Теория вероятностей и математическая статистика

Лисид Лаконский

September 2023

Содержание

1 Лекция — 30.09.2023

1.1 Повторение испытаний. Схема испытаний Бернули

В серии n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха p является постоянной и одинаковой и вероятность неудачи q тоже является постоянной, **вероятность того, что успех наступит ровно k раз**, обозначается как $P_n(k)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ 0 \le k \le n$$

Вероятность того, что в n испытаниях успех наступит от k_1 до k_2 раз:

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C_n^k C_n^k p^k q^{n-k}$$

Производящая функция, вероятность наступления успеха n раз:
$q_n(x) = (q+px)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 q^{n-1} px + C_n^2 q^{n-2}(px)^2 + \dots + C_n^1 q^{n-k}(px)^k + \dots + (px)^n$
Вероятность того, что в n испытаний произойдет m_k событий A_k с вероятностью p_k (нуждается в проверке)

$$P_n(m_1; m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! m_k!} * p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_k^{m_k}$$

Не уследил, что это такое:

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{C_n^k p^k q^{n-k}} = \frac{P(n-k)}{(k+1)q} \ge 1$$

$$np - q \le k_0 \le np + p$$

Пример №1 Вероятность того, что в течение суток расход электроэнергии не превысит нормы, равняется 0,9. Какова вероятность того, что в ближайшие 7 суток расход электроэнергии в течение четырех суток не будет превышать нормы.
Решение:
$P_7(4) = C_7^4 * 0.9^4 * 0.1^3 = 35 * 0.9^4 * 0.1^3 = 0.023$
Ответ: 0.023

Пример №2 Три камеры наблюдения работают независимо друг от друга. Вероятность зафиксировать событие первой камерой — 0.7, второй — 0.8, третьей — 0.9. Какова вероятность того, что событие будет зафиксировано:

1. Тремя камерами
2. Двумя камерами
3. Одной камерой
4. Не попадет в поле зрение ни одной камеры

Решим с помощью производящей функции: $(p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2)(p_3 x + q_3) = \dots$. Все три камеры: суммы с коэффициентом x^3; две камеры: суммы с коэффициентом x^2 ;не попадет в поле зрение ни одной камеры: без x.
Решение другим способом:
$P(III) = 0.7 * 0.8 * 0.9 = 0.504$
$P(II) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0.398$
$P(0) = 0.3 * 0.2 * 0.1 = 0.006$
$P(I) = 1 - P(III) - P(II) - P(0) = 0.092$

Пример №3 Проводится 21 испытание, $p = 0.4$. Найти наибольшую вероятность успеха в этих испытаниях.
Используем известное неравенство: $21 * 0.4 - 0.6 \le k_0 \le 21 * 0.4 + 0.4 \Leftrightarrow 7.8 \le k_0 \le 8.8$
Ответ: 8

Пример №4 $p = 0.5$

$P_8(3,5) = \sum\limits_{k=3}^{5} C_n^k C_n^k p^k q^{n-k} = C_8^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^5 + C_8^4(\frac{1}{2})^8 + C_8^5(\frac{1}{2})^8 = 0.71$

Ответ: 0.71

Пример №5 Какая вероятность того, что в серии из 110 испытаний успех наступит 58 раз, если $p = 0.4$?

Решение:

$P_{110}(58) = C_{110}^{58} 0.4^{58} 0.6^{52} \approx 0.002025$

Ответ: 0.002025