

Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Практическое занятие — 28.10.2023	2
1.1	Непрерывные случайные величины	2
1.1.1	Решение задач	2
1.2	Равномерное распределение	3
1.2.1	Функция распределения	4
1.2.2	Числовые характеристики	4
1.2.3	Решение задач	4
1.3	Домашнее задание	4

1 Практическое занятие — 28.10.2023

1.1 Непрерывные случайные величины

1.1.1 Решение задач

Пример №1 В стране пять крупных автогигантов. В кризисных условиях риск того, что завод обанкротится, составляет 30%. Написать закон распределения автогигантов, которые могут обанкротиться в предстоящий кризисный период. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Используем биномиальное распределение, x — количество возможно обанкротившихся заводов:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 0.7^5 & 5 * 0.3 * 0.7^4 & 10 * 0.3^2 * 0.7^3 & 10 * 0.3^3 * 0.7^2 & 10 * 0.3^4 * 0.7 & 0.3^5 \\ & 0.168 & 0.36 & 0.31 & 0.132 & 0.028 & 0.002 \end{pmatrix}$$

1. $M(x) = 5 * 0.3 = 1.5$

2. $D(x) = 1.05$

Таким образом, ожидать можно, что штуки две автогигантов рухнут, а чтобы все рухнули — можно не ожидать, **всё нормально**.

Пример №2 Количество ДТП в городе за неделю является случайной величиной, распределенной согласно Пуассоновскому распределению со средним значением, равным трём. **Какова вероятность того, что случится меньше трех ДТП?**

$$M(x) = \lambda = 3$$

$$P(x < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2}) \approx 0.42$$

Ответ: 0.42

Пример №3 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $(1.2; 1.6)$

3. Принадлежащее $\{x : x > 1.5\}$

2. Принадлежащее $[1.7; 2.3]$

4. Принадлежащее $\{x, x \leq 1.3\}$

Решение:

1. $P(1.2 < x < 1.6) = F(1.6) - F(1.2) = 0.32$

2. ...

3. $P(1.5 < x < +\infty) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.25 = 0.75$

4. $P(1.3 < x < +\infty) = F(1.3) = 0.09$

Пример №4 Пусть $f(x) = \frac{c}{1+9x^2}$. Найти значение c .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{c dx}{1+9x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{c}{3} \operatorname{arctg} 3x \Big|_a^b = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \frac{c}{3} (\operatorname{arctg} 3b - \operatorname{arctg} 3a) = \frac{c}{3} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi c}{3} = 1 \implies$$

$$c = \frac{3}{\pi}$$

Ответ: $\frac{3}{\pi}$

Пример №5 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$:

1. Если $x \in (-\infty; 2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$$

2. Если $x \in (2; 3]$

$$F(x) = \int_2^x (2t - 4) dt = (t^2 - 4t) \Big|_2^x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

3. Если $x \in (3; +\infty)$

$$F(x) = 1$$

Пример №6 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$

Определить математическое ожидание.

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{+\infty} x 2e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2 \int_0^b x e^{-2x} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = 2e^{-2x} dx & v = -e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (-x e^{-2x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-2x} dx) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-b e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-b e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2}) = 0.5$$

Пример №7 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -6x^2 + 18x - 12, & 1 < x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

Найти: $M_e x$

Для того, чтобы найти $M_e x$, необходимо найти $F(x)$.

$$\int_1^x (-6x^2 + 18x - 12) dx = -2x^3 + 9x^2 - 12x \Big|_1^x = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

1.2 Равномерное распределение

Говорят, что СВ имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ $[a, b]$, где $a, b \in R$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

1.2.1 Функция распределения

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

1.2.2 Числовые характеристики

1. Математическое ожидание: $M(x) = \frac{a+b}{2}$
2. Дисперсия: $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. Значение медианы: $\frac{a+b}{2}$
4. Значение моды: любое число из $[a, b]$
5. Коэффициент асимметрии: 0
6. Эксцесс: $-\frac{6}{5}$

1.2.3 Решение задач

Пример №1 В некотором городе трамвай ходит по расписанию с интервалом 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай более 2 минут.

Ответ: $P = 0.8$

Пример №2 Обследуются животные, каждое из которых с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализов крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди этих n животных хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число животных N . Предлагается несколько способов обследования:

1. Обследовать всех этих животных, проведя N анализов;
2. Вести обследование по группам, смешав сначала кровь группы из n животных, если все хорошо — перейти к следующей группе, если нет — сделать анализ каждого из животных.

Определить, какой способ обследования наиболее выгодный (в плане минимального проведения анализов): первый или второй?

Закон распределения для группы животных:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & n+1 \\ p & (1-p)^n & 1 - (1-p)^n \end{pmatrix}$$

$$M(x_1) = n$$

$$M(x_2) = (1-p)^n + (n+1)(1 - (1-p)^n) = (1-p)^n + n - n(1-p)^n + 1 - (1-p)^n = n - n(1-p)^n + 1$$

Предполагаем, второй способ выгоднее: $n - n(1-p)^n + 1 > n \iff n(1-p)^n < 1$ — если это значение меньше единицы, используем второй способ; если больше — первый способ.

1.3 Домашнее задание

Задание №1 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $[1.7; 2.3]$

Решение (возможно, неправильное):

$$P(1.7 \leq x \leq 2.3) = 1 - ((1 - F(2.3)) + F(1.7)) = 1 - (0 + 0.49) = 0.51$$

Ответ (возможно, неправильный): 0.51

Задание №2 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$

Решение (возможно, неправильное):

$$\int_2^x ((x-2)^2) = \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_2^x = (4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}) - (8 - 8 + \frac{8}{3}) = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

Ответ (возможно, неправильный):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$