北京航空航天大学本科生课程试卷

2015－2016 学年　第 1 学期

"最优化理论与算法" 期中考试

2015 年　11 月　25 日

姓名：王翀　　　　学号：13091218

说明：

- 闭卷考试.
- 共有 7 个大题，满分 100 分；考试时间 110 分钟.
- 您的解答务必详细、清晰.
- Good Luck!

题目	1	2	3	4	5	6	7	总分
分数	30	16	14	10	10	7	13	100

30

1. (30分，每小题2分) 判断下列每个命题的正误，并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例；理由不正确的答案不得分.

   (a) 多面集上极小化 $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 能表述为线性规划问题.

   ~~令 $|x_i| = u_i + v_i$ 则 minimize $\sum_{i=1}^{n} u_i + v_i$~~

   ~~$x_i = u_i - v_i$, subject to $u_i - v_i = x_i$~~

   ~~$u_i, v_i \geq 0$. $u_i, v_i \geq 0$.~~

   $(i = 1, \dots, n)$

   正确. ~~令 $z_i = |x_i|$ 则 minimize $\sum_{i=1}^{n} z_i$~~

   ~~subject to $-x_i \leq z_i \leq x_i$, $i = 1, \dots, n$.~~

   令 $z_i = |x_i|$ 则 minimize z_i

   subject to $-z_i \leq x_i \leq z_i$

   $z_i \geq 0$　$i = 1, \dots, n$.

   (b) 线性规划标准形问题一定有最优解，且可以在某个基本可行解处取到最优值.

   错误. 可能无可行解，亦无最优解.

   minimize $-x_1 - x_2$

   subject to $x_1 \geq 1$

   $-x_2 \geq 1$

   $x_1, x_2 \geq 0$

   (c) 如果某个基本解的所有既约费用系数非负，则它是最优解.

   错误. 可能不是可行解，如在标准形问题中基本解基变量出现负数.

   (d) 在单纯形法中，选转轴列时若出现平局(即有多个正比值同时等于最小正比值)，则下一个基本可行解将是退化的.

   ~~正确. 选取其中一个进行转轴，其余行的最~~

   正确. 选取其中一个进行转轴，其余行的最右端项(即基变量取值)将变为0，即得到的基本解退化.

   (e) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题一定不可行.

   错误. 原始问题可能无下界.

   (f) 单纯形法的计算时间复杂度在最坏情况下是多项式时间的.

   错误. 是指数时间. 如 Klee－Minty 问题为 $O(2^n)$

(g) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是整数，则可行树解的每个分量是整数.

~~正确. 由整性定理可得.~~ 错误. 弧上的费用与树解分量间并无联系.

由整性定理，节点供应量为整数 ⇒ 可行树解分量为整数；弧上费用为整数 ⇒ 树解对应单纯形乘子为整数.

(h) 整数线性规划(极小化)松弛问题的最优值一定不大于原始问题的最优值.

正确，松弛问题的最优值给出原问题的一个下界.

(i) 求解整数线性规划的分枝定界法中，宽度优先搜索(广探法)要优于深度优先搜索(深探法).

错误. 深探法优于广探法.
1. 可较早得到可行解，尽早剪枝
2. 便于编程
3. 可直接用前一子问题的结果计算下一子问题.

(j) 二次函数 $q(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx - b^{\mathrm{T}}x$ 是凸函数，其中 G 是 $n \times n$ 阶对称矩阵，b 是 n 维列向量.

错误. 仅当 G (半)正定时为凸函数.

(k) 函数 $f(x) := \|Ax - b\|_2^2$ 是凸函数，其中 A 是 $m \times n$ 阶矩阵，b 是 m 维列向量.

正确: $f(x) = x^TA^TAx - 2b^TAx + b^Tb$ $\quad D^2f(x) = 2A^TA$ 半正定 故为凸函数.

(l) 可微凸函数的稳定点一定是函数的全局极大点.

错误. 一定为全局极小点.

(m) 最速下降法的收敛性高度依赖于初始点.

错误. 最速下降法是大范围收敛的.

(n) 二次函数的Hessian阵的条件数越大，牛顿法收敛的越慢.

错误，牛顿法的收敛速度与Hessian阵条件数无关.

(o) 问题 $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} 2x_1^2 + x_2^2$ 在点 $(1,1)^{\mathrm{T}}$ 处的牛顿方向是 $(4,2)^{\mathrm{T}}$.

错误. $S_N = \cancel{-G^Tg}\ -G^{-1}g$. $\quad g = \begin{bmatrix} 4x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore S_N = -G^{-1}g = -\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. (16分)假设用单纯形法求解标准形式的线性规划问题时得到如下单纯形表

16

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	0	1	−1	0	β	1
	0	0	2	1	γ	2
	1	0	4	0	δ	3
r^{T}	0	0	r_3	0	r_5	*

还假设矩阵 A 的后三列形成单位矩阵.

