Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

November 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 02.11.2023

1.1 Дифференциальные уравнения

1.1.1 С разделяющимися переменными

1. $y' = f(x, y)$
   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) * f_2(y)$
   $\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x$
   $\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x$
   $\Phi_2(y) = \Phi_1(x) + C$

2. $p(x, y)\,\mathrm{d}x + q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$
   $p_1(x)p_2(y)\,\mathrm{d}x + q_1(x)q_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$
   $\int \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{q_2(y)}{p_2(y)}\,\mathrm{d}y$
   $F_1(x) = F_2(y) + C$

Пример №1 $y' = \frac{x}{y}$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$
$y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$
$\int y\,\mathrm{d}y = \int x\,\mathrm{d}x$
$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$
$y^2 = x^2 + C$

Пример №2 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\ln|y| = \ln|x| + C$
$y = Cx$

Пример №3 $(1 + y^2)x\,\mathrm{d}x + (1 + x^2)\,\mathrm{d}y = 0$
$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$
$\frac{1}{2}\ln|x^2 + 1| = C - \operatorname{arctg} y$

Пример №4 $y' = (4x + y + 1)^2$, $y' = f(ax + by + c)$
$z = 4x + y + 1$
$y = z - 4x - 1$, $y' = z' - 4$
$z' - 4 = z^2$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = z^2 + 4$, $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2^2} = \int \mathrm{d}x$
$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2} = x + C$
$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4x+y+1}{2} = x + C$

Пример №3910 $y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$
$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}$
$y' = 2\sin\frac{x-y-(x+y)}{2*2}\cos\frac{x-y+x+y}{2*2}$
$y' = 2\sin(\frac{-y}{4})\cos(\frac{x}{2})$
$y' = -2\sin\frac{y}{4}\cos\frac{x}{2}$
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2\sin\frac{y}{4}\cos\frac{x}{2}$
$\mathrm{d}y = -2\sin\frac{y}{4}\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
$\frac{\mathrm{d}y}{2\sin\frac{y}{2}} = -\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
$\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}y}{\sin\frac{y}{2}} = -\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$
$t = \frac{1}{2}y, t' = \frac{1}{2}\frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{4}\,\mathrm{d}t$
$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = -2\int \cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\frac{x}{2}$
$\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} = -2\sin\frac{x}{2} + C$
$\ln\operatorname{tg}\frac{y}{4} = -2\sin\frac{x}{2} + C$

Пример №3901 $(xy^2 + x)\,\mathrm{d}x + (y - x^2y)\,\mathrm{d}y = 0$
$(y - x^2y)\,\mathrm{d}y = (-xy^2 - x)\,\mathrm{d}x$
$(1 - x)y\,\mathrm{d}y = x(-y^2 - 1)\,\mathrm{d}x$
$\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+1} = -\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$
$\ln|y^2 + 1| = \ln|x^2 - 1| + C$

Пример №3902 $xyy' = 1 - x^2$
$\frac{xy\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - x^2$
$xy\,\mathrm{d}y = (1 - x^2)\,\mathrm{d}x$
$y\,\mathrm{d}y = \frac{1-x^2}{x}\,\mathrm{d}x$
$\int y\,\mathrm{d}y = \int \frac{1-x^2}{x}\,\mathrm{d}x$
$\frac{y^2}{2} = \int(\frac{1}{x} - x)\,\mathrm{d}x$
$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$
$y^2 = 2\ln x - x^2 + C$

Пример №3903 $yy' = \frac{1-2x}{y}$
$\frac{y\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-2x}{y}$
$y\,\mathrm{d}y = \frac{1-2x}{y}\,\mathrm{d}x$
$y^2\,\mathrm{d}y = (1 - 2x)\,\mathrm{d}x$
$\int y^2\,\mathrm{d}y = \int(1 - 2x)\,\mathrm{d}x$
$\frac{y^3}{3} = x - \frac{2x^2}{2} + C$

Пример №3907 $\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x + y\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}y = 0$
$\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x = -y\sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}y$
$\frac{\sqrt{1-y^2}}{\mathrm{d}y} = -\frac{y\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\sqrt{1-y^2}}{y\,\mathrm{d}y} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{d}x}$
$\frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
Пусть $t = 1 - y^2$, $t' = -2y\,\mathrm{d}y$
$-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -\arcsin x + C$
$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}}{1/2} = \arcsin x + C$
$\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + C$

