2013－2014 学年　第 2 学期

“最优化方法”补充习题

2014 年　4 月　23 日

刘红英

1. 判断下列每个命题的正误，并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例；理由不正确的答案不得分.

   (a) 多面集上极小化$\sum_{i=1}^{n}|x_i|$能表述为线性规划问题.

   (b) 线性规划标准形的可行集总是有界的.

   (c) 线性规划标准形问题一定有基本可行解.

   (d) 线性规划标准形问题一定有基本可行解是最优解.

   (e) 如果某个基本解的所有既约费用系数非负，则它是最优解.

   (f) 非基变量的既约费用系数总是严格正的.

   (g) 一个基本可行解的所有非基变量的既约费用系数都是正数，则问题有惟一最优解.

   (h) 用单纯形法求解问题时，最后能得出原始问题是不可行的或者有最优解的结论.

   (i) 在单纯形法中，选转轴列时若出现平局(即有多个正比值同时等于最小正比值)，则下一个基本可行解将是退化的.

   (j) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题也是不可行的.

(k) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题一定无界.

(l) 如果 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 分别是线性规划标准形和它的对偶问题的最优解，则由互补性我们有原始变量和对偶变量的乘积总是零，即 $x_i\lambda_i = 0$ 对所有 i 成立.

(m) 用对偶单纯形法求解问题时，最后能得出原始问题是不可行或者无界的结论.

(n) 两阶段法中，第 I 阶段的辅助问题的对偶问题有可能无界.

(o) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是整数，但是需求和供给量是分数，则树解对应的单纯形乘子都是整数.

(p) 求解线性指派问题的线性规划松弛问题可以得到原始问题的最优解.

(q) 整数线性规划(极小化)松弛问题的最优值一定不大于原始问题的最优值.

(r) 将整数线性规划(极小化)松弛问题的最优解四舍五入可以得到原问题的可行解.

(s) 求解整数线性规划的分枝定界法中，宽度优先搜索(广探法)要优于深度优先搜索(深探法).

(t) 函数$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$是凸函数，其中$\boldsymbol{A}$是$m \times n$阶矩阵，$\boldsymbol{b}$是$m$维列向量.

(u) $\ln x$ 是凸函数.

(v) 可微凸函数的稳定点一定是函数的全局极大点.

(w) 最速下降法的收敛性高度依赖于初始点.

(x) 最速下降法的收敛速度高度依赖于初始点.

(y) 对于二次函数 $q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}$ ，牛顿法的收敛速度依赖于矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的条件数.

(z) 设不含零的向量组 $\boldsymbol{p}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{p}^{(k)}$ 关于对称正定矩阵 $\boldsymbol{G}$ 共轭，则 $\boldsymbol{p}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{p}^{(k)}$ 线性相关.

2. (30分) 某公司利用资源 A, B 和 C 生产四种产品 1, 2, 3 和 4. 公司通过求解线性规划问题

$$\begin{array}{rll} z^* = \text{maximize} & 16x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 50x_4 & \\ \text{subject to} & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 16x_4 \le 800 & \text{(A)} \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 1000 & \text{(B)} \\ & 2x_1 + 1.2x_2 + 1x_3 + 4x_4 \le 680 & \text{(C)} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 & \end{array}$$

确定产品组合. 将该问题化成标准形后使用单纯形法求解，得到最优表格

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & 5.5 & 19 & 1.5 & -1 & 0 & 200 \\ 1 & 0 & -3 & -11 & -1 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0.4 & 3.2 & 0.2 & -0.8 & 1 & 40 \\ \hline 0 & 0 & 14 & 40 & 5 & 2 & 0 & 6000 \end{array}$$

(a) (2') 最优解和最优值各是多少？

(b) (2') 最优基 $\boldsymbol{B}$ 和其逆 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 各是多少？

(c) (2') 用一句话来描述最优策略.

(d) (2') 最优解唯一吗？为什么？

(e) (4') 写出对偶问题. 对偶问题的最优解是什么？

(f) (4') 产品 3 的利润改变多少才能使最优解中产品 3 的产量非零(即生产产品 3)？

(g) (3') 产品 2 的最小利润是多少时仍能保证公司继续生产它？

(h) (4') 给出使得当前基保持最优的资源 B 的范围.

(i) (3') 假设资源 B 的数量由 1000 变成 $1000 + \theta$. 请说明最优利润如何随着 θ 改变.

(j) (4') 一种新产品需要 4 单位的资源 A，4 单位的资源 B 和 1 单位的资源 C. 为了生产该产品，它的利润应该是多少？

3. (10分) 考虑平面上 n 个点的集合 $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)\}$. 我们希望在平面上找到一个点 (x, y) 使得它到这些点的欧氏距离(2范数)之和最小.

(a) 给出该问题的非线性优化表述.

(b) 目标函数是可微的吗？是凸规划吗？

(c) 写出最优性条件. 给出这个条件的几何解释.

(d) 最优性条件是必要的吗？是充分的吗？清楚地陈述你的假定.