Algebra

3. Przestrzenie i przekształcenia liniowe. Baza i wymiar przestrzeni, macierz przekształcenia - definicje i przykłady.

Przestrzeń - zbiór "nadrzędny", który zawiera inne zbiory, rozważane np. w danym dziale analizy matematycznej.Także: synonim pojęcia struktury matematycznej w celu skrócenia wypowiedzi.

Dodatkowe określenie (np. przestrzeń **ilorazowa**) wskazuje na typ elementów zbioru oraz rodzaj zdefiniowanych na nim relacji i działań. Niektóre przestrzenie mogą opierać się na tym samym zbiorze, różniąc się jedynie działaniami.

Przestrzenie matematyczne mogą tworzyć **hierarchię**, gdzie dany typ przestrzeni posiada, oprócz cech właściwych sobie, także wszystkie cechy typu przestrzeni, z której się wywodzi.

Przekształcenie liniowe (**operator liniowy, odwzorowanie liniowe, transformacja liniowa**) – w algebrze liniowej jest to funkcja f : U → V między przestrzeniami liniowymi U , V *zachowująca ich działania* w tym sensie, że:

- odwzorowanie sumy wektorów z jednej przestrzeni w drugą jest równe sumie odwzorowań poszczególnych wektorów tej sumy,
- odwzorowanie iloczynu wektora przez skalar jest równe iloczynowi skalara przez odwzorowanie danego wektora.

Definicja:

Niech K oznacza pewne ciało (np. liczby rzeczywiste czy zespolone), a U i V będą przestrzeniami liniowymi nad tym ciałem. Funkcję $\mathrm{f}\colon U \to V$ nazywa się **przekształceniem liniowym**, jeżeli jest

- addytywna (zachowuje dodawanie wektorów),

$$\mathrm{f}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathrm{f}(\mathbf{x}) + \mathrm{f}(\mathbf{y})$$

- jednorodna (zachowuje mnożenie przez skalar),

$$\mathrm{f}(c\,\mathbf{x}) = c\,f(\mathbf{x}).$$

Powyższe warunki można połączyć w jeden, równoważny z nimi *warunek liniowości*

$$\mathrm{f}(c\,\mathbf{x} + d\,\mathbf{y}) = c\,\mathrm{f}(\mathbf{x}) + d\,f(\mathbf{y}).$$

Baza – pojęcie będące przeniesieniem oraz rozwinięciem idei układu współrzędnych kartezjańskich w przestrzeniach euklidesowych na abstrakcyjne przestrzenie liniowe.
Definicja:
Niech V będzie przestrzenią wektorową. Zbiór wektorów $B \subseteq V$ nazywany jest *bazą* przestrzeni V, gdy

- jest on liniowo niezależny,
- generuje on przestrzeń V, tj. każdy wektor z przestrzeni V może być zapisany jako kombinacja liniowa wektorów ze zbioru B.

Wymiar – minimalna liczba niezależnych parametrów potrzebnych do opisania jakiegoś zbioru. Zatem jest to liczba przypisana zbiorowi lub przestrzeni w taki sposób, by punkt miał w.=0, prosta w.=1, płaszczyzna w.=2 itd.

W algebrze liniowej, **wymiar** przestrzeni liniowej, to moc dowolnej bazy liniowej tej przestrzeni. Wymiar liniowej przestrzeni euklidesowej R^n wynosi n. W przestrzeni dwuwymiarowej do określenia położenia dowolnego punktu potrzebne są dwie współrzędne np. p := (20 , 30). W układzie trójwymiarowym – trzy współrzędne.

Ponieważ przestrzeń R^3 dość dobrze opisuje świat bezpośrednio dostępny naszym zmysłom, można na co dzień mówić, że żyjemy w przestrzeni trójwymiarowej.

W przypadku przestrzeni nad ciałem liczb zespolonych zachodzi naturalne utożsamienie:

$C^n = R^{2n}$

Widzimy, że przestrzeń, o wymiarze liniowym zespolonym n, ma wymiar rzeczywisty 2n. Dla przykładu, 4-wymiarowa przestrzeń euklidesowa może być traktowana jako 2-wymiarowa zespolona, a płaszczyzna euklidesowa (czyli przestrzeń 2-wymiarowa nad ciałem liczb rzeczywistych) może być traktowana jako prosta zespolona (czyli przestrzeń 1-wymiarowa nad ciałem liczb zespolonych).

Macierz przekształcenia liniowego – macierz będąca wygodnym zapisem we współrzędnych przekształcenia liniowego dwóch skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad tym samym ciałem z ustalonymi bazami. Dzięki temu, że mnożeniu macierzy oraz mnożeniu wektorów odpowiada składanie przekształceń i obliczanie wartości przekształcenia na wspomnianym wektorze, teoria macierzy staje się wygodnym językiem opisu przekształceń liniowych wyżej opisanych przestrzeni; jeśli nie wskazano żadnych baz, to każdą macierz o elementach z ciała można traktować jako przekształcenie liniowe między dwiema przestrzeniami współrzędnych.

Na przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ 2x + 3y - z \end{bmatrix}$$

odpowiada dokładnie przekształceniu

$$\phi((x, y, z)) = (x - z, 2x + 3y - z) \, .$$