

Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Практическое занятие — 03.10.2023	2
1.1	Криволинейные интегралы (II род)	2
1.1.1	Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования	2
1.1.2	Формула Грина–Остроградского	2
1.1.3	Примеры	2
2	Практическое занятие — 05.10.2023	3
2.1	Двойные и тройные интегралы	3
2.1.1	№3618	3
2.2	Криволинейные интегралы	4
2.2.1	№3811	4
2.2.2	№3815	4
2.2.3	№3812	5
2.3	Восстановление функции по ее полному дифференциалу	5
2.3.1	№3846	5
2.3.2	№3847	5
2.4	Вычисление криволинейных интегралов от полных дифференциалов	6
2.4.1	№3840	6
3	Практическое занятие — 17.10.2023	6
3.1	Дифференциальные уравнения	6
3.1.1	Теорема о существовании и единственности решения	8
3.1.2	Дифференциальное уравнение (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными	8
3.1.3	Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)	9

1 Практическое занятие — 03.10.2023

1.1 Криволинейные интегралы (II род)

На прошлой паре мы записывали:

$$\int_M^N P(xy) dx + Q(x, y) dy \text{ (по пути } L) = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t dt, \begin{cases} x = x(t) & dx = x' dt \\ y = y(t) & dy = y' dt \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Но можно иначе:

$$\begin{cases} x = x & dx = dx \\ y = y(x) & dy = y' dx \\ x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}, \quad \int_{M(x_1, y_1)}^{N(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x) dx \text{ по } L: y = y(x)$$

1.1.1 Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

Если под знаком интеграла находится полный дифференциал какой-то функции, то ответ не будет зависеть от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки.

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} du = u \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)$$

Во всех других случаях криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Полный дифференциал функции двух переменных:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

При этом:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Теорема 1 Если во всех точках области G $P(x, y)$, $Q(x, y)$ частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ являются непрерывны, то необходимым и достаточным условием того, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования является выполнение условия $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках области G .

Теорема 2 При выполнении $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ криволинейный интеграл по замкнутому контуру равен нулю: $\oint (P dx + Q dy) = 0$

1.1.2 Формула Грина–Остроградского

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx, \text{ где } D \text{ — замкнутая область, ограниченная контуром } C.$$

Примечание: функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ должны быть определены и непрерывны в области D и, кроме того, иметь в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Следствие из данной формулы Если $P = 0$, $Q = x$, то $\oint x dy = \iint_D dx dy$ — площадь, ограниченная областью.

1.1.3 Примеры

Пример №1 $\int_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ (по прямой $y = x$) $= \int \frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} = \int_1^2 \left(\frac{x}{x^2 + x^2} + \frac{x}{x^2 + x^2} \right) dx = \int_1^2 \frac{2x dx}{2x^2} = \ln |x| \Big|_1^2 = \ln 2$

Пример №2 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2x^2 y dx + x \sqrt{y} dy$. Вычислить данный интеграл по:

1. прямой $y = x$;

$$\int_0^1 (2x^2 x + x \sqrt{x}) dx = \int_0^1 (2x^3 + x^{3/2}) dx = \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^{5/2}}{5} \Big|_0^1 = \frac{9}{10}$$

2. параболы $y = x^2$;

$$\int_0^1 (2x^2 x^2 + x \sqrt{x^2} 2x) dx = \int_0^1 (2x^4 + 2x^3) dx = \left(\frac{2x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{9}{10}$$

3. ломанной линии, образованной $y = x$, $y = x^2$

$$\int_0^B + \int_B^A = \int_0^1 \sqrt{y} dy = \frac{2y^{3/2}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Пример №3 Пусть $P = (2x \cos y - y^2 \sin x)$, $Q = (2y \cos x - x^2 \sin y)$. Проверить независимость от пути интегрирования:
 $\frac{\delta P}{\delta y} = -2x \sin y - 2y \sin x$, $\frac{\delta Q}{\delta x} = -2y \sin x = -2x \sin y$.
 Видим, что равенство выполняется.

