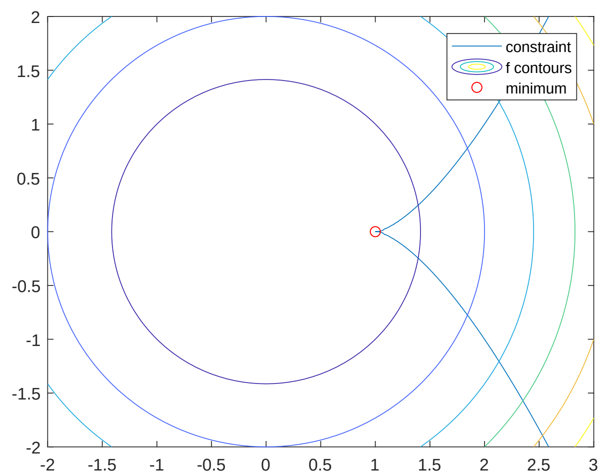
最优化第十六次作业

张晋 15091060

2017 年 12 月 14 日

7.6 (a) 函数图像如下:



容易看出最优解为 $(1,0)^T$.

消去 y 得到 $f(x) = x^2 + (x-1)^3$.

此时无极小点，因为消去 y 的同时少了约束条件:$x \geq 1$

消去 x 得到 $f(y) = (y^{2/3}+1)^2 + y^2$.

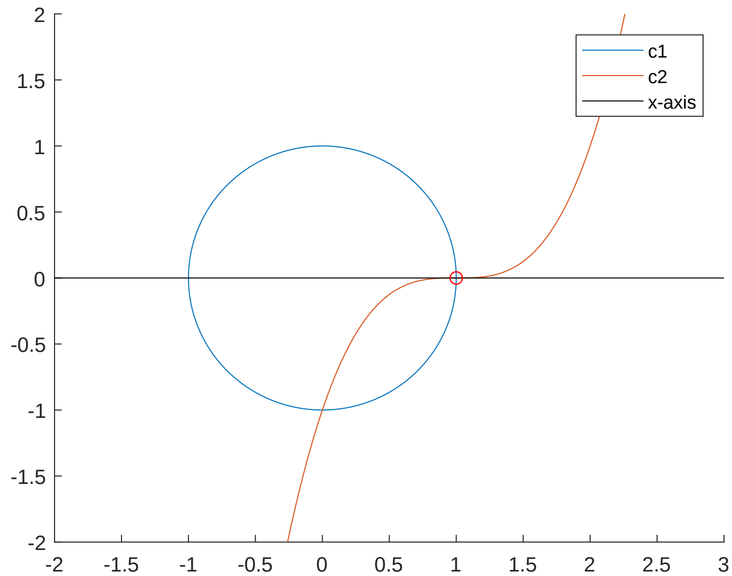
此时极小点为 $y = 0, x = 1$.

(b) 若存在 KKT 点，则必为局部极小点 $(1,0)^T$, 显然，存在线性化可行方向 $p = (-1,0)^T$ 同时是下降方向，使得 $\mathcal{F} \cap D \neq \emptyset$

故该问题没有 KKT 点。

在局部极小点 $(1,0)^T$ 处，$a_1' = (0,0)^T$，故不满足 LICQ 条件

7.7 函数图像如下:



(a) 观察得：在点 $\boldsymbol{x}^\star$ 处，$a_1^\star//(1,0)^T$，　$a_2^\star//(0,-1)^T$，故线性无关，LICQ 条件成立。

(b) 因为点 $\boldsymbol{x}^\star$ 是局部极小点，又满足 LICQ 条件，故其是 KKT 点。
由约束 $c1$ 可知:$x_1 < 1$，故其是全局极小点。

(c) 由于可行域为有界闭集，故一定能取到极小点，在该极小点处，由于约束条件都是线性的，满足 LCQ 条件，故为 KKT 点。
不一定，对于该问题可行域中可能存在多个局部极小点，它们都是 KKT 点，但不一定都是全局极小点，在 f 是凸函数的情况下，KKT 点一定是最优解。

8.20 将原问题表述成优化问题为:

$$
\begin{aligned}
min \quad & f(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 \le 0 \\
& -x_1 + x_2 - x_3 - 2 \le 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \lambda_1(-x_1 - 2x_2 + x_3 + 4) + \lambda_2(-x_1 + x_2 - x_3 - 2)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\lambda) = \begin{bmatrix} 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2x_3 + \lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

KKT 条件:

$$2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{2}$$
$$2x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{3}$$
$$2x_3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{4}$$
$$\lambda_1(-x_1 - 2x_2 + x_3 + 4) = 0 \tag{5}$$
$$\lambda_2(-x_1 + x_2 - x_3 - 2) = 0 \tag{6}$$
$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2 &\leq 0 \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

若这两个不等式约束都为积极约束，即:

$$-x_1 - 2x_2 + x_3 + 4 = 0$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$$

代入 $f(\boldsymbol{x})$ 得:

$$f(\boldsymbol{x}) = (-\frac{1}{3}x_3)^2 + (2 + \frac{2}{3}x_3)^2 + x_3^2 \tag{8}$$
$$= \frac{14}{9}x_3^2 + \frac{8}{3}x_3 + 4 \tag{9}$$

故极值在 $x_3 = -6/7$ 时取到, 此时 $x_1 = 2/7, x_2 = 10/7$

代入得：$\lambda_2 = -4/7$, 故此解不是原问题的解

联立方程 (2)(3)(4)(5)(6) 解得:

$$\boldsymbol{x}^\star = (2/3, 4/3, -2/3)^T, \quad \lambda^\star = (4/3, 0)^T$$