Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Лекция — 19.09.2023

1.1 Двойные интегралы

1.1.1 Геометрическое приложение двойных интегралов

$V = \int\limits_D\int f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
$z = 4 - x^2 - y^2$
$z = 0$
$x = 0 \ \ x = 1$
$y = 0 \ \ y = 1.5$
Если $z = 0$, то $x^2 + y^2 = 4$. Если $z = 1$, то $x^2 + y^2 = 3$. Если $z = 4$, то имеем точку. Если $z > 4$, то не имеем ничего. Если $z < 4$, то имеем окружности все большего радиуса.
Таким образом, $z = 4 - x^2 - y^2$ — гиперболоид.
$4y - x^2y - \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{1.5} = 4 * 1.5 - x^2 * 1.5 - \frac{27}{8*3}$
$V = \int\limits_{x=0,y=0,x=1,y=1.5}\int (4 - x^2 - y^2)dxdy = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1.5}(4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1(6 - 1.5x^2 - \frac{9}{8})\,\mathrm{d}x = 6x - \frac{1.5x^3}{3} - \frac{9}{8}x\Big|_0^1 = 6 - \frac{1}{2} - \frac{9}{8} = \ldots$

1.2 Тройные интегралы

Имеем в пространстве объем V, ограниченный плоскостью S.
$f(x, y, z)$ — объемная плотность.
$\lim\limits_{diam\Delta u_i \to 0}\sum\limits_{i=0}^{\infty} f(P_i)\Delta v_i = \int\int\limits_V\int f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \int\int\limits_V\int f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ — тройной интеграл, мы можем его разбивать на суммы интегралов.
Если нам нужно перейти к повторным интегралам, то мы делаем так же, как мы делали в случае двойных интегралов:
$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{f(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{z=\phi_1(x,y)}^{z=\phi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$
Кроме того: $V = \int\int\limits_V int\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x \int(\phi_2(x, y) - \phi_1(x, y))\,\mathrm{d}y$ — дальше все то же самое, как с обычным двойным интегралом.
Можно так же, как в плоском случае (двойным интегралом) делать замены переменных, однако все будет гораздо более сложным и замысловатым.

1.2.1 Переход к цилиндрическим координатам

Имеем точку $M(\rho, \phi, z)$, тогда имеем следующее: $\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$

Пусть $x = x(u, t, w)$, $y = y(u, t, w)$, $z = z(u, t, w)$. Тогда $Y = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \end{vmatrix}$. Если $\rho = u$, $\phi = t$, $z = w$, то

$Y = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$ — якобиан перехода (видим, что он точно такой же, как в случае полярных координат).

Пример №1 Вычислить площадь, если $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$ — вертикальный цилиндр, $x + y + 2 - 3 = 0$ — плоскость.
$V = \int\int\limits_V\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \ldots$
Попробуем перейти в цилиндрические координаты и сразу расставить в них пределы.
Вычислим: $z = 3 - x - y = 3 - \rho\cos\phi - \rho\sin\phi$
$\cdots = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{3-\rho\cos\phi-\rho\sin\phi} \mathrm{d}z = \ldots$
$\int\limits_0^1(3\rho - \rho^2(\cos\phi + \sin\phi))\,\mathrm{d}\rho = \frac{3}{2}\rho^2 = (\frac{\rho^3}{3}(\cos\phi + \sin\phi))\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3}(\cos\phi + \sin\phi)$

$\dots = \int\limits_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - \frac{1}{3}(\cos\phi + \sin\phi))\, \mathrm{d}\phi = (\frac{3}{2}\phi - \frac{1}{3}(\sin\phi - \cos\phi))\Big|_0^{2\pi} = \frac{3*2\pi}{2} = 3\pi$

Ответ: 3π

1.2.2 Переход к сферическим координатам

Имеем точку $M(\rho;\phi;\theta)$, ρ — длина радиус-вектора из нуля к точке, ϕ — угол, отсчитываемый от положительного направления вертикальной оси (но может отсчитываться и от других осей — необходимо быть внимательным), θ — угол, отсчитываемый от положительного направления оси Ox. В этом конкретном случае: $\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$

Допустим, имелось следующее уравнение: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Преобразуем его:
$\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2\sin^2\phi * 1 + \rho^2\cos^2\phi$
Получаем: $\rho = 3$ — уравнение сферы в сферических координатах.
Якобиан перех. от декартовых к сферическим координатам:
$Y = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\rho} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi$ — эту фигню бы должны подставлять в интеграл, если выполняем переход.

