“最优化理论与方法”课程说明

授课教师：刘红英(liuhongying@buaa.edu.cn)，适用日期：2017.9.11 - 2018.1.28

基本信息

- 课程主页：北航课程中心搜索最新的“最优化理论与算法(刘红英)”
- 考核方式：作业和出勤等(10%)+大作业(20%)+期中考试(40%)+期末考试(30%)=100分。
- 教材：刘红英，夏勇，周水生，数学规划基础. 北京航空航天大学出版社，2012.10.
- 参考书：推荐但不限于(1) 陈宝林，最优化理论与算法(第二版). 清华大学出版社，2005.10. (2) 黄红选，韩继业，数学规划. 清华大学出版社，2006. (3) Bertsekas D P. 非线性规划(第2版). 宋士吉等译. 清华大学出版社：北京，2013.12.

重要提示

- 请每周四**上课前**交上周布置的作业。不接受任何理由的迟到作业！允许最多缺交2次作业。
- 请每节课课前**预习上课内容**20-30**分钟**，确定自己学习中可能遇到的难点。

教学日历

次(周)	内容(预习章节)	作业
1(1)	课程简介、LP基本概念(§1.1-1.3,§2.1.1-2.1.2)	1.2, 1.3
2(1)	LP 基本定理和既约费用系数(§2.1.3-2.1.4, §2.2.1)	2.1(c), 2.2, 2.3, 2.5
3(2)	单纯形法(§2.2.2-§2.2.4)	2.8, 2.9, 2.10(a), 2.20，2.21
4(3)	**国庆节放假**	**完成大作业1：线性规划数值练习**
5(3)	**国庆节放假**	
6(4)	单纯形法的启动及效率、修正单纯形法(§2.2.5-§2.2.6)	2.11, 2.12, 2.16(c), 2.19
7(5)	LP 的对偶(§2.3)	2.24, 2.25, 2.27
8(5)	网络流问题及网络单纯形法(§3.1)	2.32, 2.34, 2.36
9(6)	网络流问题的应用(§3.2)	3.1, 3.4
10(7)	线性整数规划(§3.4-§3.4)	3.7, 3.8, 3.9
11(7)	数学基础、最优性条件、凸函数(§1.4, §4.1-§4.2)	1.4, 1.6, 1.7, 4.2, 4.3, 4.6
12(8)	无约束优化算法综述、线搜索算法(§4.3-§4.4)	4.7, 4.8, 4.11的第一部分
13(9)	无约束优化：最速下降法、牛顿法(§5.1)	5.3, 5.4, 5.6, 5.11
14(9)	无约束优化：共轭梯度法(§5.2)	5.9, 5.19, 5.21
15(10)	无约束优化：拟牛顿法(§5.3)	5.22, 5.23(a)
16(11)	无约束优化：最小二乘(§5.4) & 信赖域法(§6.1-§6.2)	5.27, 6.1, 6.2
17(11)	**期中考试**2017,11.30(**周四上午**10:00-12:00)	**发布大作业**2**：非线性规划数值练习**
18(12)	约束优化：一阶条件(§7.1-§7.2)、凸规划(§7.5)	7.20, 7.3, 7.4
19(13)	约束优化：一阶条件续(§7.3)	7.6, 7.7(替换课本上的), 8.20(新补充的)
20(13)	约束优化：二阶条件(§7.4)	7.9, 7.10, 7.11
21(14)	约束优化：Lagrange对偶(§7.6-§7.7)	7.13, 7.15
22(15)	约束优化：二次规划(§8.1-§8.3)	8.1(替换课本上的), 8.2, 8.3, 8.12
23(15)	约束优化：罚函数法(§9.1-§9.2)	8.18(新补充的), 9.1, 9.8
24(16)	约束优化：罚函数法(§9.3)	9.4，9.7
25(17)	约束优化：逐步二次规划法(§9.4)	9.10, 9.11
26(17)	**期末考试(暂定)** 2018,1.11(**周四上午**10:00-12:00)	

“最优化理论与方法”替换/补充习题

说明：用这里的7.7和8.1替换课本上的对应习题；这里的8.18和8.20是新补充的.

7.7 考虑问题

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}{\text{minimize}} & -x_1 \\ \text{subject to} & x_1^2+x_2^2 \le 1, \\ & (x_1-1)^3 - x_2 \le 0. \end{array}$$

(a) 说明线性无关约束规范(LICQ)条件在点 $\boldsymbol{x}^*=(1,0)^T$ 处成立.

(b) 说明点 $\boldsymbol{x}^*=(1,0)^T$ 是一个 KKT 点. 该点是全局极小点吗？请给出理由.

(c) 考虑盒子(界)约束优化问题

$$\begin{array}{ll} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & l_i \le x_i \le u_i, i=1,2,\cdots,n, \end{array}$$

其中 $l_i, u_i (i=1,2,\cdots,n)$ 是给定的常数，$f(\boldsymbol{x})$ 是连续可微函数. 请问该问题一定有KKT点吗？为什么？如果有KKT点，它一定是问题的最优解吗？请给出理由.

8.1 考虑等式二次规划问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & x_1+2x_2+x_3=4. \end{array}$$

消去变量x_1 后，得到目标函数

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是一个对称的矩阵, $\boldsymbol{v}$ 是一个固定的向量. 由此给出二次规划问题的解 $\boldsymbol{x}^*$ ，并给出等式约束的拉格朗日乘子 λ^* . 请问 $\boldsymbol{x}^*$ 是否是

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & q(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & x_1+2x_2+x_3 \ge 4, \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{array}$$

的解.

8.18 以 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}$ 为初始点，用积极集法求解二次规划问题

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \\ \text{subject to} & x_1+x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0. \end{array}$$

为简单起见，求解每一等式约束子问题时，不用对变量进行平移(从而利用图解法易于求解).

8.20 说明在约束条件

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 2x_2 - \quad x_3 \ge 4 \\ -x_1 & + & x_2 - \quad x_3 \le 2 \end{array}$$

下求到原点(在 $\mathbb{R}^3$ 中)的欧几里得距离最短的点的问题可表述成一个二次规划问题. 通过消去变量 x_1 与 x_2 计算两个约束都是积极的等式问题的解. 这个解是否为最短距离二次规划问题的解.