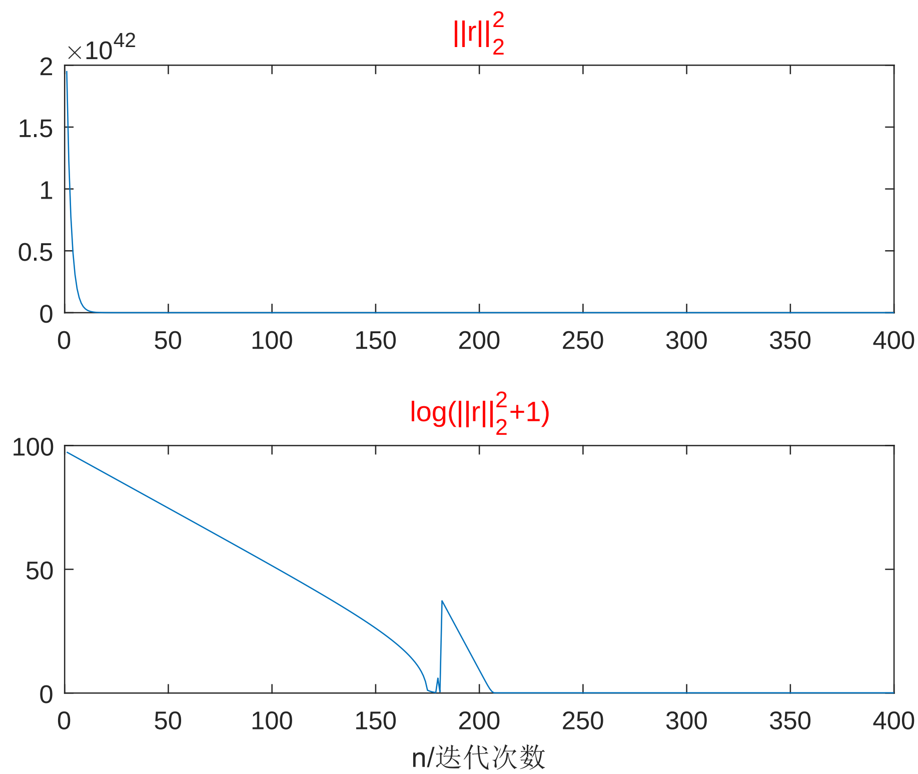
最优化第十四次作业

张晋 15091060

2017 年 12 月 7 日

5.27 此题采用线搜索确定步长时，得到的结果误差极大，因为 $\phi'(0)$ 在离稳定点较远时数量级高达 10^{40} 量级，导致线搜索得到的步长极小，几乎为 0，无法收敛, 经反复调整参数都没能取得好的结果，最后只好手动确定步长 $\alpha_k = 0.05$，此时效果良好，残量的 2-范数随迭代次数的下降情况如下：（由于数量级巨大，为了更好的显示残差的波动，将原图中将残差取对数处理后并排参考）