Пример №4

$$\begin{cases} x = \phi(t) = 2 \cos t & x' = -2 \sin t \\ y = \psi(t) = 2 \sin t & y' = 2 \cos t \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \quad (1)$$

$$\oint y^2 dx + 2xy dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t) dt + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t (-2 \sin t) + 2 \cos t 2 \sin t 2 \cos t) dt =$$

$$8 \int_0^{2\pi} \sin t (-\sin^2 t + 2 \cos^2 t) dt = -8 \int_0^{2\pi} (-1 + 3 \cos^2 t) d \cos t = 8 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos^2 t) d \cos t = 8 \left(\cos t - \frac{3 \cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Мы в самом начале могли проверить:

$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$ — следовательно, интеграл по замкнутому контуру равен нулю, и не считать все то, что мы все же посчитали.

Пример №5

$$\oint_D x^2 \cos y dx + 3y^3 x dy = \int_{OA} (\dots) + \int_{AB} (\dots) + \int_{BO} (\dots) = \int_0^1 (x^2 \cos x + 3x^3) dx + \int_1^0 (x^2 \cos(2-x) - 3(2-x)^3 x) dx + 0 = \dots$$

Дальнейшее решение оставляется в качестве упражнения читателю.

Но можно было пойти другим путем: посчитать $\frac{\delta Q}{\delta x} = 2x \cos y$, $\frac{\delta P}{\delta y} = 9y^2 x$, так что

$$\int \int \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y} \right) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (2x \cos y - 9y^2 x) dy = 2x \sin y - \frac{9y^3}{3} x \Big|_{y=x}^{2-x} = 2x \sin(2-x) - 3(2-x)^3 x - 2x \sin x - 3x^4 - \text{далее}$$

это нужно интегрировать по x .

2 Практическое занятие — 05.10.2023

2.1 Двойные и тройные интегралы

2.1.1 №3618

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$

Конус $z^2 = 4(x^2 + y^2)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = 4R^2 - 3R^2$$

$$x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2$$

$$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi + z^2 = 4Rz - 3R^2$$

$$\rho^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = R^2$$

$$\rho^2 + (z - 2R)^2 = R^2$$

$$z = 2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho d\rho \int_{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{2R+\sqrt{R^2-\rho^2}} dz$$

$$\int_0^R (2R + \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho) \rho d\rho = \left(\frac{2R\rho^2}{2} \right) \Big|_0^R - \frac{2\rho^3}{3} \Big|_0^R - \frac{1(R^2 - \rho^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^R = \frac{1}{3} R^3 + \frac{1}{3} R^3 = \frac{2}{3} R^3$$

$$V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V_2 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{3}{5}R} \rho d\rho \int_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} dz$$

$$1. \quad \int_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} dz = (z) \Big|_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} = (2R - \sqrt{R^2 - \rho^2}) - (2\rho) = 2R - \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho$$

2. ...

3. ...

Далее вычисляем, вычитаем что надо из чего надо, и все должно быть в порядке.

2.2 Криволинейные интегралы

$$\begin{aligned} \int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{t_A}^{t_B} (P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t) dt \\ &\begin{cases} x = x(t) & dx = x'_t dt \\ y = y(t) & dy = y'_t dt \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Если же имеем декартовы координаты, например:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) & dy = y'_x dx \end{cases} \quad (3)$$

Тогда:

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_A}^{x_B} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x) dx$$

2.2.1 №3811

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy dx + (y - x) dy$$

По следующим кривым:

1. $y = x$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy dx + (y - x) dy = \int_0^1 (x^2 + (x - x)2x) dx = \int_0^1 (x^2) dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

2. $y = x^2$

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy dx + (y - x) dy = \int_0^1 (x * x^2 + (x^2 - x)2x) dx = \left. \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