(a) 给出由该表描述的当前基是最优的充分必要条件(依照表中的系数).

(b) 假设该基是最优的且 $r_3 = 0$. 找出另外一个最优基本可行解，其与该表所描述的不同.

(c) 假定与当前表所联系的基是最优的. 假设将原问题中的 b_1 替换为 $b_1 + \epsilon$. 给出使基保持最优的 ϵ 的上下界.

(d) 假定与当前表所联系的基是最优的. 假设将原问题中的 c_3 替换为 $c_3 + \epsilon$. 给出使基保持最优的 ϵ 的上下界. 假设将原问题中的 c_1 替换为 $c_1 + \epsilon$. 给出使基保持最优的 ϵ 的上下界.

第2题：(a). $r_3\geq 0,\ r_5\geq 0$. 2

$B^{-1}[a_3,a_4,a_5]=B^{-1}I=B^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&\beta\\2&1&\gamma\\4&0&\delta\end{bmatrix}$

$B^{-1}N=\begin{bmatrix}-1&\beta\\2&\gamma\\4&\delta\end{bmatrix}$

(b).

$$\begin{array}{ccccc|c} 0&1&-1&0&\beta&1\\ 0&0&2&1&\gamma&2\\ 1&0&\boxed{4}&0&\delta&3\\ \hline 0&0&0&0&r_5&*\end{array}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{4}&1&0&0&\beta+\frac{\delta}{4}&\frac{7}{4}\\ -\frac{1}{2}&0&0&1&\gamma-\frac{\delta}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}&0&1&0&\frac{\delta}{4}&\frac{3}{4}\\ \hline 0&0&0&0&r_5&*\end{array}$$ 1

$\therefore x^*=(0,\frac{7}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{2},0)^T$ 1

(c). r^T不变，$B^{-1}b\to B^{-1}(b+\Delta b)$.

$\therefore B^{-1}(b+\Delta b)=B^{-1}b+B^{-1}\Delta b=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&\beta\\2&1&\gamma\\4&0&\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\varepsilon\\2+2\varepsilon\\3+4\varepsilon\end{bmatrix}\geq 0$ 1 $\therefore -\frac{3}{4}\leq\varepsilon\leq 1$ 1

(d). $B^{-1}b$不变. 1

$r_N^T=c_N^T-c_B^TB^{-1}N$ $c_3\to c_3+\varepsilon$. $\therefore (c_N+\Delta c_N)^T-c_B^TB^{-1}N=r_N^T+\Delta c_N^T=[r_3,r_5]+[\varepsilon,0]\geq 0$ → 3

$\Rightarrow \varepsilon\geq -r_3$ 2

$c_1\to c_1+\varepsilon$, $\therefore c_N^T-(c_B+\Delta c_B)^TB^{-1}N=r_N^T-\Delta c_B^TB^{-1}N=[r_3,r_5]-[0,0,\varepsilon]\begin{bmatrix}-1&\beta\\2&\gamma\\4&\delta\end{bmatrix}$

$=[r_3-4\varepsilon,\ r_5-\delta\varepsilon]\geq 0$.

当$\delta>0$，$\varepsilon\leq\min\{\frac{r_3}{4},\frac{r_5}{\delta}\}$ 当$\delta=0$时，$\varepsilon\leq\frac{r_3}{4}$ 当$\delta<0$时，$\frac{r_5}{\delta}\leq\delta\leq\frac{r_3}{4}$. →1+2.

3. (14分) 图 1 给出了一个网络，节点旁的数字表示该节点的供给(负值表示需求，未标出数字的默认为0)，弧上的数字表示这条弧上的单位费用. 对所给网络和数据，完成问题：

14

(a) (5分) 写出具体的最小费用流问题

(b) (3分) 写出(a)中问题的对偶问题.

(c) (6分) 考虑由弧 $(b,c),(c,a),(d,c)$ 和 (e,b) 构成的生成树(见图 2). 设 e 为根节点. 请给出与这棵生成树对应的树解、与节点 e 和 b 对应的单纯形乘子和与弧 (e,b) 对应的既约费用系数.

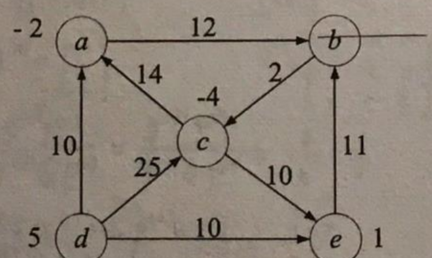


图1　网络及其数据.

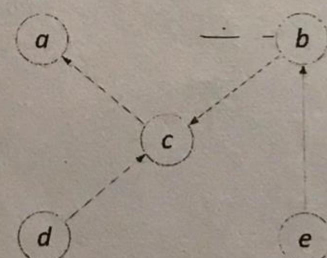


图2　一个生成树.

