Funkcje tworzące i ich zastosowania

1. Definicja

Funkcja tworząca F(x) dla ciągu $(a_n) = (a_0, a_1, \dots , a_n)$ jest zdefiniowana jako : $F(x) = \sum_{n=0} a_n * x^n$
Ciąg a_n może być ciągiem liczbowym, jednak przeważnie jego wartości są inne, zazwyczaj są to funkcje. X^n rozumiemy jako wyrazy pierścienia szerego formalnego albo liczby (rzeczywiste jak i zespolone).

2. Jak traktować funkcje tworzące:

a) Potraktowanie F(x) jako szeregu liczb rzeczywistych
b) Bardziej użytecznie: $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ jako formę zapisu ciągu $(a_0, a_1, \dots , a_n)$, czyli jedynie jako ciąg symboli. Równości pomiędzy odpowiednimi wzorami służą rozwiązaniu problemów kombinatorycznych, tak więc traktujemy je jako równości dwu wyrażeń, a nie jako równość dwu funkcji rzeczywistych, pomimo że mają one uzasadnienia w języku analizy matematycznej.

3. Zastosowania funkcji tworzących.

a) Funkcje tworzące są bardzo użytecznym narzędziem przy wyznaczaniu wartości elementów ciągu. Jeśli bowiem F(x) = a0 + a1x + a2x2 + ... jest funkcją tworzącą ciągu (a0, a1, ... , an), oraz w jakiś sposób będziemy w stanie poznać postać zwartą funkcji F(x), to rozwijając tę postać zwartą w szereg Taylora, poznamy kolejne współczynniki tego rozwinięcia. A współczynniki te, to właśnie kolejne wyrazy naszego ciągu.

b) Dzięki funkcjom tworzącym można rozwiązywać równania rekurencyjne. Bardzo dobrym przykładem stosowanych technik jest wyprowadzenie wzoru na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

c) Częstym zastosowaniem funkcji tworzących jest zliczanie pewnych obiektów kombinatorycznych. Klasyczną metodą jest ułożenie najpierw równania rekurencyjnego na zliczane obiekty, a potem rozwiązanie go z użyciem funkcji tworzących. Przykład to jest między innymi wyprowadzenie wzoru na liczby Catalana.

d) Funkcje tworzące stosuje się również do opisu szeregów funkcji, np. wielomianów Hermite'a.