# Теория принятия решений

Лисид Лаконский

October 2023

## Содержание

# 1 Практическое занятие — 13.10.2023

$P_8 5 = C_8^5 (\frac{1}{2})^8 = 7 * 2^3 * \frac{1}{2^8} = \frac{7}{32}$ — вероятность выиграть пять партий из восьми у равносильного противника
$P_4 3 = C_4^3 (\frac{1}{2})^4 = 4 * \frac{1}{2^4} = \frac{8}{32}$ — вероятность выиграть четыре партии из восьми у равносильного противника

## 1.1 Решение задач

**Задача №1** Человек, принадлежащий к определенной группе населения, с вероятность 0.2 оказывается брюнетом, 0.3 — шатеном, 0.4 — блондином, 0.1 — рыжим. Выбирается группа из шести человек. Найти вероятности следующих событий:

1. Событие $A$ — хотя бы один рыжий
2. Событие $B$ — в составе группы не меньше четырех блондинов
3. Событие $C$ — в составе группы равное число блондинов и шатенов

**Решение:**

1. Вероятность того, что есть хотя бы один рыжий:
   $P(A) = 1 - 0.9^6 \approx 0.468$
2. Вероятность того, что не меньше четырех блондинов:
   $P(B) = C_6^4 0.4^4 0.6^{6-4} + C_6^5 0.4^5 0.6^{6-5} + C_6^6 0.4^6 0.6^{6-6} = 0.1792$
3. Вероятность того, что равное число блондинов и шатенов:
   $P(C) = P(C_{00}) + P(C_{11}) + P(C_{22}) + P(C_{33})$
   $P(C_{00}) = (1 - 0.7)^6 \approx 0.0007$
   Вероятность того, что будет один блондин, один шатен и четыре остальных:
   $P(C_{11}) = P_6(1; 1; 4) = \frac{6!}{1!1!4!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^4 \approx 0.03$
   Вероятность того, что будет два блондина, два шатена и два остальных:
   $P(C_{22}) = P_6(2; 2; 2) = \frac{6!}{2!2!2!} * 0.3 * 0.4 * (1 - 0.7)^2 \approx 0.1215$
   Вероятность того, что будет три блондина, три шатена и ноль остальных:
   $P(C_{33}) = P_6(3; 3) = \frac{6!}{3!3!} * 0.3 * 0.4 \approx 0.03$
   $P(C) = 0.0007 + 0.03 + 0.1215 + 0.03 \approx 0.18$

**Задача №2** Производится стрельба по цели тремя снарядами. Снаряды попадают в цель независимо друг от друга. Для каждого снаряда вероятность попадания в цель 0.4. Если в цель попал один снаряд, он ее поражает с вероятностью 0.3. Если в цель попало два снаряда — с вероятностью 0.7. Если в цель попало три снаряда — с вероятностью 0.9.
**Найти полную вероятность поражения цели**.
Гипотезы:

1. $H_1$ — попал один снаряд
2. $H_2$ — попало два снаряда
3. $H_3$ — попало три снаряда

Найдем вероятности для каждой из них:

1. $P(H_1) = C_3^1 * 0.4 * 0.6^2 = 0.432$
2. $P(H_2) = C_3^2 * 0.4^2 * 0.6 = 0.288$
3. $P(H_3) = 0.4^3 = 0.064$

**Ответ**:
$P(A) = 0.432 * 0.3 + 0.288 * 0.7 + 0.064 * 0.9 = 0.3888$

**Задача №3** Имеется $n$ лунок, по которым случайным образом разбрасывается $m$ шариков. Найти вероятность того, что в первую лунку попадет ровно $k$ шариков.
**Ответ:**
$P(A) = C_m^k * (\frac{1}{n})^k * (1 - \frac{1}{n})^{m-k}$

**Задача №4** Мишень состоит из яблока и двух колец. При одном выстреле вероятность попадания в яблоко равняется 0.4, вероятность попадания в первое кольцо — 0.5, вероятность попадания во второе кольцо — 0.6, вероятность непопадания — 0.3.
По мишени производится пять выстрелов. **Найти вероятность того, что они дадут два попадания в яблоко и одно попадание во второе кольцо**.
**Ответ:**
$P(A) = P_5(2;0;1;2) = \frac{5!}{2!*0!*1!*2!} * 0.4^2 * 0.5^0 * 0.6^1 * 0.3^2 = 0.2592$

