Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 28.10.2023

1.1 Непрерывные случайные величины

1.1.1 Решение задач

Пример №1 В стране пять крупных автогигантов. В кризисных условиях риск того, что завод обанкротится, составляет 30%. Написать закон распределения автогигантов, которые могут обанкротиться в предстоящий кризисный период. Найти математическое ожидание и дисперсию.
Используем биномиальное распределение, x — количество возможно обанкротившихся заводов:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 0.7^5 & 5*0.3*0.7^4 & 10*0.3^2*0.7^3 & 10*0.3^3*0.7^2 & 10*0.3^4*0.7 & 0.3^5 \\ & 0.168 & 0.36 & 0.31 & 0.132 & 0.028 & 0.002 \end{pmatrix}$$

1. $M(x) = 5 * 0.3 = 1.5$
2. $D(x) = 1.05$

Таким образом, ожидать можно, что штуки две автогигантов рухнут, а чтобы все рухнули — можно не ожидать, **всё нормально**.

Пример №2 Количество ДТП в городе за неделю является случайной величиной, распределенной согласно Пуассоновскому распределению со средним значением, равным трём. **Какова вероятность того, что случится меньше трех ДТП**?
$M(x) = \lambda = 3$
$P(x < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2}) \approx 0.42$
Ответ: 0.42

Пример №3 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ (x-1)^2, \ 1 < x \leq 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $(1.2; 1.6)$
2. Принадлежашее $[1.7; 2.3]$
3. Принадлежащее $\{x : x > 1.5\}$
4. Принадлежащее $\{x, \ x \leq 1.3\}$

Решение:

1. $P(1.2 < x < 1.6) = F(1.6) - F(1.2) = 0.32$
2. ...
3. $P(1.5 < x < +\infty) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.25 = 0.75$
4. $P(1.3 < x < +\infty) = F(1.3) = 0.09$

Пример №4 Пусть $f(x) = \frac{c}{1+9x^2}$. Найти значение c.
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 1$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{c\,\mathrm{d}x}{1+9x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int\limits_a^b \frac{c}{3} \operatorname{arctg} 3x \Big|_a^b = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to+\infty} \frac{c}{3}(\operatorname{arctg} 3b - \operatorname{arctg} 3a) = \frac{c}{3}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi c}{3} = 1 \implies c = \frac{3}{\pi}$
Ответ: $\frac{3}{\pi}$

Пример №5 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 2 \\ 2x - 4,\ 2 < x \le 3 \\ 0,\ x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$:

1. Если $x \in (-\infty; 2]$

   $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0 \, \mathrm{d}t = 0$

2. Если $x \in (2; 3]$

   $F(x) = \int\limits_{2}^{x} (2x - 4) \, \mathrm{d}x = (x^2 - 4x)\Big|_2^x = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

3. Если $x \in (3; +\infty)$

   $F(x) = 1$

Пример №6 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 2e^{-2x},\ x > 0 \end{cases}$$

Определить **математическое ожидание**.
$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} x 0 \, \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} x 2e^{-2x} \, \mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-2x} \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to +\infty} 2 \int\limits_{0}^{b} x e^{-2x} \, \mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = 2e^{-2} \, \mathrm{d}x & v = -e^{-2x} \end{vmatrix} =$
$\lim\limits_{b \to +\infty} (-xe^{-2x}\Big|_0^b + \int\limits_{0}^{b} e^{-2x} \, \mathrm{d}x) = \lim\limits_{b \to +\infty} (-be^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^b) = \lim\limits_{b \to +\infty} (-be^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}) = 0.5$

Пример №7 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1 \\ -6x^2 + 18x - 12,\ 1 < x < 2 \\ 0, x \ge 2 \end{cases}$$

Найти: $M_e x$
Для того, чтобы найти $M_e x$, необходимо найти $F(x)$.
$\int\limits_{1}^{x} (-6x^2 + 18x - 12) \, \mathrm{d}x = -2x^3 + 9x^2 - 12x\Big|_1^x = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5,\ 1 < x < 2 \\ 1,\ x \ge 2 \end{cases}$$

$$-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

1.2 Равномерное распределение

Говорят, что СВ имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ $[a, b]$, где $a, b \in R$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c,\ x \in (a, b) \\ 0,\ x \notin (a, b) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in (a, b) \\ 0,\ x \notin (a, b) \end{cases}$$

1.2.1 Функция распределения

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, \ a \leq x < b \\ 1, \ x \geq b \end{cases}$$

1.2.2 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание:** $M(x) = \frac{a+b}{2}$
2. **Дисперсия**: $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. **Значение медианы**: $\frac{a+b}{2}$
4. **Значение моды**: любое число из $[a, b]$
5. **Коэффициент асимметрии**: 0
6. **Эксцесс**: $-\frac{6}{5}$

1.2.3 Решение задач

Пример №1 В некотором городе трамвай ходит по расписанию с интервалом 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай более 2 минут.
Ответ: $P = 0.8$

Пример №2 Обследуются животные, каждое из которых с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализов крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди этих n животных хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число животных N. Предлагается несколько способов обследования:

1. **Обследовать всех этих животных**, проведя N анализов;
2. **Вести обследование по группам**, смешав сначала кровь группы из n животных, если все хорошо — перейти к следующей группе, если нет — сделать анализ каждого из животных.

Определить, какой способ обследования наиболее выгодный (в плане минимального проведения анализов): первый или второй?
Закон распределения для группы животных:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & n+1 \\ p & (1-p)^n & 1-(1-p)^n \end{pmatrix}$$

$M(x_1) = n$
$M(x_2) = (1-p)^n + (n+1)(1-(1-p)^n) = (1-p)^n + n - n(1-p)^n + 1 - (1-p)^n = n - n(1-p)^n + 1$
Предполагаем, второй способ выгоднее: $n - n(1-p)^n + 1 > n \iff n(1-p)^n < 1$ — **если это значение меньше единице, используем второй способ; если больше — первый способ**.

1.3 Домашнее задание

Задание №1 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ (x-1)^2, \ 1 < x \leq 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежашее $[1.7; 2.3]$

Решение (возможно, неправильное):
$P(1.7 \leq x \leq 2.3) = 1 - ((1 - F(2.3)) + F(1.7)) = 1 - (0 + 0.49) = 0.51$
Ответ (возможно, неправильный): 0.51

Задание №2 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \leq 2 \\ (x-2)^2,\ 2 < x \leq 3 \\ 1,\ x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$

Решение (возможно, неправильное):

$\int\limits_2^x ((x-2)^2) = (4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3})\Big|_2^x = (4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}) - (8 - 8 + \frac{8}{3}) = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$

Ответ (возможно, неправильный):

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \leq 2 \\ 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3},\ 2 < x \leq 3 \\ 1,\ x > 3 \end{cases}$$