Пример №1 Перейдя к сферическим координатам, вычислить следующий интеграл, если имеется верхняя часть шара $x^2 + y^2 + z^2 = 9$:

$\int\int\limits_V\int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^3(\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta)(\rho^2\sin\phi)\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi\int\limits_0^3\rho^4\,\mathrm{d}\rho = \frac{3^5}{5}\Big|_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \dots$

$\int\sin^3\phi\,\mathrm{d}\phi = \int(1-\cos^2\phi)(-\mathrm{d}\cos\phi) = \int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\phi - 1)\,\mathrm{d}\cos\phi = (\frac{\cos^3\phi}{3} - \cos\phi)\Big|_0^{\pi/2} = 0 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$\dots = \frac{2*3^4}{5} * \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi*3^4}{5}$

1.2.3 Физические приложения тройных интегралов

Момент инерции $I_z = \int\int\limits_D\int(x^2+y^2)\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $I_x = \int\int\limits_D\int(y^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
$I_y = \int\int\limits_D\int(x^2+z^2)\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где γ — плотность.

Статические моменты относительно плоскостей $M_{xy} = \int\int\limits_V\int z\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $M_{xz} = \int\int\limits_V\int y\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$,
$M_{yz} = \int\int\limits_V\int x\gamma(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, где γ — плотность.

Координаты центра масс Нагуглите в интернете.

1.3 Криволинейные интегралы (II род)

Имеем некоторую кривую от точки M до точки N. Вдоль этой кривой двигается некоторая точка $R(x,y)$ под действием некоторой силы $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(R) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$. Вычислить работу силы $\overrightarrow{F}$ при перемещении точки из M в N.
Разобьем кривую на мелкие кусочки: $\Delta\overrightarrow{S_i} = \overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \Delta x_i\overrightarrow{i} + \Delta y_i\overrightarrow{j}$. На этом кусочке $A_i \approx F_i\Delta S_i = P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i$.
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(P_i\Delta x_i + Q_i\Delta y_i) = \int\limits_M^N P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ — криволинейный интеграл (II род).

1.3.1 Свойства криволинейных интегралов

1. Криволинейный интеграл определяется подинтегральным выражением, формой кривой интегрирования и направлением интегрирования.

2. Если точка L находится между точками M и N, то $\int\limits_M^N = \int\limits_M^L + \int\limits_L^N$ — подобное разбиение возможно для любого конечного количества точек.

1.3.2 Параметрическое задание кривой

$x = \phi(t),\ \mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$
$y = \psi(t), \mathrm{d}y = \psi'(t)\,\mathrm{d}t$
$\int\limits_M^N P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2}[P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t + Q(\phi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,\mathrm{d}t$

1.3.3 Примеры решения задач

Пример №1 $\int\limits_A^B x^2y\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y,$

$\begin{cases} x = 2\cos t, x' = -2\sin t \\ y = 2\sin t, y' = 2\cos t \\ t \in [0; \frac{\pi}{2}] \end{cases}$

$\int\limits_A^B x^2y\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\pi/2} [(2\cos t)^2\sin t + (2\cos t)^2 2\sin t(-2\sin t)]\,\mathrm{d}t = \dots$

$\int\limits_0^{\pi/2} 8\cos^2 t(-\mathrm{d}\cos t) = \frac{-8\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}$

$-4\int\limits_0^{\pi/2} 4\cos^2 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = -4\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_0^{\pi/2}(\cos 4t - 1)\,\mathrm{d}t = 2(\frac{1}{4}\sin 4t - 1)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\pi$

$\dots = \frac{8}{3} - \pi$