

Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1	Практическое занятие — 13.10.2023	2
1.1	Решение задач	2
2	Практическое занятие — 27.10.2023	4
2.1	Случайные величины	4
2.1.1	Дискретные случайные величины (ДСВ)	4
3	Лекция — 28.10.2023	7
3.1	Дискретные случайные величины	7
3.1.1	Биномиальное распределение	7
3.1.2	Пуассоновское распределение	7
3.1.3	Геометрическое распределение	7
3.1.4	Решение задач	7
3.2	Непрерывные случайные величины	8
3.2.1	Плотность распределения	8
3.2.2	Функция распределения	8
3.2.3	Числовые характеристики	9
3.2.4	Решение задач	9
4	Практическое занятие — 28.10.2023	10
4.1	Непрерывные случайные величины	10
4.1.1	Решение задач	10
4.2	Равномерное распределение	11
4.2.1	Функция распределения	12
4.2.2	Числовые характеристики	12
4.2.3	Решение задач	12
4.3	Домашнее задание	12

1 Практическое занятие — 13.10.2023

$P_8 5 = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 7 * 2^3 * \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$ — вероятность выиграть пять партий из восьми у равносильного противника
 $P_4 3 = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 * \frac{1}{2^4} = \frac{8}{32}$ — вероятность выиграть четыре партии из восьми у равносильного противника

1.1 Решение задач

Задача №1 Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятностью 0.2 оказывается брюнетом, 0.3 — шатеном, 0.4 — блондином, 0.1 — рыжим. Выбирается группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

1. Событие A — хотя бы один рыжий
2. Событие B — в составе группы не меньше четырех блондинов
3. Событие C — в составе группы равное число блондинов и шатенов

Решение:

1. Вероятность того, что есть хотя бы один рыжий:

$$P(A) = 1 - 0.9^6 \approx 0.468$$

2. Вероятность того, что не меньше четырех блондинов:

$$P(B) = C_6^4 0.4^4 0.6^{6-4} + C_6^5 0.4^5 0.6^{6-5} + C_6^6 0.4^6 0.6^{6-6} = 0.1792$$

3. Вероятность того, что равное число блондинов и шатенов:

$$P(C) = P(C_{00}) + P(C_{11}) + P(C_{22}) + P(C_{33})$$

$$P(C_{00}) = (1 - 0.7)^6 \approx 0.0007$$

Вероятность того, что будет один блондин, один шатен и четыре остальных:

$$P(C_{11}) = P_6(1; 1; 4) = \frac{6!}{1!1!4!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^4 \approx 0.03$$

Вероятность того, что будет два блондина, два шатена и два остальных:

$$P(C_{22}) = P_6(2; 2; 2) = \frac{6!}{2!2!2!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^2 \approx 0.1215$$

Вероятность того, что будет три блондина, три шатена и ноль остальных:

$$P(C_{33}) = P_6(3; 3) = \frac{6!}{3!3!} * 0.3 * 0.4 \approx 0.03$$

$$P(C) = 0.0007 + 0.03 + 0.1215 + 0.03 \approx 0.18$$

Задача №2 Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель 0.4. Если в цель попал один снаряд, он ее поражает с вероятностью 0.3. Если в цель попало два снаряда — с вероятностью 0.7. Если в цель попало три снаряда — с вероятностью 0.9.

Найти полную вероятность поражения цели.

Гипотезы:

1. H_1 — попал один снаряд
2. H_2 — попало два снаряда
3. H_3 — попало три снаряда

Найдем вероятности для каждой из них:

$$1. P(H_1) = C_3^1 * 0.4 * 0.6^2 = 0.432$$

$$2. P(H_2) = C_3^2 * 0.4^2 * 0.6 = 0.288$$

$$3. P(H_3) = 0.4^3 = 0.064$$

Ответ:

$$P(A) = 0.432 * 0.3 + 0.288 * 0.7 + 0.064 * 0.9 = 0.3888$$

Задача №3 Имеется n лунок, по которым случайным образом разбрасывается m шариков. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет ровно k шариков.

