Justification théorique de la méthode des trapèzes

Proposition 2 : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Pour $n \geq 1$, on note : $T_n = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} = \dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)$

avec $x_k = a + k\left(\dfrac{b-a}{n}\right)$, de sorte que $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

Alors $\left| T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq M \times \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.

Démonstration :

Notons $I = \displaystyle\int_a^b (b-t)(t-a) f''(t)\,dt$. Alors, avec une IPP en posant $\begin{cases} u = (b-t)(t-a) \\ v' = f''(t) \end{cases}$

il vient $I = \left[(b-t)(t-a)f'(t)\right]_a^b - \displaystyle\int_a^b (-2t + (b+a))\, f'(t)\,dt$

donc $I = \displaystyle\int_a^b (2t-(a+b))\, f'(t)\,dt \underset{\begin{cases} u = 2t-(a+b) \\ v' = f'(t) \end{cases}}{=} \left[(2t-(a+b))f(t)\right]_a^b - 2\int_a^b f(t)\,dt$

Ainsi $I = (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2} - \dfrac{1}{2}\int_a^b (b-t)(t-a) f''(t)\,dt$

Avec $a = x_k$ et $b = x_{k+1}$, il vient :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t)(t-x_k) f''(t)\,dt.$$

Par relation de Chasles, il vient :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)(t-x_k)f''(t)\,dt$$

donc $\left| T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x_{k+1}-t)(t-x_k) f''(t)|\,dt$ par inégalité triangulaire

$$\leq \frac{1}{2} \times M \times \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t)(t-x_k)\,dt}_{= \frac{(b-a)^3}{6n^2}}$$

et $\left| T_n - \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \right| \leq M \times \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.