Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

November 2023

Содержание

1 Лекция — 14.11.2023

1.1 Линейное уравнение и уравнение Бернулли

Вид линейного уравнения:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Вид уравнения Бернулли:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

Примеры Допустим, имеем

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x\cos y + \sin 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + (\cos y)x = \sin 2y$$

Получившееся уравнение мы можем решать уже знакомыми способами.

$$x = uv,\ x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv\cos y = \sin 2y$$

1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -v\cos y$
   $\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\cos y\,\mathrm{d}y$
   $\ln v = -\sin y$
   $v = e^{-\sin y}$
2. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}e^{-\sin y} = \sin 2y$
   $\int \mathrm{d}u = \int e^{\sin y}\sin 2y\,\mathrm{d}y$
   $u = 2\int e^{\sin y}\cos y\,\mathrm{d}y = 2\int e^{\sin y}\sin y\,\mathrm{d}(\sin y) = 2\int te^t\,\mathrm{d}t = \left|u = t \quad \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \quad v = e^t\right| = 2(te^t - e^t) + C$
   $x = uv = 2(\sin ye^{\sin y} - e^{\sin y} + C)e^{\sin y} = 2\sin y - 2 + Ce^{-\sin y}$

1.2 Уравнения в полных дифференциалах

Пусть $u = u(x,y)$, ее полный дифференциал: $\mathrm{d}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\,\mathrm{d}y$
Если $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, $\frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\mathrm{d}y = 0$, то $\mathrm{d}u = 0 \implies u = C$
$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta y})$
Если $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах
Если мы уверены, что уравнение — уравнение в полных дифференциалах, то мы можем сделать так:
$\mathrm{d}u = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$
$u = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x;y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0;y)\,\mathrm{d}y + C$
x_0, y_0 — координаты некоторой точки, которая находится в области определения функций P и Q, частные производные которых в этой точке также непрерывны.

Примеры

Пример №1

$$(2xy + y^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2 + y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 6x$$

Не является уравнением в полных дифференциалах.

Пример №2

$$(2x + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + y^3)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2y$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$$

Является уравнением в полных дифференциалах.

1. $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x + y^2$
   $u = \int (2x + y^2)\,\mathrm{d}x = x^2 + y^2 x + C(y)$
2. $\frac{\delta u}{\delta y} = 2xy + \frac{\delta C(y)}{\mathrm{d}y} = Q = 2xy + y^3$
   $\frac{\delta C}{\delta y} = y^3$
   $\int \mathrm{d}C = \int y^3\,\mathrm{d}y$
   $C(y) = \frac{y^4}{4} + K$
3. $u = x^2 + y^2 x + \frac{y^4}{4} + K$

В итоге мы восстановили функцию по ее полному дифференциалу.
Ответ: $x^2 + y^2 x + \frac{y^4}{4} = Const$
Попробуем восстановить ее другим образом:
$\int\limits_0^x 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^y (2xy + y^3)\,\mathrm{d}y = \frac{2x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x} + \frac{2xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y} + \frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=y}$
$u = x^2 + xy^2 + \frac{y^4}{4} + C$
В итоге получили то же самое.

Пример №3

$$3y\sin x\,\mathrm{d}x - \cos x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 3\sin x$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \sin x$$

Не является уравнением в полных дифференциалах.

1.2.1 Метод интегрирующего множителя

Может оказаться, что левая часть уравнения $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ не является полным дифференциалом, то есть, $\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$. Можно подобрать функцию $\mu(x,y)$ такую, что если мы умножим все это уравнение на μ, то оно окажется полным дифференциалом. Решение полученного уравнения будет совпадать с общим решением исходного.

$$\mu M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Так как мы хотим, чтобы полученное уравнение оказалось уравнением в полных дифференциалах, мы накладываем требования:

$$\frac{\delta}{\delta x}(\mu N) = \frac{\delta}{\delta y}(\mu M)$$

$$\mu\frac{\delta N}{\delta x} + N\frac{\delta \mu}{\delta x} = \mu\frac{\delta M}{\delta y} + M\frac{\delta \mu}{\delta y}$$

$$\mu(\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}) = M\frac{\delta M}{\delta y} - N\frac{\delta M}{\delta x}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = M * \frac{1}{\mu}\frac{\delta \mu}{\delta y} - N * \frac{1}{\mu}\frac{\delta \mu}{\delta x}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = M\frac{\delta(\ln \mu)}{\delta y} - N\frac{\delta(\ln \mu)}{\delta x}$$

