

Математическая логика и теория алгоритмов

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Лекция — 20.10.2023	2
1.1	Конструирование сложных высказываний	2
1.2	Понятие формулы алгебры высказываний	2

1 Лекция — 20.10.2023

1.1 Конструирование сложных высказываний

Запишем базовые высказывания:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. Москва — столица России | 5. Семь меньше четырех |
| 2. Саратов находится на берегу Невы | 6. Волга впадает в Каспийское море |
| 3. Все люди смертны | 7. Пушкин — великий русский математик |
| 4. Сократ — человек | 8. Снег белый |

Из них мы можем сконструировать более сложные, например:

1. Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то Пушкин великий русский математик. Это выражение, которое можно записать как $(A_2 * A_3) \rightarrow A_7$, **истинно**.
$$(A_2 * A_3) \rightarrow A_7 = \lambda[(A_2 * A_3) \rightarrow A_7] = \lambda(A_2 * A_3) \rightarrow \lambda(A_7) = (\lambda(A_2) * \lambda(A_3)) \rightarrow \lambda(A_7) = (0 * 1) = 0 = 0 \rightarrow 0 = 1$$
2. Если Сократ человек и снег белый, то семь меньше четырех. Это выражение, которое можно записать как $(A_4 * A_8) \rightarrow A_5$, **ложно**.

1.2 Понятие формулы алгебры высказываний

Определение 1 *Переменные, вместо которых можно подставлять высказывание (то есть, переменные, пробегающие множество высказываний), называют **пропозиционными переменными** (высказывательными переменными, переменными высказываниями)*

В дальнейшем пропозиционные переменные будем обозначать заглавными латинскими буквами (или этими же буквами с индексами).

1. Каждая отдельно взятая пропозиционная переменная является **формулой алгебры высказываний**
2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то выражения, построенные путем их объединения с помощью логических операций, также будут являться **формулами алгебры высказываний**.
3. Никаких других **формул алгебры высказываний** кроме получаемых с помощью пунктов 1 и 2 нет

Подобные определения называются **индуктивными**. В них имеются

1. **прямые пункты** (в данном случае 1 и 2), где задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином
2. **косвенный пункт** (в нашем случае 3), в котором говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, заданными в прямых пунктах.

Среди прямых пунктов имеются

1. **базисные пункты** (в данном случае пункт 1), где указываются некоторые конкретные объекты, именуемые в дальнейшем определяемым термином;
2. **индуктивные пункты** (в данном случае пункт 2), где даются правила получения определяемых объектов (в частности из объектов, перечисленных в базисных пунктах).

Индуктивный характер определения формулы позволяет решать две взаимнообратные задачи:

1. **Строить** новые все более сложные формулы из уже имеющихся;
2. **Определять**, будет ли данное выражение, составленное из пропозиционных переменных, символов логических операций и скобок, формулой алгебры высказываний.

Из определения следует, что для каждой формулы **существует конечная последовательность всех её подформул**. То есть, такая конечная последовательность, которая начинается с входящих в формулу пропозиционных переменных, заканчивается самой этой формулой и каждый член этой последовательности, не являющийся пропозиционной переменной, если бы отрицание уже имеющегося члена этой последовательности либо получается из двух уже имеющихся членов этой последовательности, их соединением с помощью одного из знаков логических операций и заключением полученного выражения в скобки.

Такую последовательность всех подформул данной формулы иногда называют **порождающей последовательностью** данной формулы и наличие такой последовательности у логического выражения **служит критерием того, что выражение является формулой**.