Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 21.09.2023

1.1 Переход к полярным координатам

1.1.1 №3525

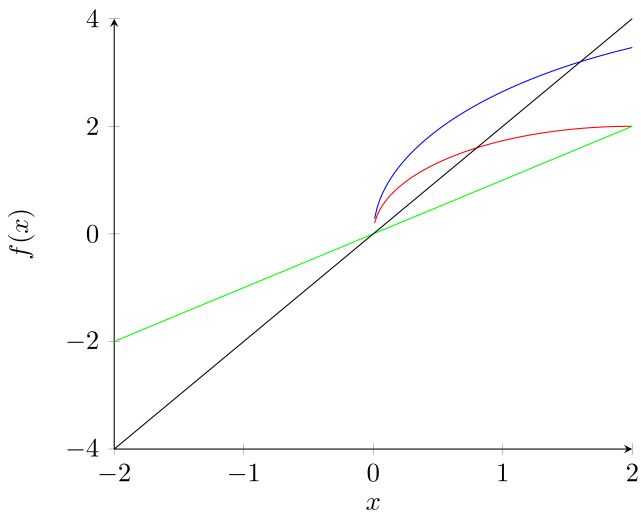
1) $x^2 + y^2 \leq R^2$
Выполним построение. После чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = R^2$
$\rho^2 = R^2$
$\rho = R$
$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho \, \mathrm{d}\rho$

2) $x^2 + y^2 \leq 2x$
$(x^2 - 2x + 1) + y^2 \leq 1$
$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$
Выполним построение. После чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = 2\rho \cos \phi$
$\rho^2 = 2\rho \cos \phi$
$\rho = 2 \cos \phi$
Так что если мы вычисляем двойной интеграл, то делаем следующее:
$\int\int\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{2\cos\phi} f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) * \rho \, \mathrm{d}\rho$

3) $x^2 + y^2 \leq 4y$
$x^2 + y^2 - 4y + 4 \leq 4$
$x^2 + (y-2)^2 \leq 2^2$
Выполним построение. После чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = 4\rho \sin \phi$
$\rho = 4 \sin \phi$
$\int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{4\sin\phi} (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \rho \, \mathrm{d}\rho$

1.1.2 №3526

D — область, ограниченная окружностями $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ и прямыми $y = x$ и $y = 2x$.
Перейти в двойном интеграле $\int\int\limits_D f(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ к полярным координатам ρ и ϕ ($x = \rho \cos \phi, y = \rho \sin \phi$) и расставить пределы интегрирования.



$\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi = 4\rho \cos \phi$

$\rho = 4\cos\phi$
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = 8\rho\cos\phi$
$\rho = 8\cos\phi$
$\phi\cos\phi = \phi\sin\phi$, $\tan\phi = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$
$8\sin\phi = 2\phi\cos\phi$, $\tan\phi = \arctan 2$

$$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\mathrm{d}\phi\int\limits_{4\cos\phi}^{8\cos\phi} f(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

1.1.3 №3527

Перейти в двойном интеграле $\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ к полярным координатам ρ и ϕ $(x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi)$ и расставить пределы интегрирования.
$x^2 + y^2 \le 2x$, $x^2 + y^2 \le 4y$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 \le 1$, $x^2 + y^2 - 4y + 4 \le 4$
$(x-1)^2 + y^2 \le 1$, $x^2 + (y-2)^2 \le 4$
Выполним построение. После чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = 2\rho\cos\phi$
$\rho = 2\cos\phi$
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi \le 4\rho\sin\phi$
$\rho = 4\sin\phi$
Найдем угол пересечения:
$2\rho\cos\phi = 4\rho\sin\phi$
$2 = 4\tan\phi$
$\tan\phi = \frac{1}{2}$
Таким образом:

$$\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{\arctan\frac{1}{2}}\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{4\sin\phi} f(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho + \int\limits_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{2\cos\phi} f(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho = \dots$$

1.1.4 №3528

Перейти в двойном интеграле $\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ к полярным координатам ρ и ϕ $(x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi)$ и расставить пределы интегрирования.
$y = x$
$y = 0$
$x = 1$
Выполним построение. После чего выполним переход к полярным координатам:
$x = 1 \implies \rho\cos\phi = 1 \implies \rho = \frac{1}{\cos\phi}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\phi\int\limits_0^{\frac{1}{\cos\phi}} f(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

