Математическая логика и теория алгоритмов

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Лекция — 22.09.2023

1.1 Исчисление высказываний

Определение 1 ***Формальное исчисление*** *I определено, если выполняются следующие условия:*

1. *Имеется некоторое множество $A(I)$ — алфавит исчислениия I. Его элементы называются символами. Конечные последовательности символов называются словами исчисления. Через $W(I)$ обозначим множество всех слов алфавита исчисления I.*

2. *Пусть задано множество $E(I)$, которое является подмножеством $W(I)$, называемое множеством выражений исчисления I. Элементы множества $E(I)$ называются формулами (секвенциями).*

3. *Выделено подмножество $A_x(I)$, которое является подможеством $E(I)$ выражений исчисления I, называемое аксиомами исчисления I.*

4. *Имеется конечное множество $R(I)$ частичных операций $R_1, R_2, \ldots, R_n$ на множестве $E(I)$, называемых правилами вывода исчислений I.*

Таким образом, любое исчисления определяется четырьмя подмножествами: $A(I)$, $E(I)$, $A_x(I)$, $R(I)$.

Если набор выражения $(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \Phi)$ принадлежит правилу R_i, то выражение $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ называются посылками, а выражение Φ называется непосредственным следствием выражения $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ по правилу R_i (заключением правила R_i) и записывается следующим образом: $\frac{\Phi_1, \ldots, \Phi_m}{\Phi} i$ (индекс i может опускаться, если понятно, о каком правиле идет речь)

Определение 2 ***Выводом исчисления*** *I называется последовательность выражений $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ такая, что для любого $1 \leq i \leq n$ выражение Φ_i есть либо аксиома исчисления I, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих выражений.*

Определение 3 *Выражение Φ называется* ***теоремой исчисления*** *I, вводимой или доказываемой в I, если существует вывод $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, \Phi$, который называется выводом выражения Φ или доказательством теоремы Φ.*

Пусть $E(I)$ — множество программ P_f, производящих вычисление значений одноместных числовых функций f, а $A_x(I)$ — **множество простых программ**. Пусть $P_f P_g \subseteq E(I)$. $P_f \circ P_g$ обозначим программу, по начальным данным которой вычисляется функция f, и потом вывод которой используется в качестве начальных функции g. Правило вывода обозначается следующим образом: $\frac{P_f; P_g}{P_f \circ P_g}$.
В общем случае не существует алгоритм, с помощью которого можно для произвольного выражений Φ формального исчисления I, за конечное число определить, является ли Φ выводимым в I, или нет.
Если такой алгоритм существует, то исчисление называется **разрешимым**, если же такой алгоритм не существует, то исчисление называется **неразрешимым**.
Исчисления называется **непротиворечивым**, если не все его выражения доказуемые.
Рассмотрим исчисления, лежащие в основе алгебры логики:

1. **Исчисление высказываний Генценовского типа, предложенных Генценом**. В качестве выражений используются секвенции, построенные из формул алгебры логики. Эти исчисления будем обозначать как ИС.

2. **Исчисление высказываний Гильбертовского типа, предложенных Гильбертом**. В нем выражениями являются непосредственно формулы алгебры логики. Эти исчисления будем обозначать как ИВ.

Эти исчисления **являются эквивалентными** в том смысле, что **доказуемыми в них являются тождественно истинные формулы**.

1.1.1 Исчисление высказываний Генценовского типа

Алфавит исчисления $A(I)$ состоит из букв $A, B, Q, P, R, \ldots$ и возможно других букв, и возможно с индексами, которые называются **пропозиционными элементами**. Определены следующие логические символы-связки: отрицание ($\neg$), конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$), импликация ($\rightarrow$), следование ($\vdash$), вспомогательные символы ( ) и ,
Множество формул исчисления высказываний Генценовского типа определяется индуктивно:

1. Все пропозиционные переменные являются формулами исчисления высказываний. Такие формулы называются **элементарными** (атомарными).

2. Пусть ϕ, ψ есть некоторые формулы в рассматриваемом нами исчислении высказываний. Любые формулы, построенные из этих формул с помощью логических операций **также являются формулами данного исчисления высказываний**.

Выражение является формулой исчисления высказываний тогда и только тогда, когда это может быть установлено с пунктов 1 и 2.
Секвенциями называются конечные выражения следующих двух видов, где $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$ — формулы исчисления высказываний:

1. $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ (из истинности формул $\phi_1, \ldots, \phi_n$ следует ψ)
2. $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash$ (система формул $\phi_1, \ldots, \phi_n$ является противоречивой)

Последовательность формул $\phi_1, \ldots, \phi_n$ будем обозначать через Γ. В нашем случае получается:

1. $\Gamma \vdash \psi$
2. $\Gamma \vdash$

При этом последовательность Γ считается пустой при $n = 0$. Запись $\vdash \psi$ и $\vdash$ **также являются секвенциями**, первая из которых может читаться как «утверждение доказуемости формулы ψ.
Таким образом, наряду с формулами, символизирующими простые или сложные высказывания, секвенцией являются записи утверждений, в которых выделяются посылки и заключения.
Множество аксиом исчисления высказываний Генценовского типа **определяется следующей схемой секвенций**:

1. $\phi \vdash \phi \; \forall \; \phi \in E(I)$.