# Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

September 2023

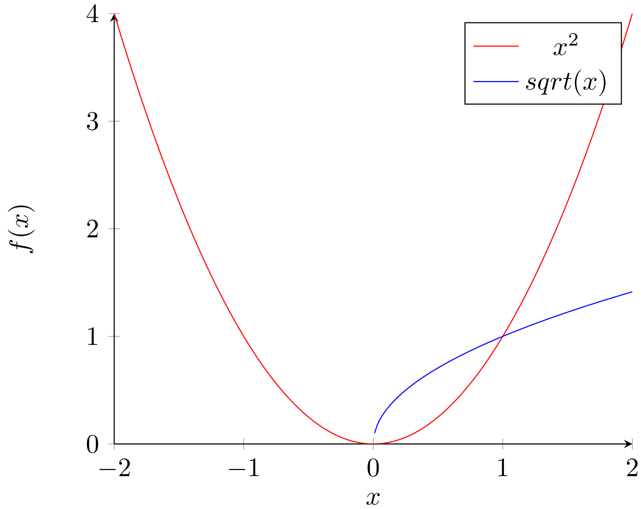
## Содержание

# 1 Домашнее задание — 07.09.2023

## 1.1 № 3492

Найти пределы двукратного интеграла $\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ при данных (конечных) областях интегрирования $D$: $D$ ограничена параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

**График**:




**Решение**:

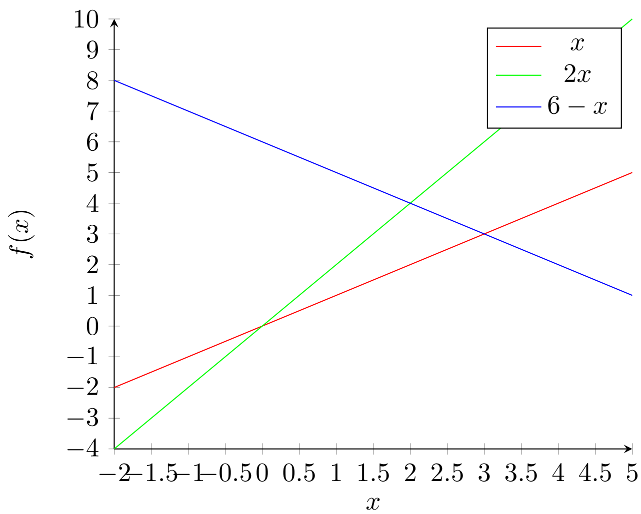
$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

## 1.2 № 3493

Найти пределы двукратного интеграла $\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ при данных (конечных) областях интегрирования $D$: треугольник со сторонами $y = x$, $y = 2x$ и $x + y = 6$

**График**:




**Решение**:

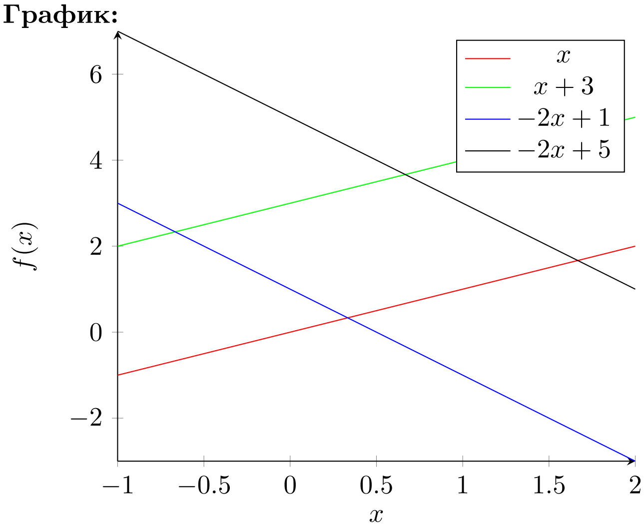
$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_2^3 \mathrm{d}x \int\limits_2^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \mathrm{d}y \int\limits_0^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \mathrm{d}y \int\limits_{1.5}^{6-x} f(x,y)\,\mathrm{d}x$

## 1.3 № 3494

Найти пределы двукратного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ при данных (конечных) областях интегрирования $D$: параллелограмм со сторонами $y=x$, $y=x+3$, $y=-2x+1$, $y=-2x+5$

**График:**




**Решение:**

Найдем точку пересечения второй и третьей линий: $x+3=-2x+1 \iff 3x=-2 \iff x=-\frac{2}{3}, y=\frac{7}{3}$

Найдем точку пересечения первой и третьей линий: $x=-2x+1 \iff 3x=1 \iff x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}$

Найдем точку пересечения второй и четвертой линий: $x+3=-2x+5 \iff 3x=2 \iff x=\frac{2}{3}, y=\frac{11}{3}$

Найдем точку пересечения первой и четвертой линий: $x=-2x+5 \iff 3x=5 \iff x=\frac{5}{3}, y=\frac{5}{3}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x\int\limits_{-2x+1}^{x+3} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x\int\limits_{x}^{x+3} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}x\int\limits_{x}^{-2x+5} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\mathrm{d}y\int\limits_{-2x+1}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{5}{3}}^{\frac{7}{3}}\mathrm{d}y\int\limits_{-2x+1}^{-2x+5} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{7}{3}}^{\frac{11}{3}}\mathrm{d}y\int\limits_{x+3}^{-2x+5} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

## 1.4 № 3506

Вычислить данные интегралы:

1. $\int\limits_0^a \mathrm{d}x\int\limits_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y = \int\limits_0^a(\sqrt{x}-0)\,\mathrm{d}x = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^a = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3}$
2. $\int\limits_2^4 \mathrm{d}x\int\limits_x^{2x}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y = \int\limits_2^4(\frac{1}{x}(\frac{y^2}{2})\Big|_x^{2x})\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^4(\frac{1}{x}*\frac{3x^2}{2})\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^4\frac{3x^2}{2x}\,\mathrm{d}x = (\frac{3x^2}{4})\Big|_2^4 = \frac{3*16}{4}-\frac{3*4}{4} = 12-3 = 9$
3. $\int\limits_1^2 \mathrm{d}y\int\limits_0^{\ln x} e^x\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2((e^x)\Big|_0^{\ln x})\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2(e^{\ln x}-1)\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2(x-1)\,\mathrm{d}y = (xy-y)\Big|_1^2 = (2x-2)-(x-1) = x-1$

## 1.5 № 3508

Вычислить данный интеграл: $\iint\limits_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где $D$ — область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $y^2=x$

**Решение:**

$$\iint\limits_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1((x^2y+\frac{y^2}{2})\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1((x^{2.5}+\frac{x}{2})-(x^4+\frac{x^4}{2}))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1(x^{2.5}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^4)\,\mathrm{d}x =$$
$$\int\limits_0^1(x^{5/2})\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_0^1(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1(x^4)\,\mathrm{d}x = 0.435714$$