新表格

变量	$\boldsymbol{B}^{-1}$			$\boldsymbol{x_B}$
1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
5	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
6	-1	0	1	4
$\boldsymbol{\lambda}^\top$	$-\frac{3}{2}$	0	0	-3

由 $\boldsymbol{\lambda}^\top$ 和原始数据按公式 $r_j = c_j - \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{a}_j$ 计算后, 得 $r_2 = \frac{1}{2}, r_3 = -\frac{3}{2}, r_4 = \frac{3}{2}$. 我们选取 $\boldsymbol{a}_3$ 进基, 计算 $\boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^\top$, 有表格

变量	$\boldsymbol{B}^{-1}$			$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{y}_3$
1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$
5	$-\frac{1}{2}$	1	0	4	$\boxed{\frac{5}{2}}$
6	-1	0	1	4	0
$\boldsymbol{\lambda}^\top$	$-\frac{3}{2}$	0	0	-3	$\frac{3}{2}$

利用所标记的转轴元转轴, 得到

变量	$\boldsymbol{B}^{-1}$			$\boldsymbol{x_B}$
1	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
3	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{8}{5}$
6	-1	0	1	4
$\boldsymbol{\lambda}^\top$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{27}{5}$

现在 $r_2 = \frac{7}{5}, r_4 = \frac{6}{5}, r_5 = \frac{3}{5}$. 因为所有的 r_i 都是非负的, 所以最优解 $\boldsymbol{x}^* = (\frac{1}{5}, 0, \frac{8}{5}, 0, 0, 4)^\top$.

修正表格与全表格

对于单纯形法而言，无论是用§2.2.3的全表格(即表2.2.1)实现，还是用本小节的修正表格实现，倘若用的选进基变量的准则和选出基变量的打破平局时所用的准则相同，都将检查相同的基矩阵序列. 这样，对一个给定问题，两种版本需要相同的迭代次数. 方法的两种实现方式的不同仅在于组织计算的方式. 本节就线性规划标准形问题比较修正表格和全表格.

首先考虑存储要求. 全表格需要一个$(m+1)\times(n+1)$的数组；修正表格仅需要一个$(m+1)\times(m+1)$的数组，外加一个长为$m+1$的进基列向

量. 这样，如果n 比m大得多的话(事实经常如此)，修正表格需要的存储空间要小得多.

现在考虑两种方法的计算开销. 一种度量是每次迭代需要的运算次数. 为了简洁，仅考虑所需的乘法和除法的次数. 所需的加法和减法运算基本相同. 先讨论求解**稠密**问题所需的计算量.

全表格的主要计算开销是转轴. 每次转轴更新表格的$n-m+1$列，这对应于非基变量和右端项. 首先，给转轴行除以转轴元需要$n-m+1$次计算；其次，将更新后的转轴行的倍数加到剩下的m行(包括最后一行)，这需要$m(n-m+1)$次乘法. 从而每次转轴需要的乘法次数是

$$(n-m+1)+m(n-m+1)=mn+n+1-m^2.$$

在比率测试中最多需要m次除法. 比率测试的计算开销相对于转轴的可以忽略. 为了简单，这里忽略它.

用修正表格迭代一次的计算开销包括：计算r_j(定价)，计算进入列、比率测试和转轴. 计算一个$r_j=c_j-\boldsymbol{\lambda}^\top\boldsymbol{a}_j$需要$m$次乘法. 因为共$n-m$个非基变量，所以定价共需$m(n-m)$次乘法. 计算进入列$\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$需要$m^2$次乘法. 在转轴步，需要更新修正表格的$m+1$行，每行需要$m+1$次乘法，共需$(m+1)^2$次乘法. 求和(再次忽略比率测试需要的开销)，得修正表格每次迭代需要的乘法次数为

$$m(n-m)+m^2+(m+1)^2=mn+(m+1)^2.$$

看起来，除非n比m大得多，全表格需要的计算要比修正表格所需的少. 然而，我们的分析并没有考虑稀疏性的影响. 比如，考虑一个稀疏的问题，其中$\boldsymbol{A}$的列只有 5 个非零元素，则内积$\boldsymbol{\lambda}^\top\boldsymbol{a}_j$只需要 5 次乘法，因此完全定价仅需$5(n-m)$次乘法. 矩阵向量乘积$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_q$仅需$5m$次乘法. 转轴仍然需要$(m+1)^2$次乘法. 总共需要的乘法次数是

$$5(n-m)+5m+(m+1)^2=5n+(m+1)^2.$$

经过上述对比分析，当问题是**稀疏的且**m**和**n**很大**时，修正表格节省的计算量很显著. 比如，如果$m=1000, n=100,000$，则全表格法的每次迭代需要$99,000,000$ 次运算，而修正表格的每次迭代仅需大约$1,500,000$次运算. 这样的节省可将整个问题的求解时间从几天减少到几小时，或者从几小时减少到仅仅几分钟.