**Задача №5** Производится стрельба пятью снарядами по группе, состоящей из трех целей. Обстрел ведется в следующем порядке: сначала обстреливается первая цель и огонь по ней ведется до тех пор, пока она или не будет поражена, или не кончатся все пять снарядов. После поражения обстрел переходит на следующую цель и так далее. Вероятность поражения цели при стрельбе по ней одним выстрелом — $p$
Найти вероятности того, что будет поражено:

1. 0 целей
2. 1 цель
3. 2 цели
4. 3 цели

Решение:

1. $P_0 = (1-p)^5$
2. $P_1 = P_5(1) = C_5^1 p(1-p)^4$
3. $P_2 = P_5(2) = C_5^2 p^2(1-p)^3$
4. $P_3 = P_5(3) = C_5^3 p^3(1-p)^2$

**Задача №6** Прибор, состоящий из четырех узлов, работал в течение времени $t$. Надежность (вероятность безотказной работы) каждого узла за это время $t$ равна 0.7. По истечении времени $t$ прибор останавливается, техник осматривает его и заменяет узлы, вышедшие из строя. На замену одного узла ему требуется время $\tau$. Найти вероятность того, что через время $2\tau$ после остановки прибор будет готов для нормальной работы.
**Ответ:**
$P = P_4^0 + P_4^1 + P_4^2 = C_4^0 * 0.3^0 * 0.7^4 + C_4^1 * 0.3^1 * 0.7^3 + C_4^2 * 0.3^2 * 0.7^2 = 0.9163$

**Задача №7** В урне имеется $k$ шаров. Каждый из них с вероятностью $\frac{1}{2}$ может оказаться белым или черным. Из урны вынимается $n$ раз по одному шару. Причем каждый вынутый шар каждый раз возвращается обратно и шары перемешиваются. Среди вынутых $n$ шаров $m$ шаров оказались белыми. **Найти вероятность того, что из $k$ шаров в урне ровно $l$ белых**.
**Формула Байеса:**
$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
где

1. $P(A)$ — априорная вероятность гипотезы $A$
2. $P(A|B)$ — вероятность гипотезы $A$ при наступлении события $B$
3. $P(B|A)$ — вероятность наступления события $B$ при истинности гипотезы $A$
4. $P(B)$ — полная вероятность наступления события $B$

**Решение:**
$P(H_l) = C_k^l (\frac{1}{2})^k$
$P(A|H_l) = C_n^m (\frac{l}{k})^m (1 - \frac{l}{k})^{n-m}$
$P(H_l|A) = \frac{P(A|H_l)P(H_l)}{P(A)}$

# 2 Практическое занятие — 27.10.2023

## 2.1 Случайные величины

Случайные величины разделяются на

1. **Дискретные** — конечное количество; например, цифры на кубике.
2. **Непрерывные** — те случайные величины, которые разделяют сплошь промежуток, их может быть бесконечно много.

### 2.1.1 Дискретные случайные величины (ДСВ)

**Законом распределения дискретной случайной величины** называют соответствие между полученными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями.
Его можно задать:

1. таблично;
2. графически;
3. аналитически (в виде формулы).

**Ограничение**:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

**Функция распределения** обозначается следующим образом: $F_X(x)$, $F(x)$ — вероятность того, что случайная величина примет значение **строго меньше** $x$.
**Свойства** функции распределения:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \geq x_1$

**Числовые характеристики:**

1. **Математическое ожидание**: $M(x)$, $m_x$, $E(x)$ — характеризует среднее арифметическое.

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

$$M(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$$

   (a) Матожидание от любой константы равно константе: $M(c) = c$
   (b) Константы выносятся за знак матожидания: $M(cx) = cM(x)$
   (c) Матожидание суммы равно сумме матожиданий: $M(x + y) = M(x) + M(y)$
   (d) Матожидание произведения равно произведению матожиданий: $M(x * y) = M(x) * M(y)$

**Отклонение** от математического ожидания:

$$X - M(x)$$

2. **Дисперсия**: $D(x)$ — матожидание от отклонения в квадрате.

$$D(x) = M((x - M(x))^2)$$

   (a) $D(c) = 0$
   (b) $D(cx) = c^2 D(x)$
   (c) $D(x + y) = D(x) + D(y)$
   (d) $D(x - y) = D(x) + D(y)$

3. **Среднеквадратическое отклонение**:
   $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