又采用 MATLAB 中优化工具箱中的 lsqnonlin 函数进行拟合，得到的结果比我的程序算出来的略好，将两者进行比较，比较结果如下：

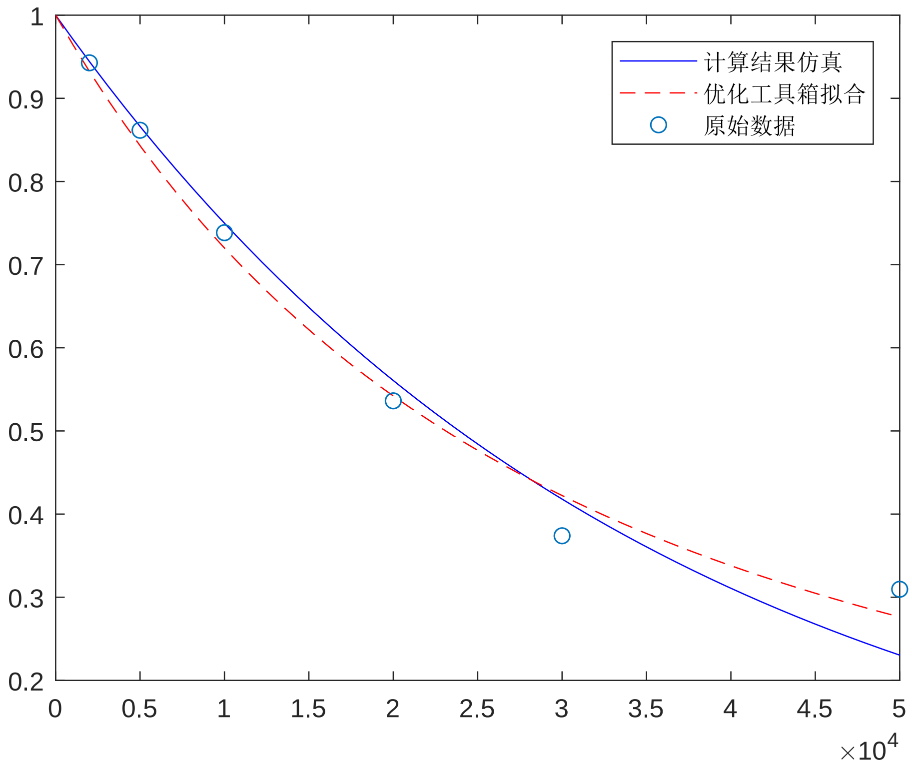


表 1: 结果比较

	程序计算	工具箱拟合
stv	0.125639950119876	0.104420208306470
x_1	3.323336983976929e-04	-0.009615612533368
x_2	3.516673367231929e+02	-19.446505801429495

6.1

$$f(x) = 10(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

$$q(x) = \begin{bmatrix} -10x_1(x_2 - x_1^2) - 2(1 - x_1) \\ 20(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} -40(x_2 - x_1^2) + 80x_1 + 2 & -40x_1 \\ -40x_1 & 20 \end{bmatrix}$$

$$q(\boldsymbol{s}) = f^{(k)} + {g^{(k)}}^T s + \frac{1}{2} s^T G^{(k)} s$$

(a) 故对于 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (0, -1)^T$, 有：

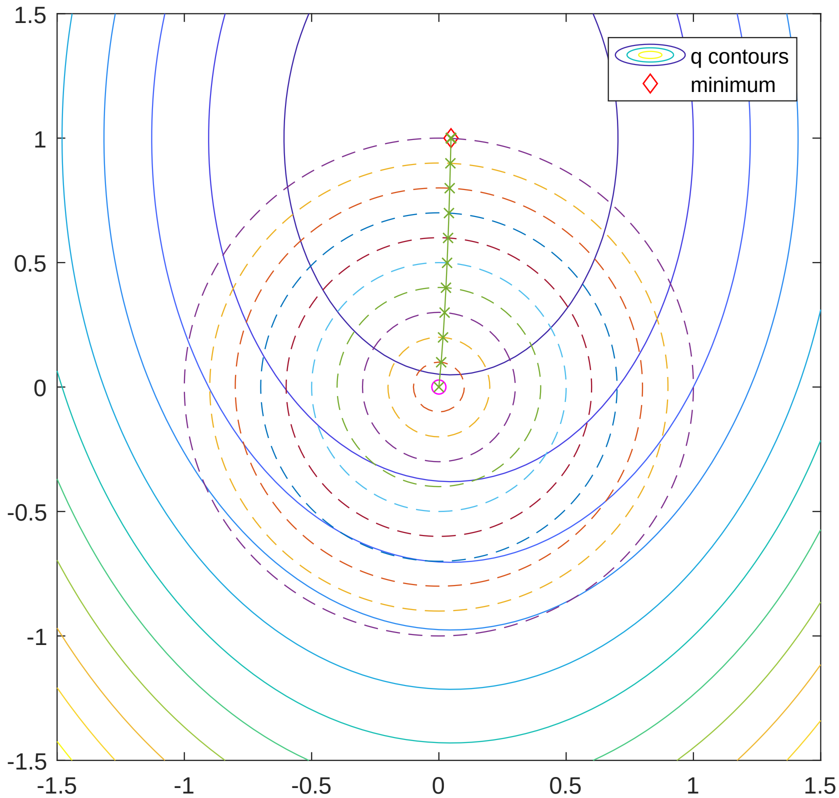
$$f^{(k)} = 11, \quad q(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} 42 & -0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

二次子问题为:

$$\begin{aligned} min \quad & q(\boldsymbol{s}) \\ \text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{s}\|_2 \leq \Delta \end{aligned}$$

其中，$q(\boldsymbol{s}) = 21s_1^2 + 10s_2^2 - 2s_1 - 20s_2 + 11.$

(b) 信赖域子问题解族的示意图如下:



(c) $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 点处的最速下降方向 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ 为 $(2, 20)^T$，那么该问题为:

$$
\begin{aligned}
min \quad & q(\alpha \boldsymbol{p}^{(k)}) \\
\text{s.t.} \quad & \|\alpha \boldsymbol{p}^{(k)}\|_2 \leq \Delta
\end{aligned}
$$

