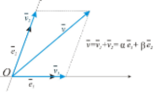
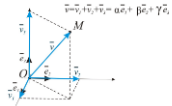
1. Векторы. Определение вектора. Равенство векторов. Коллинеарность и компланарность векторов.
Определение: Вектором (фиксированным вектором) называется направленный отрезок прямой, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и направление.
(A — начало, B — конец, то обознач. →AB или →a.)
Определение:
Векторы →a и →b наз. равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.
1)Множество всех векторов разбивается на непересекающиеся классы.
Определение: Класс равных векторов называется свободным вектором.
1) Два свободных вектора называются коллинеарными, если коллинеарными являются представляющие их векторы.
Определение: Векторы →a и →b называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Обозначение: →a ||→b.
1) Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены и противоположно направлены.
2) Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору
Определение: Векторы называются компланарными, если, будучи отложенными от одной точки, они лежат в одной плоскости.

2. Линейные операции над векторами. Свойства операций. Теорема о коллинеарных векторах.
Линейные операции над векторами:
Сложение векторов:
Свойства операций:
1) Ассоциативность. Для любых векторов →a, →b и →c выполнено равенство:
(→a + →b) + →c = →a + (→b + →c)
2) Коммутативность. Для любых векторов →a и →b выполнено:
→a + →b = →b + →a
3) Нулевой вектор. Для любого вектора →a выполнено:
→a + →0 = →a
4) Противоположный вектор. Для любого вектора →a существует вектор →b такой, что →a + →b = →0. Вектор →b называется противоположным к →a и обозначается − →a: **→a + →b = →0, где →b = →a**
Умножение вектора на число: 1) **λ(→a) || →a**
2) **|λ(→a) | = |λ||→a|**
3) Ассоциативность. Для любого вектора →a и чисел α, β выполнено: **(αβ)(→a) = α(β(→a))**
4) Дистрибутивность: 2.1) Для любого вектора →a и чисел α, β выполнено: **(α + β) (→a) = α(→a) + β(→a)**
2.2) Для любых двух векторов →a и →b и числа α выполнено: **α (→a + →b) = α(→a) + α(→b)**
Теорема: Векторы →a и →b являются коллинеарными тогда и только тогда, когда один из векторов можно выразить через другой умножением на число.

3. Аффинная система координат на плоскости и в пространстве. Координаты точки(!!!).
На плоскости: Обозначения: O — точка плоскости, →e1, →e2 — пара неколлинеарных векторов.


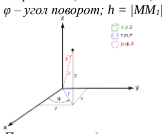
(***) – Проекция вдоль вектора.
В пространстве: Обозначения: O – цент системы координат; {→e1; →e2; →e3} – некомпланарные векторы.
(Аффинная система координат (в пространстве) — это три не лежащих в одной плоскости координатные оси с общим началом координат.)
Определение: Если на плоскости фиксировать систему координат, то каждой точке A плоскости отвечают два числа – ее x-ая и y-ая координаты. *Запись: A = (x, y) или A (x, y).*

4. Координаты вектора. Прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.
Определение: пусть в аффинной системе координат {O, →e1, →e2} вектор →v представим в виде →v = α(→e1) + β(→e2). Тогда пара чисел {α, β} называется **координатами вектора** →v в данной системе координат. *Замечание: Определение корректно. Пара чисел {α, β} определена однозначно.*
Определение. Пусть в прямоугольной системе координат {O, →e1, →e2, →e3} вектор →v представим в виде →v = α(→e1) + β(→e2) + γ(→e3). Тогда набор чисел {α, β, γ} называется **координатами вектора** →v в данной системе координат.
Определение: Частный случай Аффинной системы координат. Декартова система координат на плоскости – это упорядоченная пара перпендикулярных прямых с выбранным на них одинаковым масштабом.
Определение:
Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют три взаимно перпендикулярные оси с общим началом.


