Лекция — 05.09.2023

Двойные интегралы

$z = f(x,y)$

$V = \lim\limits_{diamS_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_{i)} \Delta S_i$

Если $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D и существует предел последовательности интегральных сумм, который не зависит от способа разбиения области на ΔS_i и от выбора точек P_i при условии, что диаметр ΔS_i стремится к нулю, то этот предел мы и будем называть двойным интегралом функции $f(x,y)$ по области D

$V = \int\int f(x,y)dxdy$ = $\lim\limits_{diamS_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_{i)} \Delta S_i$

Свойства интегралов

1. $\int\limits_D\int(f_1 + f_{2)}dxdy = \int\limits_D\int f_1 dxdy + \int\limits_D\int f_2 dxdy$
2. $\int\limits_D\int \alpha f(x,y)dxdy = \alpha \int\limits_D\int f(x,y)dxdy$
3. $D = D_1 + D_2 + \dots + D_n$ (конечное число областей), $\int\limits_D\int = \int\limits_{D_1}\int + \int\limits_{D_2}\int + \dots + \int\limits_{D_n}\int$

Вычисление двойного интеграла, переход к повторными интегралам

Пусть $y = \phi_1(x)$, $y = \phi_2(x)$ — некоторые кривые, ограничивающие область.
Ее двойной интеграл:

$\int\limits_D\int f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b (\int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy)dx = \int\limits_\alpha^\beta dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$

Примеры

Пример №1

$y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$

$\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$

Пример №2

$x^2 + y^2 = 4$, $-2 \leq x \leq 2$

$\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

Пример №3

$x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq x \leq 2$

$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dx$

Пример №4

$y = x + 2$, $-2 \leq x \leq 0$; $y = \sqrt{4-x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

$\int\limits_{-2}^0 dx \int\limits_0^{x+2} f(x,y)dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

Пример №5

$y = 4 - x^2$, $0 \leq x\ 2$

$\int\limits_0^2 dx + \int\limits_0^{4-x^2} fdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$ (сменили порядок интегрирования)

Пример №6

$\int\limits_2^4 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy = \int\limits_2^4 \frac{3}{2} x dx = \frac{3}{2} * \frac{x^2}{2} \Big|_2^4 = \frac{3}{4}(16-4) = 9$
$\frac{1}{x} \frac{y^2}{x} \Big|^{y=2x} = \frac{4x^2 - x^2}{2x} = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2} x$

Пример №7

$$y = x, y = 2 - x$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y) dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y) dy$$

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2-y}^{y} f(x,y) dx$$

Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты

Каждая точка в декартовой системе координат характеризуется xи y. С другой стороны, если мы направим полярную ось, то эта же точка может характеризоваться ρ — длина радиус-вектора, ϕ — угол поворота относительно положительного направления оси OX

$x = \rho \cos \phi$
$y = \rho \sin \phi$

Иногда двойной интеграл удобно вычислять не в декартовых координатах, а каких-нибудь других: может, в этих новых координатах может быть что-нибудь более удобно записано, например, $\rho = 2$ симпатичней, нежели $x^2 + y^2 = 4$.

$\int \int f(x,y) dx dy = \int \int f(x(u;v), y(u;v)) |J| dx dy$

Якобиан перехода к полярным координатам:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix} = \rho$$

Примеры

Пример №1

$$S: \begin{cases} x^2+y^2-6y=0 \\ y=x \\ y=\sqrt{3}x \end{cases}$$

$\rho^2\cos^2 + \rho^2\sin^2\phi = 6\rho\sin\phi \iff \rho = 6\sin\phi$

$$S = \int\int dxdy = \int\int \rho d\rho d\phi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\phi \int\limits_{0}^{6\sin\phi} \rho d\rho = 6\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} 2\sin^2\phi d\phi = 9\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}$$

$$= 9(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{2}) = 9(\frac{\pi}{12}$$