在计算运算次数时，我们假定$\boldsymbol{B}^{-1}$是稠密的. 即使矩阵$\boldsymbol{B}$稀疏，通常$\boldsymbol{B}^{-1}$也是稠密的. 这样，如果m很大，更新稠密矩阵$\boldsymbol{B}^{-1}$所需的$(m+$

$1)^2$次乘法也会很昂贵. 纯形法还有一种实现方式，其将$\boldsymbol{B}^{-1}$作为因子的乘积，而这些因子往往是稀疏的. 这样做可以进一步减少单纯形法所需的计算量和存储量.

§2.2.7 单纯形法的效率

本节讨论单纯形法的效率. 这里算法的效率指时间复杂度, 即算法求解给定问题所需要的时间. 有两种常用方式分析算法的复杂度. 一种是平均情况分析, 即求解典型问题需要多少时间. 这种研究方式从数学上讲很难, 通常只能基于经验或者数值实验来说明. 另一种是最坏情况分析, 也即用算法求解最难的问题需要多少时间. 这种研究方式从数学上是可以处理的, 通常可以得到计算时间的一个上界. 该上界是问题规模的函数. 如果存在多项式函数作为算法计算时间的上界, 则称它是**多项式时间**(polynomial-time)算法. 否则, 即称为**指数时间**(exponential-time)算法.

度量线性规划问题的规模的常用量有：(1) 约束的个数 m 和变量的个数 n ；(2) 确定问题的数据个数 $m\times n$ ；(3) 非零数据的个数；(4) 把问题的数据输入计算机时所需二进制代码的长度, 即**输入长度** L. 对于普通问题, 变量的个数通常起决定性作用；对于大规模问题, 非零数据的个数通常起决定性作用. 算法所需要的时间通常依赖于：(i) 迭代次数；(ii) 每次迭代的算术运算次数；(iii) 每次算术运算的时间(依赖于硬件). 迭代次数通常起决定性作用.

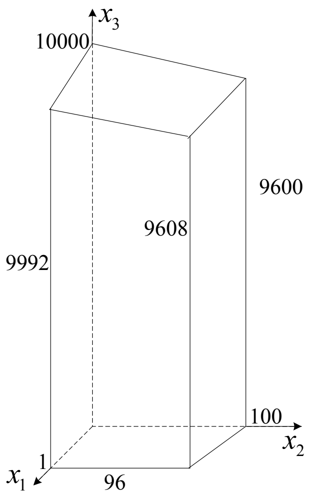

图 2.2.2: Klee-Minty问题的可行域($n=3$)

§2.3.5 灵敏度分析

灵敏度分析(sensitivity analysis)的目的是解决"**当确定问题的数据发生改变时，线性规划的解如何变化**?"这一问题的. 这是一项很重要的实用技术，因为模型中的数据很难精确地确定. 比如代表经济模型的线性规划，模型中可能含有预测的未来六个月的通货膨胀率. 这个速率仅能猜测，如果线性规划的解对这个估计值特别敏感的话，这个模型就会让人感觉不甚可靠. 建模者可能希望知道约束的右端项发生改变(或者一个变量的费用系数改变，或者给问题增加了一个新的约束条件)会如何影响目标值. 灵敏度分析可以回答这些问题.

灵敏度分析不必重新求解问题，其思想是从最优基提供的信息出发来回答这些问题.

执行灵敏度分析时，也可以确定扰动量的取值范围. 当扰动在这个范围内时，最优基仍然保持不变，但是变量的值可以发生改变. 用于线性规划的大部分软件包都提供灵敏度的信息，包括目标中每个变量的系数的和每个约束的右端项的.

