Интегралы и дифференциальные уравнения

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 31.10.2023

1.1 Дифференциальные уравнения

1.1.1 Уравнения, приводимые к однородным

$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

Возможны варианты в зависимости от значения $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

1. Если этот определитель равен нулю, то это случай, когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$. В этом случае необходимо делать замену, как будет удобно в каждом конкретном случае.

   Допустим, $z = a_1x + b_1y + c_1$, выражаем: $y = \frac{1}{b_1}(z - a_1x - c_1)$, $y' = \frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}$.

   Если мы все это подставим, то получим **уравнение в разделяющихся переменных**, которое мы можем решить.

   Пример №1 $\quad y' = \frac{x+2y-1}{2x+4y+5}$

   Выразим: $z = x + 2y - 1 \implies y = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y' = \frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}$.

   И далее подставим: $\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2} = \frac{z}{2z+7} \iff \frac{1}{2}z' = \frac{z}{2z+7} + \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{2z+2z+7}{2(2z+7)}$.

   Теперь можем интегрировать: $\int \frac{2z+7}{4z+7}\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}x$. Но дробь неправильная, поэтому выделим целую часть, получим: $\frac{1}{2}\int \frac{(4z+7)+7}{4z+7} \iff \frac{1}{2}(\int \mathrm{d}z + \int \frac{7}{4z+7}\,\mathrm{d}z) \iff \frac{1}{2}(z + \frac{7}{4}\ln|4z+7|) = x + C$

   Мы получили неявный вид решения дифференциального уравнения. Единственное, что важно — подставить $x + 2y$ вместо z обратно, и всё будет хорошо: $x + 2y - 1 + \frac{7}{4}\ln|4(x+2y-1)+7| = 2x + K$

2. Если определитель не равен нулю, то есть коэффициенты не пропорциональны: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где α и β — решения системы

   $$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$$

   После того, как мы всё подставим, у нас должно будет получиться что-то вроде $\frac{k_1u+k_2v}{k_3u+k_4v}$. То есть, свободных членов не должно остаться. Делим обе части на u, получаем: $\frac{k_1+k_2\frac{v}{u}}{k_3+k_4\frac{v}{u}}$ — однородное уравнение. Пользуясь заменой $\frac{v}{u} = t$, оставшееся бодренько решаем: $v = ut$, $v'_u = 1 * t + ut'_u$

   Пример №2 $\quad (2x - 4y + 6)\,\mathrm{d}x + (x + y - 3)\,\mathrm{d}y = 0$

   Приведем необходимому виду: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-4y+6}{x+y-3}$. После чего составим и решим систему:

   $$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha - 6 = 0 \\ 1 + \beta - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

   Выполним замену $x = u + 1$, $y = v + 2$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v$:

   $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2(u+1)-4(v+2)+6}{u+1+v+2-3} \iff \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u-4v}{u+v}$. У нас, как и ожидалось, пропали константы. Мы сделали всё правильно. Если бы они не пропали — значит, мы что-то сделали не так. У нас теперь есть однородное уравнение, которое мы легко можем решать: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u-4v}{u+v}$. Поделим на u всю правую часть, получим: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2-4\frac{v}{u}}{1+\frac{v}{u}}$, $\frac{v}{u} = t$, $v = ut$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = t + u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$.

   Осталось сделать уравнение с разделяющимися переменными для этих t и u:
   $t + u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{2-4t}{1+t} = \frac{2-4t-t-t^2}{t+1} = -\frac{t^2+5t-2}{t+1}$. Разделяем переменные: $\frac{t+1}{t^2+5t-2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u}$. Необходимо интегрировать:
   $\int \frac{t+1}{t^2+5t-2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \iff \frac{1}{2}\int \frac{2t+5}{t^2+5t22}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+5t-2} = \ln + \ln c$. Далее: $\frac{1}{2}\ln|t^2+5t-2| + \frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{33}}\ln|\frac{t+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}}{t+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}}| = c_nc_u$.
   Получили ужас. Не будем ничего делать, лишь вернемся к переменной u и потом к x, y.

