Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 03.10.2023

1.1 Криволинейные интегралы (II род)

На прошлой паре мы записывали:

$$\int\limits_M^N P(xy)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \text{ (по пути } L) = \int\limits_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t)y'_t)\,\mathrm{d}t, \begin{cases} x = x(t) \;\; \mathrm{d}x = x'\,\mathrm{d}t \\ y = y(t) \;\; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}t \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases}$$

Но можно иначе:

$$\begin{cases} x = x \;\; \mathrm{d}x = \mathrm{d}x \\ y = y(x) \;\; \mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x \\ x_1 \le x \le x_2 \end{cases}, \int\limits_{M(x_1,y_1)}^{N(x_2,y_2)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x_1}^{x_2} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'_x)\,\mathrm{d}x \text{ по } L : y = y(x)$$

1.1.1 Условие независимости криволинейных интегралов от пути интегрирования

Если под знаком интеграла находится полный дифференциал какой-то функции, то ответ не будет зависеть от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки.

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}u = u\Big|_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} = u(x_2,y_2) - u(x_1.y_1)$$

Во всех других случаях криволинейный интеграл зависит от пути интегрирования.

Полный дифференциал функции двух переменных:

$\mathrm{d}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\,\mathrm{d}y$

При этом:

$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta y})$

Теорема 1 *Если во всех точках области G $P(x,y)$, $Q(x,y)$ частные производные $\frac{\delta P}{\delta y}$, $\frac{\delta Q}{\delta x}$ являются непрерывны, то необходимым и достаточным условием того, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования является выполнение условия $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$ во всех точках области G.*

Теорема 2 *При выполнении $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$ криволиненый интеграл по замкнутому контуру равен нулю:* $\oint(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = 0$

1.1.2 Формула Грина–Остроградского

$\oint\limits_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\int\limits_D (\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\delta P}{\delta y}\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))\,\mathrm{d}x$, где D — замкнутая область, ограниченная контуром C.

Примечание: функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ должны быть определены и непрерывны в области D и, кроме того, иметь в ней непрерывные частные производные $\frac{\delta P}{\delta y}$, $\frac{\delta Q}{\delta x}$.

Следствие из данной формулы Если $P = 0$, $Q = x$, то $\oint x\,\mathrm{d}y = \int\int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ — площадь, ограниченная областью.

1.1.3 Примеры

Пример №1 $\int\limits_{(1,1)}^{(2,2)} \frac{y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ (по прямой $y = x$) $= \int \frac{y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\limits_1^2 (\frac{x}{x^2+x^2} + \frac{x}{x^2+x^2})\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{2x^2} = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2$

Пример №2 $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2x^2y\,\mathrm{d}x + x\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$. Вычислить данный интеграл по:

1. прямой $y = x$;

   $\int\limits_0^1 (2x^2x + x\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^3 + x^{3/2})\,\mathrm{d}x = \frac{2x^4}{4/2} + \frac{2x^{5/2}}{5}\Big|_0^1 = \frac{9}{10}$

2. параболе $y = x^2$;
$\int\limits_0^1 (2x^2x^2 + x\sqrt{x^2}2x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^4 + 2x^3)\,\mathrm{d}x = (\frac{2x^5}{5} + \frac{2x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{9}{10}$

3. ломанной линии, образованной $y = x$, $y = x^2$
$\int\limits_0^B + \int\limits_B^A = \int\limits_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Пример №3 Пусть $P = (2x\cos y - y^2 \sin x)$, $Q = (2y\cos x - x^2 \sin y)$. Проверить независимость от пути интегрирования: $\frac{\delta P}{\delta y} = -2x\sin y - 2y\sin x$, $\frac{\delta Q}{\delta x} = -2y\sin x = -2x\sin y$.
Видим, что **равенство выполняется**.

