最优化第三次作业

张晋 15091060

2017 年 10 月 9 日

2.8 设该基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 为其基本可行解的基，对于 $z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z_0 + r_{m+1}x_{m+1} +, \cdots, +r_n x_n = z_0$，$z$ 在该基本可行解下取到下界 z_0. 若存在其他解 $\boldsymbol{x}'$, 则 $z(\boldsymbol{x}') = z_0 + r_{m+1}x'_{m+1} +, \cdots, +r_n x'_n$, 在 $x'_{m+1}, x_{m+2'}, \cdots, x'_n$ 中至少有一个大于 0，否则 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$.

$\because r_j, x'_j > 0 \quad \forall m+1 \leq j \leq n. \quad \therefore z(\boldsymbol{x}') > z_0 = z(\boldsymbol{x})$, 即不存在其他最优解.

2.9 举例如下:

$$\begin{aligned} min \quad & x_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_2 + x_3 = 0 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1}$$

显然该最优解在 $x_1 = 1, x_2 = x_3$ 时取到。其单纯形表如下:

表 1: 2.9 题例的单纯形表

	x_1	x_2	x_3	b
	1	1	-1	1
	0	-1	1	0
$\boldsymbol{r}^T$	-1	0	0	0

虽然 $\boldsymbol{a}_1$ 对应的 $r_1 < 0$，但对应的可行解 $(1, 0, 0)^T$ 为最优解.

2.10 化为标准形如下：

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \tag{2}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_3	b
	1	-1	1	0	2
	1	$\boxed{1}$	0	1	6
$\boldsymbol{r}^T$	1	-1	0	0	0

表 2: 第一次迭代

取 1 为转轴元，此时解为 $(0, 0, 2, 6)^T$

	x_1	x_2	x_3	x_3	b
	2	0	1	1	8
	1	1	0	1	6
$\boldsymbol{r}^T$	2	0	0	1	6

表 3: 第二次迭代

此时得最优解为 $(0, 6, 8, 0)^T$，即在 $x_1 = 0, x_2 = 6$ 时得原问题最优值为 6. x_1, x_2 空间的可行域见图 1，单纯形法的解从 $(0, 0)$ 迭代到 $(0, 6)$

