证明

函数f是凸函数的充要条件为f的上方图是凸集

必要性：

显然，对上方图的两点$(x_1,y_1)(x_2,y_2)$，其中$x\in R^n, y\in R$

则对于两点间的任意一点，显然$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in R^n$

并且$(x_1,y_1)(x_2,y_2)$也在上方图中，于是$y_1,y_2\le t$，

从而$\theta y_1+(1-\theta)y_2\le max(y_1,y_2)\le t$得证

充分性

如果$x_1,x_2\in dom f$,有$(x_1,y_1)(x_2,y_2)\in epi\ f$ 则由于$epi\ f$是凸集，则

$(\theta x_1+(1-\theta)x_2,\ \theta y_1+(1-\theta)y_2)\in epi\ f$

$f(\theta x_1+(1-\theta)x_2)\le \theta y_1+(1-\theta)y_2$

且x_1,x_2是任意选取的，则充分性得证

鞍点问题

1. 二阶条件

   其$Hessian$矩阵可看做x,z的分块矩阵，于是根据定理2.11 二阶条件可知条件为

   $\nabla_{xx}f\ge 0 \quad and \quad \nabla_{zz}\le 0$

2. 由1可知$\nabla_{xx}f\ge 0 \quad and \quad \nabla_{zz}\le 0$，并且由$\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$

   对于不等式右侧，将Z看做常量后有$\nabla_x f(x,\bar{z})\ge \nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$

   对于不等式左侧，将x看做常量后有$\nabla_z f(\bar{x},z)\le \nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$

   则根据函数的增减性可直接得出不等式关系

3. 由于在点$(\bar{x},\bar{z})$满足鞍点性质，则根据凸凹函数的性质，可知在点$(\bar{x},\bar{z})$的邻域内，有
   $\nabla_x f(x,\bar{z})\ge \nabla f(\bar{x},\bar{z})=0\Rightarrow\ f(x,\bar{z})\ge f(\bar{x},\bar{z})$

   同理可得到$\nabla_z f(\bar{x},z)\le \nabla f(\bar{x},\bar{z})=0\Rightarrow\ f(\bar{x},z)\le f(\bar{x},\bar{z})$

   于是$\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$得证