2.2.2 №3815

Вычислить $\int \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ по L :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t & x' = -2 \sin t \\ y = 2 \sin t & y' = 2 \cos t \\ 0 \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^\pi \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2} = \int_0^\pi \frac{(4 \sin^2 t (-2 \sin t)) - (4 \cos^2 t (2 \cos t))}{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = 2 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) d(\cos t) - (1 - \sin^2 t) d(\sin t) =$$

$$2 \left((\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}) - (\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}) \right) \Big|_0^\pi = 2(-1 + \frac{1}{3} - 0 + 0 - (1 - \frac{1}{3} - 0 + 0)) = 2(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = 2(-\frac{4}{3}) = -\frac{8}{3}$$

2.2.3 №3812

Вычислить $\int_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy$ по L :

$$1. \begin{cases} y = x \\ y' = 1 \end{cases}$$

$$\int_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 (2x^2 + x^2) \, dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$2. \begin{cases} y = x^2 \\ y' = 2x \end{cases}$$

$$\int_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 (2x^3 + 2x^3) \, dx = \int_0^1 (4x^3) \, dx = \left(\frac{4x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 1$$

$$3. \begin{cases} y = x^3 \\ y' = 3x^2 \end{cases}$$

$$\int_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^1 (2x^4 + x^2 * (3x^2)) \, dx = \int_0^1 (2x^4 + 3x^4) \, dx = \left(\frac{2x^5}{5} + \frac{3x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$$

2.3 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

$$\begin{aligned} du &= P \, dx + Q \, dy, \quad P = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad Q = \frac{\delta u}{\delta y} \\ P &= \frac{\delta u}{\delta x}, \quad u = \int P \, dx = F(x, y) + C(y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} &= \frac{\delta F}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta y} = Q, \quad C = C(y) \end{aligned}$$

Пример №1 $du = x^2 \, dx + y^2 \, dx$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\delta u}{\delta x}, \quad y^2 = \frac{\delta u}{\delta y} \\ u &= \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C(y) \\ \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta x} &= y^2 \\ C(y) &= \int y^2 \, dy = \frac{y^3}{3} + K \\ u &= \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + K \end{aligned}$$

2.3.1 №3846

$$\begin{aligned} du &= (4x^3 - 4y^2x) \, dx - (4x^2y - 4y^3) \, dy \\ u &= \int (4x^3 - 4y^2x) \, dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{4y^2x^2}{2} = x^4 - 2y^2x^2 + C(y) \\ \frac{du}{dy} &= -4yx^2 + \frac{dC}{dy} = -4x^2y + 4y^3 \\ \frac{dC}{dy} &= 4y^3 \\ C(y) &= 4y^3 \, dy = \frac{4y^4}{4} = y^4 + K \\ \text{Ответ: } u &= x^4 - 2y^2x^2 + y^4 + K \end{aligned}$$

2.3.2 №3847

$$du = \frac{(x+2y) \, dx + y \, dy}{(x+y)^2} = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \, dx + \frac{y}{(x+y)^2} \, dy$$

Ненужный шаг, мы зря начали это считать: $\frac{dP}{dy} = \frac{2(x+y)^2 - 2(x+2y)(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y-x-2y)}{(x+y)^3} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, проверим другую частную производную: $\frac{dQ}{dx} = \frac{-2y(x+y)}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^2}$. Они совпадают, значит мы можем решать.

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{x+y+y}{(x+y)^2} \, dx = \int \frac{x+y}{(x+y)^2} + \int \frac{y}{(x+y)^2} \, dx = \int \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} + y \int \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \ln |x+y| - \frac{y}{x+y} + C(y) \\ \frac{du}{dy} &= \frac{1}{x+y} - \frac{(x+y)-y}{(x+y)^2} + \frac{dC}{dy} = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{dC}{dy} = \frac{y}{(x+y)^2} \\ \frac{dC}{dy} &= \frac{x+y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y} = 0 \end{aligned}$$

$$C(y) = C$$

$$\text{Ответ: } u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$$

2.4 Вычисление криволинейных интегралов от полных дифференциалов

$$\text{Пример №1} \quad \int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy$$

Возможны несколько вариантов:

1. Восстановить полный дифференциал, после чего вычислить:

$$\int_A^B du = u(B) - u(A)$$

2. Так как путь интегрирования не имеет значения, можем сами его выбирать. Например:

$$AO : \begin{cases} y = 0 \\ dy = 0 \end{cases}, AB : \begin{cases} x = 2 \\ dx = 0 \end{cases}$$

$$\int_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int_0^2 2x * 0 \, dx + \int_0^1 4 \, dy = 0 + 4y \Big|_0^1 = 0 + 4 = 4$$

2.4.1 №3840

$$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x \, dx}{x^2+y^2} + \frac{y \, dy}{x^2+y^2}$$

Проверим:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Пойдем по второму пути:

$$AD : \begin{cases} x = 3 \\ dx = 0 \end{cases}$$

$$DB : \begin{cases} y = 12 \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$\int_4^{12} \left(\frac{y}{9+y^2} \right) dy = \left(\frac{1}{2} \ln |y^2 + 9| \right) \Big|_4^{12} = \left(\frac{1}{2} \ln |144 + 9| \right) - \left(\frac{1}{2} \ln |16 + 9| \right)$$

$$\int_3^5 \left(\frac{x}{x^2+144} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \ln |x^2 + 144| \right) \Big|_3^5 = \left(\frac{1}{2} \ln |25 + 144| \right) - \left(\frac{1}{2} \ln |9 + 144| \right)$$

$$\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x \, dx}{x^2+y^2} + \frac{y \, dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} (\ln |169| - \ln |25|)$$

3 Практическое занятие — 17.10.2023

3.1 Дифференциальные уравнения

Определение 1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее какие-то производные:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных:

$$y' = f(x, t)$$

Определение 2 *Порядком* в дифференциальном уравнении называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Определение 3 *Решением* (интегралом) дифференциального уравнения называется всякая функция, которая будучи подставлена в уравнение обращает его в верное равенство.

Пример №1 Пусть

$$y'' - y = 0$$

Проверим:

1. $y = x$

$$y' = 1, y'' = 0$$

Таким образом, не является решением.

2. $y = \sin x$

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x$$

Таким образом, не является решением

3. $y = e^x$

$$y' = e^x, y'' = e^x$$

Является решением.

Определение 4 *Общим решением* дифференциального уравнения называется функция $y = \phi(x; C)$ ($C = \text{const}$), которая

1. удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом значении C ;
2. каково бы не было начальное условие, всегда можно подобрать значение C_0 , чтобы оно удовлетворяло указанному начальному условию.

Пример №1 $y = x^2 + C$

$$y(0) = 4$$

$y = x^2 + 4$ — Решение задачи Коши, удовлетворяет нач. усл.

Пример №2 Найти уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью OX K равноудалена от нач. координат O и от точки касания $M(x, y)$.

Условие, которое должно быть выполнено: $|OK| = |OM|$

Уравнение касательной:

$$Y - y = y'(X - x)$$

В т.к $Y = 0$, получаем:

$$-y = y'(X - x) \Leftrightarrow x - \frac{y}{y'} = X. \text{ Таким образом, можем теперь задать координаты т. К: } (x - \frac{y}{y'}, 0)$$

$$|OK| = |x - \frac{y}{y'}|$$

$$|KM| = \sqrt{(x - (x - \frac{y}{y'}))^2 + (y - 0)^2}$$

$$|x - \frac{y}{y'}| = \sqrt{(\frac{y}{y'})^2 + y^2}$$

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} + (\frac{y}{y'})^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2$$

$$-\frac{2xy}{y'} = -y^2 + x^2$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \text{ — Дифференциальное уравнение (I порядок)}$$

Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения Общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, а решение задачи Коши представляет собой кривую, проходящую через заданную точку.

3.1.1 Теорема о существовании и единственности решения

Теорема 3 (О существовании и единственности решения) Пусть в дифференциальном уравнении $y' = F(x, y)$ функция $F(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\delta F}{\delta y}$ непрерывны на открытом множестве G . В этом случае

1. Для всякой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (решение задачи Коши).
2. Если два решения ($y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$) дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ совпадают хотя бы для одного решения x^* , то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x , для которой они определены.

