

Практическое занятие — 07.09.2023

Методы решения неопределенных интегралов

Метод подстановки

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \dots$$

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t dt$$

$$\dots = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t)$$

Выполним обратную подстановку:

$$\dots = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$$

Этот пример можно решить и интегрированием по частям:

$$u = \sqrt{1-x^2}, du = \frac{-2x dx}{2\sqrt{1-x^2}}, dv = dx, vx$$

$$\dots = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \dots$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+9x^2}} = \dots$$

$$t = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{t}$$

$$dx = \frac{1}{t^2} dt$$

$$\dots = \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{1+\frac{9}{t^2}}} dt = - \int \frac{\frac{t}{t^2} dt}{\sqrt{t^2+3^2}} = - \ln |t + \sqrt{t^2+9}| + C = - \ln |\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 9}| + C$$

Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. Многочлен * тригонометрическую или показательную функцию, u — многочлен, dv — остальное

2. Многочлен * логарифмическую функцию или обратную тригонометрическую функцию, u — функция, dv — остальное

$$\int (x^2 + x) \ln x dx = \dots$$

$$\ln x = u, (x^2 + x) dx = dv$$

$$du = \frac{dx}{x}, v = \int (x^2 + x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

$$\dots = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \frac{dx}{x} = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$$

$$\int (2x + 1) \sin x dx = \dots$$

$$u = 2x + 1, dv = \sin x dx$$

$$du = 2dx, v = -\cos x$$

$$\dots = (2x + 1)(-\cos x) + 2 \int \cos x dx = (2x + 1)(-\cos x) + 2 \sin x + C$$

Интегрирование дробей

Можем интегрировать только правильные дроби:

$$\int \frac{\sqrt{x^3 - x + 5}}{x^2 + 1} = \int x - \int \frac{2x}{x^2 + 1} + \int \frac{5}{x^2 + 1} = \dots$$

Главное: выделить целую часть. Получили отдельные интегралы, которые уже табличные или почти табличные.

$$\dots = \frac{x^2}{2} - \ln |x^2 + 1| + 5 \arctan x + C$$

Кроме того, можем выделять полный квадрат в знаменателе:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C$$

1. Действительные различные корни у знаменателя

$$\int \frac{(7x+8)dx}{(x-3)(x+5)} = \dots$$

Разбиваем эту дробь на две отдельные дроби и подбираем коэффициенты

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5) + B(x-3)}{(x-3)(x+5)}$$

При x : $A + B = 7$

Свободный член: $5A - 3B = 8$

$$A = \frac{29}{8}, B = \frac{27}{8}$$

$$\dots = \int \frac{\frac{29}{8} dx}{x-3} + \int \frac{\frac{27}{8} dx}{x+5} = \frac{29}{8} \ln |x-3| + \frac{27}{8} \ln |x+5| + C$$

2. Действительные кратные корни

$$\int \frac{(7x+8)dx}{(x-3)^2(x+5)^3} = \int \frac{Adx}{x-3} + \int \frac{Bdx}{(x-3)^2} + \int \frac{Cdx}{x+5} + \int \frac{Ddx}{(x+5)^2} + \int \frac{\xi dx}{(x+5)^3} = \dots$$

$$\dots = A \ln |x-3| + \frac{B(x-3)^{-1}}{-1} + C \ln |x+5| + \frac{D(x+5)^{-1}}{-1} + \frac{\xi(x+5)^{-2}}{-2} + C$$

3. Комплексные корни

$$\frac{2x+5}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

$$\int \frac{(2x+5)dx}{(\dots)(\dots)} = A \int \frac{xdx}{x^2+1} + B \int \frac{dx}{x^2+1} + C \int \frac{2xdx}{x^2+3} + D \int \frac{dx}{x^2+3} = \dots$$

Бывают комбинированные случаи:

$$\frac{2x+9}{x^2(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Fx}{x^2+4} + \frac{D}{x^2+4}$$

