

2013—2014 学年 第 1 学期

## “最优化理论与算法—线性规划”补充习题

2013年 10 月 15 日

刘红英

1. 判断下列每个命题的正误，并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例；理由不正确的答案不得分.

(a) 线性规划标准形的可行集总是有界的.

(b) 线性规划标准形问题一定有可行解.

(c) 非基变量的既约费用系数总是严格正的.

(d) 多面集上极小化一个凸的分段线性函数能表述为线性规划问题.

(e) 如果所有非基变量的既约费用系数都是正数，则线性规划问题有唯一最优解.

(f) 线性规划标准形问题一定有基本可行解.

(g) 如果某个基本解的所有既约费用系数非负，则它是最优解.

(h) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题一定无界.

(i) 两阶段法中，第 I 阶段的辅助问题的对偶问题有可能无界.

(j) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是整数，但是需求和供给量是分数，则树解对应的单纯形乘子都是整数.

(k) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是分数，但是需求和供给量是整数，最优树解的每个分量是分数.

(l) 整数线性规划(极小化)松弛问题的最优值一定不大于原始问题的最优值.

(m) 将整数线性规划(极小化)松弛问题的最优解四舍五入可以得到原问题的可行解.

2. (15分)假设用单纯形法求解标准形式的线性规划时得到如下单纯形表

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
0	1	-1	0	$\beta$	1
0	0	2	1	$\gamma$	2
1	0	4	0	$\delta$	3
0	0	$r_3$	0	$r_5$	

还假设矩阵  $\mathbf{A}$  的后三列形成单位矩阵.

(a) 给出由该表描述的当前基是最优的充分必要条件(依照表中的系数).

(b) 假设该基是最优的且  $r_3 = 0$ . 找出另外一个最优基本可行解，其与该表所描述的不同.

(c) 假定与当前表所联系的基是最优的.假设将原问题中的  $b_1$  替换为  $b_1 + \epsilon$ . 给出使基保持最优的  $\epsilon$  的上下界。

3. 某公司利用资源 A, B 和 C 生产四种产品 1, 2, 3 和 4. 公司通过求解线性规划问题

$$\begin{aligned}
 z^* = \text{maximize} \quad & 16x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 50x_4 \\
 \text{subject to} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 16x_4 \leq 800 \quad (\text{A}) \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1000 \quad (\text{B}) \\
 & 2x_1 + 1.2x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 680 \quad (\text{C}) \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

确定产品组合. 将该问题化成标准形后使用单纯形法求解，得到最优表格

0	1	5.5	19	1.5	-1	0	200
1	0	-3	-11	-1	1	0	200
0	0	0.4	3.2	0.2	-0.8	1	40
0	0	14	40	5	2	0	6000

(a) (2') 最优解和最优值各是多少?

(b) (2') 最优基  $\mathbf{B}$  和其逆  $\mathbf{B}^{-1}$  各是多少?

(c) (2') 用一句话来描述最优策略.

- (d) (2') 最优解唯一吗? 为什么?
- (e) (4') 写出对偶问题. 对偶问题的最优解是什么?
- (f) (4') 产品 3 的利润改变多少才能使最优解中产品 3 的产量非零(即生产产品 3)?
- (g) (3') 产品 2 的最小利润是多少时仍能保证公司继续生产它?
- (h) (4') 给出使得当前基保持最优的资源 B 的范围.
- (i) (3') 假设资源 B 的数量由 1000 变成  $1000 + \theta$ . 请说明最优利润如何随着  $\theta$  改变.
- (j) (4') 一种新产品需要 4 单位的资源 A, 4 单位的资源 B 和 1 单位的资源 C. 为了生产该产品, 它的利润应该是多少?
4. (25分) 图 1 给出了一个网络, 其中节点 1 和 2 为供给节点, 节点 4 和 5 为需求节点, 节点 3 为中转节点. 节点旁的数字表示该节点的供给量(负值表示需求, 未标出数字的默认为 0), 弧上的数字表示运输单位商品的费用, 这里四个正数  $a, b, c, d$  是未知的. 请完成以下问题:
- (a) (4分) 写出具体的最小费用流问题.
- (b) (4分) 写出(a)中问题的对偶问题.
- (c) (3分) 给出上述问题可行时,  $a, b, c, d$  需要满足的条件.
- (d) (4分) 考虑由弧  $(1, 4), (2, 3), (3, 4)$  和  $(3, 5)$  构成的生成树(见图 2), 设 3 为根节点. 请给出这棵生成树对应的树解.  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 这个树解是可行的?
- (e) (7分) 计算上述树解的单纯形乘子和既约费用系数.  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 所给树解是最优的?
- (f) (3分)  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 这个问题有多个解(包括这里给出的)?

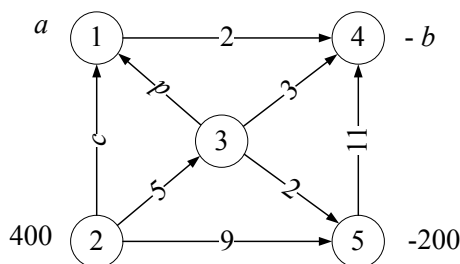


图1 网络与数据.

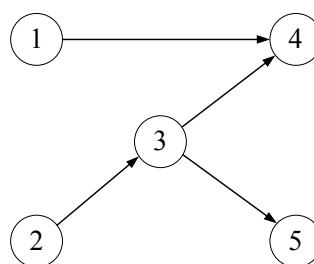


图2 一棵生成树.