3.1.2 Дифференциальное уравнение (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (I порядок) может быть записано:

1. $y' = f(x; y)$
2. $p(x; y) dx + q(x, y) dy = 0$

Определение 5 Уравнением с разделяющимися переменными называют дифференциальное уравнение, в котором функция f может быть разбита на две такие функции, разделенные знаками умножения или деления, что одна из них зависит только от x , а другая зависит только от y .

$$y' = f_1(x) * f_2(y) \quad (1)$$

$$p_1(x) * p_2(y) + q_1(x) * q_2(y) dy = 0 \quad (2)$$

Разделение переменных:

1. $\frac{dy}{dx} = f_1(x) * f_2(y)$
 $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$
2. $p_1(x)p_2(y) dx = -q_1(x)q_2(y) dy$
 $\frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} = -\frac{q_2(y) dy}{p_2(y)}$

После этого мы можем интегрировать левую и правую часть:

1. $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$
2. $\int \frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} = -\int \frac{q_2(y) dy}{p_2(y)}$

Получим:

1. $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$
или
 $\Phi_2(y) - \Phi_1(x) = C$
2. $F_1(x) = F_2(y) + C$

Пример №1 $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$

Выполним разделение переменных:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

Интегрируем полученное:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\ln |x| = (y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 1)$$

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \frac{(y^2 + 1)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$\ln |x| = (y^2 + 1)^{1/2} + C$$

Ответ: $\ln Cx = \sqrt{y^2 + 1}$

Замечание о приведении к уравнениям с разделяющимися переменными Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ можно привести заменой $z = ax + by$ или $ax + by + C$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример №2 $(x + 2y)y' = 1$

$$y' = \frac{1}{x+2y}$$

Заменим: $z = x + 2y$

$$\frac{z-x}{2} = y$$

$$\frac{z'-1}{2} = y'$$

$$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{2}{z} + 1 = \frac{2+z}{z}$$

$$\frac{z}{z+2} dz = dx$$

Переменные теперь разделены и их можно проинтегрировать:

$$\int \frac{z+2-2}{z+2} dz = \int dx$$

$$\int (1 - \frac{2}{z+2}) dz = \int dx$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \ln|z+2|, \int dz = 2$$

$$z - 2 \ln|z+2| = x + C$$

$$x + 2y - 2 \ln|x + 2y + 2| = x + C$$

$$\text{Ответ: } 2y - 2 \ln|x + 2y + 2| = C$$

3.1.3 Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)

Определение 6 Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией* n -го измерения относительно переменных x и y , если для любой λ справедливо следующее:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Пример однородной функции второго измерения:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^6}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^6 y^6} = \sqrt[3]{\lambda^6 (x^6 + y^6)} = \lambda^2 \sqrt[3]{x^6 + y^6}$$

Пример функции, не являющейся однородной:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^3 y^3} = \lambda^3 \sqrt[3]{\lambda^3 x^6 + y^6}$$

Определение 7 Дифференциальное уравнение (I порядок) называется *однородным* относительно x и y , если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

Пример однородного дифференциального уравнения:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (I порядок) Необходимо заменить:

$$t = \frac{y}{x}$$

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

Получим:

$$t' * x + t = f(t)$$

$$t' * x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{dx} * x = f(t) - t$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

Переменные разделились и мы интегрируем, не забывая обратно заменить t .

Пример №1 $y' = \frac{x+2y}{x}$

$$y' = 1 + 2 * \frac{y}{x}$$

Заменим:

$$t = \frac{y}{x}, y = tx, y' = t'x + t$$

Получим:

$$t'x + t = 1 + 2t$$

$$t' * x = 1 + t$$

$$\frac{dt}{dx} * x = 1 + t$$

Выполним окончательное разделение:

$$\frac{dt}{t+1} = \frac{dx}{x}$$

Теперь мы можем интегрировать:

$$\int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |t+1| = \ln |x| + \ln C$$

$$\ln |t+1| = \ln Cx$$

$$t+1 = Cx$$

$$\frac{y}{x} = Cx - 1$$

$$\text{Ответ: } y = Cx^2 - x$$