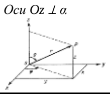
5. Полярная система координат на плоскости. Связь с прямоугольной.
Обозначение: O – полюс; полярная ось с выбранном масштабным отрезком; направление поворота. r = |→OM|; φ – кратчайший угол поворот от положительного направления полярной оси до →OM в выбранном направлении.


$$\begin{cases} x = r*\cos\varphi \\ y = r*\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\varphi = x/r \\ \sin\varphi = y/r \end{cases}$$

Функции перехода: M (r; φ) – в полярной системе координат M (x; y) – в ассоциированной прямоугольной системе координат $r^2 = x^2 + y$

6. Цилиндрическая, сферическая системы координат в пространстве. Связь с прямоугольной.
Цилиндрическая система координат в пространстве: Обозначения: 1) плоскость с выбранной полярной системой координат 2) ось Oz ⊥ α 3) M_1 – проекция M на α; r = |→OM|; φ – угол поворот; h = $|MM_1|$


$$\begin{cases} x = r*\cos\varphi \\ y = r*\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$

Правила перехода:
Сферическая система координат: Обозначения: 1) Плоскость α с заданной полярной системой координат 2) Оси Oz ⊥ α


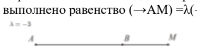
Формулы
$$\begin{cases} x = r*\cos\varphi*\sin\Theta \\ y = r*\cos\varphi*\sin\Theta \\ z = r*\cos\Theta \end{cases}$$

7. Линейная комбинация векторов. Линейно зависимые, независимые векторы.
Определение линейной комбинации векторов: Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется выражение $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые числа.
Определение линейно независимых векторов: Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ наз. линейно независимыми, если $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{O}$, тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.
Опр. линейно зависимых век-ов: Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ наз. линейно зависимыми, если сущ. набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ чисел не все равные нулю, при котором $\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n = \bar{O}$.

8. Св-ва линейно зависимых и независимых систем векторов.
Свойства линейно независимости:
1.Если система векторов содержит нулевой вектор, то эта система является линейно зависимой.
2.Если система является линейно зависимой, то, по крайней мере, один вектор можно выразить через линейную комбинацию остальных векторов.
3.Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то данная система является линейно зависимой.
4.Любая подсистема линейно независимой системы векторов является линейно независимой.

9. Геометрические свойства линейно зависимых систем векторов, состоящих из одного, двух, трех векторов. Линейная зависимость четырех векторов.
Геометрический смысл линейно зависимой системы векторов:
1.Система векторов, состоящая из 1 вектора, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда этот вектор является нулевым.
2.Система векторов, состоящая из 2 векторов, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы являются коллинеарными.
3.Система векторов, состоящая из 3 векторов, является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы являются компланарными.
4.В 3-хмерном пространстве любая система векторов, состоящая из 4 или большего числа векторов, является линейно зависимой.

10. Базис. Базисы на прямой, плоскости, в пространстве. Координаты вектора в базисе. Сложение векторов и умножение вектора на число в координатах.
Опр.: Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.
Опр.: Базисом на плоскости называется упорядоченная пара линейно независимых векторов плоскости.
Опр.: Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка линейно независимых векторов пространства.
Опр.: Координатами вектора ā в данном базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ наз. коэффициенты $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ в линейном разложении по базису $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$.
Сложение векторов: Пусть в прямоугольной (аффинной) системе координат векторы →a и →b заданы своими координатами ā = {x1, y1, z1}, →b = {x2, y2, z2}. Тогда ā +→b = {x1 + x2, y1 + y2, z1 + z2}.
Умножение на число вектора: пусть в прямоугольной (аффинной) системе координат вектор ā задан своими координатами $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$. Тогда для любого числа α $\alpha*\bar{a} = \{\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1\}$.

11. Деление отрезка в заданном отношении.
Определение: Точка M делит отрезок AB в отношении λ, если выполнено равенство (→AM) =λ(→MB).


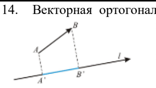
Теорема: Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ — две точки. Тогда для любого числа $\lambda \neq -1$ существует точка M(x, y, z), которая делит отрезок AB в отношении λ. Более того, справедливы равенства:
$x = (x_1 + \lambda x_2)/(1 + \lambda)$,
$y = (y_1 + \lambda y_2)/(1 + \lambda)$,
$z = (z_1 + \lambda z_2)/(1 + \lambda)$.