这项技术基于线性规划的可行性和最优性条件，即如果

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2.3.11}$$

当前基是可行的；进一步，如果

$$\boldsymbol{c}_N^\top \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \geq \boldsymbol{0}, \tag{2.3.12}$$

当前基还是最优的. 从数学的观点看，所有的灵敏度分析都是这些公式的结果. 下面我们用一个例子来说明这些思想.

例2.3.7 (**灵敏度分析**). 考虑线性规划

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -x_1 - 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

添加松弛变量，并用单纯形法求解，得如下最优表格:

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rhs
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
$-z$	0	0	0	1	2	13

(2.3.13)

由这张表可以得到$\boldsymbol{x}_B=(x_2,x_1,x_3)^\top,\boldsymbol{\lambda}^\top=\boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{B}^{-1}=(0\ \ -1\ \ -2)$,

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

这里的$\boldsymbol{\lambda}$是最优的单纯形乘子.

下面以各种方式扰动线性规划. 这里的每种改变是独立的，并且均是对原始问题进行的改变.

假设扰动第二个约束的右端项. 将其表示为$\bar{b}_2=b_2+\delta$，这里$\bar{b}_2$表示新的右端项，δ是扰动量. 这种变化形如$\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$，其中$\Delta\boldsymbol{b}=(0\ \ \delta\ \ 0)^\top$. 因为(2.3.12)不涉及右端项，所以这种变化不影响对偶可行性. 然而这种变化会影响原始可行性，即$\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{b}}\geq\boldsymbol{0}$. 只要$\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\geq\boldsymbol{0}$，或者等价地$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq-\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$，则原始可行性也满足. 对于该例，从最优表(2.3.13)的最后一列读出$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，从而得到这些条件为

$$5\geq-\tfrac{1}{2}\delta,\ 3\geq 0,\ 3\geq\tfrac{1}{2}\delta.$$

这样，如果$-10\leq\delta\leq 6$，基就不变. 新的目标函数值是$\bar{z}=\boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})=z+\boldsymbol{\lambda}^\top\Delta\boldsymbol{b}$. 对于这个例子，$\bar{z}=z+\lambda_2\delta=-13-\delta$.

如果$\delta=-4$，则基不发生变化，$\bar{z}=z-\delta=-13-(-4)=-9$，

$$\bar{\boldsymbol{x}}_B=\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}=(5\ \ 3\ \ 3)^\top+(-2\ \ 0\ \ 2)^\top=(3\ \ 3\ \ 5)^\top.$$

其它的值都不受影响. 如果$\delta=8$，因为

$$\bar{\boldsymbol{x}}_B=\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}=(5\ \ 3\ \ 3)^\top+(4\ \ 0\ \ -4)^\top=(9\ \ 3\ \ -1)^\top$$

不可行. 此时$\bar{z}=z-\delta=-13-8=-21$. 与当前基对应的扰动问题的单

纯形表是

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rhs
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\frac{3}{2}$	-1
$-z$	0	0	0	1	2	21

这里的既约费用未变，因此对偶可行性(2.3.12)满足. 利用对偶单纯形法对扰动问题的上述单纯形表转轴一次，得到扰动问题的最优表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rhs
x_2	0	1	1	0	2	8
x_1	1	0	0	0	1	3
x_4	0	0	-2	1	-3	2
$-z$	0	0	2	0	5	19

现在假设目标中x_2的系数变为$\bar{c}_2 = c_2 + \delta$. 此时一个基变量的费用系数发生变化，即形如$\bar{\boldsymbol{c}}_B = \boldsymbol{c}_B + \Delta\boldsymbol{c}_B$的改变，其中$\Delta\boldsymbol{c}_B = [\delta \quad 0 \quad 0]^\top$. 这将影响对偶可行性(2.3.12)，但不影响原始可行性条件(2.3.11). 如果新的既约费用费用是非负的，即

$$\boldsymbol{c}_N^\top - (\boldsymbol{c}_B + \Delta\boldsymbol{c}_B)^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_N^\top - \Delta\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \geq \boldsymbol{0},$$

则对偶可行性仍然成立，此即$\boldsymbol{r}_N^\top \geq \Delta\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$. 对应的新的目标值是

$$\bar{z} = \bar{\boldsymbol{c}}_B^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{c}_B^\top + \Delta\boldsymbol{c}_B^\top)\boldsymbol{x}_B = z + \Delta\boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{x}_B.$$

由最优表(2.3.13)读出所需数据代入上述不等式，得$1 \geq \frac{1}{2}\delta,\ 2 \geq \frac{1}{2}\delta$. 解得$\delta \leq 2$. 新的目标值是$\bar{z} = z + \delta x_2 = -13 + 5\delta$.