**Теорема 1** *Математическое ожидание независимых случайных величин в $n$ испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании $p$:*

$$M(x) = np$$

**Теорема 2** *Матожидание отклонения случайной величины от математического ожидания равно нулю:*

$$M(x - M(x)) = 0$$

***Доказательство***:
$M(X - M(x)) = M(x) - M(M(x)) = M(x) - M(x) = 0$

**Теорема 3** *Дисперсия в $n$ независимых испытаниях при постоянной и одинаковой вероятности успеха в каждом испытании $p$:*

$$D(x) = np(1 - p)$$

**Теорема 4** *Дисперсия случайной величины $x$:*

$$D(x) = M(x^2) - M(x)^2$$

***Доказательство***:
$D(x) = M(x - M(x))^2 = M(x^2 - 2xM(x) + M(x)^2) = M(x^2)2M(x)M(M(x)) + M(M(x)^2) = M(x^2) - M(x)^2$

**Определение 1** *Случайная величина $x_0$ называется **нормированной**, если*

*1.* $M(x_0) = 0$

*2.* $\sigma(x_0) = 1$

*Если* $M(x) = a$, $\sigma(x) = \sigma$, *то*

$$x_0 = \frac{x - a}{\sigma}$$

*Доказательство:*

*1.* $M(x_0) = \frac{1}{\sigma} M(x - a) = \frac{1}{\sigma}(M(x) - M(a)) = \frac{1}{\sigma}(a - a) = 0$

*2.* $D(x_0) = \frac{1}{\sigma^2} D(x - a) = \frac{1}{\sigma^2}(D(x) + D(a)) = \frac{1}{\sigma^2} * \sigma^2 = 1$

**Определение 2** ***Модой дискретной случайной величины*** *$x$ называют значение, которое принимается с наибольшей вероятностью. Обозначение: $m_o x$*

$$max\ P(x = x_i) = P(x = m_o x)$$

**Определение 3** ***Медианой дискретной случайной величины*** *$x$ является такое число, для которого вероятность меньших значений меньше 0.5 и вероятность больших значений меньше 0.5. Обозначение: $m_e x$*

**Пример №1** Закон распределения для шестигранного кубика.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

**Функция распределения**:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1 \\ \frac{1}{6}, 1 < x \le 2 \\ \frac{2}{6}, 2 < x \le 3 \\ \dots \\ 1, 6 < x \end{cases}$$

По ней мы можем нарисовать простенький график, что оставляется в качестве упражнения читателю.
Также найдем **математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}$
$D(x) = \frac{1}{6}((-2.5)^2 + (-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2 + (2.5)^2) = \frac{35}{12} \approx 2.92$

**Пример №2** Найдем математическое ожидание для следующих величин:

$$\begin{pmatrix} x & 0.01 & -0.01 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & 100 & -100 \\ p & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Матожидание для обеих этих величин — ноль.

**Пример №3** Производится испытание на надежность трех видеорегистраторов. Вероятность то, что видеорегистратор выйдет из строя: 0.15. Найти математическое ожидание и дисперсию.
**Закон распределения**:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.15^3 & & & 0.85^3 \end{pmatrix}$$

$P_3(1) = C_3^1 0.15^2 * 0.85 \approx 0.0574$
$P_3(2) = 3 * 0.15 * 0.85^2 \approx 0.3251$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 0.0034 & 0.0574 & 0.3251 & 0.6141 \end{pmatrix}$$

**Математическое ожидание**:

$$M(x) = 1 * 0.0574 + 2 * 0.3251 + 3 * 0.6141 \approx 2.55$$

**Дисперсия**:
$D(x) = M(x^2) - (2.55)^2 = 0.3825$
Могли бы посчитать математическое ожидание и дисперсию с помощью формул:

$$M(x) = 3 * 0.85 \approx 2.55$$

$$D(x) = 3 * 0.85 * 0.15 \approx 0.3825$$

**Пример №4**

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ p & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

**Найти**:

1. $m_o x = 0$;
2. $m_e x$ не существует.

# 3 Лекция — 28.10.2023

## 3.1 Дискретные случайные величины

### 3.1.1 Биномиальное распределение

$P_n(k) = C_n^K p^k q^{n-k}$
**Закон биномиального распределения**:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & q^n & npq^{n-1} & & C_n^k p^k q^{n-k} & p^n \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \sum\limits_k C_n^k p^k q^{n-k}, \ 0 < x \le n \\ 1, \ x > n \end{cases}$$

**Параметры**: $n$, $p$
**Числовые характеристики**:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = np$
2. **Дисперсия**: $D(x) = n(1-p)p$

Если $np \in Z$, то это будет **наивероятнейшее число успешных испытаний**.

