \frac{(x+y)-y}{(x+y)^2} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{(x+y)^2}$
$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{x+y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y} = 0$
$C(y) = C$
Ответ: $u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$

1.4 Вычисление криволинейных интегралов от полных дифференциалов

Пример №1 $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$
Возможны несколько вариантов:

1. Восстановить полный дифференциал, после чего вычислить:
   $\int\limits_A^B \mathrm{d}u = u(B) - u(A)$
2. Так как путь интегрирования не имеет значения, можем сами его выбирать. Например:
   $AO : \begin{cases} y = 0 \\ \mathrm{d}y = 0 \end{cases}, AB : \begin{cases} x = 2 \\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$
   $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 2x * 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 4\,\mathrm{d}y = 0 + 4y\Big|_0^1 = 0 + 4 = 4$

1.4.1 №3840

$\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$
Проверим:
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
Пойдем по второму пути:
$AD : \begin{cases} x = 3 \\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$
$DB : \begin{cases} y = 12 \\ \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$
$\int\limits_4^{12} (\frac{y}{9+y^2})\,\mathrm{d}y = (\frac{1}{2}\ln|y^2+9|)\Big|_4^{12} = (\frac{1}{2}\ln|144+9|) - (\frac{1}{2}\ln|16+9|)$

$$\int_3^5 \left(\frac{x}{x^2+144}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\ln|x^2+144|\right)\Big|_3^5 = \left(\frac{1}{2}\ln|25+144|\right) - \left(\frac{1}{2}\ln|9+144|\right)$$

$$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}(\ln|169| - \ln|25|)$$