如果$\delta = 1$，当前基仍然是最优的，此时$\bar{z} = -13 + 5\delta = -13 + 5\cdot 1 = -8$. 如果$\delta = 4$，当前基不再是最优的，此时既约费用向量变成

$$\left[1 - \tfrac{1}{2}\delta \quad 2 - \tfrac{1}{2}\delta\right] = [-1 \quad 0] \ngeq \boldsymbol{0}.$$

新的目标值$\bar{z} = -13 + 5\delta = -13 + 5\cdot 4 = 7$. 由这些信息得扰动问题的单纯形表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rhs
x_2	0	1	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
$-z$	0	0	0	-1	0	-7

利用原始单纯形法于这个扰动问题，对该单纯形表转轴一次，得到扰动问题的最优表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	rhs
x_4	0	2	0	1	1	10
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	1	1	0	2	8
$-z$	0	2	0	0	1	3

最后，我们考虑给问题增加一个新变量x_3. 假设x_3在目标中的系数是c_3，在约束中的系数向量是$\boldsymbol{a}_3 = (a_{13} \quad a_{23} \quad a_{33})^\top$. 这里假设新的变量也是非负的.

如果x_3是这个增广问题的非基变量的话，当前的基本可行解也是这个增广问题的基本可行解. 为了确保当前基是最优的，我们需要x_3的既约费用系数r_3满足非负条件，即

$$r_3 = c_3 - \boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{a}_3 \geq \mathbf{0}.$$

如果$r_3 > 0$，不需要进一步的工作，当前基仍然是最优的，此时$x_3 = 0$. 如果$r_3 < 0$，需要给原始问题的单纯形表添加与x_3对应的一列，并利用原始单纯形法求解这个新问题.

如果$c_3 = 4, \boldsymbol{a}_3 = [5 \quad -3 \quad 4]^\top$，则与$x_3$对应的对偶可行性条件是

$$4 - [0 \quad -1 \quad -2][5 \quad -3 \quad 4]^\top = 9 \geq 0,$$

因此新引入的变量x_3不影响解；如果$c_3 = 2, \boldsymbol{a}_3 = (4 \quad -5 \quad 1)^\top$，则与$x_3$对应的对偶可行性条件是

$$2 - [0 \quad -1 \quad -2][4 \quad -5 \quad 1]^\top = -1 \ngeq 0,$$

因此当前解不再是最优的. 计算$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_3$可以得到需要添加的与$x_3$对应的列为$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_3 = [-2 \quad 1 \quad 8]^\top$. 将这些信息作为第三列加入原始问题的最优表(2.3.13)，得增广问题的单纯形表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
x_2	0	1	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
x_1	1	0	1	0	0	1	3
x_4	0	0	$\boxed{8}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
$-z$	0	0	-1	0	1	2	13

利用原始单纯形法于这个扰动问题，对该单纯形表转轴一次，得到扰动问题的最优表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
x_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{23}{4}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{21}{8}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$
$-z$	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{35}{16}$	$\frac{107}{8}$

下面给出进行灵敏度分析时的一些通用的规则，其中$\boldsymbol{r}_N^\top = \boldsymbol{c}_N^\top - \boldsymbol{c}_B^\top \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$.

(1) **改变右端项，**$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$. 检查$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$是否成立以确定当前基是否仍然可行. 如果可行，则$\bar{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$，且$\bar{z} = z+\boldsymbol{\lambda}^\top\Delta\boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{\lambda}^\top = \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{B}^{-1}$是单纯形乘子. 如果不可行，应用对偶单纯形法解扰动问题.

(2) **改变目标系数**.

(i) **改变非基变量的系数，**即$\bar{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N + \Delta\boldsymbol{c}_N$. 检查$\boldsymbol{r}_N^\top \geq -\Delta\boldsymbol{c}_N^\top$是否成立以确定基是否仍然是最优的. 如果$\boldsymbol{r}_N^\top \geq -\Delta\boldsymbol{c}_N^\top$成立，则基任然是最优的，此时变量和目标均不变；否则，最优基发生改变，此时需要用原始单纯形法求解扰动问题.