Ответ:

$$P(A) = C_m^k * \left(\frac{1}{n}\right)^k * \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{m-k}$$

Задача №4 Мишень состоит из яблока и двух колец. При одном выстреле вероятность попадания в яблоко равняется 0.4, вероятность попадания в первое кольцо — 0.5, вероятность попадания во второе кольцо — 0.6, вероятность не попадания — 0.3.

По мишени производится пять выстрелов. **Найти вероятность того, что они дадут два попадания в яблоко и одно попадание во второе кольцо.**

Ответ:

$$P(A) = P_5(2; 0; 1; 2) = \frac{5!}{2! * 0! * 1! * 2!} * 0.4^2 * 0.5^0 * 0.6^1 * 0.3^2 = 0.2592$$

Задача №5 Производится стрельба пятью снарядами по группе, состоящей из трех целей. Обстрел ведется в следующем порядке: сначала обстреливается первая цель и огонь по ней ведется до тех пор, пока она или не будет поражена, или не кончатся все пять снарядов. После поражения обстрел переходит на следующую цель и так далее. Вероятность поражения цели при стрельбе по ней одним выстрелом — p . Найти вероятности того, что будет поражено:

1. 0 целей
2. 1 цель
3. 2 цели
4. 3 цели

Решение:

1. $P_0 = (1 - p)^5$
2. $P_1 = P_5(1) = C_5^1 p (1 - p)^4$
3. $P_2 = P_5(2) = C_5^2 p^2 (1 - p)^3$
4. $P_3 = P_5(3) = C_5^3 p^3 (1 - p)^2$

Задача №6 Прибор, состоящий из четырех узлов, работал в течение времени t . Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за это время t равна 0.7. По истечении времени t прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время τ . Найти вероятность того, что через время 2τ после остановки прибор будет готов для нормальной работы.

Ответ:

$$P = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2 = C_4^0 * 0.3^0 * 0.7^4 + C_4^1 * 0.3^1 * 0.7^3 + C_4^2 * 0.3^2 * 0.7^2 = 0.9163$$

Задача №7 В урне имеется k шаров. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ может оказаться белым или черным. Из урны вынимается n раз по одному шару. Причем каждый вынутый шар каждый раз возвращается обратно и шары перемешиваются. Среди вынутых n шаров m шаров оказались белыми. **Найти вероятность того, что из k шаров в урне ровно l белых.**

Формула Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

где

1. $P(A)$ — априорная вероятность гипотезы A
2. $P(A|B)$ — вероятность гипотезы A при наступлении события B
3. $P(B|A)$ — вероятность наступления события B при истинности гипотезы A
4. $P(B)$ — полная вероятность наступления события B

Решение:

$$P(H_l) = C_k^l \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$P(A|H_l) = C_n^m \left(\frac{l}{k}\right)^m \left(1 - \frac{l}{k}\right)^{n-m}$$

$$P(H_l|A) = \frac{P(A|H_l)P(H_l)}{P(A)}$$

2 Практическое занятие — 27.10.2023

2.1 Случайные величины

Случайные величины разделяются на

1. **Дискретные** — конечное количество; например, цифры на кубике.
2. **Непрерывные** — те случайные величины, которые разделяют сплошь промежутков, их может быть бесконечно много.

2.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ)

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между полученными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.

Его можно задать:

1. таблично;
2. графически;
3. аналитически (в виде формулы).

Ограничение:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Функция распределения обозначается следующим образом: $F_X(x)$, $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина примет значение **строго меньше** x .

Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$

Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание:** $M(x)$, m_x , $E(x)$ — характеризует среднее арифметическое.