### 3.1.2 Пуассоновское распределение

Если $n \to \infty$, $p \to 0$, $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.
**Закон Пуассоновского распределения**:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & \dots & k & n \\ p & e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \end{pmatrix}$$

**Параметры**: $\lambda$
**Числовые характеристики**:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$
2. **Дисперсия**: $D(x) = M(x^2) - (M(x)^2) = \dots = \lambda$

### 3.1.3 Геометрическое распределение

Рассматривается серия $n$ независимых испытаний, в которых успех появляется с одинаковой вероятностью $p$ и эти испытания **заканчиваются как только наступает успех**: $P_k = (1-p)p^{k-1}$
**Закон геометрического распределения**:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 & \dots & k \\ p & p & (1-p)p & \dots & (1-p)^{k-1}p \end{pmatrix}$$

**Параметры**: $p$
**Числовые характеристики**:

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \frac{1}{p}$
2. **Дисперсия**: $D(x) = \frac{1-p}{p^2}$

### 3.1.4 Решение задач

**Пример №1** Вероятность того, что электроприбор откажет — 0.15. Сколько часов в среднем прибор отрабатывает до первого сбоя?
**Ответ**: $M(X) = \frac{1}{0.15} \approx 6.67$ (часов)

## 3.2 Непрерывные случайные величины

**Определение 4** ***Случайная величина $X$ называется непрерывной***, *если её функция распределения $F(x)$ является непрерывной.*

**Определение 5** ***Вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение из промежутка*** $[a; b)$ *равняется приращению функции распределения на этом промежутке:*

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

### 3.2.1 Плотность распределения

**Определение 6** ***Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины*** *называется первая производная её функции распределения, то есть*

$$f(x) = F'(x)$$

**Свойства плотности распределения**

1. **Плотность распределения неотрицательная функция**, то есть

$$\forall x \in (-\infty; \infty) f(x) > 0$$

2. **Вероятность того, что случайная величина примет какое-либо значение, равняется единице**:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

**Пример №1** Пусть $f(x) = c \operatorname{arctg} x$. При каком $c$ $f(x)$ будет являться плотностью распределения? Рассмотрим $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c \operatorname{arctg} x = \pm\frac{c\pi}{2}$. Чтобы это выражение было равно нулю, $c$ должно быть равно нулю. Но интеграл единице ни при каком $c$ не будет равняться. **Следовательно, $f(x)$ ни при каком $c$ не будет плотностью распределения**.

### 3.2.2 Функция распределения

1. $F'(x) = f(x)$
2. $F(x) = \int\limits_{\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Из этих свойств следует:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

**Пример №1** Найти плотность распредления непрерывной случайной величины, если

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ x^2, \ x \in (0; 1] \\ 1, \ x > 1 \end{cases}$$

Просто, по определению, найдем производные:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0 \\ 2x, \ x \in (0; 1] \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

### 3.2.3 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание**: $M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$

2. **Дисперсия**: $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. Но не забываем про то, что мы все так же можем считать по формуле:

   $D(x) = M(x^2) - M(x)^2$, где $M(x^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

3. **Среднеквадратическое отклонение**: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

4. **Модой непрерывной величины** называют то ее значение, которому соответствует максимальное значение функции плотности.

5. **Медианой непрерывной величины** называется её значение, при котором имеет место равенство

$$P(X < M_e) = P(X > M_e)$$

   **Оптимальное свойство медианы**. Сумма произведений отклонений значений случайной величины от медианы на соответствующие вероятности будет меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - M_e| * p_i = min$$

6. **Начальный момент**: $M(x^k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x$

   Для дискретной случайной величины: $\alpha^k = M(x^k) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k P_k$

7. **Цетральный момент**: $\mu_k = M(x - M(x))^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^k f(x)\,\mathrm{d}x$

8. **Коэффициент ассиметрии**: $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Характеризует асимметрию распределения данной случайной величины. Неформально говоря, коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого, и отрицателен в противном случае.

