

# 北京航空航天大学本科生课程试卷

2013—2014 学年 第 1 学期

## “最优化理论与算法”期中考试卷

2013 年 10 月 22 日

姓名:

学号:

说明:

- 闭卷考试.
- 共有 5 个大题, 满分 100 分; 考试时间 2 小时.
- 您的解答务必详细、清晰.
- Good Luck!

题目	1	2	3	4	5	总分
分数						

1. (30分) 判断下列每个命题的正误, 并说明理由. 理由可以是1-3行的解释或者反例; 理由不正确的答案不得分.

(a) 多面集上极小化 $\sum_{i=1}^n |x_i|$ 能表述为线性规划问题.

(b) 线性规划标准形的可行集总是有界的.

(c) 线性规划标准形问题一定有基本可行解是最优解.

- (d) 如果某个基本解的所有既约费用系数非负，则它是最优解.
- (e) 一个基本可行解的所有非基变量的既约费用系数都是正数，则问题有唯一最优解.
- (f) 用单纯形法求解问题时，最后能得出原始问题是不可行的或者有最优解的结论.
- (g) 如果对偶问题是不可行的，则原始问题也是不可行的.
- (h) 如果  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  分别是线性规划标准形和它的对偶问题的最优解，则由互补性我们有原始变量和对偶变量的乘积总是零，即  $x_i \lambda_i = 0$  对所有  $i$  成立.
- (i) 两阶段法中，第 I 阶段的辅助问题的对偶问题有可能无界.
- (j) 在最小费用网络流问题中，弧上的费用是整数，但是需求和供给量是分数，则树解对应的单纯形乘子都是整数.
- (k) 求解线性指派问题的线性规划松弛问题可以得到原始问题的最优解.
- (l) 整数线性规划(极小化)松弛问题的最优值一定不大于原始问题的最优值.
- (m) 将整数线性规划(极小化)松弛问题的最优解四舍五入可以得到原问题的可行解.
- (n) 整数线性规划(极小化)的松弛问题没有可行解，则原始问题也没有可行解.
- (o) 求解整数线性规划的分支定界法中，宽度优先搜索(广探法)要优于深度优先搜索(深探法).

2. (10分) 考虑问题

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ & \text{subject to} && x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ & && x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

将问题表示成标准形  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  后记  $\mathbf{A}$  的第  $i$  列为  $\mathbf{a}_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

- (a) 画出所给问题的可行集(三维空间中).
- (b) 点  $(0, 0, 1, 0, 0)^T$  是基本可行解吗?
- (c) 点  $(0, 0, 1, 0, 0)^T$  是退化基本可行解吗? 如果是的话, 找出可能的与其对应的基.

3. (14分) 对线性规划

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && -x_1 && - && 2x_2 \\ & \text{subject to} && -2x_1 &+& 2x_2 &\leq 3 \\ & && 2x_1 &+& 2x_2 &\leq 9, \end{aligned}$$

分(i)无整数限制, (ii)  $x_1$  为整数, (iii)  $x_1, x_2$  均为整数三种情况, 用图解法求解相应的问题. 并给出用分枝定界法求解(iii)的过程, 画出枚举树.

4. (30分) 某公司利用资源 A, B 和 C 生产四种产品 1, 2, 3 和 4. 公司通过求解线性规划问题

$$\begin{aligned} z^* = \text{maximize} \quad & 16x_1 + 14x_2 + 15x_3 + 50x_4 \\ \text{subject to} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 16x_4 \leq 800 \quad (\text{A}) \\ & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1000 \quad (\text{B}) \\ & 2x_1 + 1.2x_2 + 1x_3 + 4x_4 \leq 680 \quad (\text{C}) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

确定产品组合. 将该问题化成标准形后使用单纯形法求解, 得到最优表格

0	1	5.5	19	1.5	-1	0	200
1	0	-3	-11	-1	1	0	200
0	0	0.4	3.2	0.2	-0.8	1	40
0	0	14	40	5	2	0	6000

- (a) (2') 最优解和最优值各是多少?
- (b) (2') 最优基  $B$  和其逆  $B^{-1}$  各是多少?
- (c) (2') 用一句话来描述最优策略.
- (d) (2') 最优解唯一吗? 为什么?
- (e) (4') 写出对偶问题. 对偶问题的最优解是什么?
- (f) (4') 产品 3 的利润改变多少才能使最优解中产品 3 的产量非零(即生产产品 3)?
- (g) (3') 产品 2 的最小利润是多少时仍能保证公司继续生产它?
- (h) (4') 给出使得当前基保持最优的资源 B 的范围.
- (i) (3') 假设资源 B 的数量由 1000 变成  $1000 + \theta$ . 请说明最优利润如何随着  $\theta$  改变.
- (j) (4') 一种新产品需要 4 单位的资源 A, 4 单位的资源 B 和 1 单位的资源 C. 为了生产该产品, 它的利润应该是多少?

5. (16分) 图 1 给出了一个网络, 其中节点 1 和 2 为供给节点, 节点 4 和 5 为需求节点, 节点 3 为中转节点. 节点旁的数字表示该节点的供给量(负值表示需求, 未标出数字的默认为 0), 弧上的数字表示运输单位商品的费用, 这里四个正数  $a, b, c, d$  是未知的. 请完成以下问题:
- (3分) 写出具体的最小费用流问题.
  - (3分) 写出(a)中问题的对偶问题.
  - (3分) 考虑由弧  $(1, 4), (2, 3), (3, 4)$  和  $(3, 5)$  构成的生成树(见图 2), 设 3 为根节点. 请给出这棵生成树对应的树解.  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 这个树解是可行的?
  - (4分) 计算上述树解的单纯形乘子和既约费用系数.  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 所给树解是最优的?
  - (3分)  $a, b, c, d$  满足哪些条件时, 这个问题有多个解(包括这里给出的)?

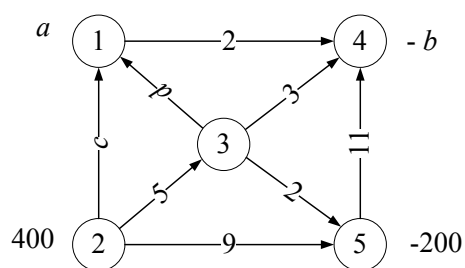


图1 网络与数据.

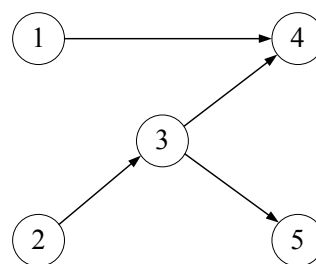


图2 一棵生成树.