北京航空航天大学本科生课程试卷

2014－2015 学年　第 1 学期

“最优化理论与算法”期中考试卷

2014 年　11　月　13　日

姓名:　　　　　　　　　　　　　　　　学号：

说明：

- 闭卷考试.
- 共有 6 个大题，满分 100 分；考试时间 2 小时.
- 您的解答务必详细、清晰.
- Good Luck!

题目	1	2	3	4	5	6	总分
分数							

1. (30分，每小题2分) 判断下列每个命题的正误，并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例；理由不正确的答案不得分.

   (a) 多面集上极小化 $\max_{i=1,\cdots,m} \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + d_i$ 能表述为线性规划问题，其中 $\boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n, d_i \in \mathbb{R}, i = 1,\cdots,m,$ 是已知的.

   (b) 线性规划标准形问题一定可以在某个基本可行解处取到最优值.

   (c) 如果线性规划问题有一个最优基本可行解，且该解的非基变量的既约费用系数都是正数，则该问题的最优解惟一.

   (d) 如果某个基本解的所有既约费用系数非负，则它是最优解.

   (e) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题一定不可行.

   (f) 如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 分别是线性规划标准形和它的对偶问题的最优解，则由互补性知原始变量和对偶变量的乘积总是零，即 $x_i\lambda_i = 0$ 对所有 i 成立.

(g) 两阶段法中，第 I 阶段的辅助问题的对偶问题有可能无界.

(h) 单纯形法的计算时间复杂度在最坏情况下是多项式时间的.

(i) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是分数，但是需求和供给量是整数，则树解对应的每个单纯形乘子是整数.

(j) 求解线性指派问题的线性规划松弛问题可以得到原始问题的最优解.

(k) 整数线性规划(极小化)松弛问题的最优值一定不大于原始问题的最优值.

(l) 将整数线性规划(极小化)松弛问题的最优解四舍五入可以得到原问题的可行解.

(m) 求解整数线性规划的分枝定界法中，宽度优先搜索(广探法)要优于深度优先搜索(深探法).

(n) 二次函数 $q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 是凸函数，其中 $\boldsymbol{G}$ 是 $n \times n$ 阶对称矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维列向量.

(o) 可微凸函数的稳定点一定是函数的全局极大点.

2. (10分)考虑问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_3 \le 2 \\ & x_2 + 2x_3 \le 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

将问题表示成标准形 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$ 后记 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列为 $\boldsymbol{a}_i$,$i = 1, 2, 3, 4, 5$.

(a) 画出所给问题的可行集(三维空间中).

(b) 点 $(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 是基本可行解吗？

(c) 点 $(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 是退化基本可行解吗？如果是的话，找出可能的与其对应的基.

3. (25分)

(a) (10分) 利用单纯形法求解

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 \\ \text{subject to} & x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{array}$$

利用(a)中的求解结果回答以下问题：

(b) (5分) 为使最优基保持不变，给出 $\boldsymbol{b} = (4, 3, 3)^{\mathrm{T}}$ 中第一个元素的可变范围(其它的保持不变)；

(c) (6分) 为使最优基保持不变，给出 $\boldsymbol{c} = (-2, -4, -1, -1)^{\mathrm{T}}$ 中第一个元素的可变范围(其它的保持不变)；第四个的？

(d) (2分) 对于 $\boldsymbol{b}$ 微小的改变，最优解将发生怎样的改变？

(e) (2分) 对于 $\boldsymbol{c}$ 微小的改变，最优值将发生怎样的改变？

4. (13分) 对整数线性规划问题，即

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} & 4x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \text{为整数}.
\end{array}
$$

(a) (2分) 写出该问题的线性规划松弛问题；

(b) (2分) 用单纯形法求解(a)中的问题；

(c) (3分) 基于(b)中结果写出两个分枝子问题及为这两个子问题确定的下界；

(d) (6分) 任选(c)中的一个子问题，基于(b)中的计算结果用对偶单纯形法求之.

5. (12分) 考虑平面上 n 个点的集合 $\{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)\}$. 我们希望在平面上找到一个点 (x,y) 使得它到这些点的欧氏距离(2范数)之和最小.

(a) (3分) 给出该问题的非线性优化表述.

(b) (4分) 目标函数是可微的吗？是凸的吗？

(c) (2分) 写出最优性条件. 对$n=2,3$给出这个条件的几何解释.

(d) (3分) 最优性条件是必要的吗？是充分的吗？清楚地陈述你的假定.

6. (10分) 设 $f(\boldsymbol{x}):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是可微函数. 考虑极小化 $f(\boldsymbol{x})$ 的线搜索法格式. 设 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ 是目标函数在 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 处的下降方向，即 ${\boldsymbol{p}^{(k)}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}^{(k)}<0$. 考虑单变量极小化问题

$$\min_{\alpha}\phi(\alpha):=f(\boldsymbol{x}^{(k)}+\alpha\boldsymbol{p}^{(k)}).$$

(a) (2分) 给出精确步长 α_k 必须满足的条件；

(b) (3分) 当 $f(\boldsymbol{x})$ 是 Hessian 阵正定的二次函数时，请推导出精确步长 α_k ；

(c) (5分) 对于函数 $\phi(\alpha)=1-\alpha e^{-\alpha^2}$, 分别确定满足 Wolfe 条件以及强 Wolfe 条件的 α 值的可接受区间, 其中 $\sigma=\frac{1}{10},\rho=\frac{1}{100}$. (列出不等式组即可)