(a). minimize c^Tx 1

subject to $Ax=b$

$x\geq 0$ 2

其中 $x=[x_{ab},x_{da},x_{ca},x_{bc},x_{dc},x_{ce},x_{de},x_{eb}]^T$ 2

$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&0&0&0&0\\-1&0&0&1&0&0&0&-1\\0&0&1&-1&-1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&-1&-1&1\end{bmatrix}$

$b=[-2,0,-4,5,1]^T$.

$c=[12,10,14,2,25,10,10,11]^T$

(b). maximize λ^Tb 1

subject to $\lambda^TA\leq c^T$ 1

其中 $\lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5]^T$.

(c). $-x_{ca}=-2$ $\therefore x_{ca}=2$.

$x_{eb}=1$

$x_{dc}=5$

$-x_{dc}-x_{bc}+x_{ca}=-4$ $\therefore x_{bc}=1$.

$\therefore x=[0,0,2,1,5,0,0,1]^T$ 3

$\because$ e为根节点， $\therefore y_e=0$. 1

$y_e-y_b=c_{eb}$ $\therefore y_b=-11$ 1

$\because (e,b)$对应一个基变量， $\therefore r_{eb}=0$. 1

4. (10分) 考虑问题 $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2^2$，其中 A 是 $m\times n$ 矩阵，b 是 m 维向量，且 $m>n$.

10

(a) (5分) 写出最优性的必要条件. 请说明它是否为充分条件？请给出理由.

(b) (3分) 最优解唯一吗？理由是什么？

(c) (2分) 你能给出最优解的一种闭合形式(解析式)吗？在题目所给条件下，允许规定任何你所需要的假设.

(a)、令 $f(x)=\|Ax-b\|_2^2$

$f(x)=x^TA^TAx-2b^TAx+b^Tb.$

$\nabla f(x)=2A^TAx-2A^Tb=0$ 1+2

$\therefore$ 必要条件为 $A^TAx=A^Tb$

$\because \nabla^2 f(x)=2A^TA\succeq 0$ Hessian 阵半正定.

$\therefore f(x)$ 为凸函数，故必要条件也为充分条件. 2 1

(b)、最优解不唯一. 当 ~~存在~~ $\operatorname{rank}A<n$ 时，即. A 的列向量线性相关时, 1 b 在 A 的列向量张成的子空间中的投影有多种线性表示、即 x^* 不唯一. 1

(c)、当 A^TA 正定 (即 A 列满秩) 时, 1

$x^*=(A^TA)^{-1}A^Tb.$ 1

5. (10分)考虑

$$\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{minimize}}\ \ q(x)=\tfrac{1}{2}(x_1^2+2x_2^2+3x_3^2)-x_1-x_2-x_3,$$

10

取初始点 $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0]^T$ 并用共轭梯度法求解该问题，给出迭代一次的计算过程，即求出$x^{(1)}$和该点处的搜索方向$p^{(1)}$即可.

$g=\begin{bmatrix}x_1-1\\2x_2-1\\3x_3-1\end{bmatrix}$ $\quad g^{(0)}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$

$\therefore p^{(0)}=-g^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 2 $\quad G=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

$\alpha_0=-\dfrac{g^{(0)T}p^{(0)}}{p^{(0)T}Gp^{(0)}}=\dfrac{g^{(0)T}g^{(0)}}{g^{(0)T}Gg^{(0)}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}.$ 2.

$\therefore x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha_0p^{(0)}=[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]^T$ 1

$g^{(1)}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 1

$\therefore \beta_1=\dfrac{g^{(1)T}g^{(1)}}{g^{(0)T}g^{(0)}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}.$ 2

$\therefore p^{(1)}=-g^{(1)}+\beta_1p^{(0)}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 2

6. (7分) 考虑无约束优化的两种方法：最速下降法和牛顿法，完成以下问题

7

(a) 列出这两种方法的迭代格式；

(b) 列出最速下降法相对于牛顿法的优点. 并简要解释每个优点；

(c) 列出牛顿法相对于最速下降法的优点. 并简要解释每个优点.

(a). 最速下降法: 1. 令 $p^{(k)} = -g^{(k)}$.

2. 极小化 → $\phi(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)})$ 得精确步长 α_k

3. 置 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$

牛顿法(基本): 1. 求 $S_N^{(k)} = -G^{(k)^{-1}} g^{(k)}$

2. 置 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + S_N^{(k)}$

(b). 最速下降法是大范围收敛的、仅需基本的计算量，存储量为 $O(n)$.

(对应牛顿法收敛性需要初始点离解较近，否则 $G^{(k)}$ 不一定正定，正定也不一定收敛，计算量除基本计算量外还需 $O(n^3)$，存储量为 $O(n^2)$)

好!

