

Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Практическое занятие — 14.10.2023	2
1.1	Решение задач	2
1.2	Домашнее задание	3

1 Практическое занятие — 14.10.2023

1.1 Решение задач

Пример №1 За 1 минуту на станцию скорой помощи поступает в среднем 3 звонка. Какова вероятность следующих событий:

1. за 2 минуты поступит менее 5 звонков
2. за 2 минуты поступит не менее 5 звонков

Решение:

$$1. P_2(k < 5) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) + P_2(4) = \frac{6^0}{0!}e^{-6} + \frac{6^1}{1!}e^{-6} + \frac{6^2}{2!}e^{-6} + \frac{6^3}{3!}e^{-6} + \frac{6^4}{4!}e^{-6} = e^{-6}(1 + 6 + 18 + 36 + 54) = \frac{115}{e^6} = 0.285$$

$$2. P_2(k \geq 5) = 1 - P_2(k < 5) = 1 - 0.285 = 0.715$$

Пример №2 Вероятность того, что товар мяскокомбината не пройдет проверку на соответствие ГОСТ: $p = 0.2$. Какова вероятность того, что в партии из 400 изделий непроверенных окажется от 70 до 100?

Решение:

$$P_{400}(70; 100) \approx \dots$$

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0.2}{\sqrt{400 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} = \frac{-10}{8} = -1.25$$

$$x_2 = \frac{100 - 80}{8} = \frac{20}{8} = 2.5$$

$$\dots = \Phi_0(2.5) - \Phi_0(-1.25) = 0.4938 + 0.3944 \approx 0.8882$$

Ответ: 0.8882

Пример №3 При проведении испытаний с лазерными импульсами вероятность ошибки p составляет 0.1. Сколько испытаний нужно провести, чтобы с вероятностью 0.95 относительная частота появления ошибки отклонилась от постоянной вероятности не более чем на 0.03?

Решение:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| \leq 0.03\right) = 0.95$$

$$2\Phi_0\left(\epsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0.95$$

$$\Phi_0\left(0.03 \sqrt{\frac{n}{0.1 \cdot 0.9}}\right) = 0.475$$

$$\text{Находим по таблице: } 0.1 \sqrt{n} = 1.96$$

Ответ: $n = 384$

Пример №4 Поток заявок, поступающий на телефонную станцию, представляет собой простейший поток. Количество вызовов за час составляет 30. Найти вероятность того, что за минуту поступит не менее 2 вызовов.

Решение:

$$P = 1 - (P_1(0) + P_1(1)) = 1 - \left(\frac{(0.5 \cdot 1)^0 e^{-0.5 \cdot 1}}{0!} + \frac{(0.5 \cdot 1)^1 e^{-0.5 \cdot 1}}{1!}\right) = 0.0902040$$

Ответ: $P = 0.0902040$

Пример №5 При работе электронно-вычислительной машины время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее количество сбоев за сутки — 1.5. Найти вероятность следующих событий:

1. За двое суток не будет ни одного сбоя
2. В течение суток произойдет хотя бы один сбой
3. За неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев

Решение:

$$1. P_2(0) = \frac{1}{1}e^{0-3} = \frac{1}{e^3} = 0.0498$$

$$2. P_1(\geq 1) = 1 - P_1(0) = 1 - e^{-1.5} = 1 - \frac{1}{e^{1.5}} = 0.777$$

$$3. P_7(\geq 3) = 1 - P_7(0) - P_7(1) - P_7(2) = 1 - e^{-10.5} \left(1 + \frac{10.5}{1!} + \frac{10.5^2}{2!}\right) = 0.998$$

Пример №6 На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 1 минуту горит зеленый свет и 0.5 минуты красный; затем опять 1 минуту горит зеленый свет и 0.5 минуты красный; и так далее. В какой-то случайный момент времени подъезжает автомобиль. Найти вероятность того, что он проедет его, не останавливаясь. Каково среднее время ожидания?

Решение:

Гипотезы:

1. H_1 — приехал на красный
2. H_2 — приехал на зелёный

Вероятности наступления гипотез:

1. $P(H_1) = \frac{1}{3}$
2. $P(H_2) = \frac{2}{3}$

$$T = \frac{2}{3} * 0 + \frac{1}{3} * \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Ответ: $\frac{2}{3}; \frac{1}{12}$

Пример №7 Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с $\lambda = 3$. Каждая атака с вероятностью 0.4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить

1. Вероятность поражения бомбардировщика
2. Ту же вероятность, если количество атак равно 3

Решение:

1. $\lambda = np = 3 * 0.4 = 1.2$
 $P = 1 - P_3(1) = 1 - 0.361 = 0.639$
2. $P = 1 - 0.6^3 = 0.784$

Пример №8 Производится стрельба тремя независимыми выстрелами по цели, имеющей вид полосы. Ширина полосы 20 метров. Прицеливание производится по средней линии полосы. Систематическая ошибка отсутствует. Среднее квадратическое отклонение — 16 метров. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

Решение:

$$P = 2\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) - 1 = \dots$$

$$\dots = 2 * \Phi(0.63) - 1 = 2 * \left(\frac{1}{2} + 0.2357\right) - 1 = 0.4714$$

Ответ: 0.4714

1.2 Домашнее задание

Решить задачи с.56, №5–№11 (простое можно не решать)