

# 最优化第三次作业

张晋 15091060

2017 年 10 月 17 日

2.8 设该基本可行解  $\mathbf{x}$  为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 其中  $x_1, x_2, \dots, x_m$  为其基本可行解的基, 对于  $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = z_0 + r_{m+1}x_{m+1} + \dots + r_n x_n = z_0$ ,  $z$  在该基本可行解下取到下界  $z_0$ . 若存在其他解  $\mathbf{x}'$ , 则  $z(\mathbf{x}') = z_0 + r_{m+1}x'_{m+1} + \dots + r_n x'_n$ , 在  $x'_{m+1}, x'_{m+2}, \dots, x'_n$  中至少有一个大于 0, 否则  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ .

$\because r_j, x'_j > 0 \quad \forall m+1 \leq j \leq n. \quad \therefore z(\mathbf{x}') > z_0 = z(\mathbf{x})$ , 即不存在其他最优解.

2.9 举例如下:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_2 + x_3 = 0 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1}$$

显然该最优解在  $x_1 = 1, x_2 = x_3$  时取到。其单纯形表如下:

表 1: 2.9 题例的单纯形表

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$b$
1	1	-1	1
0	-1	1	0
$\mathbf{r}^T$	-1	0	0

虽然  $\mathbf{a}_1$  对应的  $r_1 < 0$ , 但对应的可行解  $(1, 0, 0)^T$  为最优解.

2.10 化为标准形如下:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1 - x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
 & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned} \tag{2}$$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
	1	-1	1	0	2
	1	1	0	1	6
$\mathbf{r}^T$	1	-1	0	0	0

表 2: 第一次迭代

取 1 为转轴元, 此时解为  $(0, 0, 2, 6)^T$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$b$
	2	0	1	1	8
	1	1	0	1	6
$\mathbf{r}^T$	2	0	0	1	6

表 3: 第二次迭代

此时得最优解为  $(0, 6, 8, 0)^T$ , 即在  $x_1 = 0, x_2 = 6$  时得原问题最优值为 6.  $x_1, x_2$  空间的可行域见图 1, 单纯形法的解从  $(0, 0)$  迭代到  $(0, 6)$

