最优化第五次作业

张晋 15091060

2017 年 11 月 9 日

2.24 原始问题如下:

$$
\begin{aligned}
min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \leq -1 \\
& x_2 \geq 1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

其对偶问题如下:

$$
\begin{aligned}
min \quad & -\lambda_1 + \lambda_2 \\
\text{s.t.} \quad & \lambda_1 \leq 0 \\
& \lambda_2 \geq 0 \\
& \lambda_1 \leq 1 \\
& \lambda_2 \leq -1
\end{aligned} \tag{2}
$$

显然，两个问题的可行解都不存在.

2.25 **充分性:** 若存在 $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$，使得 $\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 成立, 则有

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

显然，如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ 必然可以推出 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$.

必要性: 对于线性规划:

$$\begin{aligned} min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3}$$

其对偶问题为:

$$\begin{aligned} max \quad & \mathbf{0} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T \\ & \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

对原始问题而言, 显然 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 是一个可行解, 且因为 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, 故原问题有下界, 且下界在 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 处取到，根据弱对偶定理，该对偶问题也有解，则必存在 $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$，使得 $\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$ 成立, 那么将 $\boldsymbol{\lambda}$ 取相反数，即可得 $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$ 满足 $\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$.

几何解释: 令 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_1^T, \cdots, \boldsymbol{a}_m^T]^T, \quad \boldsymbol{a}_i^T \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \mathbf{0}$ 是 n 维空间中由 m 个过原点的超平面 $\boldsymbol{a}_1^T \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \cdots, \boldsymbol{a}_m^T \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 围成的凸多面锥体，而 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ 是一个过原点的闭半空间, 从直观角度来说, 一个凸多面体锥很难包含一个闭半空间, 除非这个凸多面体锥也展成了一张超平面，且与那个超平面重合.

在这种情况下,$rank(A) = 1$, 即整个向量 $\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_1^T, \cdots, \boldsymbol{a}_m^T$ 都能被 $\boldsymbol{c}^T$ 线性表出, 即存在 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$, 使得 $\mu_1 \boldsymbol{a}_1^T = \mu_2 \boldsymbol{a}_2^T = \cdots = \mu_m \boldsymbol{a}_m^T = \boldsymbol{c}^T$

2.27

$$P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}$$

(a)

$$P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geq \alpha \sum_{j=1}^{n} y_j = \alpha$$

(b) 原约束转化如下:

$$\begin{aligned} max \quad & \alpha = [1, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & [\alpha, \boldsymbol{x}^T] \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{1} \\ & [\alpha, \boldsymbol{x}^T] \begin{bmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

该问题的对偶问题为:

$$\begin{aligned} min \quad & [1, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \beta \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & y_j \geq 0 \\ & [0, \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \beta \\ \boldsymbol{y}^T \end{bmatrix} = \mathbf{1} \\ & [\mathbf{1}, -\boldsymbol{A}] \begin{bmatrix} \beta \\ \boldsymbol{y}^T \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6}$$

化简即可得证.

(c) 由于问题 (5)(6) 属于线性规划，由第一题知 (5) 有解且 (6) 有界, 根据弱对偶性原理，可知 (5) 必有最优解, 根据强对偶性原理，两个问题都有最优解且最优值相等.

(d) 若 1 表示正面，2 表示反面, 则:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解题 (a) 的线性规划:

$$\begin{aligned} max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq \alpha \\ & x_1 - x_2 \geq \alpha \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

求得最优解为 $\boldsymbol{x} = (0.5, 0.5)$, 最优值为 0，可见该点即是平衡点.

(e)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

解题 (a) 的线性规划:

$$\begin{aligned} max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -3x_2 + x_3 \geq \alpha \\ & 3x_1 - 3x_3 \geq \alpha \\ & -x_1 + 3x_3 \geq \alpha \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

求得最优解为 $\boldsymbol{x} = (3/7, 1/7, 3/7)$, 最优值为 0，可见该点即是平衡点.