Геометрические приложения двойного интеграла

1. $S = \int\int\limits_S dx\,dy$
2. $V = \int\int\limits_D (f_1(x,y) - f_2(x,y))dx\,dy$

Тройные интегралы

$$\int\int\limits_V\int f(x,y,z)dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int\limits_{\xi_1(x,y)}^{\xi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Примеры

Пример №1

$z = x^2 + y^2$
$z = 2(x^2+y^2)$

$y = x^2$, $y = x$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} f(x,y,z)\,dz$$

Практическое занятие — 07.09.2023

Методы решения неопределенных интегралов

Метод подстановки

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \dots$
$x = \sin t$
$dx = \cos t dt$
$\dots = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)$
Выполним обратную подстановку:
$\dots = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$

Этот пример можно решить и интегрированием по частям:
$u = \sqrt{1-x^2}$, $du = \frac{-2xdx}{2\sqrt{1-x^2}}$, $dv = dx$, vx

$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dots$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+9x^2}} = \dots$
$t = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{t}$
$dx = \frac{1}{t^2}dt$
$\dots = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1+\frac{9}{t^2}}}dt = -\int \frac{\frac{t}{t^2}dt}{\sqrt{t^2+3^2}} = -\ln|t + \sqrt{t^2+9}| + C = -\ln|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} +$

Интегрирование по частям

$\int udv = uv - \int vdu$

1. Многочлен * тригонометрическую или показательную функцию, u — многочлен, dv — остальное
2. Многочлен * логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию, u — функция, dv — остальное

$\int (x^2+x)\ln x dx = \dots$
$lnx = u$, $(x^2+x)dx = dv$
$du = \frac{dx}{x}$, $v = \int (x^2+x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

$\dots = (\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\ln x - \int (\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\frac{dx}{x} = (\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$

$\int (2x+1)\sin x dx = \dots$
$u = 2x+1$, $dv = \sin x dx$
$du = 2dv$, $v = -\cos x$

$\dots = (2x+1)(-\cos x) + 2\int \cos x dx = (2x+1)(-\cos x) + 2\sin x + C$

Интегрирование дробей

Можем интегрировать только правильные дроби:
$\int \frac{\sqrt{x^3-x+5}}{x^2+1} = \int x - \int \frac{2x}{x^2+1} + \int \frac{5}{x^2+1} = \dots$
Главное: выделить целую часть. Получили отдельные интегралы, которые уже табличные или почти табличные.
$\dots = \frac{x^2}{2} - \ln|x^2+1| + 5\arctan x + C$

Кроме того, можем выделять полный квадрат в знаменателе:
$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$

1. Действительные различные корни у знаменателя
   $\int \frac{(7x+8)dx}{(x-3)}x+5 = \dots$
   Разбиваем эту дробь на две отдельные дроби и подбираем коэффициенты
   $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x-3)}{(x-3)(x+5)}$
   При х: $A+B=7$

Свободный член: $5A - 3B = 8$

$A = \frac{29}{8}$, $B = \frac{27}{8}$

$\dots = \int \frac{\frac{29}{8}dx}{x-3} + \int \frac{\frac{27}{8}dx}{x+5} = \frac{29}{8}\ln|x-3| + \frac{27}{8}\ln|x+5| + C$

2. Действительные кратные корни

   $\int \frac{(7x+8)dx}{(x-3)^2(x+5)^3} = \int \frac{Adx}{x-3} + \int \frac{Bdx}{(x-3)^2} + \int \frac{Cdx}{x=5} + \int \frac{Ddx}{(x+5)^2} + \int \frac{\xi dx}{(x+5)^3} = \dots$

   $\dots = A\ln|x-3| + \frac{B(x-3)^{-1}}{-1} + C\ln|x+5| + \frac{D(x+5)^{-1}}{-1} + \frac{\xi(x+5)^{-2}}{-2} + C$

3. Комплексные корни

   $\frac{2x+5}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$

   $\int \frac{(2x+5)dx}{(\dots)(\dots)} = A\int \frac{xdx}{x^2+1} + B\int \frac{dx}{x^2+1} + C\int \frac{2xdx}{x^2+3} + D\int \frac{dx}{x^2+3} = \dots$

