Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 28.10.2023

1.1 Дискретные случайные величины

1.1.1 Биномиальное распределение

$P_n(k) = C_n^K p^k q^{n-k}$
Закон биномиального распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & q^n & npq^{n-1} & & C_n^k p^k q^{n-k} & p^n \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \sum\limits_k C_n^k p^k q^{n-k}, \ 0 < x \le n \\ 1, \ x > n \end{cases}$$

Параметры: n, p
Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = np$
2. **Дисперсия**: $D(x) = n(1-p)p$

Если $np \in Z$, то это будет **наивероятнейшее число успешных испытаний**.

1.1.2 Пуассоновское распределение

Если $n \to \infty$, $p \to 0$, $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.
Закон Пуассоновского распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Параметры: λ
Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$
2. **Дисперсия**: $D(x) = M(x^2) - (M(x)^2) = \dots = \lambda$

1.1.3 Геометрическое распределение

Рассматривается серия n независимых испытаний, в которых успех появляется с одинаковой вероятностью p и эти испытания **заканчиваются как только наступает успех**: $P_k = (1-p)p^{k-1}$
Закон геометрического распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & \dots & k \\ p & p & (1-p)p & \dots & (1-p)^{k-1}p \end{pmatrix}$$

Параметры: p
Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{p}$
2. **Дисперсия**: $D(x) = \frac{1-p}{p^2}$

1.1.4 Решение задач

Пример №1 Вероятность того, что электроприбор откажет — 0.15. Сколько часов в среднем прибор отрабатывает до первого сбоя?
Ответ: $M(X) = \frac{1}{0.15} \approx 6.67$ (часов)

1.2 Непрерывные случайные величины

Определение 1 ***Случайная величина*** X ***называется непрерывной****, если её функция распределения* $F(x)$ *является непрерывной.*

Определение 2 ***Вероятность того, что случайная величина*** X ***примет значение из промежутка*** $[a; b)$ *равняется приращению функции распределения на этом промежутке:*

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

1.2.1 Плотность распределения

Определение 3 ***Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины*** *называется первая производная её функции распределения, то есть*

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства плотности распределения

1. **Плотность распределения неотрицательная функция**, то есть

$$\forall x \in (-\infty; \infty) f(x) > 0$$

2. **Вероятность того, что случайная величина примет какое-либо значение, равняется единице**:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Пример №1 Пусть $f(x) = c \operatorname{arctg} x$. При каком c $f(x)$ будет являться плотностью распределения? Рассмотрим $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c \operatorname{arctg} x = \pm\frac{c\pi}{2}$. Чтобы это выражение было равно нулю, c должно быть равно нулю. Но интеграл единице ни при каком c не будет равняться. **Следовательно,** $f(x)$ **ни при каком** c **не будет плотностью распределения**.

1.2.2 Функция распределения

1. $F'(x) = f(x)$
2. $F(x) = \int\limits_{\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Из этих свойств следует:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Пример №1 Найти плотность распредления непрерывной случайной величины, если

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \leq 0 \\ x^2,\ x \in (0; 1] \\ 1,\ x > 1 \end{cases}$$

Просто, по определению, найдем производные:

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \leq 0 \\ 2x,\ x \in (0; 1] \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

1.2.3 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$

2. **Дисперсия**: $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Но не забываем про то, что мы все так же можем считать по формуле:

   $D(x) = M(x^2) - M(x)^2$, где $M(x^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

3. **Среднеквадратическое отклонение**: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

4. **Модой непрерывной величины** называют то ее значение, которому соответствует максимальное значение функции плотности.

5. **Медианой непрерывной величины** называется её значение, при котором имеет место равенство

$$P(X < M_e) = P(X > M_e)$$

   Оптимальное свойство медианы. Сумма произведений отклонений значений случайной величины от медианы на соответствующие вероятности будет меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - M_e| * p_i = min$$

6. **Начальный момент**: $M(x^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$

   Для дискретной случайной величины: $\alpha^k = M(x^k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k P_k$

7. **Цетральный момент**: $\mu_k = M(x - M(x))^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^k f(x)\,\mathrm{d}x$

8. **Коэффициент ассиметрии**: $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Характеризует асимметрию распределения данной случайной величины. Неформально говоря, коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае.

9. **Эксцесс**: $E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = -3$ служит для сравнения данного распределения с нормальным распределением. Если эксцесс у распределения положителен, то кривая будет более островершинной. Если эксцесс распределения отрицателен, то пик будет гладким.

Если один из интегралов расходится, то этой случайной величины не существует.

1.2.4 Решение задач

Пример №1 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < -2 \\ -\frac{x^3}{4}, \ -2 \le x \le 0 \\ 0, \ x > 0 \end{cases}$$

Найти **коэффициент ассиметрии** и **эксцесс**.

1. **Коэффициент ассиметрии**. Найдем математическое ожидание:

   $\alpha_1 = M(x) = \int\limits_{-2}^{0} x(-\frac{x^3}{4})\,\mathrm{d}x = -\frac{x^5}{20}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{32}{20} \approx -1.6.$

   $\alpha_2 = M(x^2) = -\frac{x^6}{24}\Big|_{-2}^{0} = \frac{64}{24} \approx 2.67$, $\mu_2 = \alpha^2 - \alpha_1^2 = 2.67 - (1.6)^2 \approx 0.11$, $\alpha_3 = -4.57$, $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 0.05$, $\alpha_4 = 8$, $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 \approx 0.1$

   Теперь можем посчитать коэффициент ассиметрии: $A = \frac{0.05}{\sqrt{0.11}^3} = \frac{0.05}{0.33^3} \approx 1.39$

2. **Эксцесс**. Воспользуемся уже посчитанными в ходе предыдущих вычислений. Получается:
   $E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0.1}{0.33^4} - 3 \approx 5.4$