9. **Эксцесс**: $E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} = -3$ служит для сравнения данного распределения с нормальным распределением. Если эксцесс у распределения положителен, то кривая будет более островершинной. Если эксцесс распределения отрицателен, то пик будет гладким.

**Если один из интегралов расходится, то этой случайной величины не существует**.

### 3.2.4 Решение задач

**Пример №1** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x < -2 \\ -\frac{x^3}{4},\ -2 \le x \le 0 \\ 0,\ x > 0 \end{cases}$$

Найти **коэффициент ассиметрии** и **эксцесс**.

1. **Коэффициент ассиметрии**. Найдем математическое ожидание:

   $\alpha_1 = M(x) = \int\limits_{-2}^{0} x(-\frac{x^3}{4})\,\mathrm{d}x = -\frac{x^5}{20}\Big|_{-2}^{0} = -\frac{32}{20} \approx -1.6.$

   $\alpha_2 = M(x^2) = -\frac{x^6}{24}\Big|_{-2}^{0} = \frac{64}{24} \approx 2.67$, $\mu_2 = \alpha^2 - \alpha_1^2 = 2.67 - (1.6)^2 \approx 0.11$, $\alpha_3 = -4.57$, $\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = 0.05$, $\alpha_4 = 8$, $\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 \approx 0.1$

   Теперь можем посчитать коэффициент ассиметрии: $A = \frac{0.05}{\sqrt{0.11}^3} = \frac{0.05}{0.33^3} \approx 1.39$

2. **Эксцесс**. Воспользуемся уже посчитанными в ходе предыдущих вычислений. Получается:
   $E = \frac{\mu^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0.1}{0.33^4} - 3 \approx 5.4$

# 4 Практическое занятие — 28.10.2023

## 4.1 Непрерывные случайные величины

### 4.1.1 Решение задач

**Пример №1** В стране пять крупных автогигантов. В кризисных условиях риск того, что завод обанкротится, составляет 30%. Написать закон распределения автогигантов, которые могут обанкротиться в предстоящий кризисный период. Найти математическое ожидание и дисперсию.
Используем биномиальное распределение, $x$ — количество возможно обанкротившихся заводов:

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p & 0.7^5 & 5*0.3*0.7^4 & 10*0.3^2*0.7^3 & 10*0.3^3*0.7^2 & 10*0.3^4*0.7 & 0.3^5 \\ & 0.168 & 0.36 & 0.31 & 0.132 & 0.028 & 0.002 \end{pmatrix}$$

1. $M(x) = 5 * 0.3 = 1.5$
2. $D(x) = 1.05$

Таким образом, ожидать можно, что штуки две автогигантов рухнут, а чтобы все рухнули — можно не ожидать, **всё нормально**.

**Пример №2** Количество ДТП в городе за неделю является случайной величиной, распределенной согласно Пуассоновскому распределению со средним значением, равным трём. **Какова вероятность того, что случится меньше трех ДТП**?
$M(x) = \lambda = 3$
$P(x < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-3}(1 + 3 + \frac{9}{2}) \approx 0.42$
**Ответ:** 0.42

**Пример №3** Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ (x-1)^2, \ 1 < x \leq 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежащее $(1.2; 1.6)$
2. Принадлежашее $[1.7; 2.3]$
3. Принадлежащее $\{x : x > 1.5\}$
4. Принадлежащее $\{x, \ x \leq 1.3\}$

Решение:

1. $P(1.2 < x < 1.6) = F(1.6) - F(1.2) = 0.32$
2. ...
3. $P(1.5 < x < +\infty) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.25 = 0.75$
4. $P(1.3 < x < +\infty) = F(1.3) = 0.09$

**Пример №4** Пусть $f(x) = \frac{c}{1+9x^2}$. Найти значение $c$.
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} \, \mathrm{d}x = 1$
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+9x^2} = \lim\limits_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{c \, \mathrm{d}x}{1+9x^2} = \lim\limits_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int\limits_a^b \frac{c}{3} \operatorname{arctg} 3x \Big|_a^b = \lim\limits_{a \to -\infty, b \to +\infty} \frac{c}{3}(\operatorname{arctg} 3b - \operatorname{arctg} 3a) = \frac{c}{3}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi c}{3} = 1 \implies$
$c = \frac{3}{\pi}$
**Ответ**: $\frac{3}{\pi}$

**Пример №5** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 2 \\ 2x-4,\ 2 < x \le 3 \\ 0,\ x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$:

1. Если $x \in (-\infty; 2]$

   $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,\mathrm{d}t = 0$

2. Если $x \in (2; 3]$

   $F(x) = \int\limits_{2}^{x} (2x-4)\,\mathrm{d}x = (x^2-4x)\Big|_2^x = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

3. Если $x \in (3; +\infty)$

   $F(x) = 1$

**Пример №6** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 2e^{-2x},\ x > 0 \end{cases}$$

Определить **математическое ожидание**.