Пример №4

$$\begin{cases} x = \phi(t) = 2\cos t \;\; x' = -2\sin t \\ y = \psi(t) = 2\sin t \;\; y' = 2\cos t \\ t \in [0; 2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

$\oint y^2\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t + Q(x(t), y(t))y'(t)]\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} (4\sin^2 t(-2\sin t) + 22\cos t2\sin t2\cos t)\,\mathrm{d}t =$
$8\int\limits_0^{2\pi} \sin t(-\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -8\int\limits_0^{2\pi} (-1 + 3\cos^2 t)\,\mathrm{d}\cos t = 8\int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos^2 t)\,\mathrm{d}\cos t = 8(\cos t - \frac{3\cos^3 t}{3})\Big|_0^{2\pi} = 0$
Мы в самом начале могли проверить:
$\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$ — следовательно, интеграл по замкнутому контуру равен нулю, и не считать все то, что мы все же посчитали.

Пример №5
$\oint\limits_D x^2\cos y\,\mathrm{d}x + 3y^3x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{OA} (\dots) + \int\limits_{AB} (\dots) + \int\limits_{BO} (\dots) = \int\limits_0^1 (x^2\cos x + 3x^3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 (x^2\cos(2-x) - 3(2-x)^3x)\,\mathrm{d}x + 0 = \dots.$
Дальнейшее решение оставляется в качестве упражнения читателю.
Но можно было пойти другим путем: посчитать $\frac{\delta Q}{\delta x} = 2x\cos y$, $\frac{\delta P}{\delta y} = 9y^2x$, так что
$\int\int(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{G_1} \mathrm{d}x \int\limits_x^{2-x} (2x\cos y - 9y^2x)\,\mathrm{d}y = 2x\sin y - \frac{9y^3}{3}x\Big|_{y=x}^{2-x} = 2x\sin(2-x) - 3(2-x)^3x - 2x\sin x - 3x^4$ — далее это нужно интегрировать по x.

2 Практическое занятие — 05.10.2023

2.1 Двойные и тройные интегралы

2.1.1 №3618

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$
Конус $z^2 = 4(x^2 + y^2)$
$x^2 + y^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = 4R^2 - 3R^2$
$x^2 + y^2 + (z - 2R)^2 = R^2$
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi + z^2 = 4Rz - 3R^2$
$\rho^2 + z^2 - 4Rz + 4R^2 = R^2$
$\rho^2 + (z - 2R)^2 = R^2$
$z = 2R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2}$
$V_1 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int\limits_{2\rho}^{2R+\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z$
$\int\limits_0^R (2R + \sqrt{R^2 - \rho^2} - 2\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho = (\frac{2R\rho^2}{2})\Big|0^R - \frac{2\rho^3}{3}\Big|_0^R - \frac{1(R^2-\rho^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^R = \frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{3}R^3 = \frac{2}{3}R^3$
$V_1 = \frac{4\pi R^3}{3}$

$V_2 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\frac{3}{5}R} \rho\,\mathrm{d}\rho \int\limits_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z$

1. $\int\limits_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z = (z)\Big|_{2\rho}^{2R-\sqrt{R^2-\rho^2}} = (2R-\sqrt{R^2-\rho^2}) - (2\rho) = 2R - \sqrt{R^2-\rho^2} - 2\rho$
2. ...
3. ...

Далее вычисляем, вычитаем что надо из чего надо, и все должно быть в порядке.

2.2 Криволинейные интегралы

$\int\limits_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{t_A}^{t_B} (P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t))y'_t)\,\mathrm{d}t$

$$\begin{cases} x = x(t) \;\; \mathrm{d}x = x'_t\,\mathrm{d}t \\ y = y(t) \;\; \mathrm{d}y = y'_t\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{2}$$

Если же имеем декартовы координаты, например:

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \;\; \mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{3}$$

Тогда:
$\int\limits_A^B P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x_A}^{x^B} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'_x)\,\mathrm{d}x$

2.2.1 №3811

$\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y$
По следующим кривым:

1. $y = x$
   $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (x^2 + (x-x)2x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$
2. $y = x^2$
   $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} xy\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (x * x^2 + (x^2-x)2x)\,\mathrm{d}x = (\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

2.2.2 №3815

Вычислить $\int \frac{y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ по L:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \;\; x' = -2\sin t \\ y = 2\sin t \;\; y' = 2\cos t \\ 0 \le t \le \pi \end{cases} \tag{4}$$

$\int \frac{y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int\limits_0^\pi \frac{(4\sin^2 t(-2\sin t)) - (4\cos^2 t(2\cos t))}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2\int\limits_0^\pi (1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}(\cos t) - (1-\sin^2 t)\,\mathrm{d}(\sin t) =$

