

多商品流问题在流量工程上的应用

刘红英

北京航空航天大学, 数学与系统科学学院, 北京 100191, 中国

摘要 流量工程(Traffic Engineering, TE)利用网络流量信息分配流量以优化某些性能准则. 通常可以建模为多商品流问题, 而流量分配的最优性依赖于目标函数的选取. 本文介绍了多商品流问题, 并考虑了两种常用的目标函数, 即极小化最大弧利用率和 $M/M/1$ 延迟公式的逐段线性近似函数. 我们将这两种目标函数对应的多商品流问题等价地表述为线性规划问题, 然后调用优化软件可以求解所得问题.

关键词 流量工程, 多商品流问题, 凸优化, 非光滑优化, 线性规划.

I. 引言

从工程上讲, 互联网服务提供商(Internet Service Providers, ISPs)的基本任务是部署基础设施、掌管网络的连通性、并在他们自己的网络内部均衡负载, 由此提供有保障的服务 [1]. 流量工程(Traffic Engineering, TE)的目的是分发流量以便“优化”某种性能. 若要获取最优路由, ISP需要调整路由配置以满足现有流量.

本文讨论单自治域内的流量工程, 其中假定每个进入节点(ingress router)和外出节点(egress router)是已知的. 从而流量工程依赖于目标函数和具体的路由实现机制 [8].

为了实现流量工程技术, 通常要求解大规模问题. 该大规模问题可以表述为多商品流问题(Multi-Commodity Flow Problem, MCFP). 除在互联网中的应用之外, 多商品流问题还在道路网络、电信网络、分发网络和网络均衡中有重要的应用 [12].

本文先介绍多商品流问题的模型及相关算法. 在此基础上, 介绍了流量工程上常用的两种目标函数. 之后将流量工程上这两种常用的目标函数对应的非光滑多商品流问题等价表述为线性规划问题, 从而可以利用求解线性规划的软件进行求解.

通信作者. 电子邮件: liuhongying@buaa.edu.cn

II. 多商品流问题

本节先给出网络模型和多商品流问题的表述, 并用一个例子来深刻理解流平衡约束.

A. 网络模型

处理网络中的路由问题时, 一种常规作法是将路由问题建模为多商品流问题. 多商品流问题是一个网络流问题, 其中有多种具有不同源和宿的商品流经网络. 我们考虑一个有向网络 $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$, 其中 \mathcal{N} 是节点集, \mathcal{E} 是弧集. 对每条弧 $l = (i, j) \in \mathcal{E}$, 设其容量是 c_l , 代表每条弧上所能承受负载的上界. 已知源-目的(入口-出口路由器)对 (s_m, t_m) , $m = 1, \dots, M$, 且 (s_m, t_m) 的流量需求是 d_m , 这表示流量在节点 s_m 流入网络, 然后在节点 t_m 流出网络的平均密度. 后面, 我们用符号 N 和 E 分别表示集合 \mathcal{N} 和 \mathcal{E} 的势, 即节点数目和弧的数目.

将每个源-目的对 (s_m, t_m) 的通信流看作一种商品. 设沿弧 l 的商品流 m 是 f_{ml} . 找到流指派满足条件:

$$f_l = \sum_{m=1}^M f_{ml} \leq c_l, \forall l \in \mathcal{E} \quad (1a)$$

$$\sum_{l:l=(i,j) \in \mathcal{E}} f_{ml} - \sum_{l:l=(j,i) \in \mathcal{E}} f_{ml} = b_{mi}, m = 1, \dots, M, \forall i \in \mathcal{N} \quad (1b)$$

$$f_{ml} \geq 0, m = 1, \dots, M, \forall l \in \mathcal{E}, \quad (1c)$$

其中(1a)和(1b)分别是容量约束和流平衡约束, $b_{mi} \geq 0$ 是在节点 i 流入网络的第 m 种商品的平均通信量(外部流).