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$$

- (a) Матожидание от любой константы равно константе: $M(c) = c$
- (b) Константы выносятся за знак матожидания: $M(cx) = cM(x)$
- (c) Матожидание суммы равно сумме матожиданий: $M(x + y) = M(x) + M(y)$
- (d) Матожидание произведения равно произведению матожиданий: $M(x * y) = M(x) * M(y)$

Отклонение от математического ожидания:

$$X - M(x)$$

2. **Дисперсия:** $D(x)$ — матожидание от отклонения в квадрате.

$$D(x) = M((x - M(x))^2)$$

$$(a) \quad D(c) = 0$$

$$(c) \quad D(x + y) = D(x) + D(y)$$

$$(b) \quad D(cx) = c^2 D(x)$$

$$(d) \quad D(x - y) = D(x) + D(y)$$

3. **Среднеквадратическое отклонение:**

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Теорема 1 Математическое ожидание независимых случайных величин в n испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p :

$$M(x) = np$$

Теорема 2 Матожидание отклонения случайной величины от математического ожидания равно нулю:

$$M(x - M(x)) = 0$$

Доказательство:

$$M(X - M(x)) = M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$$

Теорема 3 Дисперсия в n независимых испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p :

$$D(x) = np(1 - p)$$

Теорема 4 Дисперсия случайной величины x :

$$D(x) = M(x^2) - M(x)^2$$

Доказательство:

$$D(x) = M(x - M(x))^2 = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = M(x^2) - 2M(x)M(M(x)) + M(M(x)^2) = M(x^2) - M(x)^2$$

Определение 1 Случайная величина x_0 называется **нормированной**, если

$$1. \quad M(x_0) = 0$$

$$2. \quad \sigma(x_0) = 1$$

Если $M(x) = a$, $\sigma(x) = \sigma$, то

$$x_0 = \frac{x - a}{\sigma}$$

Доказательство:

$$1. \quad M(x_0) = \frac{1}{\sigma} M(x - a) = \frac{1}{\sigma} (M(x) - M(a)) = \frac{1}{\sigma} (a - a) = 0$$

$$2. \quad D(x_0) = \frac{1}{\sigma^2} D(x - a) = \frac{1}{\sigma^2} (D(x) + D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$$

Определение 2 Модой дискретной случайной величины x называют значение, которое принимается с наибольшей вероятностью. Обозначение: $m_o x$

$$\max P(x = x_i) = P(x = m_o x)$$

Определение 3 Медианой дискретной случайной величины x является такое число, для которого вероятность меньших значений меньше 0.5 и вероятность больших значений меньше 0.5. Обозначение: $m_e x$

Пример №1 Закон распределения для шестигранного кубика.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6}, & 2 < x \leq 3 \\ \dots & \\ 1, & 6 < x \end{cases}$$

По ней мы можем нарисовать простенький график, что оставляется в качестве упражнения читателю.

Также найдем **математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$
 $D(x) = \frac{1}{6}((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.92$

Пример №2 Найдем математическое ожидание для следующих величин:

$$\begin{pmatrix} x & 0.01 & -0.01 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y & 100 & -100 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Матожидание для обеих этих величин — ноль.

Пример №3 Производится испытание на надежность трех видеорегистраторов. Вероятность то, что видеорегистратор выйдет из строя: 0.15. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Закон распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.15^3 & & & 0.85^3 \end{pmatrix}$$

$$P_3(1) = C_3^1 0.15^2 * 0.85 \approx 0.0574$$

$$P_3(2) = 3 * 0.15 * 0.85^2 \approx 0.3251$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.0034 & 0.0574 & 0.3251 & 0.6141 \end{pmatrix}$$

Математическое ожидание:

$$M(x) = 1 * 0.0574 + 2 * 0.3251 + 3 * 0.6141 \approx 2.55$$

Дисперсия:

$$D(x) = M(x^2) - (2.55)^2 = 0.3825$$

Могли бы посчитать математическое ожидание и дисперсию с помощью формул:

$$M(x) = 3 * 0.85 \approx 2.55$$

$$D(x) = 3 * 0.85 * 0.15 \approx 0.3825$$

Пример №4

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ p & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Найти:

1. $m_o x = 0$;
2. $m_e x$ не существует.

