Математическая логика и теория алгоритмов

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 12.10.2023

1.1 Алгебра высказываний

Под **высказыванием** будем понимать будет понимать предложение, представляющее собой такое утверждение, о котором можно судить, истинно оно или ложно. По совокупности всех высказываний определяется **функция истинности**, принимающая значение ноль (если высказывание ложно) или один (если высказывание истинно):

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание P истинно} \\ 0, & \text{если высказывание P ложно} \end{cases}$$

Функцию $\lambda(P)$ называют **логическим значением** (значением истинности) высказывания P.

1.1.1 Логические операции

Выражения связываются с помощью **логических операций**.

Эквивалентностью логических высказываний P и Q называется новое высказывание $P \leftrightarrow Q$ (P эквивалентно Q; P необходимо и достаточно для Q; P тогда и только тогда, когда Q; P, если и только если Q), значение истинности которого задается следующей таблицей истинности:

$$\begin{pmatrix} \lambda(P) & \lambda(Q) & \lambda(P \leftrightarrow Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Импликацией логических выражений P и Q называется новое высказывание $P \to Q$ (если P, то Q; из P следует Q; P влечёт Q; P достаточно для Q; Q необходимо для P), значение истинности которого задается следующей таблицей истинности:

$$\begin{pmatrix} \lambda(P) & \lambda(Q) & \lambda(P \to Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В высказывании $P \to Q$ высказывание P называется **посылкой**, а высказывание Q называется **следствием**. Операцию импликации также называют **процессом рассуждения**.

1.1.2 Операции над функциями истинности

1. (a) $0 \wedge 0 = 0$
   (b) $0 \wedge 1 = 0$
   (c) $\lambda(P \wedge Q) = \lambda(P) \wedge \lambda(Q)$
2. (a) $\neg 0 = 1$
   (b) $\neg 1 = 0$
   (c) $\lambda(\neg P) = \neg\lambda(P)$
3. $\lambda(P \vee Q) = \lambda(P) \vee \lambda(Q)$
4. $\lambda(P \to Q) = \lambda(P) \to \lambda(Q)$
5. $\lambda(P \leftrightarrow Q) = \lambda(P) \leftrightarrow \lambda(Q)$