Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

Содержание

1 Практическое занятие — 27.10.2023

1.1 Случайные величины

Случайные величины разделяются на

1. **Дискретные** — конечное количество; например, цифры на кубике.
2. **Непрерывные** — те случайные величины, которые разделяют сплошь промежуток, их может быть бесконечно много.

1.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ)

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между полученными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.
Его можно задать:

1. таблично;
2. графически;
3. аналитически (в виде формулы).

Ограничение:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Функция распределения обозначается следующим образом: $F_X(x)$, $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина примет значение **строго меньше** x.
Свойства функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$

Числовые характеристики:

1. **Математическое ожидание**: $M(x)$, m_x, $E(x)$ — характеризует среднее арифметическое.

   $$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

   $$M(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

   (a) Матожидание от любой константы равно константе: $M(c) = c$
   (b) Константы выносятся за знак матожидания: $M(cx) = cM(x)$
   (c) Матожидание суммы равно сумме матожиданий: $M(x + y) = M(x) + M(y)$
   (d) Матожидание произведения равно произведению матожиданий: $M(x * y) = M(x) * M(y)$

   Отклонение от математического ожидания:

   $$X - M(x)$$

2. **Дисперсия**: $D(x)$ — матожидание от отклонения в квадрате.

   $$D(x) = M((x - M(x))^2)$$

(a) $D(c) = 0$

(b) $D(cx) = c^2 D(x)$

(c) $D(x+y) = D(x) + D(y)$

(d) $D(x-y) = D(x) + D(y)$

3. **Среднеквадратическое отклонение**:
   $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Теорема 1 *Математическое ожидание независимых случайных величин в n испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p:*

$$M(x) = np$$

Теорема 2 *Матожидание отклонения случайной величины от математического ожидания равно нулю:*

$$M(x - M(x)) = 0$$

Доказательство*:*
$M(X - M(x)) = M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$

Теорема 3 *Дисперсия в n независимых испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании p:*

$$D(x) = np(1-p)$$

Теорема 4 *Дисперсия случайной величины x:*

$$D(x) = M(x^2) - M(x)^2$$

Доказательство*:*
$D(x) = M(x - M(x))^2 = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = M(x^2)2M(x)M(M(x)) + M(M(x)^2) = M(x^2) - M(x)^2$

Определение 1 *Случайная величина x_0 называется* ***нормированной****, если*

1. $M(x_0) = 0$
2. $\sigma(x_0) = 1$

Если $M(x) = a$, $\sigma(x) = \sigma$, то

$$x_0 = \frac{x-a}{\sigma}$$

Доказательство:

1. $M(x_0) = \frac{1}{\sigma}M(x-a) = \frac{1}{\sigma}(M(x) - M(a)) = \frac{1}{\sigma}(a-a) = 0$
2. $D(x_0) = \frac{1}{\sigma^2}D(x-a) = \frac{1}{\sigma^2}(D(x) + D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$

Определение 2 ***Модой дискретной случайной величины*** *x называют значение, которое принимается с наибольшей вероятностью. Обозначение: $m_o x$*

$$max\ P(x = x_i) = P(x = m_o x)$$

Определение 3 ***Медианой дискретной случайной величины*** *x является такое число, для которого вероятность меньших значений меньше 0.5 и вероятность больших значений меньше 0.5. Обозначение: $m_e x$*

Пример №1 Закон распределения для шестигранного кубика.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6}, 2 < x \leq 3 \\ \dots \\ 1, 6 < x \end{cases}$$

По ней мы можем нарисовать простенький график, что оставляется в качестве упражнения читателю.
Также найдем **математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$
$D(x) = \frac{1}{6}((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.92$

Пример №2 Найдем математическое ожидание для следующих величин:

$$\begin{pmatrix} x & 0.01 & -0.01 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 100 & -100 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Матожидание для обеих этих величин — ноль.

Пример №3 Производится испытание на надежность трех видеорегистраторов. Вероятность то, что видеорегистратор выйдет из строя: 0.15. Найти математическое ожидание и дисперсию.
Закон распределения:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.15^3 & & & 0.85^3 \end{pmatrix}$$

$P_3(1) = C_3^1 0.15^2 * 0.85 \approx 0.0574$
$P_3(2) = 3 * 0.15 * 0.85^2 \approx 0.3251$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.0034 & 0.0574 & 0.3251 & 0.6141 \end{pmatrix}$$

Математическое ожидание:

$$M(x) = 1 * 0.0574 + 2 * 0.3251 + 3 * 0.6141 \approx 2.55$$

Дисперсия:
$D(x) = M(x^2) - (2.55)^2 = 0.3825$
Могли бы посчитать математическое ожидание и дисперсию с помощью формул:

$$M(x) = 3 * 0.85 \approx 2.55$$

$$D(x) = 3 * 0.85 * 0.15 \approx 0.3825$$

Пример №4

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ p & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Найти:

1. $m_o x = 0$;
2. $m_e x$ не существует.