Если μ не зависит от x, $\mu = \mu(y)$, то мы можем написать:

$$\frac{\delta(\ln \mu)}{\delta y} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M}$$

Если μ не зависит от y, $\mu = \mu(x)$, то мы можем написать:

$$\frac{\delta(\ln \mu)}{\delta x} = \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}$$

Примеры

Пример №1

$$(y + xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$M = (y + xy^2),\ N = -x$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2xy + 1,\ \frac{\delta N}{\delta x} = -1$$

Можем записать:

$$\frac{\delta(\ln \mu)}{\delta y} = \frac{-1 - 2xy - 1}{y(1+xy)} = \frac{-2(xy+1)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

$$\int \mathrm{d}\ln \mu = -\int \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\ln \mu = -2\ln y = \ln\frac{1}{y^2}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

Умножаем наше выражение на μ:

$$\frac{y+xy^2}{y^2}\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$(\frac{1}{y}+x)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\delta Q}{\delta x} = -\frac{1}{y^2}$$

Можем попытаться восстановить функцию:
$u = \int\limits_0^x (\frac{1}{y}+x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^y (0)\,\mathrm{d}y = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^x + C$
Мы восстановили функцию, мы молодцы.
Ответ: $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = Const$
Попробуем пойти иначе:

$$(y+xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$(y+xy^2)\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x} = y^2$$

Получили уравнение Бернулли. Решаем дальше:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = u^2v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$v = x$$

Возвращаемся в уравнение:

$$u' * v = u^2v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int x\,\mathrm{d}x$$

$$C - \frac{1}{u} = \frac{x^2}{2}$$

$$u = \frac{1}{C - \frac{x^2}{2}}$$

$$y = \frac{x}{C - \frac{x^2}{2}} \iff \frac{x}{y} = C - \frac{x^2}{2} \iff \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$$

Получили тот же самый ответ.

Пример №2

$$\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 - \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$M = \frac{y}{x},\ N = y^3 - \ln x$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{1}{x},\ \frac{\delta N}{\delta x} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{\frac{y}{x}} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$$

μ — не зависит от x

$$\int \mathrm{d}(\ln\mu) = -\int \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\ln\mu = -2\ln y$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

Умножим все уравнение на μ:

$$\frac{1}{y^2}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (\frac{y^3}{y^2} + \frac{\ln x}{y^2})\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{1}{xy}\mathrm{d}x + (y - \frac{\ln x}{y^2})\,\mathrm{d}y = 0$$

$$u = \int\limits_1^x \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^y (y)\,\mathrm{d}x + C$$

$$u = \frac{1}{y}\ln x\Big|_{x=1}^{x} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y} + C$$

Ответ: $\frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} = Const$

1.2.2 Финты ушами

Допустим, имеем:

$$y = x * \Phi(y') + \Psi(y')$$

$$y' = P$$

$$y = x\Phi(p) + \Psi(p)$$

$$y' = P = 1 * \Phi(p) + x\Phi'(P) * P' + \Psi'(P)P'$$

$$p - \Phi(p) = (x * \Phi'(p) + \Psi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

С этим уравнением мы теперь можем работать.

1.3 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общий вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

1. $y^{(n)} = f(x)$
   $y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$
   $y^{(n-2)} = \int F_1(x)\,\mathrm{d}x + C_1x + C$

Например, $y''' = x^2 + 5\sin x$

1. $y'' = \frac{x^3}{3} - 5\cos x + C_1$
2. $y' = \frac{x^4}{12} - 5\sin x + C_1x + C$
3. $y = \frac{x^5}{60} + 5\cos x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$

И задано:

1. $y(0) = 2$
2. $y'(0) = 1$
3. $y''(0) = 0$

Можем вычислить:

1. $y''(0) = \frac{0}{3} - 5 + C_1 = 0$, $C_1 = 5$
2. $y'(0) = C_2 = 1$
3. $y(0) = 5 + C_3 = 2 + C_3 = -3$

Ответ: $y = \frac{x^5}{60} + 5\cos x + \frac{5}{2}x^2 + x - 3$