矩阵的2范数等于最大奇异值的证明

设矩阵$A \in R^{m\times n}$, 且矩阵A的二范数的定义如下

$||A||_2 = \max_{x\in R^n, ||x||_2=1} ||Ax||_2 = \max_{x\in R^n, ||x||_2=1} \sqrt{(Ax)^T Ax}$

对于半正定矩阵$(A^T A)$，其对应特征向量组合可以构成R^n的一组标准正交基，则必有$x = \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i$，其中$a_i$为和常量，$\alpha_i$为矩阵$(A^T A)$的一个特征向量，并假设对应的特征值为$\lambda_i$

则有

$A^T Ax = A^T A \sum_{i=1}^n a_i\alpha_i = \sum_{i=1}^n a_i A^T A\alpha_i = \sum_{i=1}^n a_i A^T A\alpha_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\alpha_i$

于是

$\sqrt{(Ax)^T Ax} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2} \le \sqrt{\lambda_{max}}$

而矩阵二范数的数值为$\sqrt{(Ax)^T Ax}$的最大值，正是其最大奇异值

证明

S_1, S_2是$R^{m\times n}$的凸集，则其部分和
$S = \{(x, y_1 + y_2) | x \in R^m, y_1, y_2 \in R^n, (x, y_1) \in S_1\ (x, y_2) \in S_2\}$ 也是凸的

对S中任意两点$(x_1, y_{11} + y_{12}), (x_2, y_{21} + y_{22})$，

其中有$(x_1, y_{11})(x_2, y)21) \in S_1$,$(x_1, y_{12})(x_2, y_{22}) \in S_2$

根据凸集的定义， 集合内任意两点间的线段仍在集合中。

对于$\theta \in [0, 1]$

θ
$(x_1, y_{11} + y_{12}) + (1-\theta)(x_2, y_{21} + y_{22}) = (x_1, y_{11}) + (1-\theta)(x_2, y_{21}) = (x_1, y_{12}) + (1-\theta)(x_2, y_{22})$

已知有S_1, S_2 是凸集，则点
$\Big(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, y_{11} + y_{21}\Big) \in S_1, \Big(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, y_{12} + y_{22}\Big) \in S_2$

于是点$(\theta(x_1, y_{11} + y_{12}) + (1-\theta)(x_2, y_{21} + y_{22})) \in S$ 得证