Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 17.10.2023

1.1 Дифференциальные уравнения

Определение 1 ***Дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее какие-то производные:*

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x)$$

Диффереуиальное уравнение в частных производных:

$$y' = f(x, t)$$

Определение 2 ***Порядком*** *в дифференциальном уравнении называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.*

Определение 3 ***Решением*** *(интегралом) дифференциального уравнения называется всякая функция, которая будучи подставлена в уравнение обращает его в верное равенство.*

Пример №1 Пусть

$$y'' - y = 0$$

Проверим:

1. $y = x$

   $y' = 1$, $y'' = 0$

   Таким образом, не является решением.

2. $y = \sin x$

   $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$

   Таким образом, не является решением

3. $y = e^x$

   $y' = e^x$, $y'' = e^x$

   Является решением.

Определение 4 ***Общим решением*** *дифференциального уравнения называется функция $y = \phi(x; C)$ ($C = const$), которая*

1. *удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом значении C;*
2. *каково бы не было начальное условие, всегда можно подобрать значение C_0, чтобы оно удовлетворяло указанному начальному условию.*

Пример №1 $y = x^2 + C$
$y(0) = 4$
$y = x^2 + 4$ — Решение задачи Коши, удовлетворяет нач. усл.

Пример №2 Найти уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью OX K равноудалена от нач. координат O и от точки касания $M(x, y)$.
Условие, которое должно быть выполнено: $|OK| = |OM|$
Уравнение касательной:
$Y - y = y'(X - x)$
В т.к $Y = 0$, получаем:
$-y = y'(X - x) \Leftrightarrow x - \frac{y}{y'} = X$. Таким образом, можем теперь задать координанты т. К: $(x - \frac{y}{y'}; 0)$
$|OK| = |x - \frac{y}{y'}|$
$|KM| = \sqrt{(x - (x - \frac{y}{y'}))^2 + (y - 0)^2}$
$|x - \frac{y}{y'}| = \sqrt{(\frac{y}{y'})^2 + y^2}$
$x^2 - \frac{2xy}{y'} + (\frac{y}{y'})^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2$
$-\frac{2xy}{y'} = -y^2 + x^2$
$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ — Дифференциальное уравнение (I порядок)

Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения Общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, а решение задачи Коши представляет собой кривую, проходящую через заданную точку.

1.1.1 Теорема о существовании и единственности решения

Теорема 1 (О существовании и единственности решения) *Пусть в дифференциальном уравнении $y' = F(x, y)$ функция $F(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\delta f}{\delta y}$ непрерывны на открытом множестве G. В этом случае*

1. *Для всякой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (решение задачи Коши).*
2. *Если два решения ($y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$) дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ совпадают хотя бы для одного решения x^*. то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x, для которой они определены.*

1.1.2 Дифференциальный уравнения (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (I порядок) может быть записано:

1. $y' = f(x; y)$
2. $p(x; y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$

Определение 5 ***Уравнением с разделяющимися переменными*** *называют дифференциальное уравнение, в котором функция f может быть разбита на две такие функции, разделенные знаками умножения или деления, что одна из них зависит только от x, а другая зависит только от x.*

$$y' = f_1(x) * f_2(y) \quad \textbf{\textit{(1)}}$$
$$p_1(x) * p_2(y) + q_1(x) * q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \textbf{\textit{(2)}}$$

Разделение переменных:

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) * f_2(y)$
   $\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x$
2. $p_1(x)p_2(y)\,\mathrm{d}x = -q_1(x)q_2(y)\,\mathrm{d}y$
   $\frac{p_1(x)\,\mathrm{d}x}{q_1(x)} = -\frac{q_2(y)\,\mathrm{d}y}{p_2(y)}$

После этого мы можем интегрировать левую и правую часть:

1. $\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x$

2. $\int \frac{p_1(x)\,\mathrm{d}x}{q_1(x)} = -\int \frac{q_2(y)\,\mathrm{d}y}{p_2(y)}$

Получим:

1. $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$

   или

   $\Phi_2(y) - \Phi_1(x) = C$

2. $F_1(x) = F_2(y) + C$

Пример №1 $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y$
Выполним разделение переменных:
$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}$
Интегрируем полученное:
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}$
$\ln|x| = (y^2+1)^{-\frac{1}{2}}(y^2+1)$
$\ln|x| = \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{1/2}}{1/2} + C$
$\ln|x| = (y^2+1)^{1/2} + C$
Ответ: $\ln Cx = \sqrt{y^2+1}$

Замечание о приведении к уравнениям с разделющимися переменными Уравнение вида $y' = f(ax+by+c)$ можно привести заменой $z = ax + by$ или $ax + by + C$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример №2 $(x+2y)y' = 1$
$y' = \frac{1}{x+2y}$
Заменим: $z = x + 2y$
$\frac{z-x}{2} = y$
$\frac{z'-1}{2} = y'$
$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z}$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z' = \frac{2}{z} + 1 = \frac{2+z}{z}$
$\frac{z}{z+2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$
Переменные теперь разделены и их можно проинтегрировать:
$\int \frac{z+2-2}{z+2}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$
$\int (1 - \frac{2}{z+2})\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$
$\int \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = \ln|z+2|$, $\int \mathrm{d}z = 2$
$z - 2\ln|z+2| = x + C$
$x + 2y - 2\ln|x+2y+2| = x + C$
Ответ: $2y - 2\ln|x+2y+2| = C$

1.1.3 Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)

Определение 6 ***Функция*** $f(xy)$ ***называется однородной функцией*** *n-го измерения относительно переменных x и y, если для любой λ справедливо следующее:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x; y)$$

Пример однородной функции второго измерения:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^6}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^6 y^6} = \sqrt[3]{\lambda^6 (x^6 + y^6)} = \lambda^2 \sqrt{x^6 + y^6}$$

Пример функции, не являющейся однородной:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^3 y^3} = \lambda^3 \sqrt{\lambda^3 x^3 + y^6}$$

Определение 7 ***Дифференциальное уравнение (I порядок) называется однородным*** *относительно x и y, если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

Пример однородного дифференциального уравнения:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (I порядок) Необходимо заменить:

$$t = \frac{y}{x}$$

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

Получим:

$$t' * x + t = f(t)$$

$$t' * x = f(t) - t$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} * x = f(t) - t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Переменные разделились и мы интегрируем, не забывая обратно заменить t.

Пример №1 $y' = \frac{x+2y}{x}$
$y' = 1 + 2 * \frac{y}{x}$
Заменим:
$t = \frac{y}{x}$, $y = tx$, $y' = t'x + t$
Получим:
$t'x + t = 1 + 2t$
$t' * x = 1 + t$
$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} * x = 1 + t$
Выполним окончательное разделение:
$\frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
Теперь мы можем интегрировать:
$\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\ln |t + 1| = \ln |x| + \ln C$
$\ln |t + 1| = \ln Cx$
$t + 1 = Cx$
$\frac{y}{x} = Cx - 1$
Ответ: $y = Cx^2 - x$