1.1.5 №3529

Перейти в двойном интеграле $\int\limits_D\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ к полярным координатам ρ и ϕ $(x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi)$ и расставить пределы интегрирования.
Прямая $x + y = 2$ рассекает круг $x^2 + y^2 \le 4$.
$\rho\cos\phi + \rho\sin\phi = 2$
$\rho(\cos\phi + \sin\phi) = 2$
$\rho = \frac{2}{\cos\phi + \sin\phi}$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\int\limits_{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}}^{2} f(\rho\cos\phi;\rho\sin\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

1.1.6 №3536

С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойной интеграл:
$\int\limits_0^R \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \; dots$
$y^2 = (\sqrt{R^2-x^2})^2$
$y^2 = R^2 - x^2$
$x^2 + y^2 = R^2$
Выполним построение данной окружности, после чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = R^2$
$\rho^2 = R^2$, $\rho = R$
$\dots = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \ln(1+\rho^2\cos^2\phi+\rho^2\sin^2\phi)\rho\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \ln(1+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \dots$
$\int\limits_0^R \ln(1+\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho = \dots$
$\mathrm{d}(1+\rho^2) = 2\rho\,\mathrm{d}\rho$
$\dots = \frac{1}{2}\int\limits_0^R \ln(1+\rho^2)\,\mathrm{d}(1+\rho^2) = \dots$
Пусть $t = 1+\rho^2$, $r = 0 \implies t = 1$, $r = \rho \implies t = 1+R^2$
$\dots = \frac{1}{2}\int\limits_1^{1+R^2} \ln t\,\mathrm{d}t = \dots$
Интегрируем по частям: $u = \ln t$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$, $v = t$, $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$
$\dots = \frac{1}{2}(t\ln t - t)\Big|_1^{1+R^2} = \frac{1}{2}((1+R^2)(\ln(1+R^2)-1)+1) = \frac{\pi}{4}(\ln(1+R^2)+R^2\ln(1+R^2)-R^2)$
$\dots = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{4}(\ln(1+R^2)+R^2\ln(1+R^2)-R^2))\,\mathrm{d}\phi$

1.1.7 №3537

С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойной интеграл:
$\int\int\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где область D определяется неравенствами $x^2+y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$
$\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = \rho^2$
$\rho^2 = 1$
$\rho = 1$
$\int\int\limits_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}\phi \int \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho$
$\mathrm{d}\rho^2 = 2\rho\,\mathrm{d}\rho$
$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\mathrm{d}\rho^2$
Пусть $t = \rho^2$
$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\mathrm{d}t$
Пусть $z = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$
$\frac{1-t}{1+t} = t^2$, $z^2+1+t^2 = 1-t$, $t(z^2+1) = 1-z^2$, $t = \frac{1-z^2}{z^2+1}$
$\mathrm{d}t = \frac{-2z(z^2+1)-2z(1-z^2)}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = -\frac{4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$
$-\frac{1}{2}\int z\frac{4z\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2} = -2\int \frac{z^2+1-1\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)^2}$
Дальше должно будет посчитаться до чего-то, мы пихнем в интеграл, и все будет хорошо.

1.1.8 №3540

С помощью перехода к полярным координатам вычислить двойной интеграл:
$\int\int\limits_D \arctan\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где D — часть кольца $x^2+y^2 \ge 1$, $x^2+y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{x}}$, $y \le x\sqrt{3}$

Выполним построение данной окружности, после чего выполним переход к полярным координатам:
$\rho \sin \phi = \frac{\rho \cos \phi}{3}$
$\sqrt{3} \sin \phi = \cos \phi$
$\tan \phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \phi = \frac{\pi}{6}$
$y \geq \frac{x}{\sqrt{x}} \implies \phi = \frac{\pi}{6}$
$y \leq x\sqrt{3} \implies \phi = \frac{\pi}{3}$
$\arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\rho \sin \phi}{\rho \cos \phi} = \arctan(\tan \phi) = \phi$
$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \phi \, \mathrm{d}\phi \int\limits_{1}^{3} \rho \, \mathrm{d}\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \phi * (\frac{\rho^2}{2}) \Big|_1^3 \mathrm{d}phi = 4 \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \phi \, \mathrm{d}\phi = 2\phi^2 \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = 2(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}) = 2(\frac{4\pi^2 - \pi^2}{36}) = \frac{\pi}{6}$

