Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 13.10.2023 **2**
1.1 Решение задач 2

2 Практическое занятие — 27.10.2023 **4**
2.1 Случайные величины 4
2.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ) 4

1 Практическое занятие — 13.10.2023

$P_85 = C_8^5(\frac{1}{2})^8 = 7 * 2^3 * \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$ — вероятность выиграть пять партий из восьми у равносильного противника
$P_43 = C_4^3(\frac{1}{2})^4 = 4 * \frac{1}{2^4} = \frac{8}{32}$ — вероятность выиграть четыре партии из восьми у равносильного противника

1.1 Решение задач

Задача №1 Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятность 0.2 оказывается брюнетом, 0.3 — шатеном, 0.4 — блондином, 0.1 — рыжим. Выбирается группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

1. Событие A — хотя бы один рыжий
2. Событие B — в составе группы не меньше четырех блондинов
3. Событие C — в составе группы равное число блондинов и шатенов

Решение:

1. Вероятность того, что есть хотя бы один рыжий:
   $P(A) = 1 - 0.9^6 \approx 0.468$
2. Вероятность того, что не меньше четырех блондинов:
   $P(B) = C_6^4 0.4^4 0.6^{6-4} + C_6^5 0.4^5 0.6^{6-5} + C_6^6 0.4^6 0.6^{6-6} = 0.1792$
3. Вероятность того, что равное число блондинов и шатенов:
   $P(C) = P(C_{00}) + P(C_{11}) + P(C_{22}) + P(C_{33})$
   $P(C_{00}) = (1 - 0.7)^6 \approx 0.0007$
   Вероятность того, что будет один блондин, один шатен и четыре остальных:
   $P(C_{11}) = P_6(1;1;4) = \frac{6!}{1!1!4!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^4 \approx 0.03$
   Вероятность того, что будет два блондина, два шатена и два остальных:
   $P(C_{22}) = P_6(2;2;2) = \frac{6!}{2!2!2!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^2 \approx 0.1215$
   Вероятность того, что будет три блондина, три шатена и ноль остальных:
   $P(C_{33}) = P_6(3;3) = \frac{6!}{3!3!} * 0.3 * 0.4 \approx 0.03$
   $P(C) = 0.0007 + 0.03 + 0.1215 + 0.03 \approx 0.18$

Задача №2 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель 0.4. Если в цель попал один снаряд, он ее поражает с вероятностью 0.3. Если в цель попало два снаряда — с вероятностью 0.7. Если в цель попало три снаряда — с вероятностью 0.9. **Найти полную вероятность поражения цели**.
Гипотезы:

1. H_1 — попал один снаряд
2. H_2 — попало два снаряда
3. H_3 — попало три снаряда

Найдем вероятности для каждой из них:

1. $P(H_1) = C_3^1 * 0.4 * 0.6^2 = 0.432$
2. $P(H_2) = C_3^2 * 0.4^2 * 0.6 = 0.288$
3. $P(H_3) = 0.4^3 = 0.064$

Ответ:
$P(A) = 0.432 * 0.3 + 0.288 * 0.7 + 0.064 * 0.9 = 0.3888$

Задача №3 Имеется n лунок, по которым случайным образом разбрасывается m шариков. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет ровно k шариков.
Ответ:
$P(A) = C_m^k * (\frac{1}{n})^k * (1 - \frac{1}{n})^{m-k}$

Задача №4 Мишень состоит из яблока и двух колец. При одном выстреле вероятность попадания в яблоко равняется 0.4, вероятность попадания в первое кольцо — 0.5, вероятность попадания во второе кольцо — 0.6, вероятность непопадания — 0.3.
По мишени производится пять выстрелов. **Найти вероятность того, что они дадут два попадания в яблоко и одно попадание во второе кольцо**.
Ответ:
$P(A) = P_5(2; 0; 1; 2) = \frac{5!}{2!*0!*1!*2!} * 0.4^2 * 0.5^0 * 0.6^1 * 0.3^2 = 0.2592$

Задача №5 Производится стрельба пятью снарядами по группе, состоящей из трех целей. Обстрел ведется в следующем порядке: сначала обстреливается первая цель и огонь по ней ведется до тех пор, пока она или не будет поражена, или не кончатся все пять снарядов. После поражения обстрел переходит на следующую цель и так далее. Вероятность поражения цели при стрельбе по ней одним выстрелом — p
Найти вероятности того, что будет поражено:

1. 0 целей
2. 1 цель
3. 2 цели
4. 3 цели

Решение:

1. $P_0 = (1-p)^5$
2. $P_1 = P_5(1) = C_5^1 p(1-p)^4$
3. $P_2 = P_5(2) = C_5^2 p^2(1-p)^3$
4. $P_3 = P_5(3) = C_5^3 p^3(1-p)^2$

Задача №6 Прибор, состоящий из четырех узлов, работал в течение времени t. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за это время t равна 0.7. По истечении времени t прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ. Найти вероятность того, что через время 2τ после остановки прибор будет готов для нормальной работы.
Ответ:
$P = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2 = C_4^0 * 0.3^0 * 0.7^4 + C_4^1 * 0.3^1 * 0.7^3 + C_4^2 * 0.3^2 * 0.7^2 = 0.9163$

Задача №7 В урне имеется k шаров. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ может оказаться белым или черным. Из урны вынимается n раз по одному шару. Причем каждый вынутый шар каждый раз возвращается обратно и шары перемешиваются. Среди вынутых n шаров m шаров оказались белыми. **Найти вероятность того, что из k шаров в урне ровно l белых**.
Формула Байеса:
$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
где