下面进一步理解约束(1b), 该等式的左边表示流出节点 i 的第 m 种商品的数量减去流入第 i 个节点的第 m 种商品的数量, 右边是在节点 i 流入网络的第 m 种商品的平均通信量. 当 $i = s_m$ 时 $b_{mi} = d_m$; 当 $i = t_m$ 时 $b_{mi} = -d_m$; 其余情况 $b_{mi} = 0$. 为了表述简洁, 令 \mathbf{A} 是网络 \mathcal{G} 的点弧关联矩阵([15],

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & -1 & & & & \\ -1 & & & 1 & & & & -1 & \\ & -1 & & & 1 & 1 & & & \\ & & -1 & & & & 1 & 1 & \\ & & & -1 & & 1 & 1 & & -1 \\ & & & & -1 & & & 1 & 1 \\ & & & & & -1 & & & 1 \\ & & & & & & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Fig. 1. 一个简单的网络拓扑和流量需求

p.55), 即 $N \times E$ 阶矩阵, 且第 l 列与弧 $l = (i, j)$ 对应, 仅第 i 行的元素为 1, 第 j 行的元素为 -1 , 其余元素为 0. 再令 $\mathbf{b}_m = (b_{m1}, \dots, b_{mN})^T$, $\mathbf{f}_m = (f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mE})^T$, 则可将等式约束(1b)表示成

$$\mathbf{A}\mathbf{f}_m = \mathbf{b}_m.$$

图1显示的是 TE 中的一个经典例子 ([13], [14]). 我们用这个例子来说明这个约束. 这个网络有 7 个节点 13 条弧, 每条弧的容量是 5 个单位. 此外有四个需求量均为 4 个单位的源-目的对 ($M = 4$), 具体的源节点、目的节点信息如图所示. 这里为了简单, 省去了未用到的弧. 此外, 弧上的数字表示弧的编号, 此时 $\mathbf{c} = ((5, 5, \dots, 5)_{1 \times 13})^T$,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

点弧关联矩阵见上面的独行公式(2).

如果存在 $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M)$ 满足多商品流约束(1), 就称流分布 $\mathbf{f} = (f_l, l \in \mathcal{E})$ 是可行的. 如果 \mathbf{f} 是可行的, 弧 $l \in \mathcal{E}$ 上的整个负载和弧利用率分别是 f_l 和 f_l/c_l , 这与网络决定如何路由通信流有关. 流量工程的核心问题之一是找到一个可行且好的流量分布 \mathbf{f} .

B. 多商品流问题

对于给定的流量, TE 改变路由来极小化网络拥塞. 一个目标函数可以就弧上的负载 f_l 来定量评价不同的路由解决方案. 在多商品流约束下, TE 通常考虑某个弧的费用函数 $\phi(\mathbf{f})$ 的极小化, 这里 $\phi(\mathbf{f})$ 是 \mathbf{f} 的非减函数. 最优流量工程 [7] 意味最后的路由方式按照多商品流约束下使得 TE 成本函数取得极小值的解来路由流量, 为此, 需要求解多商品流问题

$$\text{minimize } \phi(\mathbf{f}, \mathbf{c}) \quad (3a)$$

$$\text{subject to } \mathbf{f} = \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_m \quad (3b)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{f}_m = \mathbf{b}_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3c)$$

$$\mathbf{f}_m \geq \mathbf{0}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3d)$$

其中 \mathbf{A} 是网络 \mathcal{G} 的点弧关联矩阵. 称 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^E$ 求解多商品流问题(3), 如果存在 $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M)$ 使得 $(\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M)$ 求解多商品流问题(3).

通常, 多商品流问题的目标函数表述为

$$\phi(\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M) = \sum_j \varphi_j(f_j) + \sum_m \sum_j \varphi_{mj}(f_{mj})$$

因为目标函数的性质很重要, 通常在算法设计时根据目标函数分为以下四种模型 [12]:

- ϕ 是凸的;
- ϕ 是凸的, 且可微;
- $\phi(\mathbf{f}) = \sum_j \frac{f_j}{c_j - f_j}$, 或者 $\varphi(\mathbf{f}) = \sum_j \varphi_j(f_j)$, φ_j 是严格凸的, 且 $\varphi_{mj} \equiv 0$;
- $\phi(\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_M) = \sum_j \varphi_j(f_j) + \sum_m \sum_j \varphi_{mj}(f_{mj})$, 其中 φ_j, φ_{mj} 是严格凸的.

该问题共有 $E * (M + 1)$ 个变量和 $N * M + E$ 个约束. 求解难点在于处理耦合约束(3b). 不幸的是, 甚至对于中等规模的网络, 需要求解的问题的维数已

经非常大了. 对于实际生活中的问题, 模型将会有几万到几十万个约束和几十万到几百万个变量. 直接方法已经超过了现有凸优化软件的能力, 所以优化专家专门为该问题设计各种有效算法 [12]. 同时, 多商品流问题也是大规模优化算法的试验场. 求解多商品流问题的方法的区别在于分解策略、多商品流的模型、用来求解主问题和子问题的技术、及潜在的应用等. 设计方法必须以各种方式利用问题的结构.