Бывают комбинированные случаи:

$\frac{2x+9}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Fx}{x^2+4} + \frac{D}{x^2+4}$

Интегрирование тригонометрических штук

$\int \sin\alpha x * \cos\beta x dx$, m, n — степени $\sin x$ и $\cos x$

1. m и n — четные

   $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

   $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2. m или n — нечетное

   Например,

   $\int \sin^6 x * \cos^3 x dx = \int \sin^6 x \cos^2 \cos dx = \int \sin^6 x(1-\sin^2 x)d\sin x = .$

   $\dots = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$\tan\frac{x}{2} = t$

$x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4*\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+8t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{t}\int \frac{dt}{t^2+2*\frac{4}{5}t+1} = \dots$
$\dots = \frac{2}{t}\int \frac{dt}{t^2+2*\frac{4}{5}t+\frac{16}{25}-\frac{16}{25}+1} = \frac{2}{5}\int \frac{d(t+\frac{4}{5})}{(t+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} = \frac{2}{3}\arctan\frac{(1+\frac{4}{5})}{3/5} + C = \dots$
$\dots = \frac{2}{3}\arctan(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}) + C$

Решение определенных интегралов

Не забываем про пределы интегрирования — это критически важно. Если мы их не меняем — мы должны выполнить обратную подстановку обязательно. Если не выполняем обратную подстановку — их поменять обязательно.

Решение задач

1714

$\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx = \dots$
$d(x^3+2) = 3x^2dx$
$\dots = \frac{1}{3}\int 3x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/5}d(x^3+2) = \frac{1}{3}\frac{(x^3+2)^{6/5}}{6/5} + C = \dots$
$\dots = \frac{5(x^3+2)^{6/5}}{18} + C$

1718

$\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} = \dots$
$d(3x^2-5x+6) = (6x-5)dx$
$\dots = \frac{1}{2}\int \frac{d(3x^2-5x+6)}{\sqrt{3x^2-5x+6}} = \frac{1}{2}\int (3x^2-5x+6)^{-\frac{1}{2}}\,d(3x^2-5x+6) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3x^2-5x+6}}{\frac{1}{2}}$
$\dots = \sqrt{3x^2-5x+6} + C$

1768

$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4} = \dots$
$d(e^x) = e^x dx$
$\dots = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{e^x}{2} + C$

1782

$\int \frac{xdx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} (\int dx - \int \frac{dx}{2x+1}) = \dots$
$\dots = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln(2x+1) + C$

1792

$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \dots$
$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A}{x(x+1)}$
$\dots = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln|\frac{x}{x+1}| + C$

1933

$\int x \cos x = \dots$

$u = x$, $dv = dx$

$v = \sin x$, $v = x$

1729

$\int \arctan \sqrt{x} dx = \dots$

$t = \sqrt{x}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$
$\dots = 2 \int \arctan t * tdt = \dots$
$u = \arctan t$, $dv = tdt$
$du = \frac{dt}{1+t^2}$, $v = \frac{t^2}{2}$

$\dots = 2(\frac{t^2 \arctan t}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{1+t^2}) = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \dots$
$\dots = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2+t-1}{t^2+t} dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + C$

2012

$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)} = \dots$
$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{2Ax+A+Bx+B}{(x+1)(2x+1)}$
При x: $2A + B = 1$

Свободный член: $A + B = 0$

$A = 1$, $B = -1$

$\dots = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} = ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

2013

$\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2} = \dots$
$D = 9 + 16 = 25$
$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$
$x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\dots = \int \frac{xdx}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{xdx}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \dots$
$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+\frac{1}{5}} = \frac{A(x+\frac{1}{2})+B(x-2)}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{Ax+\frac{A}{2}+Bx-2B}{(x-2)(x+\frac{1}{2})}$
При x: $A + B = 1$
Свободный член: $\frac{A}{2} - 2B = 0$
$A = \frac{4}{5}$, $B = \frac{1}{5}$

