北京航空航天大学本科生课程试卷

2016—2017 学年　第 1 学期

“最优化理论与方法”期末考试

016 年　12 月　30 日

学号：

说明：[redacted]

- 闭卷考试.
- 共有 8 个大题，满分 110 分，得分超过100分按100分计分；考试时间 110 分钟.
- 您的解答务必详细、清晰.
- Good Luck!

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
分数	8	10	5	2	9	3	5	3	45

8

1. (14分，每小题2分) 判断下列每个命题的正误，并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例；理由不正确的答案不得分.

   (a) 信赖域子问题$\min\{\frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{s}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}:\|\boldsymbol{s}\|_2\leq\Delta\}$是凸规划.

   错误。当且仅当 B 半正定时是凸规划

   (b) 二次规划是凸规划.

   错误。只有当二次规划的海森阵半正定时，二次规划才是凸规划。

   (c) 线性规划问题的最优解是问题的KKT点.

   对。线性规划问题可看作是凸规划问题，其最优解是KKT点。

   (d) 求解二次规划的积极集法中，初始迭代点是任意的.

   错误。初始迭代点不能是任意的。

   (e) 二次(Courant)罚函数中，固定罚参数后由罚函数所得的原问题的近似解是可行的.

   正确。固定罚参数后由罚函数所得的原问题的近似解可行

(f) 增广Lagrange函数中，固定Lagrange乘子为与问题最优解对应的Lagrange乘子，则对任意的罚参数，求增广Lagrange函数的极小点可得原问题的解.

正确。✗

(g) ℓ_1 罚函数是非精确罚函数.

错误。✓ ℓ_1罚函数是精确罚函数。

2. (15分) 计划修建一个长 x_1, 高 x_2, 宽 x_3 (单位: m), 容积 1500 m^3 的仓库. 每平方米的修建费用是: 墙 4 元, 屋顶 6 元, 地板加地面处理共 12 元. 由于美学原因, 长应该是高的两倍. 为了寻找花费最小的设计方案,

10

(a) 将该问题表述成优化问题, 写出 KKT 条件, 并确定解 x^* 和Lagrange乘子 λ^*；

(b) 设容积约束为 $c_1(x) = 0$. 在问题中将容积约束变成 $c_1(x) = -150$ 时, 利用(a) 中求出的Lagrange乘子估计约束变化后的最优目标值，即将所需容积缩减10%时的花费.

解：(a) 设花费的目标函数为 $q(x)$. 则依题意得：$q(x) = 8x_1x_2 + 8x_2x_3 + 18x_1x_3$，表述成优化问题

即为：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & q(x) = 8x_1x_2 + 8x_2x_3 + 18x_1x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1x_2x_3 = 1500 \\
& x_1 = 2x_2. \\
& \cancel{x_i > 0,\ i = 1,2,3.}
\end{aligned}
$$

故 $L(x,\lambda) = 8x_1x_2 + 8x_2x_3 + 18x_1x_3 + \lambda_1(x_1x_2x_3 - 1500) + \lambda_2(x_1 - 2x_2)$

则该问题的KKT条件为：

$$
\begin{aligned}
8x_2 + 18x_3 + \lambda_1 x_2x_3 + \lambda_2 &= 0 \\
8x_1 + 8x_3 + \lambda_1 x_1x_3 - 2\lambda_2 &= 0 \\
8x_2 + 18x_1 + \lambda_1 x_1x_2 &= 0 \\
x_1x_2x_3 - 1500 &= 0 \\
x_1 - 2x_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

由后面的等式约束条件，原问题可以归约成：minimize $16x_2^2 + \frac{33000}{x_2}$

subject to $x_2 > 0$.

✓

可得 $x_2^* = 10\sqrt[3]{\frac{33}{32}}$. 从而 $x_1^* = 20\sqrt[3]{\frac{33}{32}}$. $x_3^* = \frac{750}{x_2^{*2}}$ ✓

将其代入梯度条件的方程1和3. 求得 $\lambda_1^* =$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2^* =$

3. (15分) 设B和Q是$n \times n$的对称矩阵，且矩阵Q是正定的. 考虑问题

5

$$
\begin{aligned}
\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} B x + g^{\mathrm{T}} x \\
\text{subject to} \quad & b^{\mathrm{T}} x + \tfrac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x \leq \Delta,
\end{aligned}
$$

其中g和b是常向量，Δ是正的常数.

(a) 写出最优性的一阶必要条件(Karush-Kuhn-Tucker)和二阶必要条件.

(b) 将Q取作单位矩阵，b取作零向量，重述(a)中的结论.

(c) 提出一个基于Karush-Kuhn-Tucker条件的求解这个问题的算法.

解:(a) 一阶必要条件,即KKT条件:

$$
\begin{aligned}
Bx + g^{T} + \lambda^{T} b + \lambda^{T} Q x &= 0 \quad ✓ \\
b^{T} x + \tfrac{1}{2} x^{T} Q x - \Delta &\leq 0 \quad ✓ \\
\lambda \left(b^{T} x + \tfrac{1}{2} x^{T} Q x - \Delta \right) &= 0 \quad ✓ \\
\lambda &\geq 0. \quad ✓
\end{aligned}
$$

7

4. (15分) 写出问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \tfrac{1}{2} \sigma x_1^2 + \tfrac{1}{2} x_2^2 + x_1 \\
\text{subject to} \quad & x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

的KKT点，并分 $\sigma = 1$ 和 $\sigma = -1$ 两种情况求出对偶问题. 对两种情况下得到的结果进行解释.