12. Определение скалярного произведения векторов.
Определение:
Скалярным произведением векторов ā и đ называется число, равное $|\bar{a}||\vec{d}|\cos(\wedge\bar{a}\vec{d})$. *Обз: $(\bar{a}, \bar{d})$*

13. Длина вектора. Расстояние между двумя точками. Угол между векторами.
Определение: Длиной или модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. *Вектор, длина которого равна 0, называется нулевым вектором и обозначается –* $\vec{0}$. *Нулевой вектор направления не имеет.*
Опр.: Расстояние между точками на (x1, y1) и (x2, y2) задается формулой $d = \sqrt{(x1 - y1)^2 + (x2 - y2)^2}$
Опр.: Углом между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. кратчайший угол поворота от $\vec{a}$ к $\vec{b}$, если a⃗ и $\vec{b}$ отложены от одной точки.


З: Углом между двумя век-ами наз. угол между прямыми, сод-ими эти век-ы. Важно соблюдать поворот от 1-ого век-а ко 2-ому. Угол – от 0^0 до 180^0

14. Векторная ортогональная проекция и скалярная проекция вектора на ось. Свойства скалярной проекции.

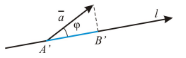


Определение: Скалярной проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось l наз. число $Пр_L(\overline{AB})$, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, взятой со знаком "+", если направление вектора $\overline{A'B'}$ и L совпадают, и со знаком "–", если нет. Скалярной проекцией вектора называется длина векторной проекции.

Определение: Векторной проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось L называется вектор $\overline{A'B'}$.

Св-а скалярной проекции:

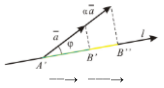
1. $Пpl(\vec{a}) = (\vec{a}, \vec{e})$, где $\vec{e}$ — единичный направляющий вектор оси l. Заметим, что $Пpl(\vec{a}) = |\vec{a}| \cos φ$



$(\vec{a}, \vec{e}) = |\vec{e}||\vec{a}| \cos φ = |\vec{a}| \cos φ$.

2. $Пpl(α\vec{a}) = αПpl(\vec{a})$ Рассмотрим случай, когда $α > 0$. Из подобия треугольников следует:

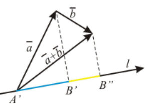
$AB''/ AB' = |α\vec{a}|/ |\vec{a}| = |α|$



Так как $A'B' \upuparrows A'B''$, то $Пpl(α\vec{a}) = αПpl(\vec{a})$.

Случай, когда $α \le 0$, доказывается аналогично.

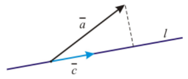
3. $Пpl(\vec{a} +\vec{b}) =Пpl(\vec{a})+Пpl(\vec{b})$



Заметим, что $\boldsymbol{A'B''} = \boldsymbol{A'B'} + \boldsymbol{B'B''}$. Так как $\boldsymbol{A'B'} \parallel \boldsymbol{B'B''}$, то $|A'B''| = |A'B'| + |B'B''|$, если $\boldsymbol{A'B'} \upuparrows \boldsymbol{B'B''}$, и $|A'B''| = |A'B'| - |B'B''|$, если нет (считаем, что $|A'B'| \ge |B'B''|$).

Т.о. $Пpl(\vec{a} +\vec{b}) =Пpl(\vec{a})+Пpl(\vec{b})$.

4)$Пр_{\bar{c}}(\bar{a})=|\bar{a}|\cos φ=\frac{|\bar{c}||\bar{a}|}{|\bar{c}|}\cos φ=\frac{(\bar{a},\bar{c})}{|\bar{c}|}$



15. Доказательство свойств скалярного произведения. Теорема о записи скалярного произведения в координатах.

