Математическая логика и теория алгоритмов

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 06.10.2023

1.1 Алгебра высказываний

Алгебра высказываний изучает способы построения высказываний из имеющихся высказываний, закономерности таких способов сочетания высказываний, закономерности таких способов сочетания высказываний. Алгебра высказываний является фундаментом математической логики.

2 Лекция — 12.10.2023

2.1 Алгебра высказываний

Под **высказыванием** будем понимать будет понимать предложение, представляющее собой такое утверждение, о котором можно судить, истинно оно или ложно. По совокупности всех высказываний определяется **функция истинности**, принимающая значение ноль (если высказывание ложно) или один (если высказывание истинно):
$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание P истинно} \\ 0, & \text{если высказывание P ложно} \end{cases}$
Функцию $\lambda(P)$ называют **логическим значением** (значением истинности) высказывания P.

2.1.1 Логические операции

Выражения связываются с помощью **логических операций**.
Эквивалентностью логических высказываний P и Q называется новое высказывание $P \leftrightarrow Q$ (P эквивалентно Q; P необходимо и достаточно для Q; P тогда и только тогда, когда Q; P, если и только если Q), значение истинности которого задается следующей таблицей истинности:

$$\begin{pmatrix} \lambda(P) & \lambda(Q) & \lambda(P \leftrightarrow Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Импликацией логических выражений P и Q называется новое высказывание $P \to Q$ (если P, то Q; из P следует Q; P влечёт Q; P достаточно для Q; Q необходимо для P), значение истинности которого задается следующей таблицей истинности:

$$\begin{pmatrix} \lambda(P) & \lambda(Q) & \lambda(P \to Q) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В высказывании $P \to Q$ высказывание P называется **посылкой**, а высказывание Q называется **следствием**. Операцию импликации также называют **процессом рассуждения**.

2.1.2 Операции над функциями истинности

1. (a) $0 \wedge 0 = 0$
   (b) $0 \wedge 1 = 0$
   (c) $\lambda(P \wedge Q) = \lambda(P) \wedge \lambda(Q)$
2. (a) $\neg 0 = 1$
   (b) $\neg 1 = 0$
   (c) $\lambda(\neg P) = \neg\lambda(P)$
3. $\lambda(P \vee Q) = \lambda(P) \vee \lambda(Q)$
4. $\lambda(P \to Q) = \lambda(P) \to \lambda(Q)$
5. $\lambda(P \leftrightarrow Q) = \lambda(P) \leftrightarrow \lambda(Q)$

3 Лекция — 20.10.2023

3.1 Конструирование сложных высказываний

Запишем базовые высказывания:

1. Москва — столица России
2. Саратов находится на берегу Невы
3. Все люди смертны
4. Сократ — человек
5. Семь меньше четырех
6. Волга впадает в Каспийское море
7. Пушкин — великий русский математик
8. Снег белый

Из них мы можем сконструировать более сложные, например:

1. Если Саратов находится на берегу Невы и все люди смертны, то Пушкин великий русский математик. Это выражение, которое можно записать как $(A_2 * A_3) \to A_7$, **истинно**.

   $(A_2 * A_3) \to A_7 = \lambda[(A_2 * A_3) \to A_7] = \lambda(A_2 * A_3) \to \lambda(A_7) = (\lambda(A_2) * \lambda(A_3)) \to \lambda(A_7) = (0 * 1) = 0 = 0 \to 0 = 1$

2. Если Сократ человек и снег белый, то семь меньше четырех. Это выражение, которое можно записать как $(A_4 * A_8) \to A_5$, **ложно**.

3.2 Понятие формулы алгебры высказываний

Определение 1 *Переменные, вместо которых можно подставлять высказывание (то есть, переменные, пробегающие множество высказываний), называют* ***пропозиционными переменными*** *(высказывательными переменными, переменными высказываниями)*

В дальнейшем пропозиционные переменные будем обозначать заглавными латинскими буквами (или этими же буквами с индексами).

1. Каждая отдельно взятая пропозиционная переменная является **формулой алгебры высказываний**
2. Если F_1 и F_2 — формулы алгебры высказываний, то выражения, построенные путем их объединения с помощью логических операций, также будут являться **формулами алгебры высказываний**.
3. Никаких других **формул алгебры высказываний** кроме получаемых с помощью пунктов 1 и 2 нет

Подобные определения называются **индуктивными**. В них имеются

1. **прямые пункты** (в данном случае 1 и 2), где задаются объекты, которые в дальнейшем именуются определяемым термином
2. **косвенный пункт** (в нашем сулчае 3), в котором говорится, что такие объекты исчерпываются объектами, заданными в прямых пунктах.

Среди прямых пунктов имеются

1. **базисные пункты** (в данном случае пункт 1), где указываются некоторые конкретные объекты, именуемые в дальнейшем определяемым термином;
2. **индуктивные пункты** (в данном случае пункт 2), где даются правила получения определяемых объектов (в частности из объектов, перечисленных в базисных пунктах).

Индуктивный характер определения формулы позволяет решать две взаимнообратные задачи:

1. **Строить** новые все более сложные формулы из уже имеющихся;
2. **Определять**, будет ли данное выражение, составленние из пропозиционных переменных, символов логических операций и скобок, формулой алгебры высказываний.

Из определения следует, что для каждой формулы **существует конечная последовательность всех её подформул**. То есть, такая конечная последовательность, которая начинается с входящих в формулу пропозиционных переменных, заканчивается самой этой формулой и каждый член этой последовательности, не являющийся пропозиционной переменной, если бы отрицание уже имеющегося члена этой последовательности либо получается из двух уже имеющихся членов этой последовательности, их соединением с помощью одного из знаков логических операций и заключением полученного выражения в скобки.
Такую последовательность всех подформул данной формулы иногда называют **порождающей последовательностью** данной формулы и наличие такой последовательности у логического выражения **служит критерием того, что выражение является формулой**.