解: 依题意得: $L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\sigma x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + x_1 + \lambda(-x_1)$，则原问题的KKT条件为:

$$
\begin{aligned}
\sigma x_1 + 1 - \lambda &= 0 \\
x_2 &= 0 \\
-x_1 &\leq 0 \\
\lambda x_1 &= 0 \\
\lambda &\geq 0
\end{aligned}
$$

5. (15) 考虑等式二次规划问题

9

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & q(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.
\end{aligned}
$$

求解消去变量x_1 后得到的关于x_2, x_3的无约束优化问题. 由此给出二次规划问题的解 $\boldsymbol{x}^*$ 和原始问题的等式约束的拉格朗日乘子 λ^* . 请问 $\boldsymbol{x}^*$ 是否是

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & q(\boldsymbol{x}) \\
\text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4, \\
& \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

的解？需要给出解答过程.

解：依题意知 $x_1 = (4-2x_2-x_3)$. 将其代入 $q(x)$. 即得：

$$q(x) = \frac{1}{2}(4-2x_2-x_3, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 4-2x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (1, 1, 1)\begin{pmatrix} 4-2x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_2, x_3)\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - (28 \quad 13)\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 28$$

令 $y^T = (x_2, x_3)^T$. 则原问题转化为 minimize $\frac{1}{2} y^T \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} y - (28 \quad 13) y^T + 28$.

得 $y^* = (\frac{17}{18}, \frac{11}{6})$ 代入可得: $x_1^* = \frac{5}{18}$. (因为 $\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 是正定的).

故原始问题的解为 $x^* = (\frac{5}{18}, \frac{17}{18}, \frac{11}{6})$.

得 ~~$g(x^*)$~~ =, $\lambda^* = -\frac{17}{18}$.

x^* 是新问题的解,此时 $\lambda^* = \frac{17}{18}$. X

6. (14分)考虑问题

3

$$\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & -x_1x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1+2x_2-4=0. \end{aligned}$$

(a) 写出问题的KKT条件，计算KKT点和对应的 Lagrange 乘子.

(b) 写出问题的二阶必要和二阶充分条件. 并验证(a)中的KKT点是否为问题的最优解？请给出验证过程和理由.

(b) 对罚参数 $\sigma=10$ 计算二次(Courant)罚函数和增广Lagrange(乘子罚)函数的极小点，其中增广Lagrange函数中的 Lagrange 乘子取 $\lambda=1$.

(c) 将(b)中得到的点作为原始问题的近似解，请根据它们分别给出 Lagrange 乘子的估计.

解：(a) 依题意得：$L(x,\lambda)=-x_1x_2+\lambda(x_1+2x_2-4)$.

KKT条件：

$$\begin{aligned} -x_2+\lambda&=0 \\ -x_1+2\lambda&=0 \\ x_1+2x_2-4&=0 \end{aligned}$$

所以KKT点为 $(2,1)^T$ $\lambda^*=1$.

5

7. (10分) 考虑

$$\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & \tfrac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\tfrac{1}{2}x_2^2 \\ \text{subject to} \quad & x_1\geq 1, \end{aligned}$$

请完成以下问题：

(a) 写出该问题的 KKT 条件，并求出该问题的 KKT 点；请验证这个KKT点是否为全局最优解？

(b) 利用ℓ_1精确罚函数法求解该问题.

解：(a) $L(x,\lambda)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^2+\lambda(1-x_1)$. KKT条件：

$$\begin{aligned} x_1-x_2-\lambda&=0 \\ -(x_1-x_2)+x_2&=0 \\ x_1&\geq 1 \\ \lambda(1-x_1)&=0 \\ \lambda&\geq 0. \end{aligned}$$

故该问题的KKT点为 $(1,\frac{1}{2})^T$, $\lambda=\frac{1}{2}$

因为 $f(x)=\frac{1}{2}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}x_2^2$ 为凸函数，且约束只有线性约束.

故KKT点即为全局最优解。

续第7题：

3

8. (12分) 考虑

$$\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0, \\ & x_1^2 - x_2 \le 0. \end{aligned}$$

请完成以下问题：

(a) 写出该问题的 KKT 条件，并求出该问题的 KKT 点；

(b) 以 $x^{(0)} = (1/2, 1)^{\mathrm{T}}, \lambda^{(0)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$ 为初始点，用基本SQP法求解该问题，仅迭代一次.

解：(a) 依题意得：$L(x,\lambda) = -x_1 - x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(x_1^2 - x_2)$.

则 $\nabla L(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -1 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1 \\ -1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 \end{pmatrix}$

故该问题的KKT条件为：

$$\begin{aligned} -1 + 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_1 &= 0 \\ -1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 &\le 0 \\ x_1^2 - x_2 &\le 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) &= 0 \\ \lambda_2(x_1^2 - x_2) &= 0 \\ \lambda_i \ge 0, \quad & i = 1, 2. \end{aligned}$$

(b)