早期的方法基于经典的数学规划算法, 如最速下降法、牛顿法和共轭梯度法等, 其中流偏差(Fretta et al. 1973, LeBlanc 1973)和投影牛顿法(Bertsekas and Gafni 1973)均属于可行方向法这一类. 后继的一些方法尝试着从对偶或者原始-对偶的角度来求解问题, 如邻近技术、割平面法和次梯度法等. 2000年以后, 新开发的有效算法有内点法 [6]、簇方法和邻近解析中心割平面法等 [2], [3], [4], 代表性的技术有:

- 流偏差法 (LeBlanc 1973, Fratta等1973), 这是Frank-wolfe法的一种特殊情况;
- 投影法(Bertsekas 和 Gallager 1987, Bertsekas 和 Gafni 1983, Bertsekas等1984)是流偏差法的改进;
- 邻近分解法(Eckstein和Fukushima 1993, Chifflet 1994, Ouorou 1995)直接利用邻近分解算法来求解对偶问题;
- 割平面法, 包括标准割平面法、解析中心割平面法和近侧解析中心割平面法.

最后, 需要指出的是, 问题(1)称为基于点弧表述的多商品流问题, 还有一种基于路径表述的多商品流问题, 详见 [10]. 因为确定所有的路径是组合问题, 所以在应用和算法设计中, 一般采用点弧表述的问题(1).

III. 非光滑多商品流问题与线性规划

在所有关于流量工程的论文中, 最大弧利用率(Maximum Arc Utilization, MAU) 和 $M/M/1$ 延迟公式 [5]的逐段线性近似是两个使用最多的成本函数.

极小化MAU确保将流量从最拥挤的热点链路搬运到网络利用率低的链路 [14], 这里的MLU可以用弧上的负载和容量表述为

$$\phi(\mathbf{f}) = \max_{l \in \mathcal{E}} f_l / c_l. \quad (4)$$

$M/M/1$ 延迟公式的逐段线性近似由 Fortz 等提出 [7], 是经作者与贝尔实验室的技术人员讨论后

Fig. 2. 当链路容量 $c_l = 1$ 时, 链路成本 $\phi(f_l)$ 作为负载 f_l 的函数图形.

得到的. 下面将它简称它为 FT 成本函数, 其基本信息见文献 [8], 其中链路成本函数如图 2 所示. 可以将 FT 成本函数表述为 $\phi(\mathbf{f}) = \sum_{l \in \mathcal{E}} \phi(f_l)$, 其中

$$\phi(f_l) = \begin{cases} f_l, & \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{1}{3} \\ 3f_l - \frac{2}{3}c_l, & \frac{1}{3} < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{2}{3} \\ 10f_l - \frac{16}{3}c_l, & \frac{2}{3} < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{9}{10} \\ 70f_l - \frac{178}{3}c_l, & \frac{9}{10} < \frac{f_l}{c_l} \leq 1 \\ 500f_l - \frac{1468}{3}c_l, & 1 < \frac{f_l}{c_l} \leq \frac{11}{10} \\ 5000f_l - \frac{16318}{3}c_l, & \frac{11}{10} < \frac{f_l}{c_l} < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

上述两种目标函数是分片光滑的, 整体是非光滑函数, 从而直接求解对应的多商品流问题有困难. 但是这两个目标函数都可以表示成多个线性函数的逐点极大值函数, 从而是分段线性凸函数, 可以用 [15]中习题 2.2 和习题 2.3 的技巧, 将这两种非光滑多商品流问题重新表述为线性规划, 特别地, 极小化 MAU 可以表述为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && z \\ & \text{subject to} && \sum_{m=1}^M \frac{1}{c_l} f_{ml} - z \leq 0, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && \mathbf{A}\mathbf{f}_m = \mathbf{b}_m, \mathbf{f}_m \geq \mathbf{0}, m = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (6)$$

极小化 FT 成本函数可以表述为

$$\begin{aligned}
& \text{minimize} && \sum_{l \in \mathcal{E}} z_l \\
& \text{subject to} && \sum_m f_{ml} - z_l \leq 0, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && 3 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{2}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && 10 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{16}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && 70 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{178}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && 500 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{1468}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && 5000 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{16318}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\
& && \mathbf{A} \mathbf{f}_m = \mathbf{b}_m, \mathbf{f}_m \geq \mathbf{0}, m = 1, \dots, M.
\end{aligned} \tag{7}$$