3 Лекция — 28.10.2023

3.1 Дискретные случайные величины

3.1.1 Биномиальное распределение

$$P_n(k) = C_n^K p^k q^{n-k}$$

Закон биномиального распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & q^n & npq^{n-1} & & C_n^k p^k q^{n-k} & p^n \end{pmatrix}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sum_k C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 < x \leq n \\ 1, & x > n \end{cases}$$

Параметры: n, p

Числовые характеристики:

1. Математическое ожидание: $M(x) = np$

2. Дисперсия: $D(x) = n(1-p)p$

Если $np \in Z$, то это будет **наивероятнейшее число успешных испытаний**.

3.1.2 Пуассоновское распределение

Если $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

Закон Пуассоновского распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

Параметры: λ

Числовые характеристики:

1. Математическое ожидание: $M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$

2. Дисперсия: $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2 = \dots = \lambda$

3.1.3 Геометрическое распределение

Рассматривается серия n независимых испытаний, в которых успех появляется с одинаковой вероятностью p и эти испытания **заканчиваются как только наступает успех**: $P_k = (1-p)p^{k-1}$

Закон геометрического распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & \dots & k \\ p & p & (1-p)p & \dots & (1-p)^{k-1}p \end{pmatrix}$$

Параметры: p

Числовые характеристики:

1. Математическое ожидание: $M(x) = \frac{1}{p}$

2. Дисперсия: $D(x) = \frac{1-p}{p^2}$

3.1.4 Решение задач

Пример №1 Вероятность того, что электроприбор откажет — 0.15. Сколько часов в среднем прибор отработает до первого сбоя?

Ответ: $M(X) = \frac{1}{0.15} \approx 6.67$ (часов)

3.2 Непрерывные случайные величины

Определение 4 Случайная величина X называется непрерывной, если её функция распределения $F(x)$ является непрерывной.

Определение 5 Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $[a; b)$ равняется приращению функции распределения на этом промежутке:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

3.2.1 Плотность распределения

Определение 6 Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется первая производная её функции распределения, то есть

$$f(x) = F'(x)$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательная функция, то есть

$$\forall x \in (-\infty; \infty) f(x) \geq 0$$

2. Вероятность того, что случайная величина примет какое-либо значение, равняется единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$

Пример №1 Пусть $f(x) = c \operatorname{arctg} x$. При каком c $f(x)$ будет являться плотностью распределения? Рассмотрим $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c \operatorname{arctg} x = \pm \frac{c\pi}{2}$. Чтобы это выражение было равно нулю, c должно быть равно нулю. Но интеграл единице ни при каком c не будет равняться. Следовательно, $f(x)$ ни при каком c не будет плотностью распределения.

3.2.2 Функция распределения

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $F'(x) = f(x)$ | 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ |
| 2. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ | 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ |

Из этих свойств следует:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Пример №1 Найти плотность распределения непрерывной случайной величины, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x \in (0; 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Просто, по определению, найдем производные:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & x \in (0; 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

3.2.3 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание:** $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
2. **Дисперсия:** $D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx$. Но не забываем про то, что мы все так же можем считать по формуле:
 $D(x) = M(x^2) - M(x)^2$, где $M(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$
3. **Среднеквадратическое отклонение:** $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$
4. **Модой непрерывной величины** называют то ее значение, которому соответствует максимальное значение функции плотности.
5. **Медианой непрерывной величины** называется её значение, при котором имеет место равенство

$$P(X < M_e) = P(X > M_e)$$

Оптимальное свойство медианы. Сумма произведений отклонений значений случайной величины от медианы на соответствующие вероятности будет меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum_{i=1}^n |x_i - M_e| * p_i = \min$$

