Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Лекция — 14.10.2023

1.1 Асимптотические формулы

1.1.1 Локальная теорема Муавра–Лапласа

Если вероятность наступления события A в n независимых испытаниях постоянна и равна p, причем $n \to \infty$, то справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(k)}{\sqrt{2n}e^{-\frac{x^2}{2}}} \to 1$$

где $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ (при $n \to \infty$)
Из этого следует:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Можем записать следующим образом:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\phi(x)$$

Свойства

1. $\phi(x) > 0$
2. $\phi(-x) = \phi(x)$
3. $|x| \geq 4 \implies \phi(x) \approx 0$

Пример №1 $P_{110}(58) \approx \dots$
$x = \frac{58-110*0.4}{\sqrt{110*0.4*0.61}} = \frac{14}{5.14} \approx 2.72$
$\dots \approx \frac{1}{5.14}\phi(2.72) \approx \frac{0.0099}{5.14} \approx 0.001926$
Погрешность: $\frac{0.002025-0.001926}{0.002025} \approx 0.00489 \approx 5\%$
Ответ: 0.001926

Пример №2 $p = 0.1$, $P_8(3) = \dots$
$\dots = C_8^3 * 0.1^3 * 0.9^5 \approx 0.033$
Теперь посчитаем по нашей новоизученной формуле:
$x = \frac{3-8*0.1}{\sqrt{8*0.1*0.9}} = \frac{2.2}{0.85} \approx 2.59$
$\dots = \frac{1}{0.85}\phi(2.59) = \frac{0.0139}{0.85} \approx 0.016$
Погрешность: $\frac{0.033-0.016}{0.033} \approx 0.515 \approx 51\%$
Ответ: 0.033

1.1.2 Теорема Пуассона

Если вероятность наступления события A в n независимых испытаниях постоянна и равна p, причем $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$, тогда вероятность наступления k успехов в n испытаниях:

$$P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

где $k = np$
Доказательство:
$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$
$p = \frac{\lambda}{n} \implies$
$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k!)}(\frac{\lambda}{n})^k * (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} * \frac{n-(k-1)\dots(n-1)}{n^{k-1}}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} * \frac{n-(k-1)}{n} \dots \frac{n-1}{n}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{\lambda^k}{n}e^{-\lambda}$

Пример №1 Вероятность брака на заводе кожаных изделий составляет $p = 0.01$ Найти вероятность того, что в произведенной партии из $n = 100$ изделий не более 1 бракованного.
Решение:
$P = P_{100}(0) + P_{100}(1)$
$\lambda = np = 1$
$P = \frac{1^0}{0^1}e^{-1} + \frac{1}{1^1}e^{-1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \approx 0.74$
Ответ: 0.736

1.2 Поток событий

Определение 1 ***Поток событий*** *— последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени*

1.2.1 Свойства

1. Свойство стационарности: вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчёта.

2. Свойство ординарности: вероятностью наступления за элементарный промежуток времени более одного события можно пренебречь по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток не более одного события (то есть вероятность одновременного появления двух и более событий равна нулю)

3. Свойство отсутствия последействия: вероятность появления k событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка.

1.2.2 Виды

Определение 2 ***Простейший (стационарный пуассоновский) поток*** *— поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последествия.*

Определение 3 ***Интенсивность потока*** *(λ) — среднее число событий, которые появляются в единицу времени.*

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

1.3 Интегральная теорема Муавра–Лапласа

Если вероятность наступления события A в n независимых испытаниях постоянна и равна p, то вероятность того, что в n независимых испытаниях успех наступит в интервале от k_1 до k_2 при $n \to \infty$ имеет своим пределом:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = \int\limits_{x_1}^{x_2} \phi(x) \, \mathrm{d}x$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

Нормированная функция Лапласа

$$\Phi_0(t) = \int\limits_0^t \phi^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

Свойства:

1. $\Phi_0(x) = -\Phi_0(x)$

2. $\Phi_0(x) \uparrow\uparrow$

3. Если $|x| \geq 5 \implies |\Phi_0(x)| = 0.5$

Имеем:

$$P_n(k_1; k_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{0} \Phi(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{x_2} \Phi(x)\,\mathrm{d}x = -\Phi_0(x_1) + \Phi_0(x_2)$$

Функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0^{-\infty}(x)$$

$$\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$$

Использование данной интегральной функции дает очень хорошее приближение когда n большое, p не маленькое, $npq > 10$

1.4 Отклонение относительной частоты

$P(|\frac{k}{n} - p| \leq \epsilon)$–?
$P(np - n\epsilon < k < np + n\epsilon) = \ldots$
$x_1 = -\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, $x_2 = \epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$
$\cdots = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int\limits_{-\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2n}} \int\limits_{0}^{\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\Phi_0(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$

$$P(|\frac{k}{n} - p| \leq \epsilon) = 2\Phi_0(\epsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$$