

Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

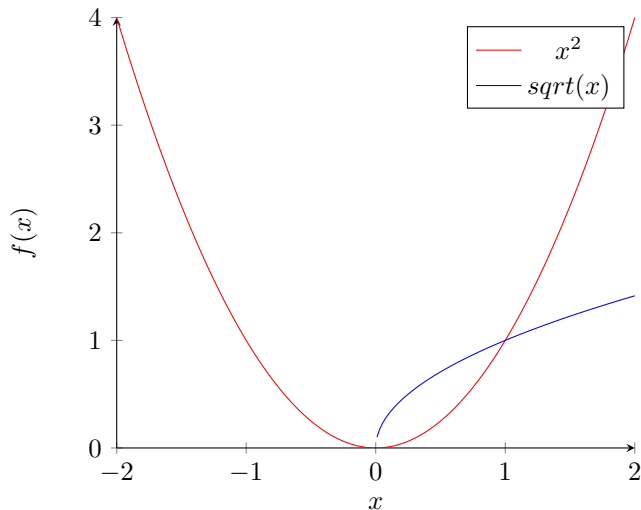
1	Домашнее задание — 07.09.2023	2
1.1	№ 3492	2
1.2	№ 3493	2
1.3	№ 3494	3
1.4	№ 3506	3
1.5	№ 3508	3

1 Домашнее задание — 07.09.2023

1.1 № 3492

Найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D : D ограничена параболой $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

График:



Решение:

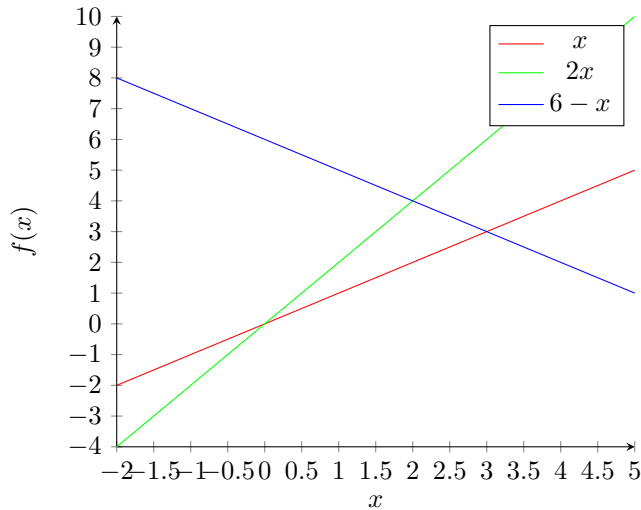
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(x, y) dx$$

1.2 № 3493

Найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D : треугольник со сторонами $y = x$, $y = 2x$ и $x + y = 6$

График:



Решение:

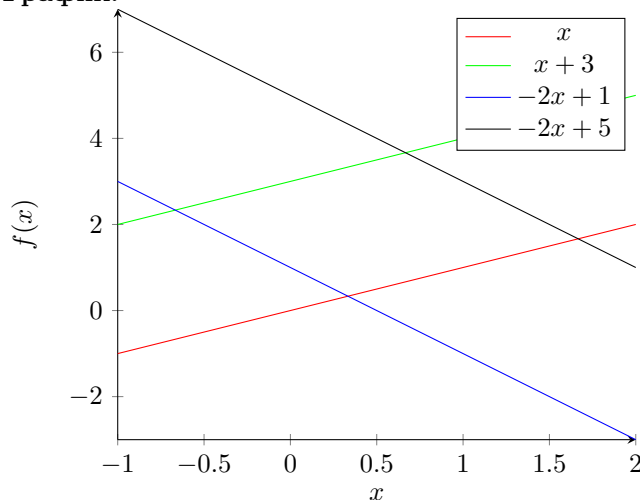
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{6-x}^{2x} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 dy \int_0^x f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_{1.5}^{6-x} f(x, y) dx$$

1.3 № 3494

Найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных) областях интегрирования D :
параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$

График:



Решение:

Найдем точку пересечения второй и третьей линий: $x + 3 = -2x + 1 \iff 3x = -2 \iff x = -\frac{2}{3}, y = \frac{7}{3}$

Найдем точку пересечения первой и третьей линий: $x = -2x + 1 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$

Найдем точку пересечения второй и четвертой линий: $x + 3 = -2x + 5 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}, y = \frac{11}{3}$

Найдем точку пересечения первой и четвертой линий: $x = -2x + 5 \iff 3x = 5 \iff x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{3}$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} dx \int_{-2x+1}^{x+3} f(x, y) dy + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} dx \int_x^{-2x+5} f(x, y) dy$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}} dy \int_{-2x+1}^x f(x, y) dx + \int_{\frac{7}{3}}^{\frac{11}{3}} dy \int_{-2x+1}^{-2x+5} f(x, y) dx + \int_{\frac{11}{3}}^{\frac{13}{3}} dy \int_{x+3}^{-2x+5} f(x, y) dx$$

1.4 № 3506

Вычислить данные интегралы:

$$1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy = \int_0^a (\sqrt{x} - 0) dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^a = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$2. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{2x} \right) dx = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} * \frac{3x^2}{2} \right) dx = \int_2^4 \frac{3x^2}{2x} dx = \left(\frac{3x^2}{4} \right) \Big|_2^4 = \frac{3*16}{4} - \frac{3*4}{4} = 12 - 3 = 9$$

$$3. \int_1^2 dy \int_0^{\ln x} e^x dx = \int_1^2 \left(e^x \right) \Big|_0^{\ln x} dy = \int_1^2 (e^{\ln x} - 1) dy = \int_1^2 (x - 1) dy = (xy - y) \Big|_1^2 = (2x - 2) - (x - 1) = x - 1$$

1.5 № 3508

Вычислить данный интеграл: $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, где D — область, ограниченная параболой $y = x^2$ и $y^2 = x$

Решение:

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy = \int_0^1 \left((x^2 y + \frac{y^2}{2}) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^1 \left((x^{2.5} + \frac{x}{2}) - (x^4 + \frac{x^4}{2}) \right) dx = \int_0^1 (x^{2.5} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4) dx = \int_0^1 (x^{5/2}) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (x) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 (x^4) dx = 0.435714$$