

Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Лекция — 17.10.2023	2
1.1	Дифференциальные уравнения	2
1.1.1	Теорема о существовании и единственности решения	3
1.1.2	Дифференциальное уравнение (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными	3
1.1.3	Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)	4

1 Лекция — 17.10.2023

1.1 Дифференциальные уравнения

Определение 1 *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x , искомую функцию y и ее какие-то производные:

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных:

$$y' = f(x, t)$$

Определение 2 *Порядком* в дифференциальном уравнении называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Определение 3 *Решением* (интегралом) дифференциального уравнения называется всякая функция, которая будучи подставлена в уравнение обращает его в верное равенство.

Пример №1 Пусть

$$y'' - y = 0$$

Проверим:

1. $y = x$

$$y' = 1, y'' = 0$$

Таким образом, не является решением.

2. $y = \sin x$

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x$$

Таким образом, не является решением

3. $y = e^x$

$$y' = e^x, y'' = e^x$$

Является решением.

Определение 4 *Общим решением* дифференциального уравнения называется функция $y = \phi(x; C)$ ($C = \text{const}$), которая

1. удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом значении C ;

2. каково бы не было начальное условие, всегда можно подобрать значение C_0 , чтобы оно удовлетворяло указанному начальному условию.

Пример №1 $y = x^2 + C$

$$y(0) = 4$$

$y = x^2 + 4$ — Решение задачи Коши, удовлетворяет нач. усл.

Пример №2 Найти уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью OX K равноудалена от нач. координат O и от точки касания $M(x, y)$.

Условие, которое должно быть выполнено: $|OK| = |OM|$

Уравнение касательной:

$$Y - y = y'(X - x)$$

В т.к $Y = 0$, получаем:

$$-y = y'(X - x) \Leftrightarrow x - \frac{y}{y'} = X. \text{ Таким образом, можем теперь задать координаты т. К: } (x - \frac{y}{y'}; 0)$$

$$|OK| = |x - \frac{y}{y'}|$$

$$|KM| = \sqrt{(x - (x - \frac{y}{y'}))^2 + (y - 0)^2}$$

$$|x - \frac{y}{y'}| = \sqrt{(\frac{y}{y'})^2 + y^2}$$

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} + (\frac{y}{y'})^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2$$

$$-\frac{2xy}{y'} = -y^2 + x^2$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} - \text{Дифференциальное уравнение (I порядок)}$$

Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения Общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, а решение задачи Коши представляет собой кривую, проходящую через заданную точку.

1.1.1 Теорема о существовании и единственности решения

Теорема 1 (О существовании и единственности решения) Пусть в дифференциальном уравнении $y' = F(x, y)$ функция $F(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\delta F}{\delta y}$ непрерывны на открытом множестве G . В этом случае

1. Для всякой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (решение задачи Коши).
2. Если два решения $(y = y_1(x), y = y_2(x))$ дифференциального уравнения $y' = F(x, y)$ совпадают хотя бы для одного решения x^* . то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x , для которой они определены.

1.1.2 Дифференциальное уравнения (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (I порядок) может быть записано:

$$1. y' = f(x; y)$$

$$2. p(x; y) dx + q(x, y) dy = 0$$

Определение 5 Уравнением с разделяющимися переменными называют дифференциальное уравнение, в котором функция f может быть разбита на две такие функции, разделенные знаками умножения или деления, что одна из них зависит только от x , а другая зависит только от y .

$$y' = f_1(x) * f_2(y) \quad (1)$$

$$p_1(x) * p_2(y) + q_1(x) * q_2(y) dy = 0 \quad (2)$$

Разделение переменных:

$$1. \frac{dy}{dx} = f_1(x) * f_2(y)$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx$$

$$2. p_1(x)p_2(y) dx = -q_1(x)q_2(y) dy$$

$$\frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} = -\frac{q_2(y) dy}{p_2(y)}$$

После этого мы можем интегрировать левую и правую часть:

$$1. \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$$

$$2. \int \frac{p_1(x) dx}{q_1(x)} = - \int \frac{q_2(y) dy}{p_2(y)}$$

Получим:

$$1. \Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$$

или

$$\Phi_2(y) - \Phi_1(x) = C$$

$$2. F_1(x) = F_2(y) + C$$

Пример №1 $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$

Выполним разделение переменных:

$$\frac{dx}{x} = \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

Интегрируем полученное:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\ln |x| = (y^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (y^2 + 1)$$

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \frac{(y^2 + 1)^{1/2}}{1/2} + C$$

$$\ln |x| = (y^2 + 1)^{1/2} + C$$

Ответ: $\ln Cx = \sqrt{y^2 + 1}$

Замечание о приведении к уравнениям с разделяющимися переменными Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ можно привести заменой $z = ax + by$ или $ax + by + C$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример №2 $(x + 2y)y' = 1$

$$y' = \frac{1}{x+2y}$$

Заменим: $z = x + 2y$

$$\frac{z-x}{2} = y$$

$$\frac{z'-1}{2} = y'$$

$$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = z' = \frac{2}{z} + 1 = \frac{2+z}{z}$$

$$\frac{z}{z+2} dz = dx$$

Переменные теперь разделены и их можно проинтегрировать:

$$\int \frac{z+2-2}{z+2} dz = \int dx$$

$$\int (1 - \frac{2}{z+2}) dz = \int dx$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \ln |z + 2|, \int dz = 2$$

$$z - 2 \ln |z + 2| = x + C$$

$$x + 2y - 2 \ln |x + 2y + 2| = x + C$$

Ответ: $2y - 2 \ln |x + 2y + 2| = C$

1.1.3 Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)

Определение 6 Функция $f(xy)$ называется **однородной функцией** n -го измерения относительно переменных x и y , если для любой λ справедливо следующее:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Пример однородной функции второго измерения:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^6}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^6 y^6} = \sqrt[3]{\lambda^6 (x^6 + y^6)} = \lambda^2 \sqrt{x^6 + y^6}$$

Пример функции, не являющейся однородной:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^3 y^3} = \lambda^3 \sqrt{\lambda^3 x^3 + y^3}$$

Определение 7 Дифференциальное уравнение (I порядок) называется однородным относительно x и y , если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

Пример однородного дифференциального уравнения:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (I порядок) Необходимо заменить:

$$t = \frac{y}{x}$$

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

Получим:

$$t' * x + t = f(t)$$

$$t' * x = f(t) - t$$

$$\frac{dt}{dx} * x = f(t) - t$$

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \int \frac{dx}{x}$$

Переменные разделились и мы интегрируем, не забывая обратно заменить t .

Пример №1 $y' = \frac{x+2y}{x}$

$$y' = 1 + 2 * \frac{y}{x}$$

Заменим:

$$t = \frac{y}{x}, y = tx, y' = t'x + t$$

Получим:

$$t'x + t = 1 + 2t$$

$$t' * x = 1 + t$$

$$\frac{dt}{dx} * x = 1 + t$$

Выполним окончательное разделение:

$$\frac{dt}{t+1} = \frac{dx}{x}$$

Теперь мы можем интегрировать:

$$\int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |t+1| = \ln |x| + \ln C$$

$$\ln |t+1| = \ln Cx$$

$$t+1 = Cx$$

$$\frac{y}{x} = Cx - 1$$

Ответ: $y = Cx^2 - x$