1.1.2 Линейные уравнения и уравнения Бернулли. Метод вариации произвольной постоянной

Определение 1 ***Линейное уравнение*** *имеет вид:*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Определение 2 ***Уравнение Бернулли*** *имеет вид:*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$

Для обеих видов уравнений:
$y = y_{oo} + \tilde{y}$, $y' + p(x)y = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -p(x)y$, $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x$. Получилось уравнение с разделяющимися переменными, $y_{oo} = \Phi(x) + C$.
Метод вариации произвольной переменной заключается в том, что решение уравнения будем искать в виде похожем на y_{oo}, только константу C мы будем рассматривать как функцию, зависящую от x: $y = \Phi(x) + C(x)$, $y' = \Phi'(x) + C'(x)$. Эти значения мы подставляем в то уравнение, с которым работаем. Если у нас в итоге что-то сокращается — это хорошо; значит, что мы на верном пути. У нас получится уравнение относительно $C(x)$ и x

Пример №1 $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x$

1. $y' - \frac{y}{x} = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$, $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$, $\ln|y| = \ln|x| + \ln C$, $\ln y = \ln C_x$, $y_{oo} = Cx$ — общее решение уравнения с нулём в правой части.
2. $$\begin{cases} y = C(x) \\ y' = C'(x)x + C(x) \end{cases}$$

   Подставляем в исходное уравнение: $C'(x) + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + 2x \iff \frac{\mathrm{d}C(x)}{\mathrm{d}x} = x + 2 \iff \int \mathrm{d}C(x) = \int (x+2)\,\mathrm{d}x$, $C(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + K$. Теперь подставим обратно, получим: $y = (\frac{x^2}{2} + 2x + K) * x = \frac{x^3}{2} + 2x^2 + Kx$, где $y_{oo} = Kx$, $\tilde{y} = \frac{x^2}{2} + 2x^2$

Пример №2 $xy' - 2y = 2x^4$. Но нам это не нравится, уединим y', чтобы всё было симпатичней: $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$

1. Решим уравнение $y' - \frac{2y}{x} = 0$ и запишем его ответ: $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}$, $\ln|y| - 2\ln x + \ln C$, $\ln y = \ln Cx^2$, $y_{oo} = Cx^2$
2. $$\begin{cases} y = C(x) * x^2 \\ y' = C'(x)x^2 + 2x * C(x) \end{cases}$$

   $C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2C(x)x^2}{x} = 2x^3$
   $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\int \mathrm{d}C = 2\int x\,\mathrm{d}x \iff C(x) = \frac{2x^2}{2} + K$
   Получаем: $y = (x^2 + K)x^2 = x^4 + Kx^2$, где $\tilde{y} = x^4$, $y_{oo} = Kx^2$

1.1.3 Метод Бернулли

$y = u * v$, $y' = u'v + uv'$
Имеем уравнение: $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$. Подставим, получим: $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$. Далее выберем такие функции u и v, чтобы $uv' + p(x)uv$ занулилось.

1. $uv' = -p(x)uv$
   $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -p(x)v$
   $\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x$
   Результат должен быть записан: $v = \Phi(x)$ без константы.
2. После наших преобразований имеем: $u'v = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha} \Longrightarrow u' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha-1}$
   $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = q(x)u^{\alpha}\Phi^{\alpha-1}(x)$
   $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha}} = \int q(x)\Phi^{\alpha-1}(x)\,\mathrm{d}x$
   У нас получится решение: $u = F(x) + K$. Таким образом, итоговый ответ: $y = (F(x + K))\Phi(x)$

Пример №1 $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 2x$
$y = uv$, $y' = u'v + uv'$
$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x^2 + 2x$

1. Обнуляем $uv' - \frac{uv}{x}$: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{x} \iff \int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff v = x$

2. Переписываем наше уравнение: $u'v = x^2 + 2x$

   Подставляем: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} * x = x^2 + 2x$

   $\mathrm{d}u = (x+2)\,\mathrm{d}x$

   $u = \frac{x^2}{2} + 2x + K$

   $y = uv = (\frac{x^2}{2} + 2x + K)x = \frac{x^3}{2} + 2x^2 + Kx$

Пример №2 Если имеем уравненине в правой части вроде $y' + 2y = y^2 e^x$, то мы делаем всё то же самое: $y = uv$, $y' = uv' + uv'$
$u'v + uv' + 2uv = u^2 v^2 e^x$

1. $\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2\,\mathrm{d}x$

   $\ln v = -2x$

   $v = e^{-2x}$

2. $u'v = u^2 v^2 e^x \iff u' = u^2 v e^x$

   $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u^2 e^{-2x} * e^x$

   $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int e^{-x}\,\mathrm{d}x$

   $\frac{1}{u} = e^{-x} + C \iff \frac{1}{u} = C + \frac{1}{e^x} = \frac{Ce^x+1}{e^x} \iff u = \frac{e^x}{Ce^x+1}$

   $y = uv = \frac{e^x}{Ce^x+1} e^{-2x} = \frac{1}{e^x(Ce^x+1)}$

Важное замечание Иногда может оказаться, что уравнение не является линейным, если мы считаем y за функцию, а x за переменную, но можно принять x за функцию и y за переменную и сделать его линейным.