(ii) **改变基变量的系数，**即$\bar{\boldsymbol{c}}_B = \boldsymbol{c}_B + \Delta\boldsymbol{c}_B$. 检查$\boldsymbol{r}_N^\top \geq \Delta\boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$是否成立以确定基是否仍然是最优的. 如果条件成立，则基不变，但是$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{B}^{-\top}\Delta\boldsymbol{c}_B, \bar{z} = z + (\Delta\boldsymbol{c}_B)^\top\boldsymbol{x}_B$；否则，最优基发生改变，此时用原始单纯形法求解扰动问题.

(3) **改变非基变量的约束系数，**即$\bar{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{N}+\Delta\boldsymbol{N}$. 检查$\boldsymbol{r}_N^\top \geq \boldsymbol{c}_B^\top\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{N}$是否成立以确定基是否仍然是最优的. 如果条件成立，则基不变，此时变量和目标也不变；否则，最优基发生改变，此时用原始单纯形法求解扰动问题.

(4) **新的变量，**即添加目标系数为c_t和约束系数向量$\boldsymbol{a}_t = [a_{1t}\ a_{2t}\ \cdots\ a_{mt}]^\top$. 检查$c_t - \boldsymbol{\lambda}^\top\boldsymbol{a}_t \geq 0$是否成立以确定基是否仍是最优的. 如果条件成立，变量和目标都不变；否则，最优基发生改变，此时用原始单纯形法求解扰动问题.

也可以改变基变量的约束系数或者上述改变的组合. 此时当前基对于新的问题来说，既不是原始可行的，也不是对偶可行的. 因此不能直接用原始单纯形法或者对偶单纯形法来求解新问题. 即此时不能直接利

用原始问题的最优解的信息.

§2.3.6 对偶问题的解释

使用对偶线性规划可以深刻理解模型性质对于实践的指导意义. 下面用一个例子来说明这种思想. 尽管对对偶的精确解释会随着应用不同而改变，但这里所用的方法是通用的，即将对偶变量的最优值和对偶问题作为一个整体看待.

一面包房制作简单型和精致型两类蛋糕. 两类蛋糕都需要基本食材(面粉、糖、鸡蛋等)和花式食材(如用于装饰或者口味的坚果和水果)，也需要面包师的时间. 一炉每类蛋糕所需的食材、工时、利润及每天可用的食材和工时数据如表2.3.1所示.

表 2.3.1: 面包房问题中的资源量和工作数据

蛋糕类型	基本食材(500g)	花式食材(500g)	工时(小时)	利润(5元)
简单	3	4	2	24
精致	2	1	1	14
共计	1200	1000	700	

面包房想要决定每天烘烤简单型和精致型蛋糕的炉数x_1和x_2以最大化自己的利润，其面对的线性规划是

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 24x_1 + 14x_2 \\ \text{subject to} \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 1200 \\ & 4x_1 + x_2 \le 1000 \\ & 2x_1 + x_2 \le 700 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

这个问题的对偶线性规划是

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 1200\lambda_1 + 1000\lambda_2 + 700\lambda_3 \\ \text{subject to} \quad & 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 \ge 24 \\ & 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ge 14 \\ & \lambda_1 \ge 0, \lambda_2 \ge 0, \lambda_3 \ge 0. \end{aligned}$$

原始问题和对偶问题的解分别是$\boldsymbol{x}^* = (160 \;\; 360)^\top$和$\boldsymbol{\lambda}^* = (6.4 \;\; 1.2 \;\; 0)^\top$，最优值都等于8880.

这个问题中的限制性因素是储备的基本食材和花式食材，尚有20工时剩余. 若面包房想购买更多的两类食材，问他原意支付的价格是多少？因为原始和对偶目标值是相等的，且对偶目标是$1200y_1+1000y_2+700y_3$，额外的一个单位(500g)基本食材在利润中的价值是6.4元，而对应的花式食材的价值是1.2元. 因此，对偶变量(也称影子价格, shadow price)决定了这些原材料的边际值(marginal value). 因为还有剩余工时，所以工时对面包师的价值是0.

