Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 03.10.2023

1.1 Криволинейные интегралы (II род)

На прошлой паре мы записывали:

$$\int\limits_M^N P(xy)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ (по пути } L) = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t)y'_t)\,\mathrm{d}t, \begin{cases} x = x(t) \;\; \mathrm{d}x = x'\,\mathrm{d}t \\ y = y(t) \;\; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

Но можно иначе:

$$\begin{cases} x = x \;\; \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \\ y = y(x) \;\; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \\ x_1 \le x \le x_2 \end{cases}, \int\limits_{M(x_1,y_1)}^{N(x_2,y_2)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x_1}^{x_2} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'_x)\,\mathrm{d}x \text{ по } L : y = y(x)$$

1.1.1 Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

Если под знаком интеграла находится полный дифференциал какой-то функции, то ответ не будет зависеть от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки.

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}u = u\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = u(x_2,y_2) - u(x_1.y_1)$$

Во всех других случаях криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Полный дифференциал функции двух переменных:

$\mathrm{d}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\,\mathrm{d}y$

При этом:

$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta y})$

Теорема 1 *Если во всех точках области G $P(x,y)$, $Q(x,y)$ частные производные $\frac{\delta P}{\delta y}$, $\frac{\delta Q}{\delta x}$ являются непрерывны, то необходимым и достаточным условием того, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования является выполнение условия $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$ во всех точках области G.*

Теорема 2 *При выполнении $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$ криволиненый интеграл по замкнутому контуру равен нулю:* $\oint(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = 0$

1.1.2 Формула Грина–Остроградского

$\oint\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\int\limits_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\delta P}{\delta y}\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))\,\mathrm{d}x$, где D — замкнутая область, ограниченная контуром C.

Примечание: функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ должны быть определены и непрерывны в области D и, кроме того, иметь в ней непрерывные частные производные $\frac{\delta P}{\delta y}$, $\frac{\delta Q}{\delta x}$.

Следствие из данной формулы Если $P = 0$, $Q = x$, то $\oint x\,\mathrm{d}y = \int\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ — площадь, ограниченная областью.

1.1.3 Примеры

Пример №1 $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ (по прямой $y = x$) $= \int \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\limits_1^2 (\frac{x}{x^2+x^2} + \frac{x}{x^2+x^2})\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{2x^2} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$

Пример №2 $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2x^2y\,\mathrm{d}x + x\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$. Вычислить данный интеграл по:

1. прямой $y = x$;

   $\int\limits_0^1 (2x^2x + x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^3 + x^{3/2})\,\mathrm{d}x = \frac{2x^4}{4/2} + \frac{2x^{5/2}}{5}\Big|_0^1 = \frac{9}{10}$

2. параболе $y = x^2$;

$\int\limits_0^1 (2x^2x^2 + x\sqrt{x^2}2x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^4 + 2x^3)\,\mathrm{d}x = (\frac{2x^5}{5} + \frac{2x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{9}{10}$

3. ломанной линии, образованной $y = x$, $y = x^2$

$\int\limits_0^B + \int\limits_B^A = \int\limits_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Пример №3 Пусть $P = (2x\cos y - y^2\sin x)$, $Q = (2y\cos x - x^2\sin y)$. Проверить независимость от пути интегрирования: $\frac{\delta P}{\delta y} = -2x\sin y - 2y\sin x$, $\frac{\delta Q}{\delta x} = -2y\sin x = -2x\sin y$.
Видим, что **равенство выполняется**.

Пример №4

$$\begin{cases} x = \phi(t) = 2\cos t\ x' = -2\sin t \\ y = \psi(t) = 2\sin t\ y' = 2\cos t \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

$\oint y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} (4\sin^2 t(-2\sin t) + 22\cos t2\sin t2\cos t)\,\mathrm{d}t =$
$8\int\limits_0^{2\pi} \sin t(-\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -8\int\limits_0^{2\pi} (-1 + 3\cos^2 t)\,\mathrm{d}\cos t = 8\int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos^2 t)\,\mathrm{d}\cos t = 8(\cos t - \frac{3\cos^3 t}{3})\Big|_0^{2\pi} = 0$
Мы в самом начале могли проверить:
$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$ — следовательно, интеграл по замкнутому контуру равен нулю, и не считать все то, что мы все же посчитали.

Пример №5

$\oint\limits_D x^2\cos y\,\mathrm{d}x + 3y^3x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{OA} (\dots) + \int\limits_{AB} (\dots) + \int\limits_{BO} (\dots) = \int\limits_0^1 (x^2\cos x + 3x^3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 (x^2\cos(2-x) - 3(2-x)^3x)\,\mathrm{d}x + 0 = \dots.$
Дальнейшее решение оставляется в качестве упражнения читателю.
Но можно было пойти другим путем: посчитать $\frac{\delta Q}{\delta x} = 2x\cos y$, $\frac{\delta P}{\delta y} = 9y^2x$, так что
$\int\int(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{G_1} \mathrm{d}x \int\limits_x^{2-x} (2x\cos y - 9y^2x)\,\mathrm{d}y = 2x\sin y - \frac{9y^3}{3}x\Big|_{y=x}^{2-x} = 2x\sin(2-x) - 3(2-x)^3x - 2x\sin x - 3x^4$ — далее это нужно интегрировать по x.