$\dots = \frac{1}{2}(\int \frac{\frac{4}{5}dx}{x-2} + \int \frac{\frac{1}{2}dx}{x+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{4}{5} * \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5} * \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}}) = \dots$
$\dots = \frac{4}{10}\ln|x-2| + \frac{1}{10}\ln|x+\frac{1}{2}| + C$

2022

$\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$

2036

$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \dots$
$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$
$A = 1$, $B = -1$, $C = 0$

$\dots = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

2090

$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^2 x \, dx = \dots$
$t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$
$\dots = -\int (1-t^2)t^2 \, dt = -\int (t^2 - t^4) \, dt = -\int t^2 dt + \int t^4 dt = \dots$
$\dots = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$

2091

$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \sin x \, dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = \ldots$
$\cdots = -\int \frac{d\cos x}{\cos^4 x} + \int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^{-3} x}{-3} + \frac{\cos^{-1} x}{-1} = \ldots$
$\cdots = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$

2100

$\int \tan^5 x \, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} \, dx = \frac{(1-cos^2 x)^2 \sin x}{\cos^5 x} dx = \ldots$
$t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$
$\cdots = \int \frac{-(1-t^2)^2 dt}{t^5} = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^5} dt = -\int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{2 \, dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = \ldots$
$\cdots = \frac{1-4\cos x}{4\cos^4 x} - \ln|\cos x|$

2110

$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \ldots$
$t = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t$
$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\cdots = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+5t^2-3+3t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2dt}{8t^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{4t^2+1} = \ldots$
$\cdots = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(2t)^2+1)} = \frac{1}{2} \arctan(2\tan \frac{x}{2}) + C$

2116

$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \ldots$
$t = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t$
$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cdots = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2-8t+3-3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}-2} + C$

Двойные интегралы

$\int\limits_D \int f(x,y) \, dx \, dy = \int\limits_a^b dx (\int\limits_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x,y) \, dy)$

Расставляем пределы

3486

$x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$

Рисунок:

