

# Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

## Содержание

<b>1</b>	<b>Практическое занятие — 27.10.2023</b>	<b>2</b>
1.1	Случайные величины . . . . .	2
1.1.1	Дискретные случайные величины (ДСВ) . . . . .	2

# 1 Практическое занятие — 27.10.2023

## 1.1 Случайные величины

Случайные величины разделяются на

1. **Дискретные** — конечное количество; например, цифры на кубике.
2. **Непрерывные** — те случайные величины, которые разделяют сплошь промежутки, их может быть бесконечно много.

### 1.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ)

**Законом распределения дискретной случайной величины** называют соответствие между полученными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.

Его можно задать:

1. таблично;
2. графически;
3. аналитически (в виде формулы).

**Ограничение:**

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

**Функция распределения** обозначается следующим образом:  $F_X(x)$ ,  $F(x)$  — вероятность того, что случайная величина примет значение **строго меньше**  $x$ .

**Свойства функции распределения:**

1.  $0 \leq F(x) \leq 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4.  $F(x_2) \geq F(x_1)$ , если  $x_2 \geq x_1$

**Числовые характеристики:**

1. **Математическое ожидание:**  $M(x)$ ,  $m_x$ ,  $E(x)$  — характеризует среднее арифметическое.

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

- (a) Матожидание от любой константы равно константе:  $M(c) = c$
- (b) Константы выносятся за знак матожидания:  $M(cx) = cM(x)$
- (c) Матожидание суммы равно сумме матожиданий:  $M(x + y) = M(x) + M(y)$
- (d) Матожидание произведения равно произведению матожиданий:  $M(x * y) = M(x) * M(y)$

**Отклонение** от математического ожидания:

$$X - M(x)$$

2. **Дисперсия:**  $D(x)$  — матожидание от отклонения в квадрате.

$$D(x) = M((x - M(x))^2)$$

$$(a) D(c) = 0$$

$$(b) D(cx) = c^2 D(x)$$

$$(c) D(x + y) = D(x) + D(y)$$

$$(d) D(x - y) = D(x) + D(y)$$

### 3. Среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

**Теорема 1** Математическое ожидание независимых случайных величин в  $n$  испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании  $p$ :

$$M(x) = np$$

**Теорема 2** Матожидание отклонения случайной величины от математического ожидания равно нулю:

$$M(x - M(x)) = 0$$

*Доказательство:*

$$M(X - M(x)) = M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$$

**Теорема 3** Дисперсия в  $n$  независимых испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании  $p$ :

$$D(x) = np(1 - p)$$

**Теорема 4** Дисперсия случайной величины  $x$ :

$$D(x) = M(x^2) - M(x)^2$$

*Доказательство:*

$$D(x) = M(x - M(x))^2 = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = M(x^2) - 2M(x)M(M(x)) + M(M(x)^2) = M(x^2) - M(x)^2$$

**Определение 1** Случайная величина  $x_0$  называется **нормированной**, если

$$1. M(x_0) = 0$$

$$2. \sigma(x_0) = 1$$

Если  $M(x) = a$ ,  $\sigma(x) = \sigma$ , то

$$x_0 = \frac{x - a}{\sigma}$$

*Доказательство:*

$$1. M(x_0) = \frac{1}{\sigma} M(x - a) = \frac{1}{\sigma} (M(x) - M(a)) = \frac{1}{\sigma} (a - a) = 0$$

$$2. D(x_0) = \frac{1}{\sigma^2} D(x - a) = \frac{1}{\sigma^2} (D(x) + D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$$

**Определение 2** Модой дискретной случайной величины  $x$  называют значение, которое принимается с наибольшей вероятностью. Обозначение:  $m_0x$

$$\max P(x = x_i) = P(x = m_0x)$$

**Определение 3** Медианой дискретной случайной величины  $x$  является такое число, для которого вероятность меньших значений меньше 0.5 и вероятность больших значений меньше 0.5. Обозначение:  $m_e x$

**Пример №1** Закон распределения для шестигранного кубика.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

**Функция распределения:**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 < x \leq 3 \\ \dots & \\ 1, & 6 < x \end{cases}$$

По ней мы можем нарисовать простенький график, что оставляется в качестве упражнения читателю.

Также найдем **математическое ожидание**:  $M(x) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$   
 $D(x) = \frac{1}{6}((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.92$

**Пример №2** Найдем математическое ожидание для следующих величин:

$$\begin{pmatrix} x & 0.01 & -0.01 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y & 100 & -100 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Матожидание для обеих этих величин — ноль.

**Пример №3** Производится испытание на надежность трех видеорегистраторов. Вероятность то, что видеорегистратор выйдет из строя: 0.15. Найти математическое ожидание и дисперсию.

**Закон распределения:**

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.15^3 & & & 0.85^3 \end{pmatrix}$$

$$P_3(1) = C_3^1 0.15^2 * 0.85 \approx 0.0574$$

$$P_3(2) = 3 * 0.15 * 0.85^2 \approx 0.3251$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.0034 & 0.0574 & 0.3251 & 0.6141 \end{pmatrix}$$

**Математическое ожидание:**

$$M(x) = 1 * 0.0574 + 2 * 0.3251 + 3 * 0.6141 \approx 2.55$$

**Дисперсия:**

$$D(x) = M(x^2) - (2.55)^2 = 0.3825$$

Могли бы посчитать математическое ожидание и дисперсию с помощью формул:

$$M(x) = 3 * 0.85 \approx 2.55$$

$$D(x) = 3 * 0.85 * 0.15 \approx 0.3825$$

**Пример №4**

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ p & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

**Найти:**

1.  $m_0x = 0$ ;
2.  $m_1x$  не существует.