$2((\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}) - (\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}))\Big|_0^\pi = 2(-1 + \frac{1}{3} - 0 + 0 - (1 - \frac{1}{3} - 0 + 0)) = 2(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) = 2(-\frac{4}{3}) = -\frac{8}{3}$

2.2.3 №3812

Вычислить $\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$ по L:

1. $\begin{cases} y = x \\ y' = 1 \end{cases}$

   $\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^2 + x^2)\,\mathrm{d}x = (\frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

2. $\begin{cases} y = x^2 \\ y' = 2x \end{cases}$

   $\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^3 + 2x^3)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (4x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{4x^4}{4}\Big|_0^1 = 1$

3. $\begin{cases} y = x^3 \\ y' = 3x^2 \end{cases}$

   $\int\limits_{(0;0)}^{(1,1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 (2x^4 + x^2 * (3x^2))\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (2x^4 + 3x^4) = (\frac{2x^5}{5} + \frac{3x^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$

2.3 Восстановление функции по ее полному дифференциалу

$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, $P = \frac{\delta u}{\delta x}$, $Q = \frac{\delta u}{\delta y}$
$P = \frac{\delta u}{\delta x}$, $u = \int P\,\mathrm{d}x = F(x,y) + C(y)$
$\frac{\delta u}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta y} = Q$, $C = C(y)$

Пример №1 $\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}x$
$x^2 = \frac{\delta u}{\delta x}$, $y^2 = \frac{\delta u}{\delta y}$
$u = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C(y)$
$\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta C}{\delta x} = y^2$
$C(y) = \int y^2\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{3} + K$
$u = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + K$

2.3.1 №3846

$\mathrm{d}u = (4x^3 - 4y^2x)\,\mathrm{d}x - (4x^2y - 4y^3)\,\mathrm{d}y$
$u = \int(4x^3 - 4y^2x)\,\mathrm{d}x = \frac{4x^4}{4} - \frac{4y^2x^2}{2} = x^4 - 2y^2x^2 + C(y)$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -4yx^2 + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = -4x^2y + 4y^3$
$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 4y^3$
$C(y) = 4y^3\,\mathrm{d}y = \frac{4y^4}{4} = y^4 + K$
Ответ: $u = x^3 - 2y^2x^2 + y^4 + K$

2.3.2 №3847

$\mathrm{d}u = \frac{(x+2y)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2} = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}y$
Ненужный шаг, мы зря начали это считать: $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{2(x+y)^2 - 2(x+2y)(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x+y-x-2y)}{(x+y)^3} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, проверим другую частную производную: $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{-2y(x+y)}{(x+y)^3} = \frac{-2y}{(x+y)^3}$. Они совпадают, значит мы можем решать.
$u = \int \frac{x+y+y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+y}{(x+y)^2} + \int \frac{y}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} + y\int \frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C(y)$
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x+y} - \frac{(x+y)-y}{(x+y)^2} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{(x+y)^2}$
$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = \frac{x+y}{(x+y)^2} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x+y} = 0$

$C(y) = C$
Ответ: $u = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$

2.4 Вычисление криволинейных интегралов от полных дифференциалов

Пример №1 $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$
Возможны несколько вариантов:

1. Восстановить полный дифференциал, после чего вычислить:
   $\int\limits_{A}^{B} \mathrm{d}u = u(B) - u(A)$
2. Так как путь интегрирования не имеет значения, можем сами его выбирать. Например:
   $AO: \begin{cases} y = 0 \\ \mathrm{d}y = 0 \end{cases}, AB: \begin{cases} x = 2 \\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$
   $\int\limits_{(0;0)}^{(2;1)} 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 2x * 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 4\,\mathrm{d}y = 0 + 4y\Big|_0^1 = 0 + 4 = 4$

2.4.1 №3840

$\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$
Проверим:
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = \frac{0-2xy}{(x^2+y^2)^2}$
Пойдем по второму пути:
$AD: \begin{cases} x = 3 \\ \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$
$DB: \begin{cases} y = 12 \\ \mathrm{d}y = 0 \end{cases}$
$\int\limits_4^{12} (\frac{y}{9+y^2})\,\mathrm{d}y = (\frac{1}{2}\ln|y^2+9|)\Big|_4^{12} = (\frac{1}{2}\ln|144+9|) - (\frac{1}{2}\ln|16+9|)$
$\int\limits_3^{5} (\frac{x}{x^2+144})\,\mathrm{d}x = (\frac{1}{2}\ln|x^2+144|)\Big|_3^{5} = (\frac{1}{2}\ln|25+144|) - (\frac{1}{2}\ln|9+144|)$
$\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}(\ln|169| - \ln|25|)$

