Dowody indukcyjne i definiowanie rekurencyjne funkcji

Paweł Nowik

14 października 2019

Indukcja matematyczna to metoda dowodzenia twierdzeń o prawdziwości nieskończonej liczby stwierdzeń oraz definiowania rekurencyjnego. Dowody wykorzystujące metodę indukcji nazywa się dowodami indukcyjnymi.

Zasada indukcji matematycznej

W(n) - własność *W* spełniona dla liczby naturalnej *n*.

Jeśli własność *W* jest spełniona dla liczby 1 oraz jeśli dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ z prawdziwości *W(n)* wynika prawdziwość *W(n+1)*, to własność *W* jest spełniona dla dowolnej liczby naturalnej.

Dowody korzystające z zasady indukcji matematycznej składają się z dwóch kroków. Pierwszym jest dowód prawdziwości *W(1)*. W drugim kroku zakłada się prawdziwość *W(n)*, założenie jest hipotezą indukcyjną, i pod tym założeniem dowodzi się prawdziwości *W(n+1)*.

Przykład - suma początkowych liczb naturalnych:

Należy dowieść *W(n):* $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

1. Sprawdzamy prawdziwość dla $n = 1$:

$L = 1$
$P = \frac{1*2}{2} = 1$
$L = P$
W(1) spełnione.

2. Założenie indukcyjne:

Przypuścmy, że dla pewnego ustalonego n zachodzi *W(n)*.

3. Chcemy pokazać, że zachodzi *W(n+1)*, czyli:

Teza: $1 + 2 + ... + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

4. Krok indukcyjny:

$$L = 1 + 2 + ... + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+2}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = P$$

Czyli na mocy zasady indukcji matematycznej *W(n)* zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Funkcja rekurencyjna - funkcja $\mathbb{N}^i \to \mathbb{N}$, która jest obliczalna za pomocą maszyny Turinga. Klasę tych funkcji definiuje się za pomocą mniejszej klasy funkcji pierwotnie rekurencyjnych.
Funkcje pierwotnie rekurencyjne, to funkcje które da się zbudować z funkcji prostych za pomocą ich składania oraz operacji podstawiania i rekursji.

Funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi nazywamy funkcje:
Funkcja zerowa
Z: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $\mathrm{Z(n) = 0}$.

Funkcja następnika
S: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $\mathrm{S(n) = n + 1}$.

Funkcja rzutowania
$I_n^i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, zdefiniowana jako $I_n^i(x_1, ..., x_n) = x_i, i \leqslant n$

Złożenia funkcji

Dla danych funkcji f:$\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ oraz $g_1, \ldots, g_k : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, złożeniem nazywamy funkcję h: $\mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$, zdefiniowaną jako h$(\overline{n}) = f(g_1(\overline{n}), \ldots, g_k(\overline{n}))$

Rekursja prosta

Dla danych funkcji g: $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ oraz h: $\mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$, złożeniem rekurencyjnym nazywamy funkcję f: $\mathbb{N}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowaną jako $\begin{cases} f(\overline{n}, 0) = g(\overline{n}) \\ f(\overline{n}, S(m)) = h(f(\overline{n}, m), \overline{n}, m) \end{cases}$

Przykłady:

Każda definicja rekurencyjna potrzebuje przynajmniej jednego przypadku bazowego (nie rekurencyjnego) i musi definiować funkcję odwołując się w definicji do niej samej.

Wyliczanie największego wspólnego dzielnika za pomocą algorytmu Euklidesa:

$$gcd(k, n) = \begin{cases} n & \text{dla k} = 0 \\ gcd(n \bmod k, k) & \text{dla } k > 0 \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego:
$\text{fib}(0) = 0$,
$\text{fib}(1) = 1$,
$\text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$ dla $n \geqslant 2$.

$\text{fib}(4) = \text{fib}(3) + \text{fib}(2) = (\text{fib}(2) + \text{fib}(1)) + (\text{fib}(1) + \text{fib}(0)) = ((\text{fib}(1) + \text{fib}(0)) + \text{fib}(1)) + (\text{fib}(1) + \text{fib}(0)) = ((1 + 0) + 1) + (1 + 0) = 3$