Интегрирование тригонометрических штук

$\int \sin \alpha x * \cos \beta x dx$, m, n — степени $\sin x$ и $\cos x$

1. m и n — четные

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

2. m или n — нечетное

Например,

$$\int \sin^6 x * \cos^3 x dx = \int \sin^6 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^6 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = .$$

$$\dots = \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{\sin^9 x}{9} + C$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\tan \frac{x}{2} = t$$

$$x = 2 \arctan t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{5+4 \sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4*\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2+8t}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{t} \int \frac{dt}{t^2+2*\frac{4}{5}t+1} = \dots$$

$$\dots = \frac{2}{t} \int \frac{dt}{t^2+2*\frac{4}{5}t+\frac{16}{25}-\frac{16}{25}+1} = \frac{2}{5} \int \frac{d(t+\frac{4}{5})}{(t+\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2} = \frac{2}{3} \arctan \frac{(1+\frac{4}{5})}{3/5} + C = \dots$$

$$\dots = \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{5 \tan \frac{x}{2} + 4}{3}\right) + C$$

Решение определенных интегралов

Не забываем про пределы интегрирования — это критически важно. Если мы их не меняем — мы должны выполнить обратную подстановку обязательно. Если не выполняем обратную подстановку — их поменять обязательно.

Решение задач

1714

$$\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2} dx = \dots$$

$$d(x^3 + 2) = 3x^2 dx$$

$$\dots = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2} dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{1/5} d(x^3 + 2) = \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 2)^{6/5}}{6/5} + C = \dots$$

$$\dots = \frac{5(x^3 + 2)^{6/5}}{18} + C$$

1718

$$\int \frac{(6x-5)dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} = \dots$$

$$d(3x^2 - 5x + 6) = (6x - 5)dx$$

$$\dots = \frac{1}{2} \int \frac{d(3x^2-5x+6)}{\sqrt{3x^2-5x+6}} = \frac{1}{2} \int (3x^2 - 5x + 6)^{-\frac{1}{2}} d(3x^2 - 5x + 6) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3x^2-5x+6}}{\frac{1}{2}}$$

$$\dots = \sqrt{3x^2 - 5x + 6} + C$$

1768

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4} = \dots$$

$$d(e^x) = e^x dx$$

$$\dots = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + C$$

1782

$$\int \frac{x dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \frac{dx}{2x+1} \right) = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \ln(2x+1) \right) = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln(2x+1) + C$$

1792

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \dots$$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A}{x(x+1)}$$

$$\dots = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

1933

$$\int x \cos x = \dots$$

$$u = x, dv = dx$$

$$v = \sin x, v' = x$$

1729

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = \dots$$

$$t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2t dt$$

$$\dots = 2 \int \arctan t * t dt = \dots$$

$$u = \arctan t, dv = t dt$$

$$du = \frac{dt}{1+t^2}, v = \frac{t^2}{2}$$

$$\dots = 2\left(\frac{t^2 \arctan t}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{1+t^2}\right) = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \dots$$

$$\dots = t^2 \arctan t - \int \frac{t^2+t-1}{t^2+t} dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + C$$

2012

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(2x+1)} = \dots$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{2Ax+A+Bx+B}{(x+1)(2x+1)}$$

$$\text{При } x: 2A + B = 1$$

$$\text{Свободный член: } A + B = 0$$

$$A = 1, B = -1$$

$$\dots = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{2x+1} = \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

2013

$$\int \frac{x dx}{2x^2 - 3x - 2} = \dots$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{3+5}{4} = 2$$

$$x_2 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\dots = \int \frac{x dx}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \dots$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+\frac{1}{5}} = \frac{A(x+\frac{1}{2})+B(x-2)}{(x-2)(x+\frac{1}{2})} = \frac{Ax+\frac{A}{2}+Bx-2B}{(x-2)(x+\frac{1}{2})}$$