3 Практическое занятие — 17.10.2023

3.1 Дифференциальные уравнения

Определение 1 ***Дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y и ее какие-то производные:*

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x)$$

Диффререциальное уравнение в частных производных:

$$y' = f(x, t)$$

Определение 2 ***Порядком*** *в дифференциальном уравнении называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.*

Определение 3 ***Решением*** *(интегралом) дифференциального уравнения называется всякая функция, которая будучи подставлена в уравнение обращает его в верное равенство.*

Пример №1 Пусть

$$y'' - y = 0$$

Проверим:

1. $y = x$

   $y' = 1$, $y'' = 0$

   Таким образом, не является решением.

2. $y = \sin x$

   $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$

   Таким образом, не является решением

3. $y = e^x$

   $y' = e^x$, $y'' = e^x$

   Является решением.

Определение 4 ***Общим решением*** *дифференциального уравнения называется функция* $y = \phi(x; C)$ $(C = const)$, *которая*

1. *удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом значении* C;
2. *каково бы не было начальное условие, всегда можно подобрать значение* C_0, *чтобы оно удовлетворяло указанному начальному условию.*

Пример №1 $y = x^2 + C$
$y(0) = 4$
$y = x^2 + 4$ — Решение задачи Коши, удовлетворяет нач. усл.

Пример №2 Найти уравнение кривой, у которой точка пересечения любой касательной с осью OX K равноудалена от нач. координат O и от точки касания $M(x, y)$.
Условие, которое должно быть выполнено: $|OK| = |OM|$
Уравнение касательной:
$Y - y = y'(X - x)$
В т.к $Y = 0$, получаем:
$-y = y'(X - x) \Leftrightarrow x - \frac{y}{y'} = X$. Таким образом, можем теперь задать коордианты т. К: $(x - \frac{y}{y'}; 0)$
$|OK| = |x - \frac{y}{y'}|$
$|KM| = \sqrt{(x - (x - \frac{y}{y'}))^2 + (y - 0)^2}$
$|x - \frac{y}{y'}| = \sqrt{(\frac{y}{y'})^2 + y^2}$
$x^2 - \frac{2xy}{y'} + (\frac{y}{y'})^2 = (\frac{y}{y'})^2 + y^2$
$-\frac{2xy}{y'} = -y^2 + x^2$
$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ — Дифференциальное уравнение (I порядок)

Геометрическая интерпретация решения дифференциального уравнения Общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, а решение задачи Коши представляет собой кривую, проходящую через заданную точку.

3.1.1 Теорема о существовании и единственности решения

Теорема 3 (О существовании и единственности решения) *Пусть в дифференциальном уравнении $y' = F(x,y)$ функция $F(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\delta f}{\delta y}$ непрерывны на открытом множестве G. В этом случае*

1. *Для всякой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (решение задачи Коши).*

2. *Если два решения ($y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$) дифференциального уравнения $y' = F(x,y)$ совпадают хотя бы для одного решения x^*. то эти решения совпадают для всех тех значений переменной x, для которой они определены.*

3.1.2 Дифференциальный уравнения (I порядок) с разделенными или разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение (I порядок) может быть записано:

1. $y' = f(x;y)$
2. $p(x;y)\,\mathrm{d}x + q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$

Определение 5 ***Уравнением с разделяющимися переменными*** *называют дифференциальное уравнение, в котором функция f может быть разбита на две такие функции, разделенные знаками умножения или деления, что одна из них зависит только от x, а другая зависит только от x.*

$$y' = f_1(x) * f_2(y) \quad \textit{(1)}$$
$$p_1(x) * p_2(y) + q_1(x) * q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0 \quad \textit{(2)}$$

Разделение переменных:

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) * f_2(y)$
   $\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x$
2. $p_1(x)p_2(y)\,\mathrm{d}x = -q_1(x)q_2(y)\,\mathrm{d}y$
   $\frac{p_1(x)\,\mathrm{d}x}{q_1(x)} = -\frac{q_2(y)\,\mathrm{d}y}{p_2(y)}$

После этого мы можем интегрировать левую и правую часть:

1. $\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{p_1(x)\,\mathrm{d}x}{q_1(x)} = -\int \frac{q_2(y)\,\mathrm{d}y}{p_2(y)}$

Получим:

1. $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$
   или
   $\Phi_2(y) - \Phi_1(x) = C$
2. $F_1(x) = F_2(y) + C$

Пример №1 $\sqrt{y^2+1}\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y$
Выполним разделение переменных:
$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}$
Интегрируем полученное:
$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2+1}}$
$\ln|x| = (y^2+1)^{-\frac{1}{2}}(y^2+1)$
$\ln|x| = \frac{1}{2}\frac{(y^2+1)^{1/2}}{1/2} + C$
$\ln|x| = (y^2+1)^{1/2} + C$
Ответ: $\ln Cx = \sqrt{y^2+1}$

Замечание о приведении к уравнениям с разделющимися переменными Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$ можно привести заменой $z = ax + by$ или $ax + by + C$ к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример №2 $(x + 2y)y' = 1$
$y' = \frac{1}{x+2y}$
Заменим: $z = x + 2y$
$\frac{z-x}{2} = y$
$\frac{z'-1}{2} = y'$
$\frac{z'-1}{2} = \frac{1}{z}$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z' = \frac{2}{z} + 1 = \frac{2+z}{z}$
$\frac{z}{z+2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$
Переменные теперь разделены и их можно проинтегрировать:
$\int \frac{z+2-2}{z+2}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$
$\int (1 - \frac{2}{z+2})\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$
$\int \frac{\mathrm{d}z}{z+2} = \ln|z+2|$, $\int \mathrm{d}z = 2$
$z - 2\ln|z+2| = x + C$
$x + 2y - 2\ln|x + 2y + 2| = x + C$
Ответ: $2y - 2\ln|x + 2y + 2| = C$

3.1.3 Однородные дифференциальные уравнения (I порядок)

Определение 6 ***Функция*** $f(xy)$ ***называется однородной функцией*** *n-го измерения относительно переменных x и y, если для любой λ справедливо следующее:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x; y)$$

Пример однородной функции второго измерения:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^6}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^6 y^6} = \sqrt[3]{\lambda^6 (x^6 + y^6)} = \lambda^2 \sqrt{x^6 + y^6}$$

Пример функции, не являющейся однородной:

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 + y^3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{\lambda^6 x^6 + \lambda^3 y^3} = \lambda^3 \sqrt{\lambda^3 x^3 + y^6}$$

Определение 7 ***Дифференциальное уравнение (I порядок) называется однородным*** *относительно x и y, если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения:*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y)$$

Пример однородного дифференциального уравнения:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{2\lambda x \lambda y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (I порядок) Необходимо заменить:

$$t = \frac{y}{x}$$

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

Получим:

$$t' * x + t = f(t)$$

$$t' * x = f(t) - t$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} * x = f(t) - t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Переменные разделились и мы интегрируем, не забывая обратно заменить t.

Пример №1 $y' = \frac{x+2y}{x}$
$y' = 1 + 2 * \frac{y}{x}$
Заменим:
$t = \frac{y}{x}$, $y = tx$, $y' = t'x + t$
Получим:
$t'x + t = 1 + 2t$
$t' * x = 1 + t$
$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} * x = 1 + t$
Выполним окончательное разделение:
$\frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
Теперь мы можем интегрировать:
$\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\ln|t + 1| = \ln|x| + \ln C$
$\ln|t + 1| = \ln Cx$
$t + 1 = Cx$
$\frac{y}{x} = Cx - 1$
Ответ: $y = Cx^2 - x$

4 Лекция — 31.10.2023

4.1 Дифференциальные уравнения

4.1.1 Уравнения, приводимые к однородным

$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

Возможны варианты в зависимости от значения $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

1. Если этот определитель равен нулю, то это случай, когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. В этом случае необходимо делать замену, как будет удобно в каждом конкретном случае.