6. **Начальный момент:** $M(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$

Для дискретной случайной величины: $\alpha^k = M(x^k) = \sum_{k=1}^n x^k P_k$

7. **Центральный момент:** $\mu_k = M(x - M(x))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^k f(x) dx$
8. **Коэффициент асимметрии:** $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Характеризует асимметрию распределения данной случайной величины. Неформально говоря, коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае.
9. **Экссес:** $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ служит для сравнения данного распределения с нормальным распределением. Если эксцесс у распределения положителен, то кривая будет более островершинной. Если эксцесс распределения отрицателен, то пик будет гладким.

Если один из интегралов расходится, то этой случайной величины не существует.

3.2.4 Решение задач

Пример №1 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ -\frac{x^3}{4}, & -2 \leq x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Найти коэффициент асимметрии и эксцесс.

1. **Коэффициент асимметрии.** Найдем математическое ожидание:

$$\alpha_1 = M(x) = \int_{-2}^0 x \left(-\frac{x^3}{4}\right) dx = -\frac{x^5}{20} \Big|_{-2}^0 = -\frac{32}{20} \approx -1.6.$$

$$\alpha_2 = M(x^2) = -\frac{x^6}{24} \Big|_{-2}^0 = \frac{64}{24} \approx 2.67, \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2.67 - (1.6)^2 \approx 0.11, \alpha_3 = -4.57, \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 0.05,$$

$$\alpha_4 = 8, \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 \approx 0.1$$

Теперь можем посчитать коэффициент асимметрии: $A = \frac{0.05}{\sqrt{0.11}^3} = \frac{0.05}{0.33^3} \approx 1.39$

2. **Эксцесс.** Воспользуемся уже посчитанными в ходе предыдущих вычислений. Получается:

$$E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0.1}{0.33^4} - 3 \approx 5.4$$

4 Практическое занятие — 28.10.2023

4.1 Непрерывные случайные величины

4.1.1 Решение задач

Пример №1 В стране пять крупных автогигантов. В кризисных условиях риск того, что завод обанкротится, составляет 30%. Написать закон распределения автогигантов, которые могут обанкротиться в предстоящий кризисный период. Найти математическое ожидание и дисперсию.

Используем биномиальное распределение, x — количество возможно обанкротившихся заводов:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 0.7^5 & 5 * 0.3 * 0.7^4 & 10 * 0.3^2 * 0.7^3 & 10 * 0.3^3 * 0.7^2 & 10 * 0.3^4 * 0.7 & 0.3^5 \\ & 0.168 & 0.36 & 0.31 & 0.132 & 0.028 & 0.002 \end{pmatrix}$$

1. $M(x) = 5 * 0.3 = 1.5$

2. $D(x) = 1.05$

Таким образом, ожидать можно, что штуки две автогигантов рухнут, а чтобы все рухнули — можно не ожидать, **всё нормально**.

Пример №2 Количество ДТП в городе за неделю является случайной величиной, распределенной согласно Пуассоновскому распределению со средним значением, равным трём. **Какова вероятность того, что случится меньше трех ДТП?**

$$M(x) = \lambda = 3$$

$$P(x < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2}) \approx 0.42$$

Ответ: 0.42

Пример №3 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $(1.2; 1.6)$

3. Принадлежащее $\{x : x > 1.5\}$

2. Принадлежащее $[1.7; 2.3]$

4. Принадлежащее $\{x, x \leq 1.3\}$

Решение:

1. $P(1.2 < x < 1.6) = F(1.6) - F(1.2) = 0.32$

2. ...