Пример №3913 $y' \sin x = y \ln y;\ y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \sin x = y \ln y$
$\frac{\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{y \ln y}{\mathrm{d}y}$
$\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y \ln y}$
$\int \frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$
$\ln|\ln|y|| = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + \ln C$
$\ln|y| = c * \operatorname{tg}\frac{x}{2}$
$1 = c * 1 \implies c = 1$
$\ln y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

Пример №3915 $\sin y \cos x\, \mathrm{d}y = \cos y \sin x\, \mathrm{d}x;\ y\Big|_{x=0} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sin y}{\cos y} \cos x\, \mathrm{d}y = \sin x\, \mathrm{d}x$
$\frac{\sin y}{\cos y}\, \mathrm{d}y = \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x$
$\int \frac{\sin y}{\cos y}\, \mathrm{d}y = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x$
$-\int \frac{\mathrm{d}(\cos y)}{\cos y} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$
$\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + \ln C$
$\cos y = c \cos x$
$\cos\frac{\pi}{4} = c \cos 0$
$\cos\frac{\pi}{4} = c$
$c = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos y = \frac{\sqrt{2}\cos x}{2}$

1.1.2 С однородными переменными

$f(x,y),\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$
$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$
$y' = f(\frac{y}{x})$
$t = \frac{y}{x}$
$y = t * x$
$y'_x = t' * x + t * 1$

Пример №1 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$t' * x + t = \frac{1}{t} + t$
$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} x = \frac{1}{t}$
$\int t\, \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\frac{t^2}{2} = \ln|x| + \ln|C|$
$t^2 = \ln x^2 + \ln K$
$\frac{y^2}{x62} = \ln K x^2$
$y^2 = x^2 \ln K x^2$

Пример №2 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$

$\frac{x}{y} = t$
$x = yt$
$x'_y = t + y\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$

Пример №3932 $y' = 3x - 2y + 5$

$z = 3x - 2y + 5$
$y = \frac{3x}{2} + \frac{5}{2} - \frac{z}{2}$
$y' = \frac{1}{2}(3 - z')$
$\frac{1}{2}(3 - z') = z$
$3 - z' = 2z$
$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3 - 2z$
$\frac{\mathrm{d}z}{3-2z} = \mathrm{d}x$
$\int \frac{\mathrm{d}z}{3-2z} = \int \mathrm{d}x$
$x = -\frac{1}{2}\ln|3 - 2z| + C$
$x = -\frac{1}{2}\ln|3 - 6x + 4y - 10| + C$

Пример №3934 $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

$t = \frac{y}{x},\ t^2 = \frac{y^2}{x^2}$
$y' = t^2 - 2$
$t' * x + t = t^2 - 2$
$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} * x = t^2 - t - 2$
$\frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t - 2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t - 2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$t^2 - t - 2 = 0$
$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2, t_2 = -1$
$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)(t+1)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+1}$
$\frac{1}{(t-2)(t+1)} = \frac{at + a + bt - 2b}{(t-2)(t+1)}$
$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$
$\int \frac{\frac{1}{3}\,\mathrm{d}t}{t-2} - \int \frac{\frac{1}{3}}{t+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$
$\ln\sqrt[3]{\frac{t-2}{t+1}} = \ln Cx$

Пример №3935 $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$

$t'x + t = \frac{1+t}{1-t}$

$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1+t}{1-t} - t$

$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1+t^2}{1-t}$

$\frac{x}{\mathrm{d}x} = \frac{1+t^2}{(1-t)\,\mathrm{d}t}$

$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{(1-t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$

$\int \frac{(1-t)\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{1\,\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan t - \frac{\ln|1+t^2|}{2} = \arctan\frac{y}{x} - \frac{\ln|1+\frac{y^2}{x^2}|}{2}$

$\arctan\frac{y}{x} - \frac{\ln|1+\frac{y^2}{x^2}|}{2} = \ln x + \ln C$

Пример №3941 $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

$t'x = e^t$

$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = e^t$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{e^t}$