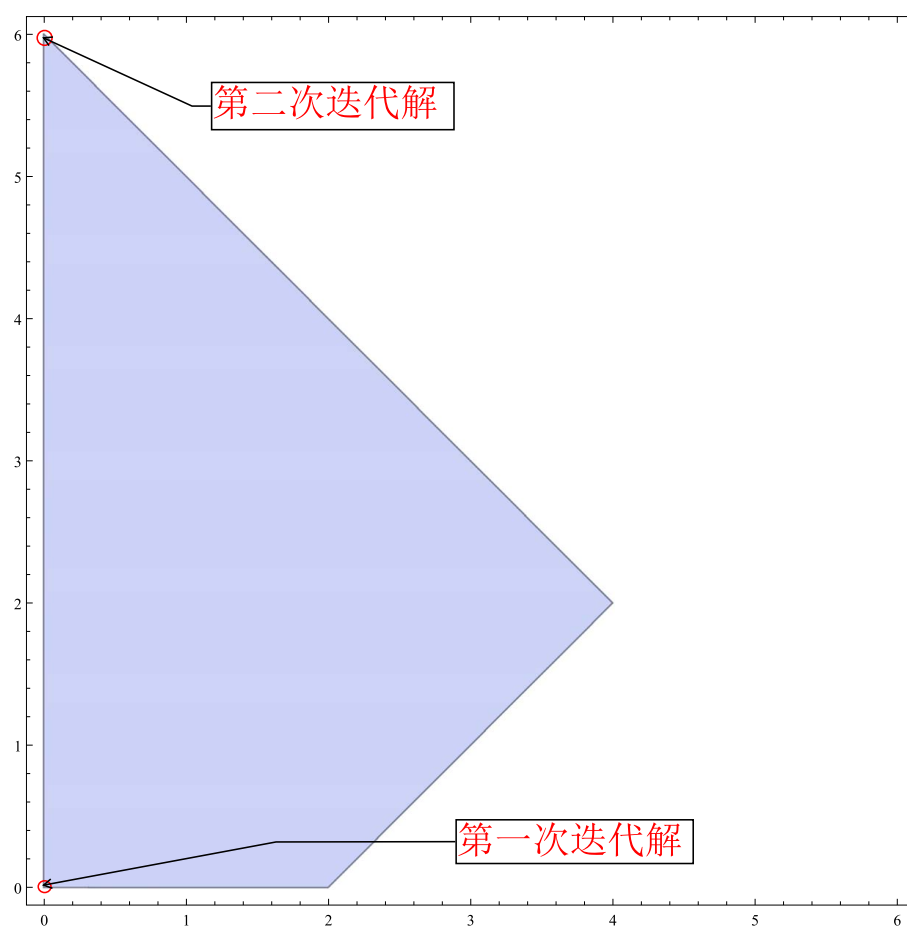


图 1: 可行域图

2.20 单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	8	4	1	0	0	1	10000
$\mathbf{r}^T$	-4	-2	-1	0	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	1	0	0	1
	0	$\boxed{1}$	0	-4	1	0	96
	0	4	1	-8	0	1	9992
$\mathbf{r}^T$	0	-2	-1	4	0	0	4

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1
	0	1	0	-4	1	0	96
	0	0	1	8	-4	1	9608
$\mathbf{r}^T$	0	0	-1	-4	2	0	196

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	-8	0	$\boxed{1}$	0	-4	1	9600
$\mathbf{r}^T$	4	0	-1	0	2	0	200

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	-8	0	1	0	-4	1	9600
$\mathbf{r}^T$	-4	0	0	0	-2	1	9800

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	1	0	0	1
	0	1	0	-4	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	96
	0	0	1	8	-4	1	9608
$\mathbf{r}^T$	0	0	0	4	-2	1	9804

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	0	0	1
	0	1	0	-4	1	0	96
	0	4	1	-8	0	1	9992
$\mathbf{r}^T$	0	2	0	-4	0	1	9996

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
	1	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	8	4	1	0	0	1	10000
$\mathbf{r}^T$	4	2	0	0	0	1	10000

单纯形法迭代完毕后得最优解  $(0, 0, 10000)$ ，得最优值 10000.

2.21 单纯形表如下:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	1	0	0	$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	0
	0	1	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{r}^T$	0	0	0	$-3/4$	20	$-1/2$	6	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	4	0	0	1	-32	-4	36	0
	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	$3/2$	-15	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{r}^T$	3	0	0	0	-4	$-7/2$	33	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	0
	$-1/2$	$1/4$	0	0	1	$3/8$	$-15/4$	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{r}^T$	1	1	0	0	0	-2	18	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	$-3/2$	1	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	0
	$1/16$	$-1/8$	0	$-3/64$	1	0	$\boxed{3/16}$	0
	$3/2$	-1	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	1
$\mathbf{r}^T$	-2	3	0	$1/4$	0	0	-3	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	<span style="border: 1px solid black;">2</span>	-6	0	-5/2	56	1	0	0
	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
$\mathbf{r}^T$	-1	1	0	-1/2	16	0	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
	0	<span style="border: 1px solid black;">1/3</span>	0	1/6	-4	-1/6	1	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{r}^T$	0	-2	0	-7/4	44	1/2	0	0

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b$
	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{r}^T$	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

当我们计算到第 7 张表时，我们可以发现第 7 张表其实和第一张表是相同的，如果继续按该规则进行计算，将会出现循环的现象，每经过 6 次转轴迭代后会回到初始单纯形表。

为了避免循环的出现，可以使用摄动法、字典序法和 Bland 法则，Bland 法则的做法是：进基后使目标值减小的变量中选指标最小者进基，出基后使新的基本解保持可行的变量中选指标最小者出基。