Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

November 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 11.11.2023

1.1 Нормальное распределение

1.1.1 Решение задач

Пример №1 Автомат изготавливает детали, которые отделом технического контроля считаются стандартными, если отклонение x от контрольного размера не превышает 0.8 миллиметров. Каково наиболее вероятное число стандартных деталей среди изготовленных 150, если случайная величина x распределена по нормальному закону с $\sigma = 0.4$.
$P(|x-\alpha| < 0.8) = 2\Phi_0(\frac{0.8}{0.4}) = 2\Phi_0(2) \approx 0.9544$
$1 - P(|x-\alpha| < 0.8) \approx 1 - 0.95 = 0.05$
Ответ: 143

Пример №2 Рост взрослого человека является случайной величиной, распределенной по нормальному закону; согласно статистике, средний рост взрослого шведа — 178 см; среднее квадратическое отклонение — 6 см. Найти вероятность того, что среди пяти встреченных шведов хотя бы один будет от 175 до 185 см.
$\Phi(\frac{185-178}{6}) - \Phi(\frac{175-178}{6}) = \Phi(\frac{7}{6}) + \Phi(\frac{1}{2}) = 0.3770 + 0.1915 = 0.5685$ — вероятность того, что шведы в пределах 175–185 см.
Вероятность того, что хотя бы один из пяти встреченных шведов будет иметь нужный рост: $1 - 0.4315^5 = 0.985$
Ответ: 0.985

Пример №3 Длина некоторой детали представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, и имеет среднее значение 20 миллиметров. Среднее квадратическое отклонение — 0.2 мм. Найти

1. $f(x) = \frac{1}{0.2 * \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-20}{0.2})^2} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{0.08}}$
2. $P(19.7 < x < 20.3) = \Phi_0(\frac{20.3-20}{0.2}) - \Phi_0(\frac{19.7-20}{0.2}) = 2\Phi_0(1.5) \approx 2 * 0.4332 \approx 0.8664$
3. $P(|x-20| < 0.1) = 2\Phi_0(\frac{0.1}{0.2}) = 2\Phi_0(\frac{1}{2}) = 0.383$
4. Процент от $P(|x-20| < 0.1) = 38.3\%$
5. Каким должно быть отклонение, чтобы процент деталей, отклонение которых от среднего не превышает заданного, повысился бы до 54%
   $P = P(|x-20| < \delta) = 2\Phi_0(\frac{\delta}{0.2}) \implies \Phi_0(\frac{\delta}{0.2}) = 0.27 \implies \frac{\delta}{0.2} = 0.74 \implies \delta = 0.74 * 0.2 = 0.148$
6. Интервал, симметричный относительно среднего значения такой, что $p = 0.95$
   $P(|x-20| < \delta) = 0.95 = 2\Phi_0(\frac{\delta}{0.2}) \implies \Phi_0(\frac{\delta}{0.2}) = 0.475 \implies \frac{\delta}{0.2} = 1.96 \implies \delta = 1.96 * 0.2 = 0.392$
   Таким образом, имеем $x \in (19.608; 20.392)$

1.2 Закон больших чисел

1.2.1 Неравенство Маркова

Вероятность того, что случайная величина, среди которых нет отрицательных чисел, превосходит некоторое число $\epsilon > 0$ не больше, чем среднее значение, деленное на ϵ:

$$P(x \geq \epsilon) \leq \frac{M(x)}{\epsilon}$$

Пример №1 Потребляемая организацией за сутки электроэнергия — случайная величина с математическим ожиданием 8 КВт. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки потребление электроэнергии превысит 12 КВт.
$P = \frac{8}{12} \approx 0.67$
Ответ: 0.67

1.2.2 Неравенство Чебышева

Верхняя граница вероятности события:

$$P(|x - M(x)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\epsilon^2}$$

Нижняя граница вероятности события:

$$P(|x - M(x)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(x)}{\epsilon^2}$$

Пример №1 $n = 12$
$p = 0.07$
$\epsilon = 3$
$M(x) = np = 12 * 0.07 = 0.84$
$D(x) = np(1 - p) = 0.7812$
$P(|x - 0.84| < 3) \geq 1 - \frac{0.7812}{9} \approx 0.91$

1.2.3 Теорема Чебышева

Пусть существует n независимых, либо попарно независимых, случайных величин. Обозначим их как $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. При этом соблюдает условие, что их дисперсии являются ограниченными неким постоянным числом k. Тогда, насколько бы малым не оказалось k, вероятность того, что верным окажется неравенство

$$|\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + M(x_3) + \cdots + M(X_n)}{n}| < k$$

Будет равняться единице.
Либо, если записать как единое выражение, будет соблюдаться

$$\lim_{n \to \infty} P(|\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + M(x_3) + \cdots + M(X_n)}{n}| < k) = 1$$

Следствие:
При существовании набора случайных величин $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, являющихся независимыми попарно, а также обладающих одинаковым матожиданием, обозначим его α, при любых значениях $k > 0$, неравенство

$$|\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} - \alpha| < k$$

Будет верным. То есть, для данной формулировки будет выполняться

$$\lim_{n \to \infty} P(|\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} - \alpha| < k) = 1$$

Кроме того можно показать, что

$$P(|x - \alpha| < \epsilon) = 1 - \frac{\Delta}{n\epsilon^2}$$

Смысл этой теоремы заключается в том, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями утрачивает случайный характер.

1.2.4 Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события постоянно, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.

$$\lim_{n \to \infty} P(|\frac{m}{n} - p| < \epsilon) = 1$$

$$P(|\frac{m}{n} - p| < \epsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Пример №1 Вероятность качественной сборки медицинского оборудования является постоянной и равняется 0.97. Оценить вероятность того, что при сборке 500 аппаратов относительная частота появления качественных аппаратов отклонится от вероятности этого события не более чем на 0.02
$P(|\frac{m}{n} - 0.97| < 0.02) \geq 1 - \frac{0.0291}{0.2} \approx 0.85$
Ответ: 0.85

1.2.5 Теорема Пуассона

$$\lim_{n\to\infty}(|\frac{m_1 + \dots + m_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}| < \epsilon) = 1$$

m_i — число успехов в i-ом испытании