$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} x0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{+\infty} x2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty} 2\int\limits_{0}^{b} xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = x & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = 2e^{-2}\,\mathrm{d}x & v = -e^{-2x} \end{vmatrix} =$
$\lim\limits_{b\to+\infty}(-xe^{-2x}\Big|_0^b + \int\limits_{0}^{b} e^{-2x}\,\mathrm{d}x) = \lim\limits_{b\to+\infty}(-be^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^b) = \lim\limits_{b\to+\infty}(-be^{-2b} - \frac{1}{2}e^{-2b} + \frac{1}{2}) = 0.5$

**Пример №7** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1 \\ -6x^2 + 18x - 12,\ 1 < x < 2 \\ 0, x \ge 2 \end{cases}$$

**Найти**: $M_e x$

Для того, чтобы найти $M_e x$, необходимо найти $F(x)$.

$\int\limits_{1}^{x} (-6x^2 + 18x - 12)\,\mathrm{d}x = -2x^3 + 9x^2 - 12x\Big|_1^x = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5$

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 5,\ 1 < x < 2 \\ 1,\ x \ge 2 \end{cases}$$

$$-2x^3 + 9x^2 - 12x + 5 = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Ответ**: $\frac{3}{2}$

## 4.2 Равномерное распределение

Говорят, что СВ имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$ $[a, b]$, где $a, b \in R$, если её плотность $f_X(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} c,\ x \in (a, b) \\ 0,\ x \notin (a, b) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in (a, b) \\ 0,\ x \notin (a, b) \end{cases}$$

### 4.2.1 Функция распределения

Интегрируя определённую выше плотность, получаем:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, \ a \leq x < b \\ 1, \ x \geq b \end{cases}$$

### 4.2.2 Числовые характеристики

1. **Математическое ожидание:** $M(x) = \frac{a+b}{2}$
2. **Дисперсия**: $D(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
3. **Значение медианы**: $\frac{a+b}{2}$
4. **Значение моды**: любое число из $[a, b]$
5. **Коэффициент асимметрии**: 0
6. **Эксцесс**: $-\frac{6}{5}$

### 4.2.3 Решение задач

**Пример №1** В некотором городе трамвай ходит по расписанию с интервалом 10 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать трамвай более 2 минут.
**Ответ:** $P = 0.8$

**Пример №2** Обследуются животные, каждое из которых с вероятностью $p$ является больным. Обследование производится путем анализов крови. Если смешать кровь $n$ животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди этих $n$ животных хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число животных $N$. Предлагается несколько способов обследования:

1. **Обследовать всех этих животных**, проведя $N$ анализов;
2. **Вести обследование по группам**, смешав сначала кровь группы из $n$ животных, если все хорошо — перейти к следующей группе, если нет — сделать анализ каждого из животных.

**Определить, какой способ обследования наиболее выгодный** (в плане минимального проведения анализов): первый или второй?
**Закон распределения для группы животных**:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & n+1 \\ p & (1-p)^n & 1-(1-p)^n \end{pmatrix}$$

$M(x_1) = n$
$M(x_2) = (1-p)^n + (n+1)(1-(1-p)^n) = (1-p)^n + n - n(1-p)^n + 1 - (1-p)^n = n - n(1-p)^n + 1$
Предполагаем, второй способ выгоднее: $n - n(1-p)^n + 1 > n \iff n(1-p)^n < 1$ — **если это значение меньше единице, используем второй способ; если больше — первый способ**.

## 4.3 Домашнее задание

**Задание №1** Пусть

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 1 \\ (x-1)^2, \ 1 < x \leq 2 \\ 1, \ x > 2 \end{cases}$$

Построить функцию распределения и найти вероятность того, что СВ примет значение

1. Принадлежашее $[1.7; 2.3]$

**Задание №2** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 2 \\ (x-2)^2, \ 2 < x \leq 3 \\ 1, \ x > 3 \end{cases}$$

Найти $F(x)$