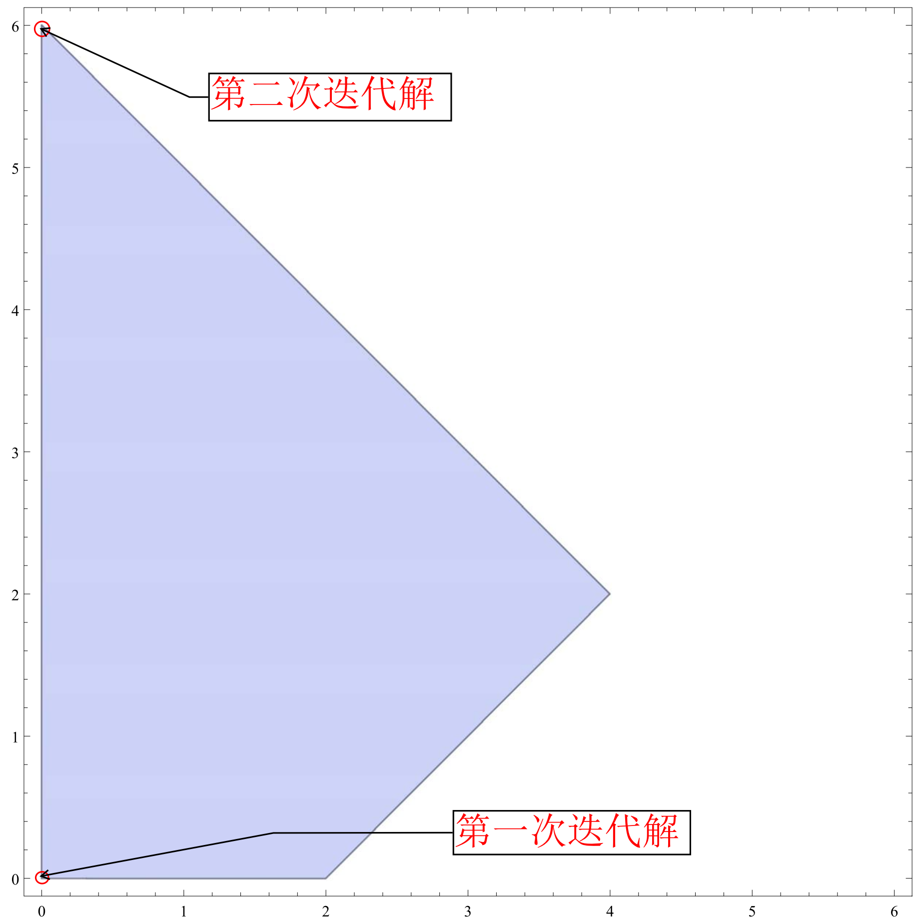

图 1: 可行域图

2.20 单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	8	4	1	0	0	1	10000
$\boldsymbol{r}^T$	-4	-2	-1	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	1	0	0	1
	0	$\boxed{1}$	0	-4	1	0	96
	0	4	1	-8	0	1	9992
$\boldsymbol{r}^T$	0	-2	-1	4	0	0	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1
	0	1	0	-4	1	0	96
	0	0	1	8	-4	1	9608
$\boldsymbol{r}^T$	0	0	-1	-4	2	0	196

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	-8	0	$\boxed{1}$	0	-4	1	9600
$\boldsymbol{r}^T$	4	0	-1	0	2	0	200

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	-8	0	1	0	-4	1	9600
$\boldsymbol{r}^T$	-4	0	0	0	-2	1	9800

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	1	0	0	1
	0	1	0	-4	$\boxed{1}$	0	96
	0	0	1	8	-4	1	9608
$\boldsymbol{r}^T$	0	0	0	4	-2	1	9804

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	1
	0	1	0	-4	1	0	96
	0	4	1	-8	0	1	9992
$\boldsymbol{r}^T$	0	2	0	-4	0	1	9996

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	1	0	0	1
	4	1	0	0	1	0	100
	8	4	1	0	0	1	10000
$\boldsymbol{r}^T$	4	2	0	0	0	1	10000

单纯形法迭代完毕后得最优解 $(0, 0, 10000)$，得最优值 10000.

2.21 单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	1	0	0	$\boxed{1/4}$	-8	-1	9	0
	0	1	0	1/2	-12	- 1/2	3	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	0	0	0	- 3/4	20	- 1/2	6	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	4	0	0	1	-32	-4	36	0
	-2	1	0	0	$\boxed{4}$	3/2	-15	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	3	0	0	0	-4	-7/2	33	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	-12	8	0	1	0	$\boxed{8}$	-84	0
	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	1	1	0	0	0	-2	18	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	$\boxed{3/16}$	0
	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
$\boldsymbol{r}^T$	-2	3	0	1/4	0	0	-3	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	$\boxed{2}$	-6	0	-5/2	56	1	0	0
	1/3	-2/3	0	-1/4	16/3	0	1	0
	-2	6	1	5/2	-56	0	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	-1	1	0	-1/2	16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	1	-3	0	-5/4	28	1/2	0	0
	0	$\boxed{1/3}$	0	1/6	-4	-1/6	1	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	0	-2	0	-7/4	44	1/2	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
	0	0	1	0	0	1	0	1
$\boldsymbol{r}^T$	0	0	0	-3/4	20	-1/2	6	0

当我们计算到第 7 张表时，我们可以发现第 7 张表其实和第一张表是相同的，如果继续按该规则进行计算，将会出现循环的现象，每经过 6 次转轴迭代后会回到初始单纯形表.

为了避免循环的出现，可以使用摄动法、字典序法和 Bland 法则，Bland 法则的做法是: 进基后使目标值减小的变量中选指标最小者进基, 出基后使新的基本解保持可行的变量中选指标最小者出基.