$-\frac{1}{e^{\frac{y}{x}}} = \ln|x| + C$

Пример №3942 $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

$y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$

$t'x + t = t\ln t$

$t'x = t\ln t - t$

$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t\ln t - t$

$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t - 1)}$

$\int \frac{d(\ln t-1)}{\ln t - 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

$\ln\ln(t-1) = \ln Cx$

$\ln t - 1 = Cx$

$\ln\frac{y}{x} = Cx + 1$

1.1.3 Приводимые к однородным

$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

1. Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то вводим z, например, $z = a_1x + b_1y + c_1$
2. Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то

   $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$

   $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$

   Потом подставляем одно в одно место, другое в другое. В результате не должно остаться свободных членов.

Пример №1 $y' = \frac{2x+y-1}{6x+3y+2}$

$z = 2x + y - 1$

$3z = 6x + 3y - 3$

$6x + 3y + 2 = 3z + 5$

$y = z - 2x + 1$, $y' = z' - 2$

$z' - 2 = \frac{z}{3z+5}$

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{3z+5} + 2$

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{7z+10}{3z+5}$

$\int \frac{3z+5}{7z+10}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$

$\frac{3}{7}\int \frac{z+\frac{5}{3}}{z+\frac{10}{7}}\,\mathrm{d}z = \frac{3}{7}\int \frac{(z+\frac{10}{7})+\frac{5}{21}}{(z+\frac{10}{7})}\,\mathrm{d}z = \frac{3}{7}[\int \mathrm{d}z + \frac{5}{21}\int \frac{\mathrm{d}(z+\frac{10}{7})}{\frac{10}{7}}]$

$\frac{3}{7}[z + \frac{5}{21}\ln|z+\frac{10}{7}|] = x + C$

Пример №2 $(x+y-1)^2\,\mathrm{d}y = 2(y+2)^2\,\mathrm{d}x$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2$

$x = u + \alpha$, $y = v + \beta$

$\begin{cases} \beta + 2 = 0 \\ \alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases}, \beta = -2, \alpha = 3$

$x = u + 3$, $y = v - 2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v$

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 2(\frac{v-2+2}{u+3+v-2-1})^2$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 2(\frac{v}{u+v})^2$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}(\frac{u+v}{v})^2$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}(\frac{u}{v}+1)^2$

$t = \frac{u}{v}$, $u = v * t$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = t + v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}$, $t + v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{2}(t+1)^2 = \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$, $\frac{t^2+1}{2}$, $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v}$

$\mathrm{arctg}\, t = \frac{1}{2}\ln|v| + \ln C = \ln c\sqrt{v} \iff \mathrm{arctg}\,\frac{u}{v} = \ln C\sqrt{v} \iff \mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{y+2} = \ln C\sqrt{y+2}$

2 Лекция — 14.11.2023

2.1 Линейное уравнение и уравнение Бернулли

Вид линейного уравнения:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Вид уравнения Бернулли:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

Примеры Допустим, имеем

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x\cos y + \sin 2y$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + (\cos y)x = \sin 2y$$

Получившееся уравнение мы можем решать уже знакомыми способами.

$$x = uv,\ x' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv\cos y = \sin 2y$$

1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -v\cos y$
   $\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\cos y\,\mathrm{d}y$
   $\ln v = -\sin y$
   $v = e^{-\sin y}$
2. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}e^{-\sin y} = \sin 2y$
   $\int \mathrm{d}u = \int e^{\sin y}\sin 2y\,\mathrm{d}y$
   $u = 2\int e^{\sin y}\cos y\,\mathrm{d}y = 2\int e^{\sin y}\sin y\,\mathrm{d}(\sin y) = 2\int te^t\,\mathrm{d}t = \Big|u = t \quad \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \quad v = e^t\Big| = 2(te^t - e^t) + C$
   $x = uv = 2(\sin y e^{\sin y} - e^{\sin y} + C)e^{\sin y} = 2\sin y - 2 + Ce^{-\sin y}$