1. $P(A)$ — априорная вероятность гипотезы A
2. $P(A|B)$ — вероятность гипотезы A при наступлении события B
3. $P(B|A)$ — вероятность наступления события B при истинности гипотезы A
4. $P(B)$ — полная вероятность наступления события B

Решение:
$P(H_l) = C_k^l (\frac{1}{2})^k$
$P(A|H_l) = C_n^m (\frac{l}{k})^m (1 - \frac{l}{k})^{n-m}$
$P(H_l|A) = \frac{P(A|H_l)P(H_l)}{P(A)}$

2 Практическое занятие — 27.10.2023

2.1 Случайные величины

Случайные величины разделяются на

1. **Дискретные** — конечное количество; например, цифры на кубике.
2. **Непрерывные** — те случайные величины, которые разделяют сплошь промежуток, их может быть бесконечно много.

2.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ)

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между полученными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.
Его можно задать:

1. таблично;
2. графически;
3. аналитически (в виде формулы).

Ограничение:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Функция распределения обозначается следующим образом: $F_X(x)$, $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина примет значение **строго меньше** x.
Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$

Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание**: $M(x)$, m_x, $E(x)$ — характеризует среднее арифметическое.

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

   (a) Матожидание от любой константы равно константе: $M(c) = c$
   (b) Константы выносятся за знак матожидания: $M(cx) = cM(x)$
   (c) Матожидание суммы равно сумме матожиданий: $M(x + y) = M(x) + M(y)$
   (d) Матожидание произведения равно произведению матожиданий: $M(x * y) = M(x) * M(y)$

Отклонение от математического ожидания:

$$X - M(x)$$

2. **Дисперсия**: $D(x)$ — матожидание от отклонения в квадрате.

$$D(x) = M((x - M(x))^2)$$

(a) $D(c) = 0$

(b) $D(cx) = c^2 D(x)$

(c) $D(x + y) = D(x) + D(y)$

(d) $D(x - y) = D(x) + D(y)$

3. **Среднеквадратическое отклонение**:
$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Теорема 1 *Математическое ожидание независимых случайных величин в n испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p:*

$$M(x) = np$$

Теорема 2 *Матожидание отклонения случайной величины от математического ожидания равно нулю:*

$$M(x - M(x)) = 0$$

***Доказательство**:*
$M(X - M(x)) = M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$

Теорема 3 *Дисперсия в n независимых испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p:*

$$D(x) = np(1 - p)$$

Теорема 4 *Дисперсия случайной величины x:*

$$D(x) = M(x^2) - M(x)^2$$

***Доказательство**:*
$D(x) = M(x - M(x))^2 = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = M(x^2)2M(x)M(M(x)) + M(M(x)^2) = M(x^2) - M(x)^2$

Определение 1 *Случайная величина x_0 называется **нормированной**, если*

1. $M(x_0) = 0$

2. $\sigma(x_0) = 1$

Если $M(x) = a$, $\sigma(x) = \sigma$, то

$$x_0 = \frac{x - a}{\sigma}$$

Доказательство:

1. $M(x_0) = \frac{1}{\sigma} M(x - a) = \frac{1}{\sigma}(M(x) - M(a)) = \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0$

2. $D(x_0) = \frac{1}{\sigma^2} D(x - a) = \frac{1}{\sigma^2}(D(x) + D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$

Определение 2 ***Модой дискретной случайной величины** x называют значение, которое принимается с наибольшей вероятностью. Обозначение: $m_o x$*

$$max\ P(x = x_i) = P(x = m_o x)$$

Определение 3 ***Медианой дискретной случайной величины** x является такое число, для которого вероятность меньших значений меньше 0.5 и вероятность больших значений меньше 0.5. Обозначение: $m_e x$*

Пример №1 Закон распределения для шестигранного кубика.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6}, 2 < x \leq 3 \\ \dots \\ 1, 6 < x \end{cases}$$

По ней мы можем нарисовать простенький график, что оставляется в качестве упражнения читателю.
Также найдем **математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$
$D(x) = \frac{1}{6}((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.92$

Пример №2 Найдем математическое ожидание для следующих величин:

$$\begin{pmatrix} x & 0.01 & -0.01 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 100 & -100 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Матожидание для обеих этих величин — ноль.

Пример №3 Производится испытание на надежность трех видеорегистраторов. Вероятность то, что видеорегистратор выйдет из строя: 0.15. Найти математическое ожидание и дисперсию.
Закон распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.15^3 & & & 0.85^3 \end{pmatrix}$$

$P_3(1) = C_3^1 0.15^2 * 0.85 \approx 0.0574$
$P_3(2) = 3 * 0.15 * 0.85^2 \approx 0.3251$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.0034 & 0.0574 & 0.3251 & 0.6141 \end{pmatrix}$$

Математическое ожидание:

$$M(x) = 1 * 0.0574 + 2 * 0.3251 + 3 * 0.6141 \approx 2.55$$

Дисперсия:
$D(x) = M(x^2) - (2.55)^2 = 0.3825$
Могли бы посчитать математическое ожидание и дисперсию с помощью формул:

$$M(x) = 3 * 0.85 \approx 2.55$$

$$D(x) = 3 * 0.85 * 0.15 \approx 0.3825$$

Пример №4

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ p & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Найти:

1. $m_o x = 0$;
2. $m_e x$ не существует.