Теория принятия решений

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 30.09.2023

1.1 Надёжность электрических схем

См. https://www.matburo.ru/tvart_sub.php?p=art_scheme

1.2 Решение задач

Пример №1 Рассматривается посадка вертолета на аэродром. Если позволяет погода, летчик сажает самолет, наблюдая на аэродром визуально, в этом случае вероятность благополучной посадки равна p_1. Если наблюдается облачность, то летчик сажает самолет по приборам, вероятность их благополучной работы равна p_0. Если приборы сработали хорошо, то вероятность благополучной посадки равна p_1. Если же приборы не сработали, то вероятность благополучной посадки равна p^*. **Найти полную вероятность благополучной посадки, если известно, что в k процентах всех случаев посадки аэропорт затянут низкой облачностью**.
Решение:
$P(B_1) = \frac{k}{100}$ — облачность не наблюдается.
$P(B_2) = 1 - \frac{k}{100}$ — облачность не наблюдается.
$P(A)_{B_1} = p_0 p_1 + (1 - p_0)p^*$
$P(A)_{B_2} = p_1$

Пример №2 В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 — хорошо, 2 — посредственно, 1 — плохо. В экзаменационный билетах 20 вопросов, отлично подготовленный студент может ответить на 20 из них, хорошо — на 16 из них, посредственно — на 10 из них, плохо — на 5 из них.
Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. **Найти вероятность того, что этот студент подготовлен плохо**.
Решение:
Имеется четыре гипотезы:

1. B_1 — студент подготовлен отлично
2. B_2 — студент подготовлен хорошо
3. B_3 — студент подготовлен посредственно
4. B_4 — студент подготовлен плохо

Найдем вероятности для каждой из них:

1. $P(B_1) = \frac{3}{10}$
2. $P(B_2) = \frac{2}{5}$
3. $P(B_3) = \frac{1}{5}$
4. $P(B_4) = \frac{1}{10}$

Найдем условную вероятность для каждого из случаев:

1. $P_{B_1}(A) = 1$
2. $P_{B_2}(A) = \frac{16}{20} * \frac{15}{19} * \frac{14}{18} = 0.49122807017$
3. $P_{B_3}(A) = \frac{10}{20} * \frac{9}{19} * \frac{8}{18} = 0.10526315789$
4. $P_{B_4}(A) = \frac{5}{20} * \frac{4}{19} * \frac{3}{18} = 0.00877192982$

$P(A) = \frac{3}{10} * 1 + \frac{2}{5} * 0.49 + \frac{1}{5} * 0.1 + \frac{1}{10} * 0.008 = 0.5168$
$P_A(B_4) = \frac{P(B_4)P_{B_4}(A)}{P(A)} = \frac{0.0008}{0.5163} \approx 0.002$
Ответ: 0.002

Пример №3 Цель, по которой ведется стрельба, состоит из двух различных по уязвимости частей. Для поражения цели достаточно одного попадания в первую часть или двух попаданий в вторую. Для каждого попавшего в цель снаряда вероятность попадания в первую часть равна p_1, а во вторую p_2, причем $p_2 = 1 - p_1$. По цели производится три выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. **Найти вероятность, что данными тремя выстрелами цель будет поражена**.
Решение:
Имеется три гипотезы:

1. B_1 — в цель попал один снаряд;
2. B_2 — в цель попало два снаряда;
3. B_3 — в цель попало три снаряда.

Найдем вероятности для каждой из них:

1. $P(B_1) = 3p(1-p)(1-p)$
2. $P(B_2) = 3p^2(1-p)$
3. $P(B_3) = p^3$

Найдем условную вероятность поражения цели для каждого из случаев:

1. $P_{B_1}(A) = p_1$
2. $P_{B_2}(A) = p_2^2 + (1-(1-p_1)^2)$
3. $P_{B_3}(A) = 1$

Ответ: $P(A) = 3p_1p(1-p)^2 + 3p^2(1-p)(p_2^2 + (1-(1-p_1)^2)) + p^3$

Пример №4 Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и не зависимо от других. Цель, обстреленная одним орудием, поражается с вероятностью p. **Найти вероятность того, что из трех целей две будут поражены, а третья нет**.
Имеется три гипотезы:

1. $B_1 = 1\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ — Все орудия стреляют по одной цели;
2. $B_2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$ — Орудия стреляют по двум целям;
3. $B_3 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ — Орудия стреляют по трем целям.

Найдем условную вероятность для каждого из случаев:

1. $P_{B_1}(A) = 0$
2. $P_{B_2}(A) = p(1-(1-p)^2)$
3. $P_{B_3}(A) = 3p^2(1-p)$

Ответ: $P(A) = \frac{2}{3}p(1-(1-p)^2) + \frac{2}{3}p^2(1-p)$

1.3 Домашнее задание

Три истребителя совершают налет на объект, который защищён четырьмя зенитными ракетами. Каждая ракета простреливает угловой сектор размерами 60°. Если истребитель пролетает через защищённый сектор, его обстреливают и поражают с вероятностью p. Через незащищённый сектор истребитель проходит без препятствий. Каждый истребитель, прошедший к объекту, сбрасывает бомбу и поражает объект с вероятностью p_0. Экипажи истребителей не знают, где расположены зенитные ракеты. **Найти вероятность поражения объекта для двух способов налета**:

1. Все три истребителя летят по одному и тому же направлению, выбираемому случайно
2. Каждый из самолетов выбирает себе направление случайно независимо от других

Подсказка: берем две гипотезы

1. Самолёты выбрали незащищённой направление
2. Самолёты выбрали защищённое направление

Решение:

1. Все три истребителя летят по одному и тому же направлению, выбираемому случайно

   Имеем две гипотезы:

   (a) $B_1 = \frac{360-4*60}{360} = \frac{1}{3}$ — самолеты выбрали незащищенное направление

   (b) $B_2 = 1 - B_1 = \frac{2}{3}$ — самолеты выбрали защищенное направление

   Найдем условную вероятность для каждого из случаев:

   (a) $P_{B_1}(A) = 1 - (1-p_0)^3$

   (b) $P_{B_2}(A) = 1 - (1-(1-p)p_0)^3$

   $P(A) = \frac{1}{3}(1-(1-p_0)^3) + \frac{2}{3}(1-(1-(1-p)p_0)^3)$

2. Каждый из самолетов выбирает себе направление случайно независимо от других

   Вероятность поразить объект для каждого из самолетов:

   $p_1 = \frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}(1-p)p_0$

   Вероятность, что хотя бы один из трех самолетов поразит объект:

   $P(A) = 1 - (1-p_1)^3 = 1 - (1 - (\frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}(1-p)p_0))^3$

Ответ:

1. $P(A) = \frac{1}{3}(1-(1-p_0)^3) + \frac{2}{3}(1-(1-(1-p)p_0)^3)$
2. $P(A) = 1 - (1-p_1)^3 = 1 - (1 - (\frac{1}{3}p_0 + \frac{1}{3}(1-p)p_0))^3$