2.2 Уравнения в полных дифференциалах

Пусть $u = u(x, y)$, ее полный дифференциал: $\mathrm{d}u = \frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\,\mathrm{d}y$
Если $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$, $\frac{\delta u}{\delta x}\,\mathrm{d}x + \frac{\delta u}{\delta y}\mathrm{d}y = 0$, то $\mathrm{d}u = 0 \implies u = C$
$\frac{\delta}{\delta y}(\frac{\delta u}{\delta x}) = \frac{\delta}{\delta x}(\frac{\delta u}{\delta y})$
Если $\frac{\delta P}{\delta y} = \frac{\delta Q}{\delta x}$, то имеем уравнение в полных дифференциалах
Если мы уверены, что уравнение — уравнение в полных дифференциалах, то мы можем сделать так:
$\mathrm{d}u = P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$
$u = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,\mathrm{d}y + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x; y)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0; y)\,\mathrm{d}y + C$
x_0, y_0 — координаты некоторой точки, которая находится в области определения функций P и Q, частные производные которых в этой точке также непрерывны.

Примеры

Пример №1

$$(2xy + y^2)\,\mathrm{d}x + (3x^2 + y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 6x$$

Не является уравнением в полных дифференциалах.

Пример №2

$$(2x + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + y^3)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 2y$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = 2y$$

Является уравнением в полных дифференциалах.

1. $\frac{\delta u}{\delta x} = 2x + y^2$
   $u = \int (2x + y^2)\,\mathrm{d}x = x^2 + y^2 x + C(y)$
2. $\frac{\delta u}{\delta y} = 2xy + \frac{\delta C(y)}{\mathrm{d}y} = Q = 2xy + y^3$
   $\frac{\delta C}{\delta y} = y^3$
   $\int \mathrm{d}C = \int y^3\,\mathrm{d}y$
   $C(y) = \frac{y^4}{4} + K$
3. $u = x^2 + y^2 x + \frac{y^4}{4} + K$

В итоге мы восстановили функцию по ее полному дифференциалу.
Ответ: $x^2 + y^2 x + \frac{y^4}{4} = Const$
Попробуем восстановить ее другим образом:
$\int\limits_0^x 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^y (2xy + y^3)\,\mathrm{d}y = \frac{2x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x} + \frac{2xy^2}{2}\Big|_{y=0}^{y} + \frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=y}$
$u = x^2 + xy^2 + \frac{y^4}{4} + C$
В итоге получили то же самое.

Пример №3

$$3y \sin x\,\mathrm{d}x - \cos x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y} = 3 \sin x$$

$$\frac{\delta Q}{\delta x} = \sin x$$

Не является уравнением в полных дифференциалах.

2.2.1 Метод интегрирующего множителя

Может оказаться, что левая часть уравнения $M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ не является полным дифференциалом, то есть, $\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$. Можно подобрать функцию $\mu(x,y)$ такую, что если мы умножим все это уравнение на μ, то оно окажется полным дифференциалом. Решение полученного уравнения будет совпадать с общим решением исходного.

$$\mu M(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Так как мы хотим, чтобы полученное уравнение оказалось уравнением в полных дифференциалах, мы накладываем требования:

$$\frac{\delta}{\delta x}(\mu N) = \frac{\delta}{\delta y}(\mu M)$$

$$\mu\frac{\delta N}{\delta x} + N\frac{\delta \mu}{\delta x} = \mu\frac{\delta M}{\delta y} + M\frac{\delta \mu}{\delta y}$$

$$\mu(\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}) = M\frac{\delta M}{\delta y} - N\frac{\delta M}{\delta x}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = M * \frac{1}{\mu}\frac{\delta \mu}{\delta y} - N * \frac{1}{\mu}\frac{\delta \mu}{\delta x}$$

$$\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y} = M\frac{\delta(\ln\mu)}{\delta y} - N\frac{\delta(\ln\mu)}{\delta x}$$

Если μ не зависит от x, $\mu = \mu(y)$, то мы можем написать:

$$\frac{\delta(\ln\mu)}{\delta y} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{M}$$

Если μ не зависит от y, $\mu = \mu(x)$, то мы можем написать:

$$\frac{\delta(\ln\mu)}{\delta x} = \frac{\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}}{N}$$

Примеры

Пример №1

$$(y + xy^2)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$M = (y + xy^2),\ \ N = -x$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = 2xy + 1,\ \ \frac{\delta N}{\delta x} = -1$$