   Допустим, $z = a_1x + b_1y + c_1$, выражаем: $y = \frac{1}{b_1}(z - a_1x - c_1)$, $y' = \frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}$.

   Если мы все это подставим, то получим **уравнение в разделяющихся переменных**, которое мы можем решить.

   Пример №1 $y' = \frac{x+2y-1}{2x+4y+5}$

   Выразим: $z = x + 2y - 1 \implies y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y' = \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}$.

   И далее подставим: $\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2} = \frac{z}{2z+7} \iff \frac{1}{2}z' = \frac{z}{2z+7} + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2z+2z+7}{2(2z+7)}$.

   Теперь можем интегрировать: $\int \frac{2z+7}{4z+7}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$. Но дробь неправильная, поэтому выделим целую часть, получим:
   $\frac{1}{2}\int \frac{(4z+7)+7}{4z+7} \iff \frac{1}{2}(\int \mathrm{d}z + \int \frac{7}{4z+7}\,\mathrm{d}z) \iff \frac{1}{2}(z + \frac{7}{4}\ln|4z+7|) = x + C$

   Мы получили неявный вид решения дифференциального уравнения. Единственное, что важно — подставить $x+2y$ вместо z обратно, и всё будет хорошо: $x + 2y - 1 + \frac{7}{4}\ln|4(x+2y-1)+7| = 2x + K$

2. Если определитель не равен нулю, то есть коэффициенты не пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β — решения системы

   $$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

   После того, как мы всё подставим, у нас должно будет получиться что-то вроде $\frac{k_1u+k_2v}{k_3u+k_4v}$. То есть, свободных членов не должно остаться. Делим обе части на u, получаем: $\frac{k_1+k_2\frac{v}{u}}{k_3+k_4\frac{v}{u}}$ — однородное уравнение. Пользуясь заменой $\frac{v}{u} = t$, оставшееся бодренько решаем: $v = ut$, $v'_u = 1 * t + ut'_u$

   Пример №2 $(2x - 4y + 6)\,\mathrm{d}x + (x + y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$

   Приведем необходимому виду: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-4y+6}{x+y-3}$. После чего составим и решим систему:

   $$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha - 6 = 0 \\ 1 + \beta - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

   Выполним замену $x = u + 1$, $y = v + 2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v$:
   $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2(u+1)-4(v+2)+6}{u+1+v+2-3} \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u-4v}{u+v}$. У нас, как и ожидалось, пропали константы. Мы сделали всё правильно. Если бы они не пропали — значит, мы что-то сделали не так. У нас теперь есть однородное уравнение, которое мы легко можем решать: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u-4v}{u+v}$. Поделим на u всю правую часть, получим: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2-4\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$, $\frac{v}{u} = t$, $v = ut$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = t + u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$.

   Осталось сделать уравнение с разделяющимися переменными для этих t и u:
   $t + u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{2-4t}{1+t} = \frac{2-4t-t-t^2}{t+1} = -\frac{t^2+5t-2}{t+1}$. Разделяем переменные: $\frac{t+1}{t^2+5t-2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Необходимо интегрировать:
   $\int \frac{t+1}{t^2+5t-2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff \frac{1}{2}\int \frac{2t+5}{t^2+5t22}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+5t-2} = \ln + \ln c$. Далее: $\frac{1}{2}\ln|t^2+5t-2| + \frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{33}}\ln|\frac{t+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{t+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}| = c_n c_u$.
   Получили ужас. Не будем ничего делать, лишь вернемся к переменной u и потом к x, y.

4.1.2 Линейные уравнения и уравнения Бернулли. Метод вариации произвольной постоянной

Определение 8 ***Линейное уравнение*** *имеет вид:*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Определение 9 ***Уравнение Бернулли*** *имеет вид:*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

Для обеих видов уравнений:
$y = y_{oo} + \tilde{y}$, $y' + p(x)y = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)y$, $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x$. Получилось уравнение с разделяющимися переменными, $y_{oo} = \Phi(x) + C$.
Метод вариации произвольной переменной заключается в том, что решение уравнения будем искать в виде похожем на y_{oo}, только константу C мы будем рассматривать как функцию, зависящую от x: $y = \Phi(x) + C(x)$, $y' = \Phi'(x) + C'(x)$. Эти значения мы подставляем в то уравнение, с которым работаем. Если у нас в итоге что-то сокращается — это хорошо; значит, что мы на верном пути. У нас получится уравнение относительно $C(x)$ и x