为了理解求解这种问题的难度，我们将所得到的这两个线性规划的相关信息整理在表 I 中。

表 I
两种非光滑多商品流问题转化成线性规划后问题的规模

成本函数	MAU	FT
问题表述	(6)	(7)
变量个数	$M \cdot E + 1$	$E \cdot (M + 1)$
约束个数	$M \cdot N + E$	$M \cdot N + 6E$
流平衡约束	$M \cdot N$	$M \cdot N$
其他的线性不等式约束	E	$6E$

IV. 大规模问题的数据集

下面，我们介绍两组大规模测试问题. 可以在网上¹下载所有这些测试问题的数据。

第一组是平面问题，用以仿真电讯问题，由 Yuan 产生 [11]，包含10个问题. 该组测试问题随机选取平面上的点作为节点，各相邻节点通过弧相连，并形成平面上的图，弧的容量是随机确定的，服从给定区间上的均匀分布；商品是由源节点和目的节点形成的源-目的对，且是随机选取的，流量服从给定区间上的均匀分布。

第二组测试问题是网格问题，包含15个网络. 每个网络具有网格结构，即每个节点有四条入弧和四条出弧. 通常，在网格问题中，两节点间的路径数很多. 弧的容量、商品和流量的产生方式与平面网络中的产生方式相似。

REFERENCES

[1] D. Awduche. “MPLS and traffic engineering in IP networks”, *IEEE Communication Magazine*, vol. 37, no. 12, pp. 42-47, Dec. 1999.

[2] F. Babonneau, O. du Merle, J.-Ph. Vial. Solving large scale linear multicommodity flow problems with an active set strategy and Proximal-ACCPM. *Operations Research*, vol. 54, pp.184-197, 2006.

[3] F. Babonneau, J.-Ph. Vial. ACCPM with a nonlinear constraint and an active set strategy to solve nonlinear multicommodity flow problems. *Math. Program*, vol.120, no.1, pp.179-210, 2009.

[4] F. Babonneau, J.-Ph. Vial. Partitioning algorithm for the network-loading problem. *European Journal of Operational Research*, vol.204, no.1, pp.173-179, 2010.

[5] D. P. Bertsekas and R. Gallager. *Data Networks*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.

[6] Jordi Castro. A specialized interior-point algorithm for multicommodity network flows. *SIAM J. on Optimization*, vol.10, pp.852-877, 2000.

[7] B. Fortz and M. Thorup. “Internet traffic engineering by optimizing OSPF weights”, *Proc. IEEE INFOCOM, 2000*, Tel Aviv, Israel, pp. 519 - 528.

[8] B. Fortz, J. Rexford, and M. Thorup. “Traffic engineering with traditional IP routing protocols”, *IEEE Communications Magazine*, vol. 40, no. 10, pp. 118-124, Oct. 2002.

[9] J. L. Golfín and J.-Ph. Vial. Cutting Planes and Column Generation Techniques with the Projective Algorithm, *Journal of optimization theory and application*, vol. 65, no. 3, 1990.

[10] K. L. Jones, I. J. Lustig, J. M. Farvolden, W. B. Powell. Multicommodity network flows: The impact of formulation on decomposition. *Math. Program*, vol.62, pp.95-117, 1993.

[11] T. Larsson and Di Yuan. An augmented lagrangian algorithm for large scale multicommodity routing. *Computational Optimization and Applications*, 27(2):187 - 215, 2004.

[12] A. Ouorou, P.Mahey, J.-Ph. Vial. A survey of algorithms for convex multicommodity flow problems. *Management Science*, vol.46, no.1, pp.126-147, 2000.

[13] G. Rétvári, J. Bíró, and T. Cinkler. “On Shortest Path Representation”, *IEEE/ACM Trans. on Networking*, vol.15, No. 6, pp. 1293-1306, Dec. 2007.

[14] Z. Wang, Y. Wang and L. Zhang. “Internet traffic engineering without full mesh overlaying”, *Proc. IEEE INFOCOM, 2001*, Anchorage, AK.

[15] 刘红英, 夏勇, 周水生. 数学规划基础. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2012.10.

¹<http://www.di.unipi.it/di/groups/optimize/Data/MMCF.html>