1. Симметричность $\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

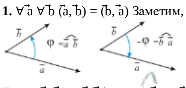
2. Линейность 1)$\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ \forall \vec{c}\ (\vec{a} +\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ 2)$\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ \forall α\ (α\vec{a}, \vec{b}) = α(\vec{a}, \vec{b})$

3. Положительная определенность

1)$\forall \vec{a} \ne \vec{0}\quad (\vec{a}, \vec{a}) > 0$

2)$\forall \vec{a}\ (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

1. $\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ Заметим, что $\widehat{a\,b} = -\widehat{b\,a}$



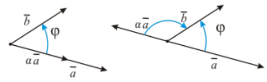
Тогда $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{a\,b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(-\widehat{b\,a}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{b\,a}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

2.1) $\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ \forall \vec{c}\quad (\vec{a} +\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

$(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}) = |\vec{c}|Пр_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|(Пр_{\vec{c}}(\vec{a})+Пр_{\vec{c}}(\vec{b})) = |\vec{c}|Пр_{\vec{c}}(\vec{a}) + |\vec{c}|Пр_{\vec{c}}(\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.

2.2)$\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ \forall α\ (α\vec{a}, \vec{b}) = α(\vec{a}, \vec{b})$

Если $α = 0$, то свойство, очевидно, выполняется. Заметим, что $\widehat{α\vec{a}b} = \widehat{a\,b}$, если $α > 0$, и $\widehat{α\vec{a}b} = \widehat{a\,b} - π$, если $α < 0$



2.2)$\forall \vec{a}\ \forall \vec{b}\ \forall α\quad (α\vec{a}, \vec{b}) = α(\vec{a}, \vec{b})$

Тогда, если $α > 0$,

$(α\vec{a}, \vec{b}) = |α\vec{a}||\vec{b}| \cos(α\vec{a} \wedge \vec{b}) =$

$|α||\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) =α(\vec{a}, \vec{b})$.

Если $α < 0$, $(α\vec{a}, \vec{b}) = |α\vec{a}||\vec{b}| \cos(α\vec{a} \wedge \vec{b}) =$

$=|α||\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b} - π) = -|α|(\vec{a}, \vec{b}) = α(\vec{a}, \vec{b})$.

3.1)$\forall\ \vec{a} \ne \vec{0}\quad (\vec{a}, \vec{a}) > 0$

3.2)$\forall\ \vec{a}\quad (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Пусть $\vec{a} \ne \vec{0}$. Тогда,

$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}||\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{a}}) = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2 > 0$.

Если $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, то $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 = 0$. Следовательно $\vec{a} = \vec{0}$.

1. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$
2. $(\vec{a}, α\vec{b}) = α(\vec{a}, \vec{b})$
3. $\forall\vec{a}\ |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$
4. Критерий ортогональности
   $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

↓ 2) $\forall\ \bar{a},\bar{b}\ \forall\ α \in R\ (\bar{a},α\bar{b}) = (α\bar{b},\bar{a}) = α(\bar{b},\bar{a}) = α(\bar{a},\bar{b})$□

3) $\forall\ \bar{a}\quad (\bar{a},\bar{a}) = \bar{a} * \bar{a} * \cos 0 = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})}$□

4) необходимость $\bar{a} \perp \bar{b} \Rightarrow (\bar{a},\bar{b}) = 0$

Если $\bar{a} = \bar{0}$ и/или $\bar{b} = 0$, то $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| * |\bar{b}| * \cos φ = 0$

Если $\bar{a} \ne 0$ и $\bar{b} \ne 0$, то $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \wedge \bar{b} = П/2$

$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}| * |\bar{b}| * \cos П/2 = 0$

Достаточность $(\bar{a},\bar{b}) = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

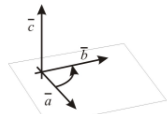
$|\bar{a}| * |\bar{b}| * \cos φ = 0$

$|\bar{a}| = 0$ или $|\bar{b}| = 0$ или $\cos φ = 0$ ($\bar{a} = 0, \bar{b} = 0, φ = \pm П/2$) $\Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ □

16. Правая тройка векторов: определение и примеры.

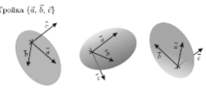
Определение.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если с конца 3-го вектора поворот от 1-го вектора ко 2-му осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки).



$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правая тройка

Тройка $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$



1) Левая. 2) Правая. 3) Левая.

Пусть $\vec{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}$.