Можем записать:

$$\frac{\delta(\ln\mu)}{\delta y} = \frac{-1 - 2xy - 1}{y(1+xy)} = \frac{-2(xy+1)}{y(1+xy)} = -\frac{2}{y}$$

$$\int \mathrm{d}\ln\mu = -\int \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\ln\mu = -2\ln y = \ln\frac{1}{y^2}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

Умножаем наше выражение на μ:

$$\frac{y+xy^2}{y^2}\,\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y=0$$

$$(\frac{1}{y}+x)\,\mathrm{d}x-\frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y=0$$

$$\frac{\delta P}{\delta y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\delta Q}{\delta x}=-\frac{1}{y^2}$$

Можем попытаться восстановить функцию:
$u=\int\limits_0^x(\frac{1}{y}+x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^y(0)\,\mathrm{d}y=\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^x+C$
Мы восстановили функцию, мы молодцы.
Ответ: $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=Const$
Попробуем пойти иначе:

$$(y+xy^2)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$$

$$(y+xy^2)\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{y}{x}=y^2$$

Получили уравнение Бернулли. Решаем дальше:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{x}=u^2v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$v=x$$

Возвращаемся в уравнение:

$$u'*v=u^2v^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=\int x\,\mathrm{d}x$$

$$C-\frac{1}{u}=\frac{x^2}{2}$$

$$u=\frac{1}{C-\frac{x^2}{2}}$$

$$y=\frac{x}{C-\frac{x^2}{2}}\Longleftrightarrow\frac{x}{y}=C-\frac{x^2}{2}\Longleftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{x^2}{2}=C$$

Получили тот же самый ответ.

Пример №2

$$\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 - \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$M = \frac{y}{x},\ N = y^3 - \ln x$$

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{1}{x},\ \frac{\delta N}{\delta x} = -\frac{1}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\ln\mu)}{\mathrm{d}y} = \frac{\frac{\delta N}{\delta x} - \frac{\delta M}{\delta y}}{\frac{y}{x}} = \frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x}}$$

μ — не зависит от x

$$\int \mathrm{d}(\ln\mu) = -\int \frac{2}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\ln\mu = -2\ln y$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

Умножим все уравнение на μ:

$$\frac{1}{y^2}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (\frac{y^3}{y^2} + \frac{\ln x}{y^2})\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{1}{xy}\mathrm{d}x + (y - \frac{\ln x}{y^2})\,\mathrm{d}y = 0$$

$$u = \int\limits_1^x \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^y (y)\,\mathrm{d}x + C$$

$$u = \frac{1}{y}\ln x\Big|_{x=1}^{x} + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y} + C$$

Ответ: $\frac{1}{y}\ln x + \frac{y^2}{2} = Const$

2.2.2 Финты ушами

Допустим, имеем:

$$y = x * \Phi(y') + \Psi(y')$$

$$y' = P$$

$$y = x\Phi(p) + \Psi(p)$$

$$y' = P = 1 * \Phi(p) + x\Phi'(P) * P' + \Psi'(P)P'$$

$$p - \Phi(p) = (x * \Phi'(p) + \Psi'(p))\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$$

С этим уравнением мы теперь можем работать.

2.3 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общий вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

1. $y^{(n)} = f(x)$
   $y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$
   $y^{(n-2)} = \int F_1(x)\,\mathrm{d}x + C_1 x + C$

Например, $y''' = x^2 + 5\sin x$

1. $y'' = \frac{x^3}{3} - 5\cos x + C_1$
2. $y' = \frac{x^4}{12} - 5\sin x + C_1 x + C$
3. $y = \frac{x^5}{60} + 5\cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$

И задано:

1. $y(0) = 2$
2. $y'(0) = 1$
3. $y''(0) = 0$

Можем вычислить:

1. $y''(0) = \frac{0}{3} - 5 + C_1 = 0$, $C_1 = 5$
2. $y'(0) = C_2 = 1$
3. $y(0) = 5 + C_3 = 2 + C_3 = -3$

Ответ: $y = \frac{x^5}{60} + 5\cos x + \frac{5}{2}x^2 + x - 3$