$$
\begin{aligned}
&min \quad x^Tx \\
&s.t. Ax = b
\end{aligned}
\tag{1}
$$

求该最小二乘解的对偶问题

假设$A \in R^{m\times n}$, 可知该问题有m个等式约束，可以得到其lagrange函数为 $L(x,v) = x^Tx + v^T(Ax-b)$ 且$dom(f) = R^n \times R^m$

则对偶函数即是：$g(v) = \inf_x L(x,v)$ 此外，易知$L(x,v)$ 是x的二次凸函数，则对函数求导得到最小值即是所求解

对$L(x,v)$ 求导得：$\nabla_x L(x,v) = 2x + A^Tv = 0$ 即$x = -\frac{1}{2}A^Tv$ 代入到$g(v)$中得到，即是所求

$$
g(v) = -\frac{1}{4}v^TA^TAv - b^Tv \tag{2}
$$

下面是粘贴第三次作业中的鞍点问题我的答案，与之前提交的一样：

鞍点问题

1. 二阶条件

   其$Hessian$ 矩阵可看做x,z的分块矩阵，于是根据定理2.11 二阶条件可知条件为

   $\nabla_{xx}f \geq 0 \quad and \quad \nabla_{zz} \leq 0$

2. 由1可知$\nabla_{xx}f \geq 0 \quad and \quad \nabla_{zz} \leq 0$，并且由$\nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0$

   对于不等式右侧，将Z看做常量后有$\nabla_x f(x,\bar{z}) \geq \nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0$

   对于不等式左侧，将x看做常量后有$\nabla_z f(\bar{x},z) \leq \nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0$

   则根据函数的增减性可直接得出不等式关系

3. 由于在点$(\bar{x},\bar{z})$满足鞍点性质，则根据凸凹函数的性质，可知在点$(\bar{x},\bar{z})$的邻域内，有 $\nabla_x f(x,\bar{z}) \geq \nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0 \Rightarrow \ f(x,\bar{z}) \geq f(\bar{x},\bar{z})$

   同理可得到$\nabla_z f(\bar{x},z) \leq \nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0 \Rightarrow \ f(\bar{x},z) \leq f(\bar{x},\bar{z})$

   于是$\nabla f(\bar{x},\bar{z}) = 0$得证