其中，$q(\boldsymbol{s}) = 21s_1^2 + 10s_2^2 - 2s_1 - 20s_2 + 11$. 代入得:

$$
\begin{aligned}
min \quad & 4084\alpha^2 - 404\alpha + 11 \\
\text{s.t.} \quad & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2\sqrt{101}} = 0.0498
\end{aligned}
$$

显然,$\alpha = 101/2042 = 0.0495$ 时，取得最小值，且在信赖域区间内. 故柯西点为 $\boldsymbol{s_C} = \alpha^\star \boldsymbol{p}^{(k)} = (\frac{101}{1021}, \frac{1010}{1021})^T$

(d) 对于 $\boldsymbol{x}^{(k)} = (0, 0.5)^T$, 有：

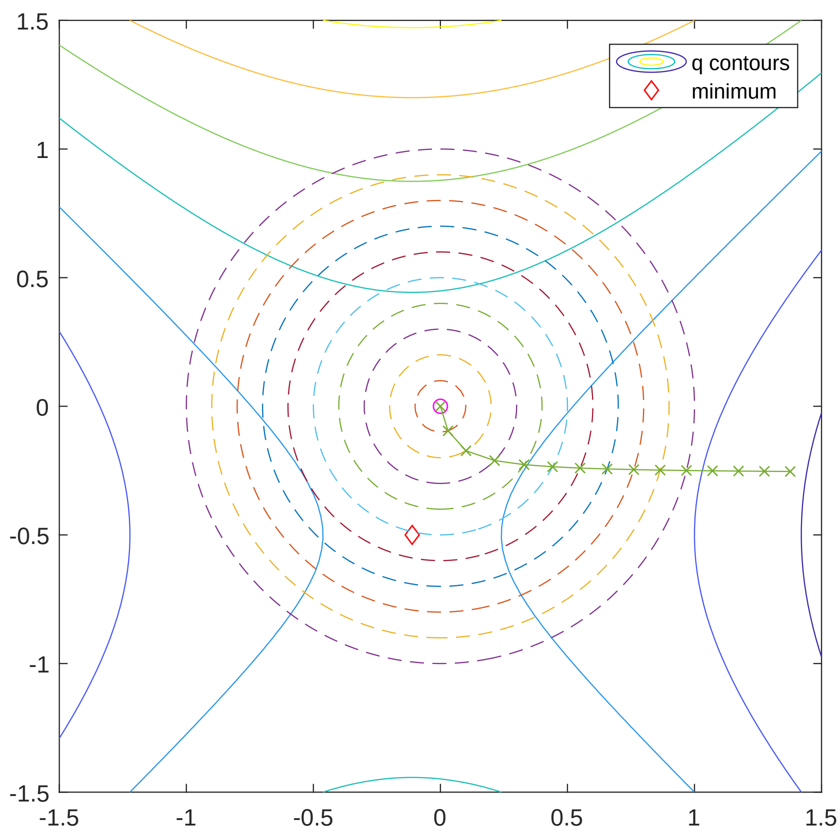
$$f^{(k)} = 3.5, \quad q(x) = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad G(x) = \begin{bmatrix} -18 & -0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

二次子问题为:

$$\begin{aligned} min \quad & q(\boldsymbol{s}) \\ \text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{s}\|_2 \leq \Delta \end{aligned}$$

其中，$q(\boldsymbol{s}) = -9s_1^2 + 10s_2^2 - 2s_1 + 10s_2 + 3.5.$

信赖域子问题解族的示意图如下:



$\boldsymbol{x}^{(k)}$ 点处的最速下降方向 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ 为 $(2, -10)^T$，那么该问题为:

$$\begin{aligned} min \quad & q(\alpha \boldsymbol{p}^{(k)}) \\ \text{s.t.} \quad & \|\alpha \boldsymbol{p}^{(k)}\|_2 \leq \Delta \end{aligned}$$

其中，$q(\boldsymbol{s}) = -9s_1^2 + 10s_2^2 - 2s_1 + 10s_2 + 3.5$. 代入得:

$$\begin{aligned} min \quad & 964\alpha^2 - 104\alpha + 3.5 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{104}} = 0.0981 \end{aligned}$$

显然,$\alpha = 13/241 = 0.0539$ 时，取得最小值，且在信赖域区间内. 故柯西点为 $\boldsymbol{s_C} = \alpha^\star \boldsymbol{p}^{(k)} = (\frac{26}{241}, \frac{-130}{241})^T$