$$\text{При } x: A + B = 1$$

$$\text{Свободный член: } \frac{A}{2} - 2B = 0$$

$$A = \frac{4}{5}, B = \frac{1}{5}$$

$$\dots = \frac{1}{2} \left(\int \frac{\frac{4}{5} dx}{x-2} + \int \frac{\frac{1}{5} dx}{x+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5} * \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5} * \int \frac{dx}{x+\frac{1}{2}} \right) = \dots$$

$$\dots = \frac{4}{10} \ln |x-2| + \frac{1}{10} \ln |x+\frac{1}{2}| + C$$

2022

$$\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$$

2036

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \dots$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

$$\dots = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C$$

2090

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \cos^2 x dx = \dots$$

$$t = \cos x, dt = -\sin x dx$$

$$\dots = -\int (1 - t^2) t^2 dt = -\int (t^2 - t^4) dt = -\int t^2 dt + \int t^4 dt = \dots$$

$$\dots = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

2091

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \sin x dx = - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = \dots \\ \dots &= - \int \frac{d \cos x}{\cos^4 x} + \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = - \frac{\cos^{-3} x}{-3} + \frac{\cos^{-1} x}{-1} = \dots \\ \dots &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

2100

$$\begin{aligned}\int \tan^5 x dx &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx = \frac{(1-\cos^2 x)^2 \sin x}{\cos^5 x} dx = \dots \\ t &= \cos x, dt = -\sin x dx \\ \dots &= \int \frac{-(1-t^2)^2 dt}{t^5} = - \int \frac{t^4-2t^2+1}{t^5} dt = - \int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{2 dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} = \dots \\ \dots &= \frac{1-4 \cos x}{4 \cos^4 x} - \ln |\cos x|\end{aligned}$$

2110

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5-3 \cos x} &= \dots \\ t &= \tan \frac{x}{2}, x = 2 \arctan t \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \dots &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+5t^2-3+3t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2dt}{8t^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{4t^2+1} = \dots \\ \dots &= \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(2t)^2+1} = \frac{1}{2} \arctan(2 \tan \frac{x}{2}) + C\end{aligned}$$

2116

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{5-4 \sin x+3 \cos x} &= \dots \\ t &= \tan \frac{x}{2}, x = 2 \arctan t \\ dx &= \frac{2dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \dots &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{5+5t^2-8t+3-3t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = -\frac{1}{\tan \frac{x}{2}-2} + C\end{aligned}$$

Двойные интегралы

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left(\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) dy \right)$$

Расставляем пределы

3486

$$x = 0, y = 0, x + y = 2$$

Рисунок:



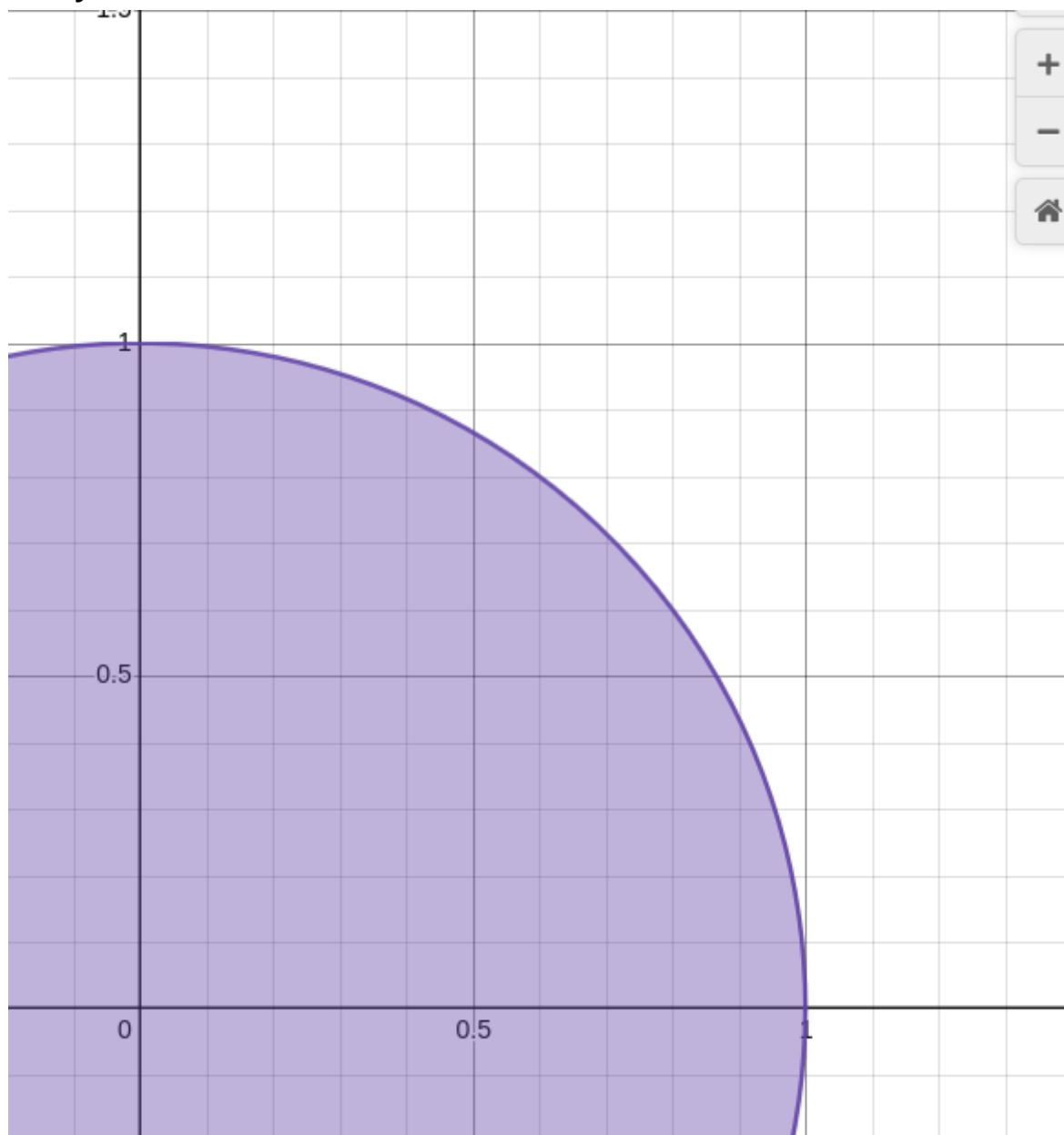
$$\int_0^2 dx \left(\int_0^{2-x} f(x, y) dy \right)$$

$$\int_0^2 dy \left(\int_0^{2-y} f(x, y) dx \right)$$

3487

$$x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

Рисунок:



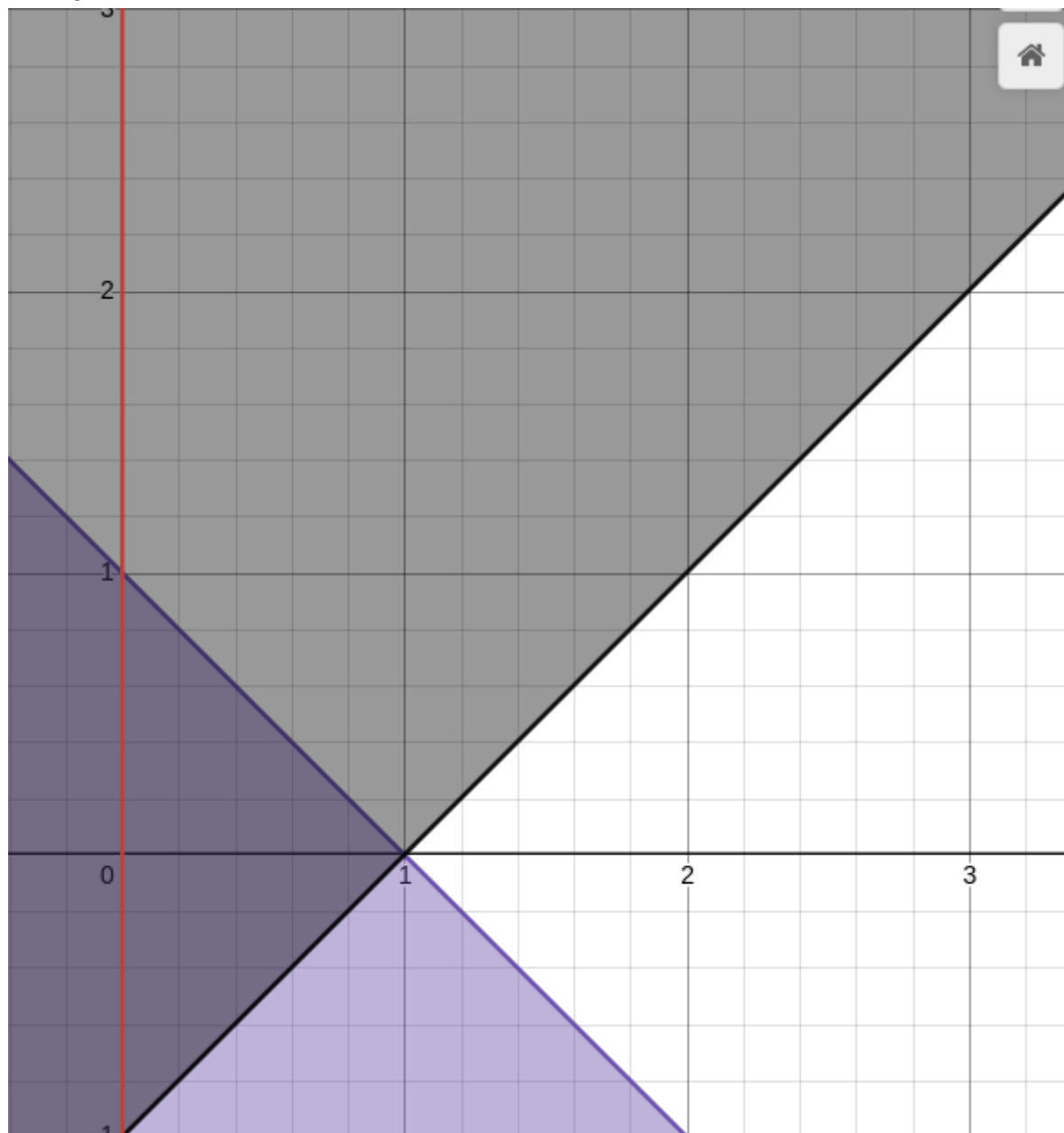
$$\int_0^1 dx \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right)$$

$$\int_0^1 dy \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right)$$

3488

$$x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 0$$

Рисунок:



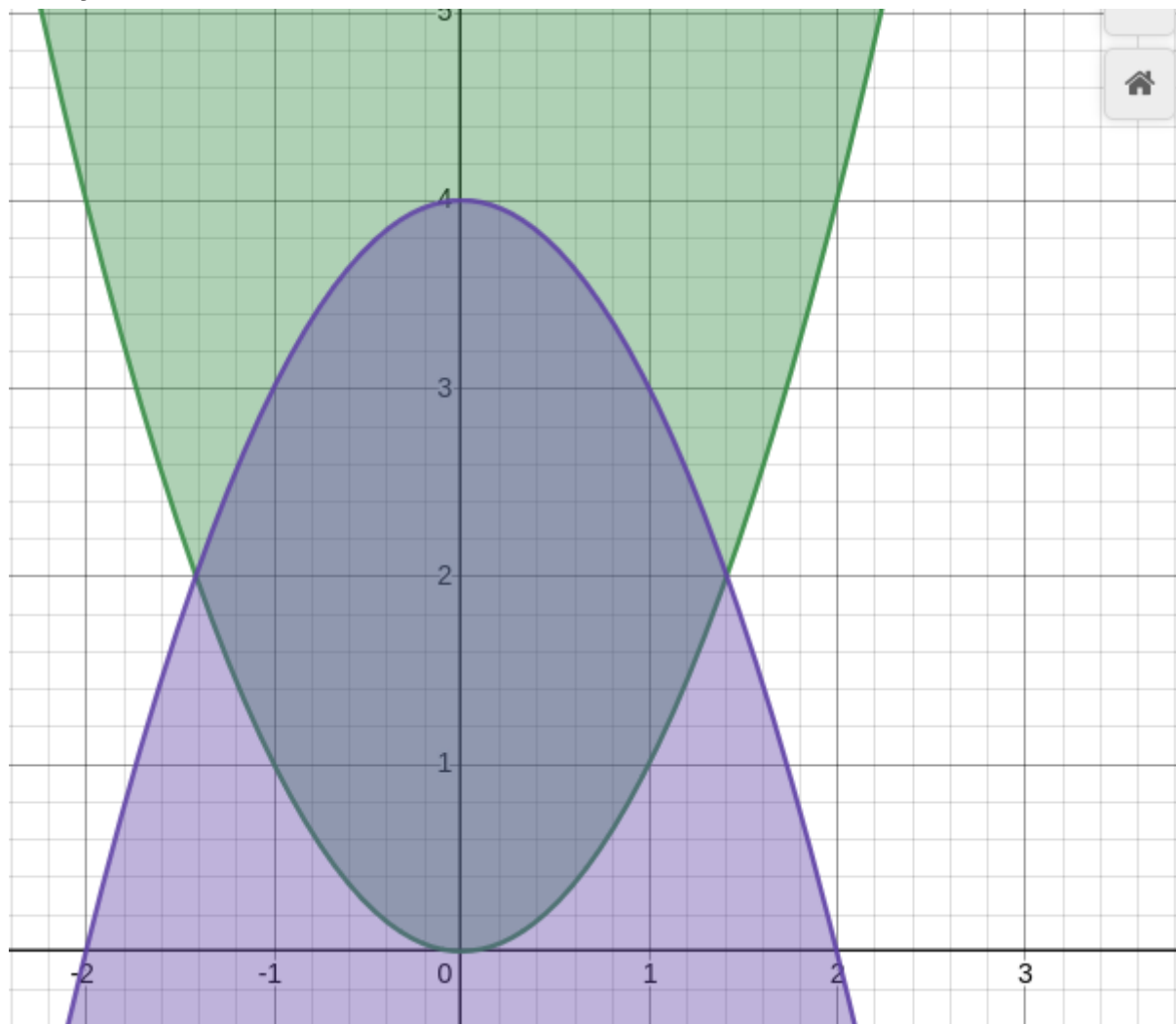
$$\int_0^1 dx \left(\int_{x-1}^{1-x} f(x, y) dy \right)$$

$$\int_{-1}^0 dy \left(\int_0^{y+1} f(x, y) dx \right) + \int_0^1 dy \left(\int_0^{1-y} f(x, y) dx \right)$$

3489

$$y \geq x^2, y \leq 4 - x^2$$

Рисунок:



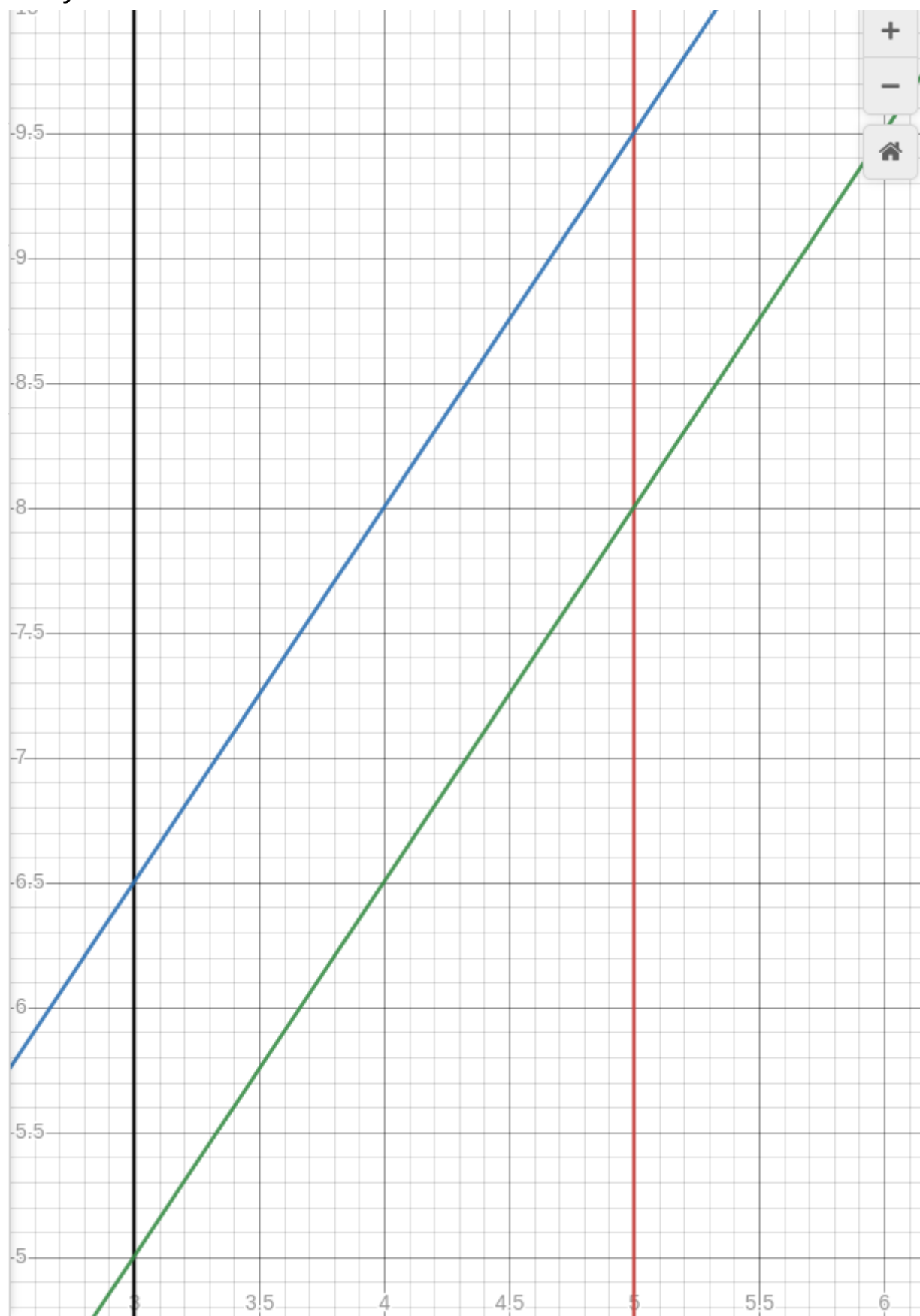
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \left(\int_{x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy \right)$$

$$\int_0^2 dy \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) + \int_2^4 dy \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x, y) dx \right)$$

3485

$$x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0$$

Рисунок:



$$\int_3^5 dx \left(\int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x, y) dy \right)$$

$$3x - 2y + 4 = 0, 2y = 3x + 4, y = \frac{3x+4}{2}$$

$$3x - 2y + 1 = 0, 2y = 3x + 1, y = \frac{3x+1}{2}$$

$$\int_5^{6.5} dy \left(\int_3^{\frac{2y-4}{3}} f(x, y) dx \right) + \int_{6.5}^8 dy \left(\int_{\frac{2y-1}{3}}^{\frac{2y-4}{3}} f(x, y) dx \right) + \int_8^{9.5} dy \left(\int_{\frac{2y-1}{3}}^5 f(x, y) dx \right)$$

$$3x - 2y + 4 = 0, 3x = 2y - 4, x = \frac{2y-4}{3}$$

$$3x - 2y + 1 = 0, 3x = 2y - 1, x = \frac{2y-1}{3}$$

Домашнее задание, Берман

3492, 3493, 3494, 3506 (1, 2, 3), 3508