1.1.9 3548

Область, ограниченная цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.
Выполним построение. Нарисуем цилиндр, сдвинутый на 1 ед. о. по x, параболоид. Они где-то пересекаются — мы должны расставить пределы по этой области.
Если бы мы работали только в декартовых координатах, то мы бы могли расписать следующим образом:
$\int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z$
Если бы мы захотели перейти к полярным координатам:
$x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$
$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{2\cos\phi} \rho \, \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho \cos \pi, \rho \sin \phi, z) \, \mathrm{d}z$

1.2 Переход к цилиндрическим и сферическим координатам

1.2.1 3554

$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$

Выполним построение: у нас должна получиться половинка сферы. Перейдем в цилиндрические координаты:

$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \rho\,\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} (\rho)^2\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^R \rho^3\,\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}z = 2\pi \int\limits_0^R \rho^2 * \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \pi \int\limits_0^R \rho^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2 =$

$-\pi \int\limits_0^R -\rho^2 + R^2 - R^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2 = -\pi\int(-\rho^2+R^2)\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2 + \pi R^2\int\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2 = \pi\int(-\rho^2+R^2)\,\mathrm{d}(R^2-\rho^2) -$

$\pi R^2\int\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}(R^2-\rho^2) = 2\pi(\frac{(R^2-\rho^2)}{5})^{5/2} - 2\pi R^2()\frac{(R^2-\rho^2)}{3})^{3/2}\Big|_0^R = -\frac{2\pi R^2}{5}^{5/8} + \frac{2\pi R^2}{3}^{3/8} = 2\pi R^5(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$

Попробуем выполнить переход к цилиндрическим координатам:

$x = \rho\sin\theta\cos\phi$

$y = \rho\sin\theta\sin\phi$

$z = \rho\cos\theta$

$Y = \rho^2\sin\theta$

$\rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\theta = R^2$

$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\pi/2} \int(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\pi/2} \int(\rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho =$

$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^R \rho^4\,\mathrm{d}\rho$

$\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^2\theta - 1)\,\mathrm{d}(\cos\theta) = \frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

1.3 Применение двойных и тройных интегралов к вычислению объемов

1.3.1 №3562

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):
Плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ и $x + y + z = 6$
Построим график на плоскости: $3x + 2y = 12 \implies y = \frac{12-3x}{6}$; $3x + y = 6 \implies y = 6 - 3x$
$V = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{6-x-y} \mathrm{d}z + \int\limits_2^4 \mathrm{d}x \int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{6-x-y} \mathrm{d}z = \int\limits_0^6 \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} \mathrm{d}x \int\limits_0^{6xx-y} \mathrm{d}z = \ldots$
$\int\limits_{\frac{6-y}{3}}^{\frac{12-2y}{3}} (6 - x - y)\,\mathrm{d}x = (6x - \frac{x^2}{2} - xy)\Big|_{x=\frac{6-y}{3}}^{x=\frac{12-2y}{3}} = 24 - 4y - \frac{(12-2y)^2}{18} - \frac{12y-2y^2}{3} - 12 + 2y - \frac{(16-y)^2}{18} + \frac{(6y-y^2)}{3} =$
$12 - 2y - \frac{(12-2y)^2+(6-y)^2}{18} - \frac{12y-2y^2+6y-y^2}{3} = 12 - 2y - \frac{180-60y+5y^2}{18} - \frac{18y-34}{3} = \frac{216-36y-180+60y-5y^2-108y+18y^2}{18}$
Досчитать предлагается читателю самостоятельно. В аудитории мы таким не занимались.

1.3.2 №3563

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):
Параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$
Построим график. И на плоскости, и в пространстве.
$V = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} \mathrm{d}y \int\limits_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z$
$\int\limits_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z = z\Big|_0^{x^2+y^2} = x^2 + y^2$
$\int\limits_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = (x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_{y=0}^{y=1-x} = (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3})$
$V = \int\limits_0^1 (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3})\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1 - 3x + 3x^2 - x^3))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1 - 3x + 3x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}(1 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4}) = \ldots$
Сами посчитайте окончательный результат.

1.3.3 №3574

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):
Цилиндрами $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ и плоскостью $z = 0$ $(x \geq 0)$

1.3.4 №3587

Найти двойным интегрированием объемы тел, ограниченных данными поверхностями (входящие в условия задач параметры считаются положительными):
Цилиндром $x^2 + y^2 = 4$, плоскостями $z = 0$ и $z = x + y + 10$

1.4 Домашнее задание

№3565, №3588, №3609, №3610, №3618