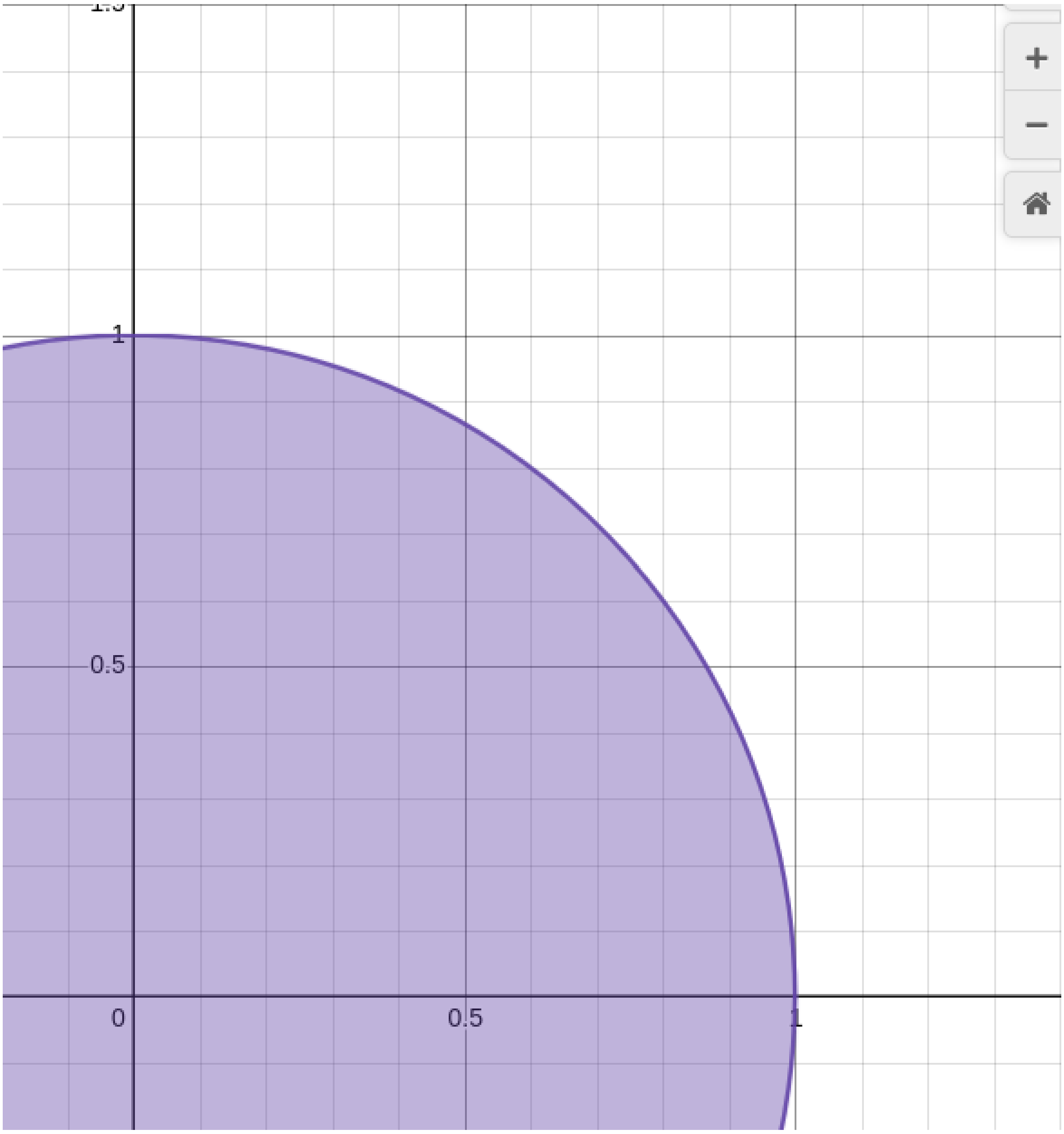
$$\int_0^2 dx\left(\int_0^{2-x} f(x,y)\, dy\right)$$

$$\int_0^2 dy\left(\int_0^{2-y} f(x,y) dx\right)$$

3487

$x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

Рисунок:



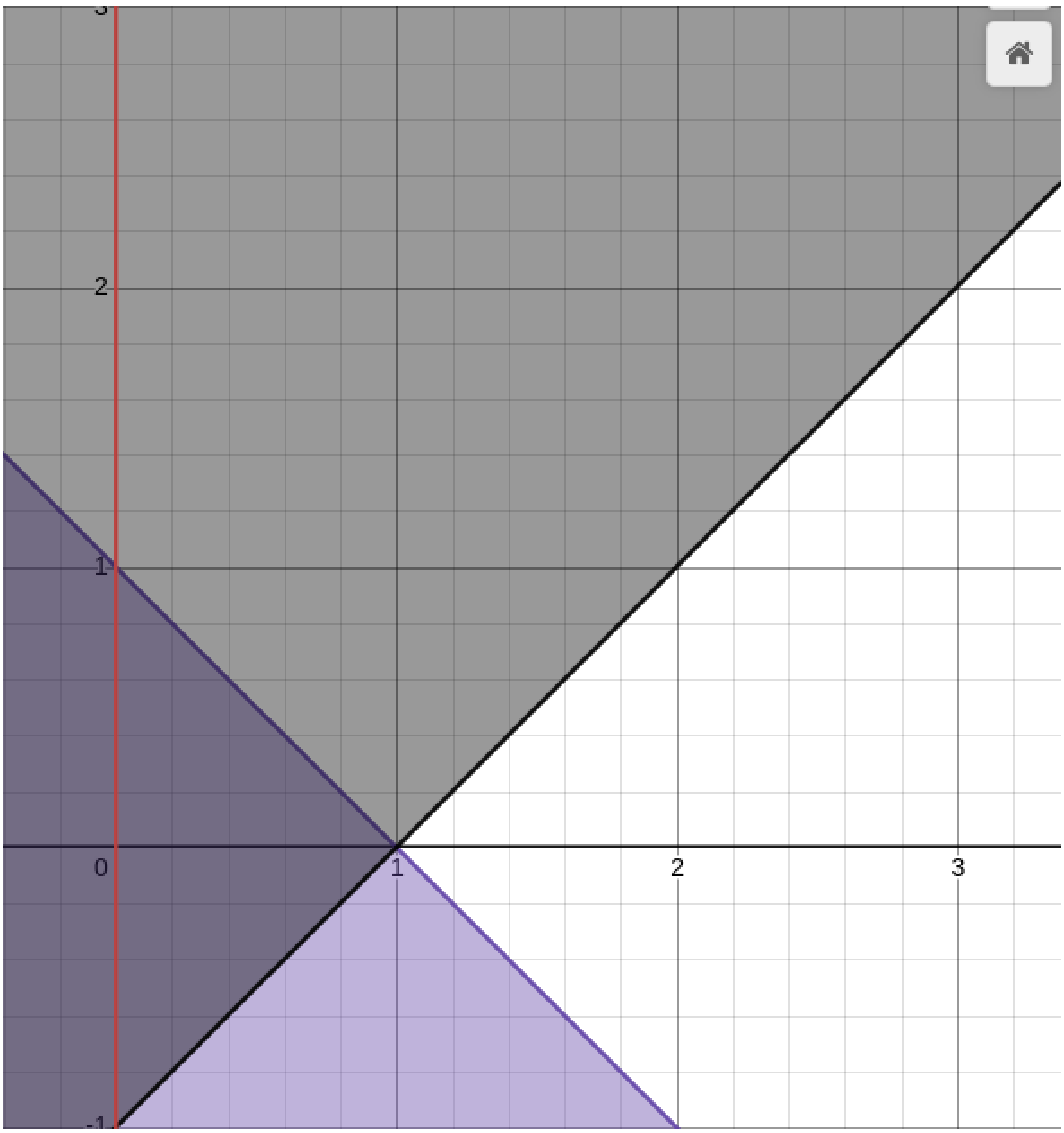
$$\int_0^1 dx\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)$$

$$\int_0^1 dy\left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)$$

3488

$x+y\leq 1$, $x-y\leq 1$, $x\geq 0$

Рисунок:



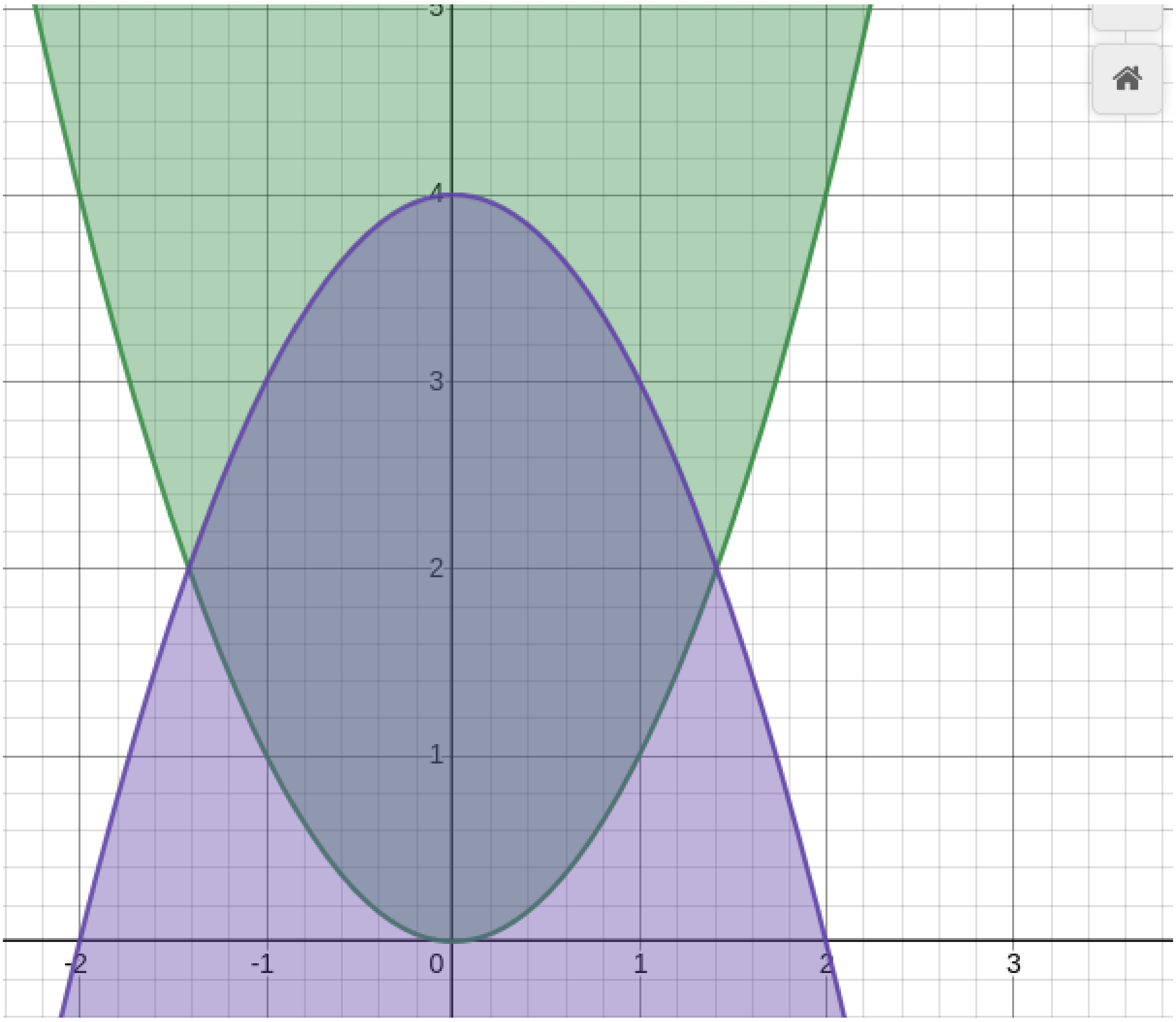
$$\int_0^1 dx\left(\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy\right)$$

$$\int_{-1}^{0} dy\left(\int_0^{y+1} f(x,y)dx\right) + \int_0^1 dy\left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx\right)$$

3489

$y \geq x^2$, $y \leq 4 - x^2$

Рисунок:



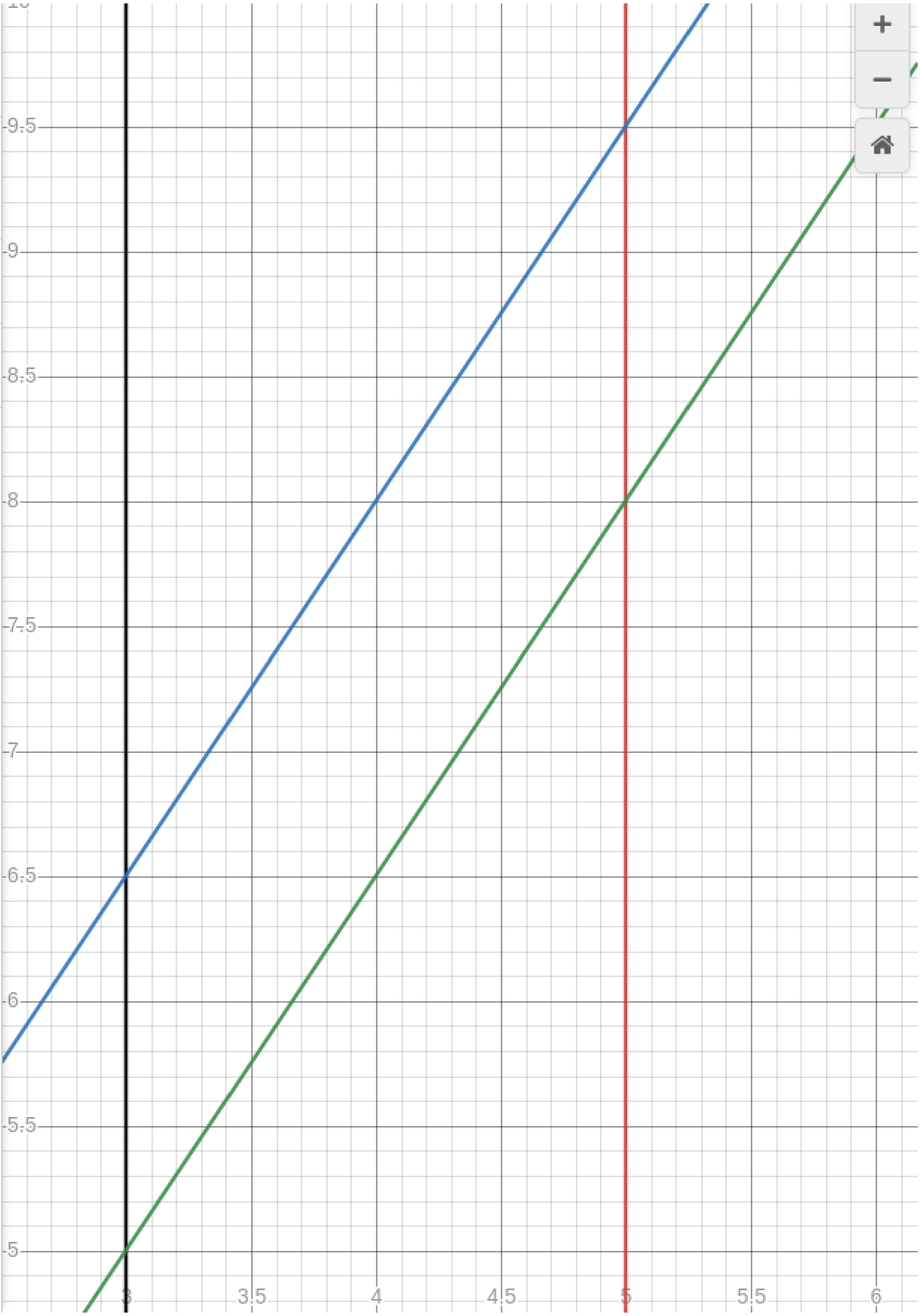
$$\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\left(\int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy\right)$$

$$\int\limits_{0}^{2} dy\left(\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx\right) + \int\limits_{2}^{4} dy\left(\int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx\right)$$

3485

$x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$

Рисунок:



$$\int\limits_{3}^{5} dx \left(\int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)\, dy \right)$$

$$3x - 2y + 4 = 0,\ 2y = 3x + 4,\ y = \frac{3x+4}{2}$$

$3x-2y+1=0$, $2y=3x+1$, $y=\frac{3x+1}{2}$

$$\int\limits_{5}^{6.5} dy(\int\limits_{3}^{\frac{2y-4}{3}} f(x,y)dx) + \int\limits_{6.5}^{8} dy(\int\limits_{\frac{2y-1}{3}}^{\frac{2y-4}{3}} f(x,y)dx) + \int\limits_{8}^{9.5} dy(\int\limits_{\frac{2y-1}{3}}^{5} f(x,y)dx)$$

$3x-2y+4=0$, $3x=2y-4$, $x=\frac{2y-4}{3}$

$3x-2y+1=0$, $3x=2y-1$, $x=\frac{2y-1}{3}$

Домашнее задание, Берман

3492, 3493, 3494, 3506 (1, 2, 3), 3508