对偶问题还有另一个解释. 假设另一个公司想要接管面包房的业务，应该如何出价？这个价格应该是由面包房的资产的价值所决定的. 记基本食材、花式食材和工时的价值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. 该公司想极小化付给面包房的费用，即

$$\text{minimize } 1200\lambda_1+1000\lambda_2+700\lambda_3.$$

这些定价代表的利润至少和生产蛋糕所得到的利润一样多时，这些价值对于面包房才是公平的，即

$$3\lambda_1+4\lambda_2+2\lambda_3\ge 24,\ 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\ge 14.$$

与上述目标合在一些恰好是对偶问题. 这样，利用对偶问题可以为面包房的业务确定每日的价值.

对偶问题的另一种解释出现在博弈论中，详见习题2.26和习题2.27.

习题 2

2.37 对于例2.3.7，回答以下问题. 每个问题是独立的.

(a) 使得当前最优基任然保持最优时，第一个约束右端项的变化范围是什么？

(b) 第三个约束的右端项增加 5 时，新的解是什么？

(c) 如果x_1的系数减少 2 ，新的解是什么？增加 2 呢？

(d) 如果新加入模型的变量x_3的数据为$c_3=5, \boldsymbol{a}_3=(-2\ \ 4\ \ 5)^\top$，问当前基是否还是最优的？

2.38 考虑线性规划

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -101x_1 + 87x_2 + 23x_3 \\
\text{subject to} \quad & 6x_1 - 13x_2 - 3x_3 \le 11 \\
& 6x_1 + 11x_2 + 2x_3 \le 45 \\
& x_1 + 5x_2 + x_3 \le 12 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0,
\end{aligned}$$

用单纯形法求解该问题的标准形问题，得最优表

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	rhs
x_1	1	0	0	1	-2	7	5
x_2	0	1	0	-4	9	-30	1
x_3	0	0	1	19	-43	144	2
$-z$	0	0	0	12	4	5	372

基于以上信息回答以下问题. 每个问题都是独立的.

(a) 使得当前最优基依然是最优基时，第二个约束右端项的变化范围是什么？

(b) 将第二个约束的右端项减小 15 时，所得线性规划的解是什么？

(c) 如果x_1的系数增加 25 ，新的解是什么？

(d) 使得当前最优基依然是最优基时，变量x_3的系数c_3的变化范围是什么？

(e) 如果新加入模型的变量x_4的数据为$c_4 = 46, \boldsymbol{a}_4 = (12 \quad -14 \quad 15)^\top$，问当前基是否还是最优的？

(f) 增加约束$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \le 50$后，新问题的解是什么？

(g) 增加约束$x_1 + x_2 + x_3 \ge 10$后，新问题的解是什么？

(h) 增加约束$x_1 + x_2 + x_3 = 30$后，新问题的解是什么？

2.39 某公司利用资源 A，B 和 C 生产四种产品 1，2，3 和 4. 公司通过求解线性规划问题

$$\begin{aligned}
z^* = \text{maximize} \quad & 16x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 50x_4 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 16x_4 \le 800 \qquad \text{(A)} \\
& 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 1000 \qquad \text{(B)} \\
& 2x_1 + 1.2x_2 + 1x_3 + 4x_4 \le 680 \qquad \text{(C)} \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}$$

确定产品组合. 将该问题化成标准形后使用单纯形法求解，得到最优表格

bv	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	rhs
x_2	0	1	5.5	19	1.5	-1	0	200
x_1	1	0	-3	-11	-1	1	0	200
x_7	0	0	0.4	3.2	0.2	-0.8	1	40
$-z$	0	0	14	40	5	2	0	6000

(a) 最优解和最优值各是多少？

(b) 最优基 $\boldsymbol{B}$ 和其逆 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 各是多少？

(c) 用一句话来描述最优策略.

(d) 最优解唯一吗？为什么？

(e) 写出对偶问题. 对偶问题的最优解是什么？

(f) 产品 3 的利润改变多少才能使最优解中产品 3 的产量非零(即生产产品 3)？

(g) 产品 2 的最小利润是多少时仍能保证公司继续生产它？

(h) 给出使得当前基保持最优的资源 B 的范围.

(i) 假设资源 B 的数量由 1000 变成 $1000+\theta$. 请说明最优利润如何随着 θ 改变.

(j) 一种新产品需要 4 单位的资源 A，4 单位的资源 B 和 1 单位的资源 C. 为了生产该产品，它的利润应该是多少？