Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 13.10.2023

$P_8 5 = C_8^5 (\frac{1}{2})^8 = 7 * 2^3 * \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$ — вероятность выиграть пять партий из восьми у равносильного противника
$P_4 3 = C_4^3 (\frac{1}{2})^4 = 4 * \frac{1}{2^4} = \frac{8}{32}$ — вероятность выиграть четыре партии из восьми у равносильного противника

1.1 Решение задач

Задача №1 Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятность 0.2 оказывается брюнетом, 0.3 — шатеном, 0.4 — блондином, 0.1 — рыжим. Выбирается группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

1. Событие A — хотя бы один рыжий
2. Событие B — в составе группы не меньше четырех блондинов
3. Событие C — в составе группы равное число блондинов и шатенов

Решение:

1. Вероятность того, что есть хотя бы один рыжий:
   $P(A) = 1 - 0.9^6 \approx 0.468$
2. Вероятность того, что не меньше четырех блондинов:
   $P(B) = C_6^4 0.4^4 0.6^{6-4} + C_6^5 0.4^5 0.6^{6-5} + C_6^6 0.4^6 0.6^{6-6} = 0.1792$
3. Вероятность того, что равное число блондинов и шатенов:
   $P(C) = P(C_{00}) + P(C_{11}) + P(C_{22}) + P(C_{33})$
   $P(C_{00}) = (1 - 0.7)^6 \approx 0.0007$
   Вероятность того, что будет один блондин, один шатен и четыре остальных:
   $P(C_{11}) = P_6(1;1;4) = \frac{6!}{1!1!4!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^4 \approx 0.03$
   Вероятность того, что будет два блондина, два шатена и два остальных:
   $P(C_{22}) = P_6(2;2;2) = \frac{6!}{2!2!2!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^2 \approx 0.1215$
   Вероятность того, что будет три блондина, три шатена и ноль остальных:
   $P(C_{33}) = P_6(3;3) = \frac{6!}{3!3!} * 0.3 * 0.4 \approx 0.03$
   $P(C) = 0.0007 + 0.03 + 0.1215 + 0.03 \approx 0.18$

Задача №2 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель 0.4. Если в цель попал один снаряд, он ее поражает с вероятностью 0.3. Если в цель попало два снаряда — с вероятностью 0.7. Если в цель попало три снаряда — с вероятностью 0.9.
Найти полную вероятность поражения цели.
Гипотезы:

1. H_1 — попал один снаряд
2. H_2 — попало два снаряда
3. H_3 — попало три снаряда

Найдем вероятности для каждой из них:

1. $P(H_1) = C_3^1 * 0.4 * 0.6^2 = 0.432$
2. $P(H_2) = C_3^2 * 0.4^2 * 0.6 = 0.288$
3. $P(H_3) = 0.4^3 = 0.064$

Ответ:
$P(A) = 0.432 * 0.3 + 0.288 * 0.7 + 0.064 * 0.9 = 0.3888$

Задача №3 Имеется n лунок, по которым случайным образом разбрасывается m шариков. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет ровно k шариков.
Ответ:
$P(A) = C_m^k * (\frac{1}{n})^k * (1 - \frac{1}{n})^{m-k}$

Задача №4 Мишень состоит из яблока и двух колец. При одном выстреле вероятность попадания в яблоко равняется 0.4, вероятность попадания в первое кольцо — 0.5, вероятность попадания во второе кольцо — 0.6, вероятность непопадания — 0.3.
По мишени производится пять выстрелов. **Найти вероятность того, что они дадут два попадания в яблоко и одно попадание во второе кольцо**.
Ответ:
$P(A) = P_5(2; 0; 1; 2) = \frac{5!}{2!*0!*1!*2!} * 0.4^2 * 0.5^0 * 0.6^1 * 0.3^2 = 0.2592$

Задача №5 Производится стрельба пятью снарядами по группе, состоящей из трех целей. Обстрел ведется в следующем порядке: сначала обстреливается первая цель и огонь по ней ведется до тех пор, пока она или не будет поражена, или не кончатся все пять снарядов. После поражения обстрел переходит на следующую цель и так далее. Вероятность поражения цели при стрельбе по ней одним выстрелом — p
Найти вероятности того, что будет поражено:

1. 0 целей
2. 1 цель
3. 2 цели
4. 3 цели

Решение:

1. $P_0 = (1-p)^5$
2. $P_1 = P_5(1) = C_5^1 p(1-p)^4$
3. $P_2 = P_5(2) = C_5^2 p^2(1-p)^3$
4. $P_3 = P_5(3) = C_5^3 p^3(1-p)^2$

Задача №6 Прибор, состоящий из четырех узлов, работал в течение времени t. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за это время t равна 0.7. По истечении времени t прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ. Найти вероятность того, что через время 2τ после остановки прибор будет готов для нормальной работы.
Ответ:
$P = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2 = C_4^0 * 0.3^0 * 0.7^4 + C_4^1 * 0.3^1 * 0.7^3 + C_4^2 * 0.3^2 * 0.7^2 = 0.9163$

Задача №7 В урне имеется k шаров. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ может оказаться белым или черным. Из урны вынимается n раз по одному шару. Причем каждый вынутый шар каждый раз возвращается обратно и шары перемешиваются. Среди вынутых n шаров m шаров оказались белыми. **Найти вероятность того, что из k шаров в урне ровно l белых**.
Формула Байеса:
$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
где

1. $P(A)$ — априорная вероятность гипотезы A
2. $P(A|B)$ — вероятность гипотезы A при наступлении события B
3. $P(B|A)$ — вероятность наступления события B при истинности гипотезы A
4. $P(B)$ — полная вероятность наступления события B

Решение:
$P(H_l) = C_k^l(\frac{1}{2})^k$
$P(A|H_l) = C_n^m(\frac{l}{k})^m(1-\frac{l}{k})^{n-m}$
$P(H_l|A) = \frac{P(A|H_l)P(H_l)}{P(A)}$