(c). 牛顿法是局部二次收敛的，收敛速度更快，且收敛速度不依赖于极小点处 Hessian 阵的条件数.

(最速下降法仅为线性收敛，收敛速度非常慢，且可能出现数值上的不收敛；收敛因子与 Hessian 阵条件数相关 / $\left(\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^2$ 为收敛因子上界 λ_1 为 G 最大特征值，λ_n 为最小).

13

7. (13分) 设 $f(x) = x_1^4 + 2x_1^3 + 24x_1^2 + x_2^4 + 12x_2^2$. 考虑信赖域法在点 $x^{(k)} = [2\ 1]^{\mathrm{T}}$ 的牛顿型信赖域子问题，即求目标函数在当前迭代点的二阶 Taylor 展式在以当前点为中心的球上的极小点.

(a) (6分) 完整写出信赖域法的子问题，一并画出子问题目标函数的等值线.

(b) (2分) 取信赖域半径 $\Delta = 2$ ，然后求解(a)中的子问题.

(c) (3分) 针对该子问题，画出信赖域半径从 $\Delta = 0$ 变到 $\Delta = 2$ 时，信赖域子问题解族的示意图.

(d) (2分) 对 $\Delta = 1$ ，求出该信赖域子问题的Cauchy点.

(a). $g = \begin{bmatrix} 4x_1^3+6x_1^2+48x_1 \\ 4x_2^3+24x_2 \end{bmatrix}$ ∴ $g^{(k)} = \begin{bmatrix} 152 \\ 28 \end{bmatrix}$

$G = \begin{bmatrix} 12x_1^2+12x_1+48 & 0 \\ 0 & 12x_2^2+24 \end{bmatrix}$ ∴ $G^{(k)} = \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$

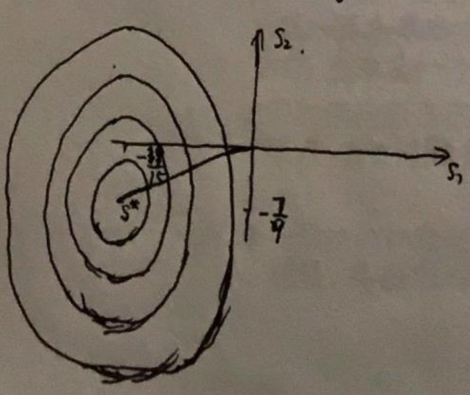
$f^{(k)} = 141$

∴ $q^{(k)}(S) = f^{(k)} + g^{(k)T} S + \frac{1}{2} S^T G S$

$= 141 + 152S_1 + 28S_2 + \frac{1}{2}(120S_1^2 + 36S_2^2)$

∴ 子问题为 minimize $141 + 152S_1 + 28S_2 + 60S_1^2 + 18S_2^2$

subject to $S_1^2 + S_2^2 \le \Delta^2$



(b). $S_N^{(k)} = -G^{(k)^{-1}} g^{(k)} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{15} \\ -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$

$\frac{40265}{18225} < 3$

∵ $(S_{1N})^2 + (S_{2N})^2 \le 4$

∴ 最优解为 $S_N^{(k)} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{15} \\ -\frac{7}{9} \end{bmatrix}$

(c). $\Delta = 0$ 时，最优解为 $(0, 0)$

当 $0 < \Delta < \|S_N^{(k)}\|_2$ 时，最优解为信赖域与(某条与其边界相切)等值线的切点处(原点到该点向量)

当 $\|S_N^{(k)}\|_2 \le \Delta \le 2$ 时，最优解为 $S_N^{(k)}$.

解族示意图如图中曲线

(d). $\|S_N^{(k)}\|_2 > 1$. ∴ Cauchy 点在:

$S^{(k)} = -\alpha_c g$ 且 $\alpha_c \le \frac{\Delta}{\|g\|}$

$\phi(\alpha) = \frac{1}{2} g^T B g \alpha^2 - g^T g \alpha$

$= \frac{152^2 \cdot 120 + 28^2 \cdot 36}{2} \alpha^2 - (152^2 + 28^2)\alpha$

$\alpha = \frac{152^2 + 28^2}{\sqrt{152^2 \cdot 120 + 28^2 \cdot 36}}$ 时 $\phi(\alpha)$ 最小.

验证 α 是否满足 $\alpha \le \frac{1}{\|g\|}$

若满足则 $S^{(k)} = -\alpha g$.

否则 $S^{(k)} = -\frac{\Delta}{\|g\|} g$.

估计得 $\alpha > \frac{1}{\|g\|}$ 故 $S^{(k)} = -\frac{1}{\sqrt{152^2 + 28^2}} \begin{bmatrix} 152 \\ 28 \end{bmatrix}$