Тройка $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — правая.

17. Определение и свойства векторного произведения векторов. Теорема о записи векторного произведения в координатах.

Определение.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что

1. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$
2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})|$
3. $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — правая тройка.

Обозначение.

$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

Замечание 1.

Если $\vec{a}\|\vec{b}$, то по определению считаем, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

Замечание 2.

Векторное произведение любых двух векторов существует и определено однозначно.

Пусть $\vec{e}_1 = \{1, 0, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0, 0, 1\}$.
Тогда $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$.

- $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$ и $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$
- $|\vec{e}_3| = |\vec{e}_1||\vec{e}_2| \sin \frac{\pi}{2} = 1$
- $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ — правая тройка

1. Кососимметричность
   $\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\quad [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
2. Линейность
   1)$\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\ \forall\ \vec{c}\quad [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
   2)$\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\ \forall\ α\quad [α\vec{a}, \vec{b}] = α[\vec{a}, \vec{b}]$
3. Критерий коллинеарности
   $\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\quad [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\|\vec{b}$
4. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$.

Теорема о записи векторного произведения в координатах.

Пусть в прямоугольной системе координат векторы заданы своими координатами $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

18. Определение и свойства смешанного произведения векторов. Теорема о записи смешанного произведения векторов через координаты сомножителей.

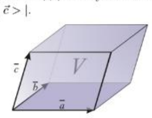
Определение.

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

Обозначение.

$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$ — смешанное произведение.

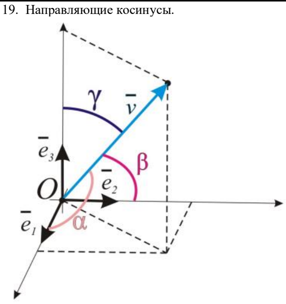
1. Кососимметричность
   При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменит знак на противоположный.
2. Линейность
   1)$\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\ \forall\ \vec{c}\ \forall\ \vec{d}$
   $< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} >=< \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} > + < \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} >$
   2)$\forall\ α\ \forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\ \forall\ \vec{c}\quad < α\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= α < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >$
3. Критерий компланарности
   $\forall\ \vec{a}\ \forall\ \vec{b}\ \forall\ \vec{c}\quad < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ — компланарны.
4. Объем параллелепипеда, натянутого на векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, равен $| < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$.



Теорема о записи смешанного произведения в координатах. Пусть в прямоугольной системе координат векторы заданы своими координатами $\vec{a}$ = {x1, y1, z1}, $\vec{b}$ = {x2, y2, z2} и $\vec{c}$ = {x3, y3, z3}. Тогда

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

19. Направляющие косинусы.



Обозначим: α — угол между осью O $\vec{e}1$ и вектором $\bar{v}$, β — угол между осью O $\vec{e}2$ и вектором $\bar{v}$, γ — угол между осью O $\vec{e}3$ и вектором $\bar{v}$.

Определение: Набор чисел {cos α, cos β, cos γ} называется направляющими косинусами вектора $\bar{v}$.

Определение: пусть cos α, cos β, cos γ — направляющие косинусы вектора $\bar{v}$. Тогда $\cos^2 α + \cos^2 β + \cos^2 γ = 1$.

20. Общее понятие об уравнениях. Алгебраические линии и поверхности.

Определение:

Алгебраическая линия – линия, уравнение координат которой F(x,y)=0, является алгебраическим.

Определение:

Алгебраическим уравнением называется уравнение, которое мы получим, приравняв нулю целую рациональную функцию, т.е. функцию, которая получается, если над аргументами и числами производятся только операции сложения и умножения.

Замечание1: Причем – вычитание обозначается как сложение, где один из членов умножен на -1, а деление рассматривается как умножение на число в степени -1.

Замечание2: Если линия определяется в прямоугольной системе координат уравнением n степени, то линия называется алгебраической линией n порядка.

Определение:

Алгебраической поверхностью называется множество всех точек M(x,y,z) геометрического пространства, координаты которых в декартовой прямоугольной системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению F(x,y,z)=0.

Замечание: Степень функции F, называется порядком поверхности