Пример №1 $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x$

1. $y' - \frac{y}{x} = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$, $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\ln y = \ln C_x$, $y_{oo} = Cx$ — общее решение уравнения с нулём в правой части.
2. $$\begin{cases} y = C(x) \\ y' = C'(x)x + C(x) \end{cases}$$
   Подставляем в исходное уравнение: $C'(x) + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + 2x \iff \frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = x + 2 \iff \int \mathrm{d}C(x) = \int (x+2)\,\mathrm{d}x$, $C(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + K$. Теперь подставим обратно, получим: $y = (\frac{x^2}{2} + 2x + K) * x = \frac{x^3}{2} + 2x^2 + Kx$, где $y_{oo} = Kx$, $\tilde{y} = \frac{x^2}{2} + 2x^2$

Пример №2 $xy' - 2y = 2x^4$. Но нам это не нравится, уединим y', чтобы всё было симпатичней: $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$

1. Решим уравнение $y' - \frac{2y}{x} = 0$ и запишем его ответ: $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}$, $\ln|y| - 2\ln x + \ln C$, $\ln y = \ln Cx^2$, $y_{oo} = Cx^2$
2. $$\begin{cases} y = C(x) * x^2 \\ y' = C'(x)x^2 + 2x * C(x) \end{cases}$$
   $C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2C(x)x^2}{x} = 2x^3$
   $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\int \mathrm{d}C = 2\int x\,\mathrm{d}x \iff C(x) = \frac{2x^2}{2} + K$
   Получаем: $y = (x^2 + K)x^2 = x^4 + Kx^2$, где $\tilde{y} = x^4$, $y_{oo} = Kx^2$

4.1.3 Метод Бернулли

$y = u * v$, $y' = u'v + uv'$
Имеем уравнение: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$. Подставим, получим: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$. Далее выберем такие функции u и v, чтобы $uv' + p(x)uv$ занулилось.

1. $uv' = -p(x)uv$
   $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)v$
   $\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x$
   Результат должен быть записан: $v = \Phi(x)$ без константы.
2. После наших преобразований имеем: $u'v = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha} \implies u' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1}$
   $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = q(x)u^{\alpha}\Phi^{\alpha-1}(x)$
   $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha}} = \int q(x)\Phi^{\alpha-1}(x)\,\mathrm{d}x$
   У нас получится решение: $u = F(x) + K$. Таким образом, итоговый ответ: $y = (F(x+K))\Phi(x)$

Пример №1 $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x$
$y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2 + 2x$

1. Обнуляем $uv' - \frac{uv}{x}$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{x} \iff \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff v = x$
2. Переписываем наше уравнение: $u'v = x^2 + 2x$

   Подставляем: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} * x = x^2 + 2x$

   $\mathrm{d}u = (x + 2)\,\mathrm{d}x$

   $u = \frac{x^2}{2} + 2x + K$

   $y = uv = (\frac{x^2}{2} + 2x + K)x = \frac{x^3}{2} + 2x^2 + Kx$

Пример №2 Если имеем уравненине в правой части вроде $y' + 2y = y^2 e^x$, то мы делаем всё то же самое: $y = uv$, $y' = uv' + uv'$
$u'v + uv' + 2uv = u^2 v^2 e^x$

1. $\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\,\mathrm{d}x$

   $\ln v = -2x$

   $v = e^{-2x}$
2. $u'v = u^2 v^2 e^x \iff u' = u^2 v e^x$
   $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 e^{-2x} * e^x$
   $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x$
   $\frac{1}{u} = e^{-x} + C \iff \frac{1}{u} = C + \frac{1}{e^x} = \frac{Ce^x + 1}{e^x} \iff u = \frac{e^x}{Ce^x + 1}$
   $y = uv = \frac{e^x}{Ce^x+1} e^{-2x} = \frac{1}{e^x(Ce^x + 1)}$

Важное замечание Иногда может оказаться, что уравнение не является линейным, если мы считаем y за функцию, а x за переменную, но можно принять x за функцию и y за переменную и сделать его линейным.