6.2

$$\begin{aligned} min \quad & q(\boldsymbol{s}) = f + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} + \frac{\nu}{2}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} \\ \text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{s}\|_2 \leq \Delta \end{aligned} \tag{1}$$

(a) $\nu = 0$ 时，原问题转化为:

$$\begin{aligned} min \quad & q(\boldsymbol{s}) = f + \boldsymbol{g}^T\boldsymbol{s} \\ \text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{s}\|_2 \leq \Delta \end{aligned}$$

此时 $\boldsymbol{s}$ 的方向为负梯度方向，即

$$\boldsymbol{s}^\star = -\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}\boldsymbol{g}$$

(b) 设 $\boldsymbol{s} = -\alpha\boldsymbol{g}$，代入 (1) 中得：

$$q(\alpha) = f + (\frac{\nu}{2}\alpha^2 - \alpha)\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{g} \tag{2}$$

因为 $\nu < 0$，故 $q(\alpha)$ 在 $[0, \frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}]$ 上单调递减，故 $\alpha_C = \frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}$, 即

$$\boldsymbol{s}_C = -\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}\boldsymbol{g}$$

(c) 对于 $\phi(\alpha)=\frac{\nu}{2}\alpha^2-\alpha, \quad \alpha\in[0,\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}]$.

故有:

$$\alpha_C=\begin{cases}\frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}, & \frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}\le\frac{1}{\nu}\\ \frac{1}{\nu}, & \frac{\Delta}{\|\boldsymbol{g}\|_2}\ge\frac{1}{\nu}\end{cases}$$

$$q(\boldsymbol{s}_C)=\begin{cases}f+\frac{\nu}{2}\Delta^2-\|\boldsymbol{g}\|_2\Delta, & \Delta<\frac{\|\boldsymbol{g}\|_2}{\nu}\\ f-\frac{1}{2\nu}\|\boldsymbol{g}\|_2^2, & \Delta\ge\frac{\|\boldsymbol{g}\|_2}{\nu}\end{cases}$$

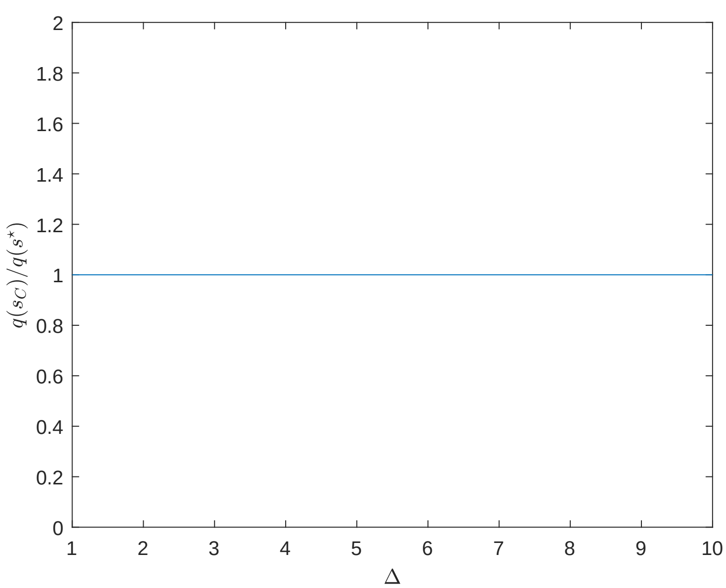
而:

$$q(\boldsymbol{s}^\star)=\begin{cases}f+\frac{\nu}{2}\Delta^2-\|\boldsymbol{g}\|_2\Delta, & \Delta<\frac{\|\boldsymbol{g}\|_2}{\nu}\\ f-\frac{1}{2\nu}\|\boldsymbol{g}\|_2^2, & \Delta\ge\frac{\|\boldsymbol{g}\|_2}{\nu}\end{cases}$$

故:

$$\frac{q(\boldsymbol{s}_C)}{q(\boldsymbol{s}^\star)}\equiv 1$$

图像如下:



附录:Matlab 代码

5.27 GN 法

```
% 5.27: GN法
clc;
clear; %清理工作区变量
N=400; %设定迭代次数
y=[-1,10]; %设定初始迭代值
d=[0.9427,0.8616,0.7384,0.5362,0.3739,0.3096];
t=[2000,5000,10000,20000,30000,50000];
P=zeros(1,N);%储存残差的下降情况

for step=1:N
    r=rk(y);
    P(step)=norm(r);
    A=d_r(y);
    s=-1*pinv(A'*A)*A'*r;
% 采用Armijo法则计算近似步长ak
%       ak=1;
%        rou=0.01;
%       r1=norm(rk(y+ak*s'));
%     r2=norm(r)+rou*ak*(r'*A*s);
%     while(r1> r2)
%          ak=0.5*ak;
%          r1=norm(rk(y+ak*s'));
%          r2=norm(r)+rou*ak*(r'*A*s);
%     end
    ak=0.05;
    y=y+ak*s';
end
disp('手动计算:')
y;
r=rk(y);
stv=sqrt(norm(r)/6)
x1=1/(y(2)*96.05)
x2=x1/y(1)

```

```
figure
subplot(2,1,1);
plot(P)
title('||r||_2^2','Color', 'r')
LP=log(P+1);
subplot(2,1,2);
plot(LP)
xlabel('n/迭代次数')
title('log(||r||_2^2+1)','Color', 'r')

[Y,resnorm] = lsqnonlin(@rk,[-0.5,1]);
disp('工具箱拟合:\n')
Y;
r_opt=rk(Y);
stv_opt=sqrt(norm(r_opt)/6)
x1_opt=1/(Y(2)*96.05)
x2__opt=x1/Y(1)

figure;
X=linspace(0,50000,50);
for i=1:50
y1(i)=phi(X(i),y);
y2(i)=phi(X(i),Y);
end
plot(X,y1,'b')
hold on;
plot(X,y2,'r--')
plot(t,d,'o')
legend('计算结果仿真','优化工具箱拟合','原始数据')



function A=d_r(y)
t=[2000,5000,10000,20000,30000,50000];
A=zeros(6,2);
for i=1:6
    A(i,1:2)=d_ri(t(i),y);
end
end
```

```

function dr=d_ri(t,y)
dr=[-1*t*(1-y(1)*t)^(y(2)-2),log(1-y(1)*t)*(1-y(1)*t)^(y(2)-1)];
end

function r=rk(y)
d=[0.9427,0.8616,0.7384,0.5362,0.3739,0.3096];
t=[2000,5000,10000,20000,30000,50000];
r=zeros(6,1);
for i=1:6
    r(i,1)=ri(t(i),y,d(i));
end
end

function r=ri(t,y,di)
r=phi(t,y)-di;
end

function z=phi(t,y)
z=(1-t*y(1))^(y(2)-1);
end
```

6.1a

```
clc;
clear;
global d;
N=20;
q = @(x) 21*x(1).^2+10*x(2).^2-2*x(1)-20*x(2)+11;
qq = @(x,y) 21*x.^2+10*y.^2-2*x-20*y+11;
fcontour(qq,[-1.5 1.5 -1.5 1.5])
hold on;
plot(1/21,1,'rd')
plot(0,0,'mo')
P=zeros(N+1,2);
x0=[0,0];
lb=[-10,-10];
ub=[10,10];
```

```
x2=1+(1/21)^2;
for i=1:N
    d=i/10;
    P(i+1,:) = fmincon(q,x0,[],[],[],[],lb,ub,@circlecon);
    if d^2<=x2
        fimplicit(@(x,y) x.^2+y.^2-d^2,'--')
    end
end
plot(P(:,1),P(:,2),'-x')
legend('q contours','minimum')

function [c,ceq] = circlecon(x)
global d;
c = x(1)^2+x(2)^2-d^2;
ceq = [];
end
```

6.1b

```
clc;
clear;
global d;
N=14;
size=1.5;
q = @(x) -9*x(1).^2+10*x(2).^2-2*x(1)+10*x(2)+3.5;
qq = @(x,y) -9*x.^2+10*y.^2-2*x+10*y+3.5;
fcontour(qq,[-size size -size size])
hold on;
plot(-1/9,-1/2,'rd')
plot(0,0,'mo')
P=zeros(N+1,2);
x0=[0,0];
lb=[-10,-10];
ub=[10,10];
x2=1/81+1/4;
for i=1:N
    d=i/10;
    P(i+1,:) = fmincon(q,x0,[],[],[],[],lb,ub,@circlecon);
```

```
    if d^2<=1
        fimplicit(@(x,y) x.^2+y.^2-d^2,'--')
    end
end
plot(P(:,1),P(:,2),'-x')
legend('q contours','minimum')

function [c,ceq] = circlecon(x)
global d;
c = x(1)^2+x(2)^2-d^2;
ceq = [];
end
```