3. $P(1.5 < x < +\infty) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.25 = 0.75$

4. $P(1.3 < x < +\infty) = F(1.3) = 0.09$

Пример №4 Пусть $f(x) = \frac{c}{1+9x^2}$. Найти значение c .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{c dx}{1+9x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{c}{3} \operatorname{arctg} 3x \Big|_a^b = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \frac{c}{3} (\operatorname{arctg} 3b - \operatorname{arctg} 3a) = \frac{c}{3} (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi c}{3} = 1 \implies$$

$$c = \frac{3}{\pi}$$

Ответ: $\frac{3}{\pi}$

Пример №5 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$:

1. Если $x \in (-\infty; 2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt = 0$$

2. Если $x \in (2; 3]$

$$F(x) = \int_2^x (2t - 4) \, dt = (t^2 - 4t) \Big|_2^x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

3. Если $x \in (3; +\infty)$

$$F(x) = 1$$

Пример №6 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-2x}, & x > 0 \end{cases}$$

Определить математическое ожидание.

$$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \, dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \, dx + \int_0^{+\infty} x 2e^{-2x} \, dx = \int_0^{+\infty} x e^{-2x} \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2 \int_0^b x e^{-2x} \, dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = 2e^{-2x} & v = -e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (-x e^{-2x} \Big|_0^b + \int_0^b e^{-2x} \, dx) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-b e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-b e^{-2b} - \frac{1}{2} e^{-2b} + \frac{1}{2}) = 0.5$$

Пример №7 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -6x^2 + 18x - 12, & 1 < x < 2 \\ 0, & x \geq 2 \end{cases}$$

Найти: $M_e x$

Для того, чтобы найти $M_e x$, необходимо найти $F(x)$.

$$\int_1^x (-6x^2 + 18x - 12) \, dx = -2x^3 + 9x^2 - 12x \Big|_1^x = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5, & 1 < x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

4.2 Равномерное распределение

Говорят, что СВ имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ $[a, b]$, где $a, b \in R$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

4.2.1 Функция распределения

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

4.2.2 Числовые характеристики

1. Математическое ожидание: $M(x) = \frac{a+b}{2}$
2. Дисперсия: $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. Значение медианы: $\frac{a+b}{2}$
4. Значение моды: любое число из $[a, b]$
5. Коэффициент асимметрии: 0
6. Эксцесс: $-\frac{6}{5}$

4.2.3 Решение задач

Пример №1 В некотором городе трамвай ходит по расписанию с интервалом 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай более 2 минут.

Ответ: $P = 0.8$

Пример №2 Обследуются животные, каждое из которых с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализов крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди этих n животных хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число животных N . Предлагается несколько способов обследования:

1. Обследовать всех этих животных, проведя N анализов;
2. Вести обследование по группам, смешав сначала кровь группы из n животных, если все хорошо — перейти к следующей группе, если нет — сделать анализ каждого из животных.

Определить, какой способ обследования наиболее выгодный (в плане минимального проведения анализов): первый или второй?

Закон распределения для группы животных:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & n+1 \\ p & (1-p)^n & 1 - (1-p)^n \end{pmatrix}$$

$$M(x_1) = n$$

$$M(x_2) = (1-p)^n + (n+1)(1 - (1-p)^n) = (1-p)^n + n - n(1-p)^n + 1 - (1-p)^n = n - n(1-p)^n + 1$$

Предполагаем, второй способ выгоднее: $n - n(1-p)^n + 1 > n \iff n(1-p)^n < 1$ — если это значение меньше единицы, используем второй способ; если больше — первый способ.

4.3 Домашнее задание

Задание №1 Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $[1.7; 2.3]$

Решение (возможно, неправильное):

$$P(1.7 \leq x \leq 2.3) = 1 - ((1 - F(2.3)) + F(1.7)) = 1 - (0 + 0.49) = 0.51$$

Ответ (возможно, неправильный): 0.51

Задание №2 Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$

Решение (возможно, неправильное):

$$\int_2^x ((x-2)^2) = \left(4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_2^x = (4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}) - (8 - 8 + \frac{8}{3}) = 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

Ответ (возможно, неправильный):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$