Лекция — 05.09.2023

Двойные интегралы

$z = f(x, y)$

$V = \lim\limits_{diamS_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_{i)} \Delta S_i$

Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D и существует предел последовательности интегральных сумм, который не зависит от способа разбиения области на ΔS_i и от выбора точек P_i при условии, что диаметр ΔS_i стремится к нулю, то этот предел мы и будем называть двойным интегралом функции $f(x, y)$ по области D

$V = \int\int f(x, y)dxdy$ = $\lim\limits_{diamS_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_{i)} \Delta S_i$

Свойства интегралов

1. $\int\int\limits_{D} (f_1 + f_{2)} dxdy = \int\int\limits_{D} f_1 dxdy + \int\int\limits_{D} f_2 dxdy$
2. $\int\int\limits_{D} \alpha f(x, y) dxdy = \alpha \int\int\limits_{D} f(x, y) dxdy$
3. $D = D_1 + D_2 + \cdots + D_n$ (конечное число областей),
   $\int\int\limits_{D} = \int\int\limits_{D_1} + \int\int\limits_{D_2} + \cdots + \int\int\limits_{D_n}$

Вычисление двойного интеграла, переход к повторными интегралам

Пусть $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ — некоторые кривые, ограничивающие область.
Ее двойной интеграл:

$\int\int\limits_{D} f(x, y)dxdy = \int\limits_{a}^{b} (\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)dy$

Примеры

Пример №1

$y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$

$\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$

Пример №2

$x^2 + y^2 = 4$, $-2 \leq x \leq 2$

$\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

Пример №3

$x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq x \leq 2$

$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dx$

Пример №4

$y = x + 2$, $-2 \leq x \leq 0$; $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

$\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{x+2} f(x,y)dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

Пример №5

$y = 4 - x^2$, $0 \leq x\ 2$

$\int\limits_0^2 dx + \int\limits_0^{4-x^2} fdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$ (сменили порядок интегрирования)

Пример №6

$\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x}dy = \int\limits_2^4 \frac{3}{2}xdx = \frac{3}{2} * \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{3}{4}(16-4) = 9$

$\frac{1}{x}\frac{y^2}{x}\Bigg|^{y=2x} = \frac{4x^2-x^2}{2x} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}x$

Пример №7

$$y = x, y = 2 - x$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$$

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{y} f(x,y)dx$$

Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты

Каждая точка в декартовой системе координат характеризуется xи y. С другой стороны, если мы направим полярную ось, то эта же точка может характеризоваться ρ — длина радиус-вектора, ϕ — угол поворота относительно положительного направления оси OX

$x = \rho\cos\phi$
$y = \rho\sin\phi$

Иногда двойной интеграл удобно вычислять не в декартовых координатах, а каких-нибудь других: может, в этих новых координатах может быть что-нибудь более удобно записано, например, $\rho = 2$ симпатичней, нежели $x^2 + y^2 = 4$.

$\int\int f(x,y)dxdy = \int\int f(x(u;v), y(u;v))|J|dxdy$

Якобиан перехода к полярным координатам:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{pmatrix} = \rho$$

Примеры

Пример №1

$$S: \begin{cases} x^2 + y^2 - 6y = 0 \\ y = x \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$$

$$\rho^2 \cos^2 + \rho^2 \sin^2 \phi = 6\rho \sin \phi \iff \rho = 6 \sin \phi$$

$$S = \int\int dxdy = \int\int \rho d\rho d\phi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\phi \int\limits_{0}^{6\sin\phi} \rho d\rho = 6 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 2\sin^2 \phi d\phi = 9 \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= 9(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}) = 9(\frac{\pi}{12}$$

Геометрические приложения двойного интеграла

1. $S = \int\int\limits_S dx\, dy$
2. $V = \int\int\limits_D (f_1(x, y) - f_2(x, y))dx\, dy$

Тройные интегралы

$$\int\int\limits_V\int f(x, y, z)dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int\limits_{\xi_1(x,y)}^{\xi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

Примеры

Пример №1

$z = x^2 + y^2$
$z = 2(x^2 + y^2)$

$y = x^2$, $y = x$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} f(x,y,z)\, dz$$